Periodico di Matematica (IV) Vol. VI (4) dicembre 2024, pp. 109-122

Affinità tra figure frattali

Algoritmi combinatori alla scoperta delle coppie drago, farfalla e falena, siamese

Giorgio Pietrocola *

*APAV; giorgio.pietrocola@gmail.com

DOI : 10.53159 /PdM(IV).v6n4.145

Sunto: In quest'articolo attraverso uno studio combinatorio si individuano quattro curve frattali (dette anche merletti), tra cui quella famosa individuata da Koch. Ripetendo su uno stesso segmento alcuni di questi merletti vengono costruite due coppie di figure frattali e evidenziate le loro proprietà. La nomenclatura introdotta evoca il sorprendente mondo dei lepidotteri.

Parole Chiave: Frattale, algoritmo, *curva di Koch, curva del drago, curva dei lepidotteri, drago ternario, farfalla, siamese, falena.*

Abstract: In this article, through a combinatorial study, four fractal curves (also called laces) are identified, including the famous one identified by Koch. By repeating some of these laces on the same segment, two pairs of fractal figures are constructed and their properties are highlighted. The introduced nomenclature evokes the surprising world of lepidoptera

Keywords*:* *Fractal, algorithm. Koch curve, dragon curve, lepidopteran curve, ternary dragon, butterfly, siamese, moth.*

1 - Introduzione

Negli anni Cinquanta l'autore era un bambino che era stato armato dal padre con un grosso retino e una bomboletta di etere per sopprimere, istantaneamente, le farfalle catturate. L'istinto del cacciatore aveva avuto il sopravvento sulle remore etiche, pure istintive, che avrebbero voluto risparmiare la vita di quegli insetti meravigliosi. Le vittime venivano poi preparate con cura da suo padre, fatte seccare con le ali aperte e uno spillo conficcato nel corpo per poterle sistemare in appositi contenitori, protetti con un vetro, per rendere quella bellezza immediatamente visibile e godibile a tutti.

Oggi questa caccia, giustamente, è vietata per proteggere le specie a rischio di estinzione e, più in generale, per salvaguardare la natura e quindi, in ultima analisi, noi stessi dai nostri comportamenti istintivi non più sostenibili.

Chi scrive sospetta di aver sublimato quell'istinto primordiale di cacciatore raccoglitore indirizzandolo verso il mondo virtuale della matematica, dove la ricerca del bello e del raro non implica la distruzione dell'oggetto che la racchiude. In particolare la caccia ai frattali e ai loro algoritmi, a volte sfuggenti, ha evocato emozioni di un'infanzia remota che in qualche modo sono servite da guida, suggerendo anche la nomenclatura proposta.

2 - Combinatoria per quattro merletti

Le quattro curve frattali presentate sono il limite di una crescita, il cui primo stadio è un segmento e negli stadi successivi, ogni segmento dello stadio precedente si trasforma in due segmenti uguali più piccoli che insieme formerebbero un triangolo isoscele con angolo ottuso di 120 gradi.

Come è facile trovare, la misura dei suoi due lati uguali si ottiene dividendo la misura del terzo lato, il maggiore, per la radice di tre.

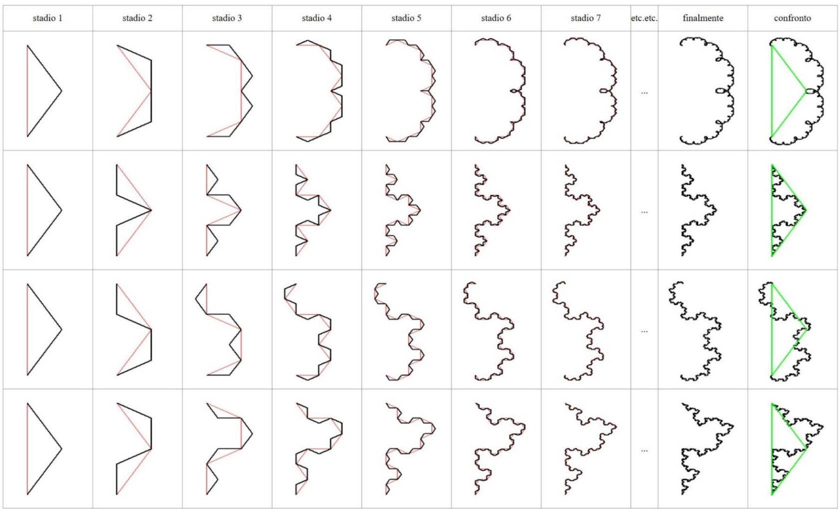


Figura 1. Le trasformazioni che hanno per limite i 4 merletti. In rosso lo stadio precedente. Nell'ultima colonna il confronto con lo stadio 1, in verde, per evidenziare la natura di replicanti del secondo ordine dei quattro che, infatti, divisi a metà, riproducono in scala ridotta l'intero merletto.

I segmenti subiscono sempre la stessa trasformazione raddoppiando a ogni livello ma a volte a destra, a volte a sinistra. I casi mostrati in Figura 1 possono sintetizzarsi nel modo seguente:

D,DD,DDDD,DDDDDDDD,... e caso duale: CC, merletto delle pecore

D,SS,DDDD,SSSSSSSS,... e caso duale.: CA, merletto di Koch

D,DS,DSDS,DSDSDSDS,... e caso duale: AC, merletto dei draghi

D,SD,DSDS,SDSDSDSD,... e caso duale: AA, merletto dei lepidotteri

Dove la virgola indica il passaggio da uno stadio della costruzione all'altro e le lettere, iniziali di destra e sinistra, indicano la parte in cui avviene la sostituzione, partendo dal basso. Le lettere A per alternato e C per continuo si combinano con ripetizione nei quattro modi possibili. Il carattere locale è seguito da quello globale che si riferisce agli stadi dal secondo in poi. Per esempio CA, relativo al merletto di Koch, evidenzia una continuità locale, cioè all'interno di ogni stadio di sviluppo, e un alternanza globale cioè nel passaggio tra uno stadio e il successivo. I quattro casi potrebbero diventare otto iniziando con S invece che con D e lasciando invariato il resto. Poi le otto stringhe infinite potrebbero raddoppiare ancora considerando anche i duali di ognuna di esse cioè la stringa ottenuta scambiando destra con sinistra cioè, formalmente, S con D e viceversa. Potete trovare i sedici casi, con curve e programmi relativi all'indirizzo (url) dato nell'ultimo paragrafo.

3 - Figure frattali

Considerando i merletti come segmenti frattali, chiameremo poligoni frattali quei poligoni i cui lati sono sostituiti da segmenti frattali. Il caso più noto è quello del triangolo equilatero che sostituito in ogni lato dalla curva di Koch può formare tanto il fiocco di neve quanto il suo antifiocco come mostrato in Figura 2.

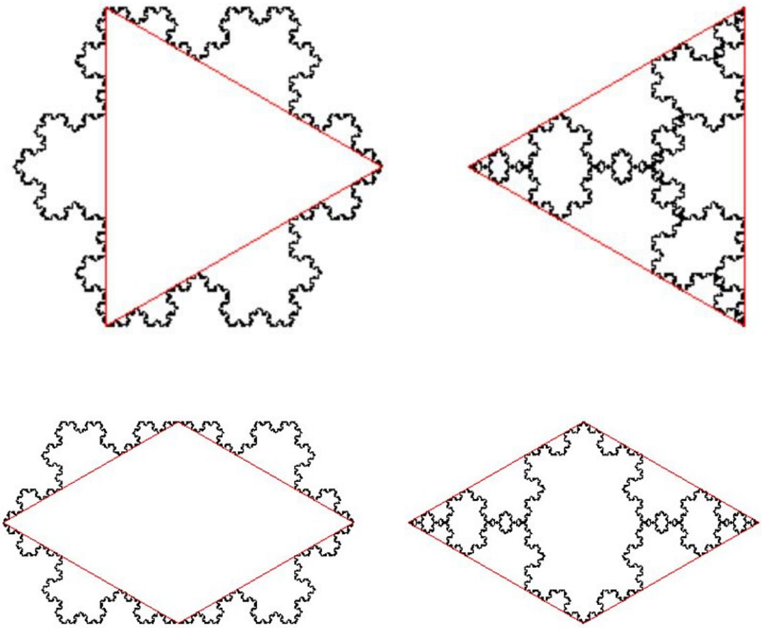


Figura 2 Poligoni frattali: in nero, sopra il fiocco e l'antifiocco, sotto il siamese e l'antisiamese (o fila di siamesi).

Osservando la Figura 1 si scopre che i merletti individuati, oltre che segmenti fr copie simili ridotte nelle dimensioni. Partendo dal basso, l'orientamento è rispettivamente IE, EI, II, EE il che significa, per esempio, che il merletto dei lepidotteri, oltre al lato maggiore merlettato verso l'interno, sempre partendo dal basso, ha il primo lato minore verso l'interno (I) e il secondo verso l'esterno (E).

Alla ricerca di interessanti figure frattali, ho iniziato con il considerare il doppio segmento frattale cioè la sostituzione di un segmento con due merletti dello stesso tipo che insistono da ambo le parti dello stesso segmento. Non tutte le figure emerse in questo modo mi sono parse ugualmente interessanti. Ho così individuato le quattro figure frattali mostrate in Figura 3.

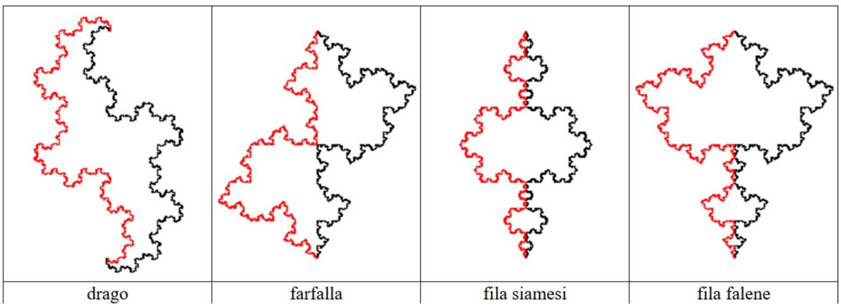


Figura 3. Le quattro figure frattali scelte: la coppia drago farfalla e la coppia siamesi falene.

Le figure che hanno attratto la mia attenzione sono risultate ricche di proprietà e hanno evidenziato due formidabili coppie!

Lascio le figure scartate, come la pecora e il drago arruffato, a futuri studi più approfonditi che non escludo possano far emergere virtù nascoste che mi sono sfuggite.

4 - Il drago e la farfalla

La figura che ho chiamato drago è conosciuta come Terdragon (Riddle-Scott 2022) ossia drago ternario per la proprietà che ha di scomporsi in tre parti identiche, copie in scala della figura originale. La sua descrizione risale a uno stagionato articolo di matematica ricreativa (Knut-Chandler 1970). Molto meno nota appare invece la farfalla di cui poche tracce sono riuscito a trovare (Pietrocola 2009).

Cosa possono avere in comune due figure a prima vista così diverse? Molto anche se ci si ferma solo all'aspetto superficiale, infatti la prima sorpresa è che, se generati da segmenti uguali, il drago e la farfalla hanno anche le loro superfici di uguale misura. Procediamo dunque analizzando i vari punti condivisi.

4.1 – Analogie algoritmiche

Il drago ternario e la farfalla nell'algoritmo già presentato sono due varianti, una continua e l'altra alternata, della stessa trasformazione. Localmente entrambi alternano destra e sinistra, ma la farfalla, nelle varie fasi successive, alterna anche l'inizio. Esiste anche un altro algoritmo, mostrato in Figura 4, che permette di arrivare direttamente all'area. L'algoritmo consiste nel sostituire iterativamente un segmento con una spezzata di tre segmenti uguali in modo che insieme formino le due metà di un triangolo equilatero. Ciò può essere fatto in due modi simmetrici che rappresenteremo per analogia con le lettere Z e S, le due figure frattali possono quindi essere descritte così:

Z,ZZZ,ZZZZZZZZZ,Z^{27}..(drago)

Z,SSS,ZZZZZZZZZ,S^{27}…(farfalla)

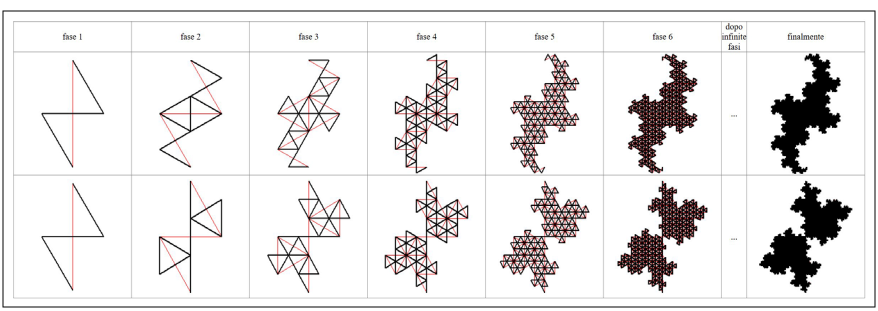


Figura 4. Confronto tra i primi livelli della generazione dell'area del drago e della farfalla. Nei due casi ogni segmento si trasforma in tre segmenti moltiplicandosi esponenzialmente. In rosso viene riportato il livello precedente per evidenziare le trasformazioni che, sono sempre dello stesso tipo (Z) nel primo caso mentre, dopo ogni fase, si alternano con la trasformazione simmetrica (S) nel secondo.

4.2 – Coincidenza di aree

Infatti l'alternanza locale tra destra e sinistra fa sì che ciò che si toglie e ciò che si aggiunge rispetto allo stadio precedente si compensi esattamente come evidenziato nella Figure 1 . Dunque se i due frattali sono generati a partire da segmenti di ugual misura tali sono anche le loro aree dato che entrambe mantengono l'area del rombo di angoli 60,120,60,120 (Figura 6) che ha per diagonale maggiore il lato di partenza.

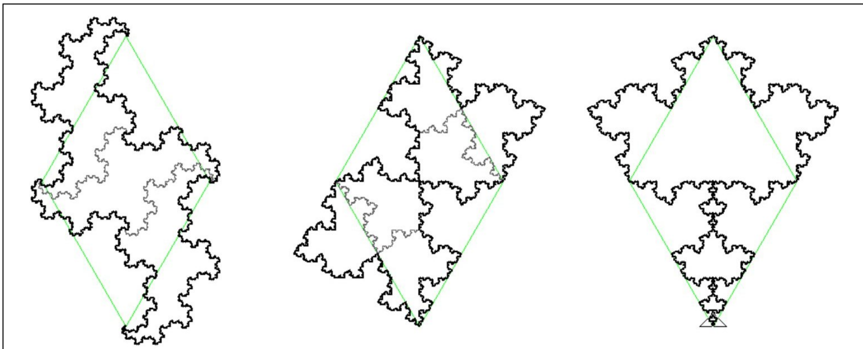


Figura 6: Confronti con l'area del rombo pari a due triangoli equilateri uniti dalla diagonale minore

4.3 – Replicanti del terzo ordine

Entrambe le figure, come mostrato in Figura 7, sono replicanti del terzo ordine ma le tre copie ridotte della farfalla hanno la particolarità di essere immagini speculari della stessa. Quindi quest'ultima necessita di due generazioni per tornare in tutto come prima.

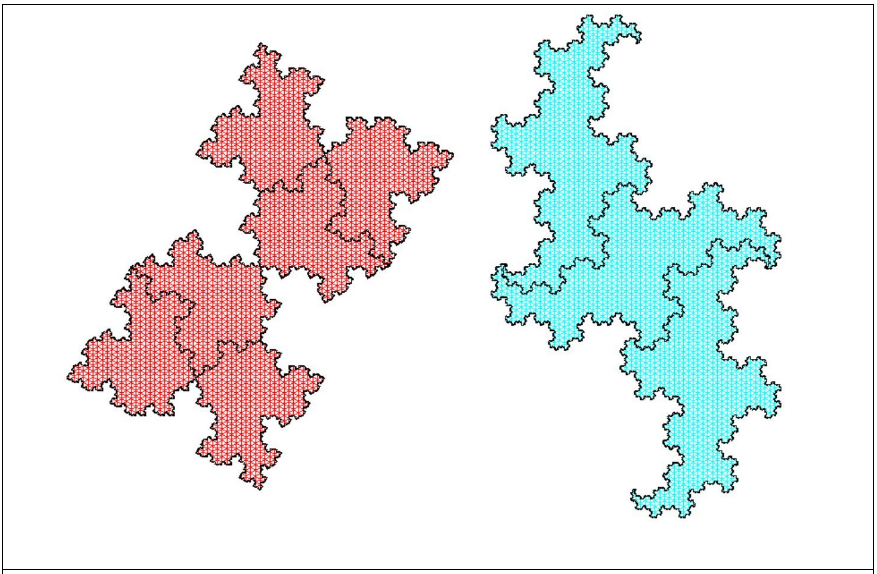


Figura 7: Replicanti del terzo ordine possono dividersi in tre copie identiche simili all'originale.

4.4 – Corrispondenza di composizioni

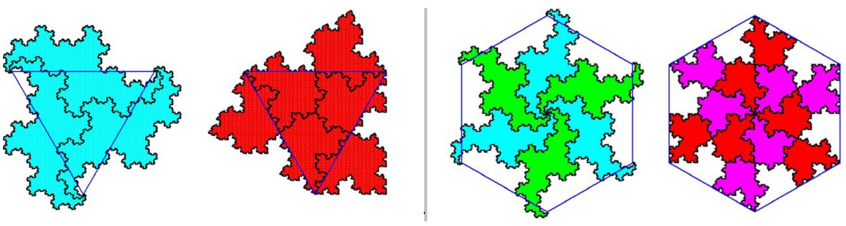


Figura 8. Corrispondenza tra aggregati triangolari ed esagonali di draghi e di farfalle

Come il triangolo equilatero e l'esagono regolare a cui sono legati, sia draghi che farfalle possono tassellare il piano come in Figura 9.

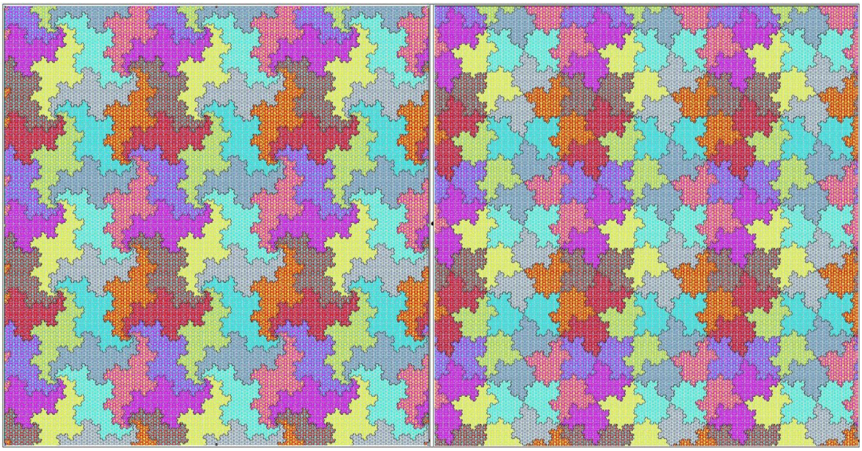


Figura 9. Tassellazione del piano con draghi e con farfalle.

5- Siamese e falena

Mentre a prima vista, il drago e la farfalla, non mostrano la loro somiglianza, le due file, di siamesi e di falene, hanno in comune il ripetersi all'infinito di una stessa figura con aree sempre più piccole, secondo una progressione geometrica di ragione 9. Quando, durante le mie ricerche, scoprii la fila di falene, notai subito l'analogia con la fila di siamesi che avevo già studiato e sospettai subito che la singola falena avesse le stesse proprietà che avevo scoperto precedentemente. Grande fu la soddisfazione di scoprire che era proprio così! Il siamese è un poligono frattale, un rombo merlettato esternamente dalla curva di Koch; se lo stesso rombo lo si merletta anche internamente, la sua figura viene scomposta in infinite parti, tutte con la stessa forma dell'originale. Analogamente, la falena è un triangolo equilatero merlettato esternamente ma, in un lato, solo con porzioni della curva dei lepidotteri (Figura 10). Anche in questo caso aggiungendo la sua anti-figura, cioè merlettando anche internamente il triangolo equilatero, si ottiene un'altra figura replicante di ordine infinito. Infatti la falena si scompone così in infinite copie di se stessa (Figura 10). Oltre al siamese e alla falena, esistono altri poligoni frattali con questa stessa proprietà di frantumazione infinita? Sospetto di no, ma la questione rimane aperta.

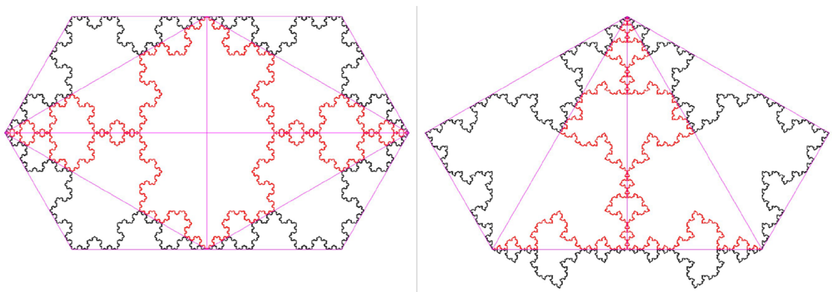
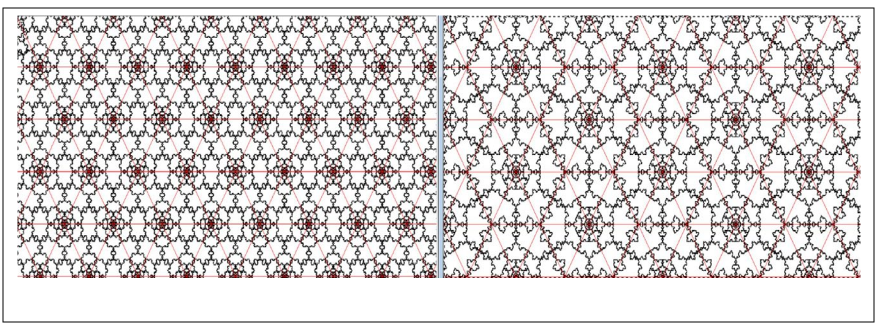


Figura 10. Nella prima immagine merlettando esternamente il rombo si ottiene il siamese (in nero), merlettandolo anche internamente si ottiene l'antisiamese (in rosso) che divide il siamese in infinite copie di se stesso. Analogamente con la falena ottenuta merlettando opportunamente il triangolo equilatero



F Figura 11. Tassellatura del piano con una sola figura frattale. Entrambi gli esempi ottenuti da una tassellazione con triangoli equilateri; il primo sostituendoli con antifiocchi, il secondo con antifalene

Accenno soltanto in Figura 11 alle straordinarie proprietà tassellanti di queste due straordinarie figure frattali.(Pietrocola 2023, 2025)

6 - MSWLogo

Tutte le illustrazioni di questo articolo sono state realizzate con FMSLogo, una versione del Logo che si può scaricare gratis. Alloa url: "www.pietrocola.eu/periodicomat25.htm" troverete spiegazioni dettagliate su come ottenere questo programma insieme alle procedure per costruire le figure frattali presentate in questo articolo con spiegazioni ed esempi del loro uso.

In Figura 12 è visibile la finestra principale con il pulsante "Execute" per mandare in esecuzione gli ordini per l'automa tartaruga scritti nell'apposita linea dei comandi alla sinistra del pulsante. Appena sopra c'è un campo di testo dove rimane traccia delle immissioni. Superiormente c'è il campo grafico dove la tartaruga, rappresentata dal classico triangolino, esegue gli ordini impartiti. Nella figura è stato appena immesso il comando multiplo composto da setpc 4 per scegliere il colore rosso, make "t -1 per assegnare -1 alla variabile t che determina il tipo di figura frattale (1 drago e -1 farfalla) drafar 300 5 1 per disegnare l'area della farfalla di livello 5 partendo dal segmento di 300 pixel. Le pochissime primitive necessarie per iniziare sono spiegate nel vocabolario animato del Tartapelago (Pietrocola, 2005). Se avete il Logo premendo il tasto "Edall" si apre la finestra

"Editor" visibile in figura. Dopo aver copiato il testo delle istruzioni e salvato mediante il menù "file", la tartaruga, a comando, eseguirà i vari disegni nelle dimensioni specificate. Tutto dovrebbe essere agevole ma se avete problemi non esitate a contattarmi.

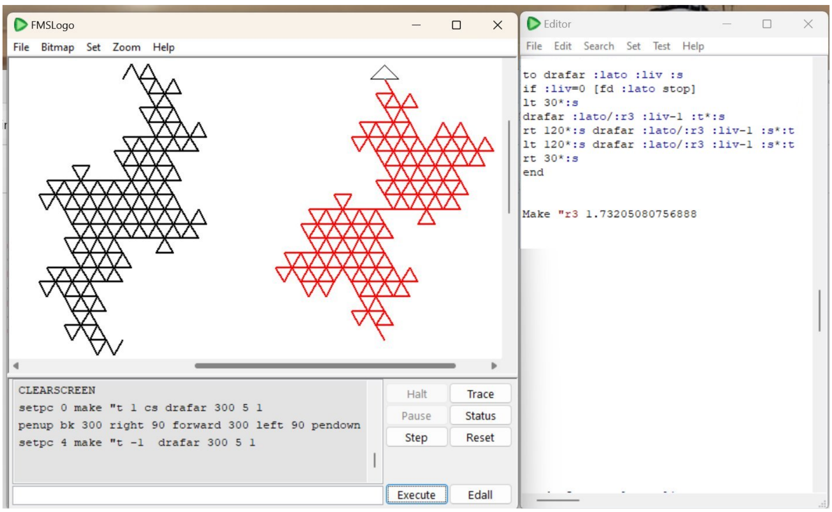


Figura 12. A destra , nella finestra "Edit" dell'FMSLogo le poche istruzioni necessarie per ottenere ciò che è mostrato a sinistra. Sotto i disegni realizzati vi è uno spazio dove rimane traccia dei comandi immessi nella linea bianca sottostante per realizzarli.

Bibliografia

C. Davis and D. E. Knuth (1970), Number representations and dragon curves I, II, J. Recreational Math., 3, pp. 66-81

Larry Liddle - Agnes Scott College (2022), Terdragon , https://larryriddle.agnesscott.org/ifs/heighway/terdragon.htm

Giorgio Pietrocola (2005), Vocabolario animato primitive Logo, Tartapelago, Maecla, https://www.maecla.it/tartapelago/vocanimato/index.htm

Giorgio Pietrocola (2009) , Mostra di frattali replicanti, Tartapelago, Maecla

www.pietrocola.eu/maecla/tartapelago/frattali/petalo.htm

Giorgio Pietrocola (2023) Il siamese di Koch, Periodico di Matematica (IV) Vol. V(2) giugno, pp. 109-1

Giorgio Pietrocola (2024), Il siamese e la falena, due frattali per l'arte di Escher, Archimede 3/2024, pp.159-166