

Periodico di Matematica

**PER
L'INSEGNAMENTO SECONDARIO SUPERIORE**

Anno XXXIX - Serie IV – volume VI (4)

Dicembre 2024

A cura di

Ferdinando CASOLARO – Franco EUGENI – Luca NICOTRA

Edizioni



AFSU

MATEMATICA - FISICA - INFORMATICA

PERIODICO DI MATEMATICA

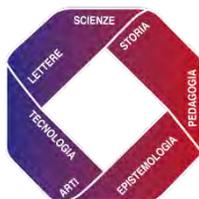
PER

L'INSEGNAMENTO SECONDARIO SUPERIORE

Fondato da Davide Besso nel 1886,
continuato da Aurelio Lugli e Giulio Lazzeri
e attualmente a cura di

Ferdinando Casolaro - Franco Eugeni - Luca Nicotra

Anno XXXIX - Serie IV - Volume VI (4)
Dicembre 2024



ACCADEMIA DI FILOSOFIA DELLE SCIENZE UMANE

Comitato Direttivo

Franco Eugeni
Ferdinando Casolaro
Giovanna Della Vecchia
Antonio Lungo
Antonio Maturo
Luca Nicotra
Renata Santarossa

Comitato Scientifico

Gian Italo Bischi (Urbino)
Giordano Bruno (Roma)
Mauro Cerasoli (L'Aquila)
Giuseppe Conti (Firenze)
Franco Francia (La Spezia)
Giangiacomo Gerla (Napoli)
Stefano Innamorati (L'Aquila)
Paolo Severino Manca (Pisa)
Raffaele Mascella (Teramo)
Fabrizio Maturo (Caserta)
Mario Mandrone (Napoli)
Pietro Nastasi (Palermo)
Canio Noce (Salerno)
Nicla Palladino (Perugia)
Salvatore Rao (Napoli)
Ezio Sciarra (Chieti)
Salvatore Sessa (Napoli)
Massimo Squillante (Benevento)
Luca Tallini (Teramo)
Ugo Vaccaro (Salerno)
Giovanni Vincenzi (Salerno)

Copertina e progetto grafico

Luca Nicotra

Direzione e redazione

Direttore responsabile:

Luca Nicotra

Direttori di redazione:

Franco Eugeni
Via Lucania 1 l.
64026 Roseto degli Abruzzi (TE)
cell. 338 9644305

eugenif3@gmail.com.

Ferdinando Casolaro
Via Camaldolilli n. 1B
80128 Napoli- cell. 347 1960693

ferdinando.casolaro@unina.it

Luca Nicotra
Via Michele Lessona 5
00134 Roma- cell. 340 5065616
luca.nicotra1949@gmail.com.

Segreteria di redazione:

Giovanna Della Vecchia (Napoli)

giovanna.dellavecchia@gmail.com

Rivista di proprietà di:

Accademia di Filosofia delle
Scienze Umane - Zona Industriale
Colleranese - 65021 Giulianova
(TE) C.F. 91053660675

Copyright © 2024 Edizioni AFSU -
UniversItalia-Teramo, Roma -
ISSN Online: 2612-6745

® Reg. Versione online n.695/2019
del 19 luglio 2019 e Versione
cartacea n.695/2021 del 3 giugno
2021 Tribunale di Teramo.

Tutti i diritti riservati.

ISBN 978-88-3293-820-3 . Gli scritti
apparsi sulla Rivista possono essere
pubblicati altrove purché se ne
dichiari la fonte.

Il Periodico di Matematica, che rinasce dopo 100 anni, si propone, oggi, come allora, di orientare i propri obiettivi di ricerca alla didattica dell'astronomia, della fisica, della matematica, aggiungendo a queste discipline il moderno campo dell'informatica. La metodologia proposta sarà quella storico-fondazionale-divulgativa, con forte interesse nelle direzioni di studi elementari da un punto di vista superiore. I saggi pubblicati, vagliati dai Referee del Comitato scientifico, saranno valutati tenendo conto dei seguenti criteri:

- originalità nella stesura del lavoro e dell'apparato critico;
- significatività didattica del tema proposto;
- correttezza scientifica e rigore metodologico;
- proprietà di linguaggio e fluidità del testo;
- approfondito apparato di riferimenti bibliografici.

I *referee* restano anonimi per un anno. Le comunicazioni, i report, i pareri e tutti i dati dei *referee* sono trattati e gestiti dal Comitato Direttivo, preposto alla redazione.

Per essere inseriti nella mailing list di coloro che, via mail, riceveranno il *Periodico di Matematica*, occorre scrivere, inviando un mini-curriculum di poche righe, alla prof.ssa Giovanna Della Vecchia (Napoli) giovanna.dellavecchia@gmail.com. Tutti i lavori vanno inviati al prof. Franco Eugeni, (eugenif3@gmail.com) secondo il template word e le norme editoriali della Rivista scaricabili dal sito dell'A.F.S.U. (www.afsu.it/istruzioni-per-gli-autori/).

I profili biografici dei membri del Comitato Direttivo sono disponibili nel sito www.afsu.it.

«Periodico di Matematica» è una rivista trimestrale distribuita con Licenza Creative Commons Attribuzione - Non commerciale - Non opere derivate 4.0 Internazionale:



PEZZULLI

I pezzulli, seguendo una antica idea di Roberto Giannarelli attuata sin dai primi numeri di «Archimede» (1949) e di «La scienza per i Giovani» (1952), poi ripresa da Bruno de Finetti per il «Periodico di Matematiche», sono piccole pillole di saperi e riflessioni, atti a riempire spazi vuoti nel testo di una rivista (ad esempio la pagina pari, o metà della stessa, di fine lavoro se vuota).

AVVERTENZE PER I COLLABORATORI

Gli articoli devono essere redatti nella forma *camera ready*, con MS Word utilizzando il *template* scaricabile dal sito dell'AFSU:

https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2020/03/Template_Periodico-di-Matematica-18-02-2020.doc

rispettando le norme editoriali pubblicate nello stesso sito:

<https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2020/03/Principali-Norme-Editoriali-per-la-scrittura-degli-articoli-18-02-2020.pdf>

Le figure utilizzate devono essere in alta risoluzione (300 dpi).

SOSTENITORI AFSU

Ferdinando Casolaro (Napoli), Silvana D'Andrea (Roseto), Franco Francia (Pisa), Gianni Di Paolo (Teramo), Diana Le Quesne (Roseto), Franco Eugeni (Roseto), Antonio Maturo (Pescara), Antonio Napoletano (Ancona), Luca Nicotra (Roma), Marisa Quartiglia (Roseto), Renata Santarossa (Napoli), Ezio Sciarra (Pescara), Alberto Trotta (Salerno), Salvatore Sessa (Napoli).

AMICI AFSU

Ivano Casolaro (Napoli) Gianluca Eugeni (L'Aquila), Andrea Manente (Teramo), Enrico Massetti (Ascoli Piceno), Giovanni Grelli (S.Benedetto del Tronto), Francesco Pezzoli (Ascoli Piceno), Federico Verrigni (Pineto), Alessandro Vicerè (Roseto), Orfeo Zaffi (Penne - PE).

Finito di stampare nel mese di dicembre 2024 presso UniversItalia

Via di Passolombardo 421, 00133 Roma Tel. 06/2026342 -

e_mail: info@universitaliasrl.it-www.unipass.it.

INDICE

Luca Nicotra	7
<i>Bruno de Finetti, così è se vi pare...</i>	
Silvia Cerasaro, Laura Tomassi	49
<i>Il pensiero diagrammatico nel Liber Abbaci</i>	
Paolo Severino Manca	77
<i>Il triangolo ortico e la retta di Eulero con fantasia</i>	
Giuseppe D'Angelo	93
<i>La doppia marea: una semplice spiegazione</i>	
Giorgio Pietrocola	115
<i>Affinità tra figure frattali</i>	
<i>Profili biografici degli autori</i>	129



ARTE SCIENZA

magazine



Alberto Macchi, Anna dell'Agata, Antonio Castellani, Antonio Lungo, Cristina Crespo, Debora Macchi, Duilio Carpitella, Fabio Gaglioti, Francesca Borini, Gianluca Mei, Isabella de Paz, Laura De Agostini, Lucia Balletti, Luca Nicotra, Luigi Campanella, Paola Dallavalle, Pierluigi Assogna, Pino Bertelli, Pino Mastrullo, Stefano Torossi, Ultravyola, Yansha Sandstrom

LA MATEMATICA
È VERA?

DIO È
DAVVERO
INEFFABILE?

RACCONTI E RITRATTI
DI MEDICINA
E MALATTIA

IL GRANDE FREDDO
PROSSIMO
VENTURO

ARTE
E INDUSTRIA

LO SVILUPPO PEDAGOGICO
E TERAPEUTICO DELL'UMANA
ATTITUDINE ALLA PACE

Anno IV - N.8 dicembre 2024 - Supplemento di *ArteScienza*

<http://www.assoculturale-arte-scienza.it>

Direttore Responsabile: Luca Nicotra - Direttore di redazione: Isabella De Paz

Registrazione n.194/2014 del 23 luglio 2014 Tribunale di Roma - ISSN online 2385-1961 - Proprietà dell'IA, P. S. "Arte e Scienza"

Bruno de Finetti, così è se vi pare

«..ma davvero esiste la probabilità? e cosa mai sarebbe? Io risponderei che non esiste»¹

I Parte

Luca Nicotra*

* Ingegnere meccanico, giornalista pubblicista, Accademico onorario APAV e AFSU, Presidente dell'Associazione Culturale "Arte e Scienza", Direttore responsabile dei periodici «ArteScienza», «Bollettino dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane», «Periodico di Matematica». Direttore editoriale di UniversItalia;
luca.nicotra1949@gmail.com.



DOI : 10.53159/PdM(IV).v6n4.142

Sunto. *Bruno de Finetti è universalmente noto come uno dei più grandi matematici del XX secolo, grazie soprattutto alla sua teoria soggettiva della probabilità. Tuttavia, la sua figura non può essere isolata entro il recinto aristo-*

¹ Il presente articolo è una rielaborazione dell'omonimo pubblicato in più puntate in «Notizie in ... Controluce» anno XIII nn. 6,8,9,11,12 (2004), anno XIV nn. 1,2 (2005), che è stato citato nella voce "Bruno de Finetti" dell'Enciclopedia Treccani (Lucarelli, Lunghini, 2013).

cratico dei grandi matematici, perché la sua complessità e originalità, dal punto di vista sia culturale sia umano, ne fanno uno dei più fulgidi simboli intellettuali del secolo appena trascorso. In questo articolo si delinea un ritratto a tutto campo della sua figura di scienziato e uomo, partendo dall'opera sua scientifica che lo ha reso più celebre e toccando successivamente i temi più caratteristici della sua vita di scienziato, uomo di cultura e cittadino: la sua critica al determinismo, la didattica della matematica, il suo impegno sociale che lo vide sempre acuto osservatore dei costumi della società del suo tempo e soprattutto critico appassionato delle disfunzioni delle istituzioni.

Parole chiave: *Bruno de Finetti, probabilità, probabilità soggettiva, determinismo, didattica, didattica della matematica.*

Abstract. *Bruno de Finetti is universally known as one of the greatest mathematicians of the twentieth century, thanks above all to his subjective theory of probability. However, his figure cannot be isolated within the aristocratic enclosure of the great mathematicians, because its complexity and originality, from both a cultural and a human point of view, make it one of the most brilliant intellectual symbols of the last century. In this article a full-length portrait of his figure as a scientist and man is de-linearized, starting from his scientific work that has made him more famous and then touching on the most characteristic themes of his life as a scientist, man of culture and citizen: his criticism of determinism, mathematics education, his social commitment that saw him always keen observer of the customs of the society of his time and above all passionate critic of the dysfunctions of the institutions.*

Keywords: *Bruno de Finetti, probability, subjective probability, determinism, didactics, mathematics education*

1 - La probabilità, questa sconosciuta: finzione e realtà

Se a una persona di media cultura, e non matematico, si chiedesse che cosa intende per probabilità, “probabilmente” risponderebbe con un’espressione del tipo: é la fiducia (spe-

ranza o timore) che “noi” riponiamo nell’avverarsi di un evento. Anche la risposta alla nostra domanda non è reputata certa, bensì affetta da un’indeterminabile dose d’incertezza, che esprimiamo con il termine “probabilmente”. Nella risposta, inoltre, è contenuto come “soggetto” il pronome personale “noi”, che toglie ogni dubbio sul carattere “soggettivo” della valutazione della probabilità di un evento, sottraendola a ogni tentazione di una valutazione “oggettiva” indipendente dal soggetto. In questa ipotetica (ma probabile) risposta è contenuto tutto lo spirito della teoria soggettiva della probabilità, di cui Bruno de Finetti (1906-1985) è stato il principale padre agli inizi del secolo scorso.

Quando abbiamo dubbi sul significato di un termine di uso generale, tutti noi ricorriamo a un vocabolario della lingua italiana.

Ebbene, se consultiamo il classico vocabolario della lingua italiana di Nicola Zingarelli, alla voce “probabilità” leggiamo:

1- Condizione, carattere di ciò che è probabile; 2- La misura in cui si giudica che un avvenimento sia realizzabile o probabile.

E poiché in entrambe le definizioni si rimanda all’aggettivo “probabile”, leggiamo che cosa dice lo Zingarelli a tal proposito:

Degno di approvazione; verosimile; che si può approvare; da provare; credibile, ammissibile in base ad argomenti abbastanza sicuri.

Se la prima accezione può indurre a una concezione oggettiva della probabilità, la seconda accezione sgombra la mente da ogni dubbio con quel «si giudica».

Certamente un vocabolario linguistico contiene soprattutto termini del linguaggio ordinario e soltanto alcuni dei numerosi termini oggi appartenenti, più propriamente, a gerghi tecnici, perché denotanti concetti di pertinenza di specifiche branche del sapere. Il concetto di probabilità è uno di questi, ma a differenza di molti altri prettamente tecnici, esso, prima ancora di divenire oggetto d'indagine scientifica circa 350 anni fa, è stato utilizzato, forse da sempre, da tutti gli uomini, e tutt'oggi, nella sua forma intuitiva e vaga, fa parte della vita quotidiana dell'uomo, perché esprime forme incerte di conoscenza (è probabile che domani piova, probabilmente otterrò una promozione sul lavoro, ecc.) che riguardano la maggior parte degli eventi della nostra vita. Incertezza significa difetto e non totale assenza di certezza, e quindi induce sempre in noi, più o meno consapevolmente, ad attribuire "un grado di fiducia" al verificarsi di un evento. La probabilità, dunque, fa parte del patrimonio culturale di tutti, e non solo dei matematici.²

2 - Cenni storici sulla probabilità

Allo stato attuale degli studi, sembra che nell'Antichità il concetto di probabilità non fosse noto. Tuttavia, anche gli antichi praticavano i giochi d'azzardo, nell'ambito dei quali è

² L'insegnamento del Calcolo delle Probabilità, a livello universitario, è relativamente recente, essendo iniziato circa 150 anni fa.

nato poi il concetto di probabilità. Allora, per quale motivo a nessun matematico dell'antichità è venuto in mente di formulare una teoria matematica della probabilità? I giochi

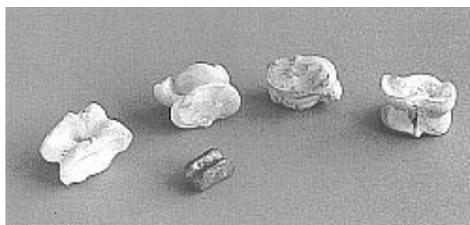


Fig. 1 – Gli astragali.

d'azzardo erano effettuati con strumenti, gli "astragali" (figura 1), che avevano forme talmente diverse tra loro, da non permettere forse l'osservazione di nessuna "regolarità" nei risultati ottenibili con i lanci e quindi anche nessuna forma di previsione. Tuttavia, proprio considerando il lancio degli astragali Gerolamo Cardano (1501-1576) fece le sue prime riflessioni sulla probabilità.

Il primo cenno al concetto di probabilità si trova nel commento fatto da Giovanni della Lana (1276?-1350?) nel 1324 (o 1325?) a una terzina del IV Canto del Purgatorio della *Divina Commedia* di Dante Alighieri (1265-1321), che cita il popolare "gioco della zara",³ un gioco molto diffuso a Firenze, che consisteva nel lanciare ogni volta tre dadi assieme: prima del lancio il giocatore doveva pronunciare a voce alta il numero

³ La parola zara deriverebbe dall'arabo *zahr*, che significa dado, e da essa sarebbe derivato in italiano il termine "azzardo" per indicare qualcosa di rischioso.

che secondo lui sarebbe risultato come somma dei 3 numeri rivelati dai dadi:

*Quando si parte il giuoco della zara
Colui che perde si rimane dolente
Ripetendo le volte e tristo impara*

Giovanni della Lana commenta che i giocatori imparano a loro spese («tristo impara») che la combinazione più facile da ottenere è la (4, 3, 1) indipendentemente dall'ordine.

I primi cenni a una "teoria della probabilità" si possono far risalire, però, al matematico Luca Pacioli (1445 circa - 1517), che si occupa del problema della ripartizione della posta tra giocatori nel caso di interruzione di un popolare gioco in uno dei capitoli della *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* pubblicata nel 1494:

Una squadra gioca a palla in modo che siano necessari 60 punti per vincere la partita e la posta in gioco è 22 ducati. Per qualche incidente, non si può più giocare e una squadra ha 50 punti mentre l'altra ne ha 30. Quale quota del monte-premi appartiene a ciascuna squadra? (trad. dell'A.).

Il problema fu poi ripreso da Niccolò Tartaglia (1499?-1557) e infine risolto da Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665).

I primissimi tentativi di "formalizzazione matematica" della probabilità, invece, hanno inizio nel Rinascimento per opera del matematico, fisico, medico e astrologo Gerolamo Cardano che, perdendo sistematicamente nel "gioco della zara", intraprese per primo lo studio matematico della probabi-

lità, scrivendo in età giovanile il libro *Liber de ludo aleae* (Libro sul gioco dei dadi):

*La metà del numero totale di facce rappresenta sempre un'uguaglianza di possibilità; pertanto ci sono eguali possibilità che un dato numero esca o non esca in tre lanci, dal momento che il circuito totale viene completato in sei; o, ancora, che uno dei tre numeri esca in un lancio.*⁴

In esso sono contenuti due importanti teoremi del futuro Calcolo delle Probabilità: la probabilità dell'evento prodotto logico (A e B) di due eventi semplici A, B e una anticipazione della legge dei grandi numeri. A Cardano si deve una prima rudimentale definizione di probabilità come rapporto fra il numero degli eventi favorevoli e il numero di quelli possibili, tutti considerati equiprobabili.

Tuttavia, i suoi studi caddero nell'oblio e il *Liber de ludo aleae* fu pubblicato postumo soltanto nel 1663.

Anche Galileo Galilei (1564-1642), nella sua opera *Sopra le scoperte dei dadi* (data incerta 1612-1623 circa), si occupò di probabilità, stimolato dagli stessi quesiti già affrontati da Cardano a proposito del gioco della zara e a lui postigli forse dallo stesso Granduca di Toscana. Probabilmente Galilei venne a conoscenza della soluzione già data da Cardano, ma la sua esposizione, in sole quattro pagine, è molto più chiara,

⁴ Secondo Massimo Tamborini (2006) lo scritto fu iniziato presto, nel 1524 o nel 1525, quando Cardano era ancora uno studente di ventitré anni. Cardano si riferì ad esso in un certo numero di sue opere nel corso degli anni. Rimaneggiò il testo originario sporadicamente fino quasi al 1570, senza mai però completarne la revisione. Dello scritto è rimasta una sua bozza con alcune incongruenze, che fu ritrovata fra le carte di Cardano nel 1576 e poi pubblicata postuma soltanto nel 1663.

didattica e priva di errori (Barra, n.d.) Il quesito era questo: perché escono con maggiore frequenza le somme 10 e 11 rispetto a 9 e 12? (Galilei, 1897):

... ancor che il 9 e il 12 in altrettante maniere si componghino in quante il 10 e l' 11, per lo che di eguale uso devriano esser reputati, si vede non di meno che la lunga osservazione ha fatto da i giocatori stimarsi più vantaggiosi il 10 e l'11 che il 9 e il 12.

Infatti, un primo esame superficiale farebbe affermare che ciascuna di esse possa uscire ugualmente in sei modi. Infatti, la somma 9 si compone con: 1,2,6; 1,3,5; 1,4,4; 2,2,5; 2,3,4, 3,3,3; la somma 10 con: 1,3,6; 1,4,5; 2,2,6; 2,3,5; 2,4,4; 3,3,4; la somma 11 con: 1,4,6; 1,5,5; 2,3,6; 2,4,5; 3,3,5; 3,4,4 e infine la somma 12 con: 1,5,6; 2,4,6; 2,5,5; 3,3,6; 3,4,5; 4,4,4. Galilei comincia, però, con l'osservare che lanciando assieme ogni volta i tre dadi, le possibili terne di valori mostrate dalle facce in vista dei dadi sono $6^3 = 216$ (Galilei, 1897):

Ma se noi insieme col primo getteremo il secondo dado,..., avvenga che ogni faccia del primo dado può accoppiarsi con ciascuna del secondo,..., onde è manifesto esser 6 volte 6, cioè 36. E se noi aggiungeremo un terzo dado,..., 6 volte 36, cioè 216, tutte fra di loro differenti.

Le somme che si possono realizzare con i numeri delle facce in vista dei tre dadi sono i 16 numeri naturali da 3 a 18 («Ma perché i punti non sono se non 16, cioè 3. 4. 5 ecc. sino a 18»). Le 216 possibili uscite non sono un multiplo di 16 e quindi non possono essere ripartite in maniera uguale per ciascuna delle somme 3, 4, 5,...18. In altri termini tali somme possono uscire in numeri differenti di modi (Galilei, 1897):

Ma perché i punti non sono se non 16, cioè 3. 4. 5 etc. sino a 18, tra i quali si hanno a compartire le dette 216 scoperte, è necessario che ad alcuni di essi ne tocchino molte;

Tabella I							
10	9	8	7	6	5	4	3
6.3.1 / 6	6.2.1 / 6	6.1.1 / 3	5.1.1 / 3	4.1.1 / 3	3.1.1 / 3	2.1.1 / 3	1.1.1 / 1
6.2.2 / 3	5.3.1 / 6	5.2.1 / 6	4.2.1 / 6	3.2.1 / 6	2.2.1 / 3		
5.4.1 / 6	5.2.2 / 3	4.3.1 / 6	3.3.1 / 3	2.2.2 / 1			
5.3.2 / 6	4.4.1 / 3	4.2.2 / 3	3.2.2 / 3				
4.4.2 / 3	4.3.2 / 6	3.3.2 / 3					
4.3.3 / 3	3.3.3 / 1						
27	25	21	15	10	6	3	1
11	12	13	14	15	16	17	18
1.4.6 / 6	1.5.6 / 6	1.6.6 / 3	2.6.6 / 3	3.6.6 / 3	4.6.6 / 3	5.6.6 / 3	6.6.6 / 1
1.5.5 / 3	2.4.6 / 6	2.5.6 / 6	3.5.6 / 6	4.5.6 / 6	5.5.6 / 3		
2.3.6 / 6	2.5.5 / 3	3.4.6 / 6	4.4.6 / 3	5.5.5 / 1			
2.4.5 / 6	3.3.6 / 3	3.5.5 / 3	4.5.5 / 3				
3.3.5 / 3	3.4.5 / 6	4.4.5 / 3					
3.4.4 / 3	4.4.4 / 1						
27	25	21	15	10	6	3	1

Galilei, quindi, con questa osservazione, prepara già il lettore a sospettare che il numero di casi favorevoli all'uscita delle somme indagate (9, 10, 11 e 12) possa essere diverso per ciascuna di esse e che per dare una risposta al quesito postogli sarà necessario calcolare il numero di casi favorevoli all'uscita di ciascuna somma realizzabile nel lancio dei tre dadi (Galilei, 1897):

... e se noi ritroveremo quante ne toccano per ciascheduno, avremo aperta la strada di venire in notizia di quello che cerchiamo.

Nella tabella I sono riportate per ciascuna somma le possibili terne non ordinate che le realizzano: in totale 56, un numero ben inferiore ai 216 modi in cui invece si possono realizzare. Questo scarto è dovuto al fatto che abbiamo finora ignorato che le stesse terne possono uscire con ordine differente dei loro numeri. Per esempio la somma 9 può essere ottenuta con: 1, 2, 6; 1, 6, 2; 2, 1, 6; 2, 6, 1; 6, 1, 2; 6, 2, 1. Tutti i possibili modi di formare le somme considerate sono quindi tutte le terne ordinate formate con gli stessi numeri delle terne non ordinate già indicate.⁵ Esse sono quindi le permutazioni di queste ultime, semplici o con ripetizione a seconda che i numeri della terna siano tutti diversi o che uno di essi si ripeta.⁶

In tabella I sulla destra delle terne non ordinate relative a ciascuna somma è indicato in grassetto e in rosso dopo / il numero delle terne ordinate ottenibili scambiando l'ordine dei numeri componenti⁷ e in fondo a ciascuna colonna è in-

⁵ Che sono quelle combinazioni semplici e con ripetizione di classe 3 dei 6 numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6 che formano ciascuna delle somme dei numeri "usciti" nel lancio dei 3 dadi, fra le quali le somme 9, 10, 11, 12 considerate nel quesito di cui si occupa Galilei.

⁶ In una terna di numeri non si può avere più di un numero che si ripete, perché altrimenti si avrebbero più di tre numeri.

⁷ Il numero delle permutazioni semplici di n oggetti è $P_n = n!$, mentre il numero delle permutazioni con ripetizione di n oggetti in cui alcuni di essi si ripetono è il quoziente fra il numero delle permutazioni semplici degli n oggetti e il prodotto del numero di permutazioni semplici degli oggetti che si ripetono. Nel nostro caso, quindi, il numero di permutazioni (semplici)

dicato il numero totale delle possibili uscite relative alla somma considerata.

Per motivi didattici di maggiore chiarezza ho riportato nella tabella I i risultati relativi a tutte le 16 somme realizzabili con le facce in vista dei tre dadi. Galilei, invece, si limita alla metà superiore della tabella, relativa alle somme 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Perché? Ce lo spiega lui stesso (Galilei, 1897):

basterà far tale investigazione dal 3 sino al 10, perché quello che converrà ad uno di questi numeri, converrà ancora al suo sossopra.

Infatti su ogni dado la somma di due facce opposte è 7 e quindi su tre dadi è 21. Allora se la somma delle facce in vista è 3, 4, 5, ..., 18, la somma delle facce opposte («sossopra») deve essere rispettivamente: 18, 17, 16, ..., 3, cioè deve essere il complemento a 21. Inoltre, ad ogni disposizione delle facce in vista corrisponde la stessa disposizione delle facce opposte e quindi il numero di modi per ottenere una certa somma S sulle facce visibili è uguale al numero di modi per ottenere la somma $21-S$ sulle facce opposte: dunque sarà sufficiente riportare in tabella i numeri dei modi per ottenere le somme da 3 a 10 (considerate quelle delle facce in vista), perché gli stessi saranno quelli delle somme da 18 a 11 (delle facce opposte non in vista). Infatti, osservando la tabella I si ha che le

delle terne di numeri tutti diversi è $3! = 6$, mentre il numero delle permutazioni (con ripetizione) delle terne con due numeri uguali è $3! / 2! = 3$. Nel caso, infine, di terne costituite da tre numeri uguali ovviamente scambiando comunque l'ordine si ottiene la stessa terna e infatti $3! / 3! = 1$.

somme 10 e 11 si realizzano entrambe in 27 modi, mentre le somme 9 e 12 si realizzano entrambe in 25 modi.

Galilei per giustificare razionalmente «la lunga osservazione» che ha fatto concludere ai giocatori che è più vantaggioso scommettere sulle somme 10 e 11 piuttosto che 9 e 12, perché evidentemente risultavano uscire con una maggior frequenza, utilizza il concetto di probabilità classica (già presente nel *Liber de ludo aleae* di Cardano) come rapporto fra numero di casi favorevoli e di casi possibili («scoperte di un dado») che considera equiprobabili osservando esplicitamente che ciascun dado «può indifferentemente fermarsi, sopra ciascuna» delle 6 facce.

Infatti il rapporto $27/216$ è la probabilità di ottenere le somme 10 o 11 leggermente maggiore di $25/216$ che è la probabilità di ottenere le somme 9 o 12.

Altri due interventi di Galilei sulla probabilità sono stati recentemente indagati (Barra, n.d.). Il primo riguarda il calcolo della distanza dalla Terra di una nuova stella della costellazione Cassiopea scoperta da Tycho Brahe (1546-1601) nel novembre 1572 e poi scomparsa nel 1574,⁸ mentre il secondo riguarda la correttezza della stima economica di un cavallo.

⁸ Galilei osserva che nelle misurazioni strumentali gli errori sono inevitabili, che sono distribuiti simmetricamente, che gli errori piccoli sono più probabili di quelli grandi, che conviene considerare la misurazione intorno alla quale concorre il numero massimo di misurazioni. Anticipa, così, qualitativamente di circa 200 anni la "Legge di frequenza degli errori" di Gauss, che viene espressa con una densità di probabilità distribuita secondo la caratteristica forma a "campana" detta "Gaussiana" o "Normale".

Ancora quesiti sulle scommesse al gioco dei dadi furono posti nel 1654 dal nobile francese Antoine Gombaud, Chevalier de Méré, all'amico Blaise Pascal, filosofo e sommo matematico "dilettante".

Uno di questi era: un giocatore, gettando otto volte un dado, deve tentare di far uscire il numero uno; dopo tre tentativi infruttuosi, ciascuno costituito da una serie di otto lanci, il giocatore rinuncia a proseguire: in che misura egli ha diritto alla posta pattuita? Un altro era: è conveniente scommettere alla pari l'uscita di un 12, lanciando due dadi per 24 volte? In altri termini: è corretto reputare del 50% la probabilità che lanciando per 24 volte due dadi assieme esca almeno una volta il numero 12? Ne seguì un carteggio fra Blaise Pascal e Pierre de Fermat, magistrato e anch'egli geniale matematico "dilettante".⁹ Nella loro corrispondenza sono contenute le prime leggi del calcolo combinatorio e del calcolo delle probabilità poi pubblicate da Pascal nel *Traité du Triangle Arithmétique, avec quelques autres petits traités sur la mesme matière* (1654), che spesso - a torto, considerando le precedenti ricerche di Pacioli, Cardano e Galilei - è considerato l'atto di nascita della Teoria e del Calcolo delle Probabilità, vale a dire di quella branca della matematica che si propone di dare una definizione di probabilità per eventi semplici, tale da consentire di attribuire ad essa un valore numerico e stabilire la probabilità di un evento complesso, in funzione delle probabilità degli eventi semplici componenti. Oggi, più propriamente, si distingue il Calcolo delle Probabilità, che studia in modo rigoroso le relazioni fra le probabilità degli eventi

⁹ Ovviamente l'aggettivo "dilettante" qui sta a significare semplicemente che Pascal e Fermat non erano matematici per professione.

composti e quelle degli eventi semplici componenti, dalla Teoria della Probabilità che studia le possibili definizioni della probabilità degli eventi semplici, che, come vedremo fra poco, possono essere molto diverse fra loro. In altri termini, mentre possono variare le definizioni “operative” di probabilità degli eventi semplici stabilite nella Teoria della Probabilità, le “regole” per il Calcolo delle Probabilità degli eventi composti a partire dalle probabilità degli eventi semplici componenti sono le medesime e possono essere stabilite in modo matematicamente rigoroso nel Calcolo delle Probabilità.

Christiaan Huygens (1629-1695), il fondatore della teoria ondulatoria della luce, nel 1657 nella sua opera *De ratiociniis in ludo aleae* (Sui ragionamenti nel giuoco dei dadi) ripropose in maniera più sistematica il contenuto del carteggio fra Pascal e Fermat, dando anche una risposta al quesito di Gombaud, non risolto da Pascal, di quale fosse la cifra equa da pagare a un giocatore per subentrargli in una data puntata.

Nel 1666 Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) pubblica la sua *Dissertatio de arte combinatoria*.

Il primo vero trattato sulla nuova scienza, però, sarà pubblicato soltanto nel 1713 con il titolo *Ars conjectandi* (figura 2) dal grande matematico Jacques (o Jacob) Bernoulli (1654-1705), che così scriveva:

Noi definiamo l'arte di congetturare, o stocastica, come quella di valutare il più esattamente possibile le probabilità delle cose, affinché sia sempre possibile, nei nostri giudizi e nelle nostre azioni, orientarci su quella che risulta la scelta migliore, più appropriata, più sicura, più prudente; il che costituisce il solo oggetto della saggezza del filosofo e della prudenza del politico.

Nel 1812 il matematico e fisico francese Pierre Simon de Laplace apportò notevoli contributi allo sviluppo del Calcolo delle Probabilità nel suo trattato *Théorie Analytique des Probabilités* (de Laplace 1820). Nello stesso periodo il grande matematico, astronomo e fisico Johann Friedrich Carl Gauss, assieme a Laplace, formulò la famosa “distribuzione normale” conosciuta con il nome di *distribuzione di Gauss-Laplace*, che costituisce uno dei cardini della statistica moderna.

Abbiamo usato finora il termine evento, senza chiederci qual è il suo significato. La risposta può variare secondo il tipo di definizione di probabilità che, come vedremo poco oltre, può essere di quattro tipi: classica, frequentista, assiomatica, soggettiva. Senza entrare nelle discussioni delle diverse accezioni di tale termine nelle quattro scuole di pensiero appena citate, possiamo appellarci al concetto intuitivo, anche se vago, che ognuno di noi ha del termine “evento”: risultato di una prova, qualsiasi affermazione della quale sia verificabile il contenuto di verità, un fatto univoco e ben descrivibile.

Un evento “semplice” non è scindibile (almeno per il nostro punto di vista) in altri eventi componenti. Viceversa, un evento “complesso” è un evento che può essere considerato formato da più eventi semplici. Il lancio di un solo dado dà luogo all’evento semplice “caduta del dado su una faccia”; il lancio contemporaneo di due dadi dà luogo all’evento composto dai due eventi semplici e indipendenti “caduta di ciascun dado su una faccia”.

La nozione di probabilità - nata nell’ambito delle scommesse ai giochi d’azzardo - per opera del fisico scozzese James Clerk Maxwell (1831-1879), intorno alla metà del secolo

XIX, cominciò a entrare nel campo scientifico, trovando applicazioni in fisica, dove ebbe nel successivo secolo XX sempre più ampie e profonde applicazioni nello studio dei fenomeni delle particelle elementari (meccanica quantistica). Infine la statistica moderna, con tutti i suoi svariati campi d'applicazione (fisica, scienze mediche, biologia, scienze sociali, psicologia, ecc.) non esisterebbe senza il Calcolo delle Probabilità.

Da questi brevissimi cenni sulle origini del concetto matematico di probabilità, è possibile trarre alcuni elementi essenziali e specifici. L'origine di questa nuova scienza matematica, com'è evidenziato nei titoli dei primi libri intorno ad essa (Cardano, Galilei, Huygens), è il giuoco d'azzardo, e non ha quindi origini auliche come altri rami della matematica. Inoltre, già nel titolo del trattato di Jacob Bernoulli, si pone l'accento su un altro aspetto caratteristico della probabilità, insolito per la matematica: la nuova scienza è "arte del congetturare", che contrasta con l'assolutismo della verità matematica che ha imperato fin dall'antichità. La rivoluzione "relativista" del pensiero matematico, in base alla quale le asserzioni e i concetti matematici non hanno validità assoluta, bensì soltanto entro un certo sistema ipotetico-deduttivo, è una conquista del secolo XIX conseguente alla nascita delle geometrie non-euclidee, quindi posteriore al periodo in cui nasce il Calcolo delle Probabilità. In tale nuova scienza matematica, poi, si è ben consapevoli di trattare con contenuti che non hanno il marchio della certezza, ma al contrario dell'incertezza, essendo eventi e fatti "da provare", da dimostrare essere certi, ("probabile" deriva dal latino *probabilis*, che è ciò che deve essere *probatum*, cioè provato) in contrap-

posizione a quelli "provati", cioè dimostrati, propri di tutte le altre branche della matematica.

Tutto ciò pone questa nuova branca in una posizione particolare e alquanto singolare rispetto alle altre della matematica. All'uomo comune viene subito spontanea un'osservazione: com'è possibile che la matematica, scienza esatta per antonomasia, si occupi di ciò che a priori ha il marchio dell'incertezza, che è "ammissibile in base ad argomenti abbastanza sicuri" ma non completamente sicuri? «Il nome solo di Calcolo delle Probabilità è un paradosso: la probabilità, opposta della certezza, è ciò che non si sa, e come può calcolarsi ciò che non si conosce?» (Poincaré, 1950, p. 176). E non è strano che questa "matematica dell'incertezza" sia fondata, però, su una certezza: la consapevolezza dell'incertezza? L'uomo della strada, non condizionato dai pregiudizi matematici del passato, nella maniera più spontanea, oggi, penserebbe che una siffatta scienza non può avere quel carattere di "oggettività" proprio delle altre scienze matematiche, e non si scandalizzerebbe, anzi si meraviglierebbe del contrario, di fronte ad un suo approccio "soggettivista". Chi non sa di matematica dà quasi per scontato che, se si vuole dare un valore numerico alla probabilità, vale a dire all'aspettativa che un evento, non certo, si manifesti vero o si realizzi, l'unico modo "naturalmente" accettabile di farlo è in base a un criterio soggettivo. Così vorrebbe il buon senso comune. Se la Teoria della Probabilità fosse nata verso la fine del XIX secolo, tale punto di vista, "probabilmente", sarebbe stato adottato anche dai matematici, grazie ai profondi mutamenti critici del pensiero matematico iniziati in quel secolo con l'avvento delle geometrie non-euclidee e maggiormente

sviluppatasi nel successivo secolo XX. Ma nella prima metà del secolo XVIII, quando la Teoria della Probabilità effettivamente nacque con l'*Ars Conjectandi* di Bernoulli, la mentalità matematica era ben diversa: i concetti matematici erano considerati veri in sé e per sé, e il loro valore era considerato oggettivo. Parlare di "soggettivo" in matematica era un non senso. Tutto questo spiega la "pretesa" di fondare la Teoria della Probabilità su una realtà che, com'è stato argutamente obiettato, è soltanto "artificialmente oggettiva", mentre di fatto non lo è. Dunque, non deve meravigliare che le prime definizioni che i matematici hanno proposto per la probabilità abbiano avuto l'ambizione di attribuire ad essa un valore oggettivo, indipendente dall'osservatore, quasi che essa fosse una proprietà intrinseca degli eventi ai quali viene riferita.

3 - Probabilità classica, frequentista, assiomatica

Diceva il matematico e filosofo americano Charles Sanders Pierce (1839-1914): «Questa branca della matematica, la probabilità, è la sola, credo, in cui anche validi autori hanno dato spesso risultati erronei». E ancora Bertrand Russell (1872-1970) ironicamente: «Il concetto di probabilità è il più importante della scienza moderna, soprattutto perché nessuno ha la più pallida idea del suo significato». Queste affermazioni mostrano, in maniera molto incisiva, che il terreno delle argomentazioni sulla probabilità è stato, e forse ancora è, molto "scivoloso". Ancor oggi, è possibile leggere vari sproloqui sulla probabilità, mascherati da quel mitico rigore matematico cui sempre ci si appella, anche ingiustificatamente, per dar

consistenza alle nostre argomentazioni. Le definizioni che illustreremo si riferiscono tutte a eventi semplici.

3.1 - La definizione classica

La prima definizione matematica di probabilità, detta perciò “classica”, si trova esplicitamente indicata nel Libro II del trattato *Théorie analytique des probabilités*¹⁰ pubblicato nel 1812 dal matematico francese Pierre Simon de Laplace (de Laplace, 1820, p. 181):

On a vu dans l'Introduction que la probabilité d'un événement est le rapport du nombre des cas qui lui sont favorables au nombre de tous les cas possibles, lorsque rien ne porte à croire que l'un de ces cas doit arriver plutôt que les autres, ce qui les rend, pour nous, également possibles.

(Come abbiamo visto nell'Introduzione la probabilità di un evento è il rapporto tra il numero di casi favorevoli ad esso e il numero di tutti i casi possibili, quando non c'è nulla che ci faccia credere che un caso dovrebbe verificarsi piuttosto che qualsiasi altro, in modo che questi casi siano, per noi, ugualmente possibili).

La definizione data da Laplace in realtà non era nuova perché, come abbiamo già visto, era stata già utilizzata da Cardano e Galilei anche se non espressa in maniera esplicita.

Ovviamente l'aggettivo “favorevole” non è riferito al contenuto dell'evento, bensì alla nostra attesa che esso si realizzi: favorevole è semplicemente l'evento su cui fissiamo l'attenzione, che ci attendiamo che si realizzi o che sia vero,

¹⁰ Il trattato era diviso in due libri: *Calcul des Fonctions génératrices* e *Théorie générale des probabilités*. Raccoglieva articoli scritti da Laplace fin dal 1774.

di cui vogliamo valutare numericamente (con la probabilità) la possibilità di accadere o di essere vero, indipendentemente dal fatto che sia o no un evento piacevole o vantaggioso. Essa, a volte, è detta anche “definizione per partizione”, poiché implica una partizione dell’insieme di tutti gli eventi possibili nei due sottoinsiemi degli eventi favorevoli e degli eventi non-favorevoli. Questa definizione ha un dominio di applicazione limitato da due condizioni:

- 1) è applicabile soltanto in tutti i casi in cui è possibile conoscere quali e quanti sono gli eventi che si possono realizzare e quali e quanti sono quelli favorevoli;
- 2) gli eventi possibili devono avere tutti la stessa probabilità, vale a dire non ci deve essere nessun motivo che favorisca la realizzazione dell’uno piuttosto che dell’altro.

Il classico esempio di applicazione di questa definizione è il lancio di una moneta, perfettamente “equilibrata” o “simmetrica”, nel senso che non ci sia maggior concentrazione di massa su una faccia piuttosto che sull’altra, che favorirebbe la caduta della moneta su una delle due facce. Gli eventi possibili sono due (testa, croce), mutuamente escludentisi, mentre l’evento favorevole è uno dei due (o testa o croce). Si esclude il caso, che in realtà potrebbe verificarsi, che la moneta cada di taglio, senza presentare quindi nè testa nè croce. In questa scelta si utilizza già, in maniera “sottaciuta”, una valutazione di probabilità molto piccola che la moneta cada di taglio, tale da giustificare l’esclusione a priori che l’evento accada, concludendo che la probabilità che in un lancio la moneta cada presentando croce o testa (“o” esclusivo) sia

dunque $1/2$. La presenza dell'aggettivo "equiprobabile" rende difettosa questa definizione dal punto di vista logico, chiudendola in un circolo vizioso, poiché essa fa uso dello stesso concetto di probabilità che "pretende" di definire: «Eccoci dunque costretti a definire il probabile col probabile. Come sapremo che due casi possibili sono ugualmente probabili? Sarà per una convenzione?» (Poincaré, 1950, p. 176). Usualmente, tale anomalia è superata ricorrendo al Principio della Ragion Non Sufficiente o Principio d'Indifferenza,¹¹ introdotto da Pierre Simon de Laplace, per il quale gli eventi vanno intesi come equiprobabili se non si può formulare nessuna ragione per credere il contrario, in quanto si presume che vi sia simmetria perfetta rispetto ai casi possibili. Ma è chiaro che anche una siffatta giustificazione non è del tutto soddisfacente e attira facilmente critiche ben fondate: il non essere in grado di formulare ragioni in contrario non esclude che in realtà ve ne siano.

3.2 - La definizione frequentista

La definizione classica di probabilità presuppone la possibilità di eseguire "virtualmente", e non materialmente, l'esperimento o prova che può dar luogo all'evento atteso, individuando tutti i possibili esiti, e fra questi quelli in cui si presenta l'evento in considerazione, dal semplice esame dell'oggetto protagonista dell'evento: il lancio di un dado può essere facilmente immaginato e con esso i suoi possibili

¹¹ Da non confondersi con il Principio di Ragion Sufficiente di Leibniz, secondo il quale "nulla accade senza che vi sia ragione perché accada proprio così invece che altrimenti".

risultati, eventi croce o testa, anche senza materialmente effettuare l'esperimento, perché l'esame dell'oggetto "dado" ci consente di sapere quali essi sono.¹² Ma tale possibilità riguarda soltanto un limitato sottoinsieme dell'universo di tutti i casi reali, nella maggior parte dei quali, invece, non è applicabile la definizione classica di probabilità.

In molte situazioni reali, infatti, l'evento di cui vogliamo calcolare la probabilità non può essere generato da un esperimento virtuale, ma, al contrario, può manifestarsi soltanto "a posteriori", con l'esperienza effettiva. Occorre, dunque, compiere materialmente gli esperimenti che generano l'evento. Utilizzando i risultati ottenuti, viene spontaneo calcolare il rapporto fra il numero di esiti positivi dell'esperimento (quelli in cui si presenta l'evento atteso) e il numero totale delle prove, cioè la frequenza relativa dell'evento, rapporto che caratterizza bene la "presenza" di questo nella totalità degli esperimenti compiuti. In situazioni di questo tipo si è tentati di riproporre l'applicazione della definizione classica identificare i casi favorevoli con gli esiti positivi delle prove e i casi possibili con le prove effettuate. In questi casi, però, c'è una sostanziale differenza rispetto alle situazioni in cui è applicabile la definizione classica: ora infatti i casi possibili sarebbero "soltanto" le prove finora effettuate, che non esauriscono tutte quelle effettuabili, che sono infinite, e analogamente i casi favorevoli sarebbero "soltanto" gli esperimenti finora effettuati che hanno generato l'evento atteso. In altre parole, nella definizione classica di probabilità gli eventi favorevoli e possibili sono "tutti" quelli

¹² Si consideri, però, l'osservazione precedente relativa alla possibilità della caduta del dado di taglio.

che effettivamente sono favorevoli e possibili; nelle nuove situazioni investigate, invece, essi sono quelli “finora esperiti” e quindi risultano variabili secondo il numero di prove effettuate, che è necessariamente una scelta dello sperimentatore. Qualunque sia il numero di esperimenti da questi deciso, le prove non ancora fatte, ma fattibili, costituiscono altrettanti casi possibili, fra i quali potranno esserci altri casi favorevoli. Pertanto, se assumessimo *tout court* come probabilità la frequenza relativa dell’evento, avremmo una probabilità variabile perché dipendente dal numero di esperimenti effettuati, che è variabile, contrariamente all’unicità del valore calcolato con la definizione classica. Ciò che possiamo investigare è, invece, se esistono condizioni che autorizzano tale assunzione entro un grado di approssimazione accettabile, consapevoli quindi che dovremmo accontentarci di un valore “approssimativo” di probabilità, che non può essere rigorosamente unico come nella definizione classica.

A tale scopo, occorre prendere in considerazione i casi in cui è calcolabile la probabilità per partizione, effettuando “realmente” un certo numero di prove. Consideriamo il solito lancio di una moneta. Ebbene, effettuando più lanci della moneta, “cercando” di mantenere inalterate le condizioni sotto cui essi avvengono, si può osservare che all’aumentare del loro numero, la frequenza relativa dell’evento “croce” (e lo stesso vale per l’evento complementare “testa”) tende a stabilizzarsi attorno a un valore molto prossimo alla probabilità (0,5 o 50%) calcolata con la definizione classica. Tale tipo di esperimento si può ripetere in tutti i casi ai quali è applicabile quest’ultima. Eseguendo successive serie di esperimenti, in ciascuna delle quali si aumenta progressivamente il

numero di esperimenti, si osserva che all'aumentare del numero di questi, il valore della frequenza relativa dell'evento considerato tende a stabilizzarsi attorno a uno stesso valore: è la cosiddetta "legge empirica del caso" o "legge empirica dei grandi numeri". Tale legge, spesso, erroneamente è confusa con il teorema di Bernoulli:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \left(\frac{n}{N} \right) - p \right| < \varepsilon \right\} = 1$$

che asserisce semplicemente che aumentando indefinitamente il numero N di prove, tende alla certezza ($P = 1$) che la probabilità della frequenza relativa dell'evento scarti dalla probabilità classica p per meno di un numero positivo ε comunque piccolo. Questo teorema, qualche volta, viene erroneamente utilizzato come anello di congiunzione fra le definizioni classica e frequentista di probabilità, come è stato acutamente criticato da Bruno de Finetti:

... non si sfugge al dilemma che la stessa cosa non si può assumere prima per definizione e poi dimostrare come teorema, né alla contraddizione di una definizione che assumerebbe una cosa certa mentre il teorema afferma che è soltanto molto probabile.

L'unico anello di congiunzione plausibile fra probabilità per partizione e frequenza relativa è invece la semplice e più onesta legge empirica del caso, in virtù della quale risulta "plausibile" ribaltare i termini dell'osservazione sperimentale, e "assumere" come probabilità la frequenza relativa dell'evento determinata per un numero "abbastanza grande" di esperimenti, in tutti quei casi in cui è possibile "ripetere a pari condizioni" l'esperimento. Questo valore limite, nel senso non matematico ma sperimentale, viene assunto come va-

lore della probabilità nella definizione frequentista. Esso, non essendo un "limite" in senso matematico, non è determinabile tramite operazioni matematiche, bensì tramite un numero teoricamente infinito di esperimenti, in aperto contrasto con il modo operativo sperimentale che conosce soltanto il "finito", per cui in pratica è determinabile con un "opportuno" numero finito di esperimenti. Secondo la definizione frequentista dunque,¹³ *"la probabilità di un evento è il rapporto fra il numero di esperimenti in cui esso si è verificato e il numero totale di esperimenti eseguiti nelle stesse condizioni, essendo tale numero opportunamente grande"*. Quale debba essere in pratica tale numero non è determinabile a priori, ma è solo lo sperimentatore che può definirlo, in base alla legge empirica dei grandi numeri, che lo autorizza a porre fine all'esecuzione degli esperimenti quando rileva che la frequenza relativa dell'evento presenta oscillazioni sempre più piccole: il valore medio di queste è assunto come valore della probabilità (figura 2).

Tale decisione non può che essere soggettiva, approssimativa e variabile da sperimentatore a sperimentatore e, anche per uno stesso sperimentatore, ancora variabile da una serie di esperimenti all'altra (perché, per esempio, non è mai possibile mantenere perfettamente identiche le condizioni sotto cui avviene la prova, per cui il numero di esperimenti oltre il quale le oscillazioni della frequenza relativa diventano "sempre più piccole" cambierà per lo stesso sperimentatore da una serie di esperimenti all'altra).

¹³ Proposta da Richard von Mises, Hans Reichenbach e Guido Castelnuovo agli inizi del secolo XX.

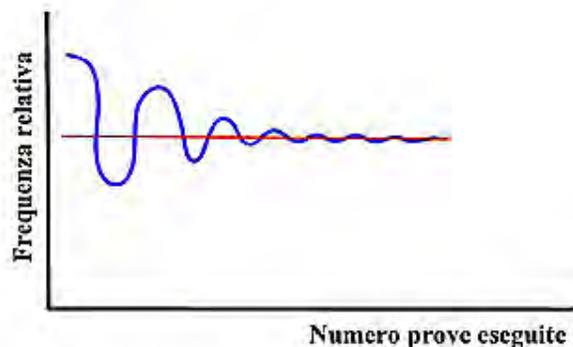


Fig. 2 – Frequenza relativa di un evento versus numero di prove eseguite.

La probabilità, in tale definizione, dipende dunque non soltanto dal numero di esperimenti fatti ma anche dalla valutazione di identità delle condizioni operative, per cui non è univocamente determinabile ed è affetta da errore sperimentale, come la misura di una qualunque altra grandezza fisica.

La definizione frequentista, essendo fondata su un'operatività sperimentale, non richiede che gli esiti dell'esperimento siano equiprobabili e quindi ha il pregio di superare il limite fondamentale di quella classica, per la quale invece tale requisito è indispensabile. È opportuno, però, rilevare che la legge dei grandi numeri giustifica, sperimentalmente, di assumere la frequenza relativa come probabilità nei casi per i quali la simmetria (vale a dire l'equiprobabilità) degli esiti possibili renderebbe applicabile la definizione classica. Pertanto, l'estensione della definizione frequentista ai casi in cui quella di Laplace non è applicabile è un'estrapolazione che ha una certa arbitrarietà. Inoltre, stan-

do sempre alle sue giustificazioni “sperimentali”, la definizione frequentista dovrebbe essere applicata soltanto ad eventi ripetibili, ovvero generati da esperimenti ripetuti esattamente nelle stesse condizioni quante volte si voglia. Tuttavia, in pratica, specialmente in statistica, la frequenza relativa è assunta come probabilità di eventi che non hanno tali caratteristiche, bensì hanno la connotazione di “accadimenti” avvenuti nel passato e non riproducibili quante volte si voglia “in laboratorio”, nel presente o nel futuro. Un esempio servirà a chiarire quanto detto. Volendo dare oggi una stima della probabilità alla mortalità scolastica nel primo biennio della facoltà d’ingegneria, lo statistico otterrà tale valore come frequenza relativa dell’evento “abbandono degli studi da parte di studenti d’ingegneria entro il secondo anno”, riferendosi ad un determinato periodo del passato, per esempio dal 1990 al 2018. A tale scopo, prenderà in considerazione il numero di iscritti a ingegneria in quel periodo e dividerà per esso il numero di studenti che nello stesso periodo hanno abbandonato gli studi entro il secondo anno. È vero che potrebbe prendere in considerazione altri periodi di tempo, il che equivarrebbe a scegliere in qualche modo il numero di “esperimenti” (che in realtà sono invece accadimenti), ma la sua è sempre una scelta condizionata, poiché non può scegliere a piacere il numero di anni cui riferire la sua indagine, anzi può capitargli di avere a disposizione un solo campione di dati numericamente non rappresentativo. In tutte queste situazioni, si fa una forzatura, utilizzando come probabilità la frequenza relativa di eventi per loro natura legati esclusivamente al passato e quindi non ripetibili.

3.3 - La definizione assiomatica

Alcuni matematici,¹⁴ sotto la spinta dell'assiomatismo, hanno proposto una definizione assiomatica della probabilità fondata su tre definizioni e tre assiomi. Le definizioni sono:

- una prova è l'esecuzione di un esperimento "ripetibile", nel senso che deve essere possibile ripeterlo nelle stesse condizioni, e con esito "aleatorio", vale a dire non prevedibile con certezza, qualunque possano essere i nostri sforzi d'indagine;
- l'insieme dei possibili esiti di una prova si dice universo o spazio campione U ;
- un evento E è un qualsiasi sottoinsieme dell'universo U . Lo spazio degli eventi S è l'insieme degli eventi d'interesse, e quindi, in generale, è un insieme di insiemi. Per esempio, con riferimento al lancio dei dadi, i cui esiti possibili sono testa (T) e croce (C), e quindi è $U = \{T, C\}$, si può assumere come spazio degli eventi S l'insieme delle parti $\{T\}$, $\{C\}$, $\{\emptyset\}$, $\{T, C\}$ dell'universo U che comprende anche l'insieme vuoto $\{\emptyset\}$ e U stesso.

¹⁴ Il primo a esporre una teoria assiomatica coerente e sistematica della probabilità è stato il matematico russo Andrei Nicolaievic Kolmogorov nel 1933, con la sua monografia *Grundebegriffe der Wahrscheinlichkeitrechnung* (*Fondamenti del calcolo delle probabilità*), soddisfacendo in parte le richieste di David Hilbert di dare una fondazione assiomatica alla teoria della probabilità.

In particolare se E è costituito da un solo esito si dice evento elementare, mentre se è costituito da più esiti, si dice evento composto. L'universo U è anche l'evento certo, poiché è costituito da tutti gli esiti possibili. Ad ogni esito si può associare un punto di uno spazio euclideo a n dimensioni; U è pertanto lo spazio i cui punti rappresentano tutti e soli gli esiti possibili di una prova, mentre un evento E è un sottoinsieme di tale spazio, cioè è costituito da una parte dei punti di U , potendo ridursi a un solo punto nel caso di evento elementare.

Per fissare le idee, si pensi al lancio di un dado, di due dadi, di tre dadi, ...di n dadi: l'esito della prova è rispettivamente il numero, la coppia di numeri, la terna di numeri ...l'ennupla di numeri delle facce dei dadi rivolte verso l'alto. Dunque, ad ogni esito si può associare un numero, una coppia di numeri, una terna di numeri, una ennupla di numeri, che possono essere intesi come coordinate di uno spazio euclideo a 1, 2, 3, ... n dimensioni. Se, per esempio, nel lancio di un dado l'evento è l'uscita del numero 2, si ha l'evento elementare $E = \{2\}$, mentre se l'evento considerato è l'uscita di un numero pari si ha l'evento composto $E = \{2, 4, 6\}$, vale a dire l'evento occorre se l'esito del lancio del dado è uno dei numeri 2, 4, 6. Nel caso di eventi composti, due eventi si dicono compatibili quando la loro intersezione è un insieme non vuoto: $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$ (quindi hanno almeno un evento semplice in comune), incompatibili quando invece la loro intersezione è un insieme vuoto: $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ (quindi non hanno alcun evento semplice in comune).

Due eventi incompatibili sono, per esempio, gli eventi testa e croce nel lancio di un dado, l'uno escludendo l'altro;

due eventi compatibili, invece, sono l'uscita di una figura e di una carta di cuori nell'estrazione di una carta da un mazzo, potendo una carta di cuori essere anche una figura.

La probabilità assiomatica è una funzione d'insieme¹⁵ P definita sullo spazio degli eventi S , ovvero è una legge in grado di assegnare ad ogni evento E appartenente ad S un numero che soddisfa i tre assiomi di Kolmogorov:

- 1) *la probabilità di un evento E è un numero reale non negativo: $0 \leq P(E) \in \mathbb{R} \leq 1$;*
- 2) *la probabilità di un evento certo è 1: $P(U) = 1$ (U è per definizione l'evento certo);*
- 3) *la probabilità di un evento composto dagli eventi semplici E_1 e E_2 incompatibili ($E_1 \cap E_2 = \emptyset$) è la somma delle probabilità di E_1 e di E_2 : $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$.*

Così introdotta, la probabilità è formalmente definita come misura di un insieme, e rientra pertanto come caso particolare nella più generale Teoria della misura, potendo essere interpretata come misura normalizzata $P(E)$ dell'insieme-evento E (il suo valore è un numero compreso tra 0 ed 1, estremi inclusi).

L'impostazione assiomatica della probabilità è accattivante per il suo rigore formale, con cui è possibile dedurre tutta la teoria della probabilità dalle premesse (definizioni, assiomi), soddisfacendo pienamente lo spirito deduttivo del matematico, ma ha un grosso difetto: non definisce cos'è in real-

¹⁵ Cioè una funzione definita non su un insieme numerico bensì su un insieme di insiemi.

tà la probabilità. Infatti, come in qualunque teoria assiomatica, la probabilità non è definita nella sua natura, ma è definita soltanto implicitamente come “un” (e non “quel”) numero reale non negativo che soddisfa i tre assiomi di Kolmogorov. Tale numero dipende dalla funzione d’insieme scelta, in altri termini il valore della probabilità assiomatica dipende dal criterio scelto per la misura dell’insieme-evento. Insomma, si ha una situazione analoga alla geometria euclidea, in cui il punto, la retta e il piano non sono definiti esplicitamente, ma implicitamente attraverso le loro mutue relazioni (assiomi), per cui, come paradossalmente diceva David Hilbert (1862-1943), i punti, le rette e i piani potrebbero in realtà essere anche bicchieri, posate o quant’altro, purché soddisfacenti gli assiomi euclidei. La teoria assiomatica della probabilità, oltre il rigore logico, ha un altro pregio. Riportando le considerazioni sugli eventi a calcoli sugli insiemi corrispondenti, attraverso il concetto di probabilità come misura normalizzata dell’insieme-evento, consente la determinazione della probabilità in casi in cui non è possibile applicare la definizione classica, come per esempio quando è infinito non numerabile¹⁶ sia il numero degli esiti possibili sia il numero di quelli favorevoli. In altre parole, la probabilità assiomatica può fornire una risposta a quesiti del tipo: quale è la probabilità che un ago, imperniato ad una sua estremità nel centro di un cer-

¹⁶ “Non numerabile” significa che non può essere posto in corrispondenza biunivoca con l’insieme dei numeri naturali 1,2,3,... Un’infinità numerabile è discreta in quanto costituita da una distribuzione discontinua di infiniti elementi; una infinità non numerabile è continua perché è costituita da una distribuzione continua di infiniti elementi (per esempio i punti di un segmento).

chio, cada entro un determinato settore di questo, per esempio di 30° ? È chiaro, infatti, che assumendo come eventi elementari le posizioni assunte dall'ago quando si ferma, sia quelle entro l'intero cerchio (eventi possibili) sia quelle entro il settore considerato di 30° (eventi favorevoli) sono infinite non numerabili, perché costituiscono un *infinitum continuum*: la probabilità classica sarebbe data quindi dal rapporto ∞ / ∞ che è una forma indeterminata. Invece, con la teoria assiomatica, la probabilità può essere assunta come la misura normalizzata dell'insieme degli esiti favorevoli, vale a dire il rapporto fra la misura del settore entro cui ci si aspetta che l'ago cada (30°) e la misura dell'angolo giro corrispondente all'intero cerchio (360°), che costituisce l'universo U, e quindi $P = 30^\circ/360^\circ = 8,3\%$

4 - Le critiche della scuola soggettivista

Le definizioni di probabilità fin qui date, pur risultando proficue in numerosi casi, offrono il fianco a varie critiche:

- 1) sono ottenute sulla base unicamente di eventi già accaduti o ripetibili e quindi non sono applicabili a quella stragrande maggioranza di casi in cui gli eventi di cui vogliamo stimare la probabilità non sono mai accaduti oppure sono per loro stessa natura irripetibili. Per esempio, è palese a tutti che con nessuna delle definizioni finora date (classica, frequentista, assiomatica) è possibile stabilire la probabilità di eventi del tipo: domani pioverà, il prossimo presidente della repubblica italiana sarà

una donna, nel 2020 nasceranno gli Stati Uniti d'Europa, il prossimo papa sarà africano. Di fatto, è relativamente a casi di questo tipo che nella vita di tutti i giorni siamo maggiormente stimolati a esprimere una nostra "ragionevole" previsione e quindi a stabilirne la probabilità;

- 2) la ripetibilità degli esperimenti è un'utopia, perché in realtà nessun esperimento è perfettamente ripetibile in quanto non è possibile mantenere rigorosamente identiche le condizioni sotto cui è ripetuto;
- 3) le definizioni per partizione (classica) e in base alla frequenza relativa non sono vere definizioni, ma metodi per ottenere il valore della probabilità, sono quindi tutt'al più definizioni operative e non dicono nulla sulla vera natura della probabilità; la definizione assiomatica, infine, non è operativa ed è una definizione implicita per assiomi, che nulla quindi può dire su "cosa è" la probabilità;
- 4) ad onta della loro pretesa oggettività, sono in esse presenti elementi soggettivi che dipendono dal soggetto che valuta la probabilità: la valutazione della equiprobabilità degli eventi possibili nella definizione classica, la scelta del numero di esperimenti da effettuare e la valutazione della identità delle condizioni sperimentali in quella frequentista, la scelta della funzione d'insieme che fornisce la misura dell'insieme-evento nella definizione assiomatica;

- 5) si allontanano dal senso comune originario di probabilità, che è ben evidenziato invece nelle definizioni “non matematiche” del vocabolario Zingarelli, che sottintendono un punto di vista squisitamente soggettivo che senz’altro riscuote il consenso dell’uomo comune

Parlare di soggettivismo, in genere, non è stato ben accetto da matematici e scienziati, abituati da sempre a pensare in termini oggettivi, fin quando Bruno de Finetti, nel secolo scorso, molto scettico nei confronti degli atteggiamenti decisamente deterministici e assolutisti della scienza tradizionale, si è imposto al mondo scientifico internazionale come strenuo e originale propugnatore del soggettivismo nel campo della probabilità,¹⁷ criticando il “presunto” rigorismo e oggettivismo delle vecchie definizioni di probabilità (de Finetti, 1974):

Esse non definiscono nulla; peggio ancora nascondono, con sproloqui e arcane definizioni, colme di fumo e di vuoto, il vero senso in cui il termine è usato dall'ultimo uomo della strada... La cosiddetta definizione basata su partizioni in casi ugualmente probabili richiede sia già acquisito, in senso soggettivo, il concetto di uguale probabilità. E quella basata sulle frequenze richiede il medesimo circolo vizioso ed in più un'intuizione (necessariamente grossolana) di un nesso tra osservazione di frequenze e valutazioni di probabilità, nesso di cui soltanto un'adeguata elaborazione della teoria delle

¹⁷ Anche il logico inglese Frank Ramsey (*The foundations of mathematics and other logical essays*, 1931) giunse, indipendentemente da de Finetti, a una concezione soggettivista della probabilità.

probabilità (soggettive) permette di stabilire il significato in base ad effettiva analisi delle circostanze in gioco.

In tale spirito Bruno de Finetti diede la quarta e fondamentale definizione di probabilità: «grado di fiducia di un dato soggetto, in un dato istante e con un dato insieme di informazioni, riguardo al verificarsi di un dato evento» (de Finetti, 1970, vol.1. p. 6) .

Questa definizione della probabilità riporta il significato di probabilità alla comune accezione dell'uomo della strada.

La definizione soggettiva non è una definizione “operativa”, nel senso che non indica una procedura specifica per assegnare alla probabilità un valore numerico, salvo che dovrà essere un valore (compreso fra 0 e 1) tanto più vicino a uno quanto maggiore è la nostra convinzione che l'evento si verifichi, e tanto più vicino a zero quanto maggiore è la nostra convinzione che l'evento non si verifichi.

Secondo lo schema delle scommesse, prediletto dalla impostazione soggettivista di de Finetti, il valore assegnato alla probabilità di un evento è il rapporto tra la “posta” di chi valuta la probabilità e la somma delle “poste” dei due scommettitori.

Così, per esempio, se Giovanni è disposto a scommettere 3 contro 1 che il cavallo Destriero vincerà la prossima corsa, significa che il suo avversario è invece disposto a scommettere 1 contro 3 che quel cavallo vincerà: la probabilità che Giovanni attribuisce alla vittoria di Destriero, quindi, è per lui, $\frac{3}{4}$, vale a dire il 75%, mentre per il suo avversario è $\frac{1}{4}$, pari al 25%.

In altri termini la scuola soggettivista di de Finetti e Ramsey, provocatoriamente, assegna alla probabilità di un evento

il valore numerico pari «alla massima somma di denaro che un soggetto razionale è disposto a scommettere a fronte di una vincita lorda unitaria». La “posta” impegnata nella definizione di de Finetti può essere determinata in svariati modi (simulazioni al computer, calcoli scientifici, calcoli combinatori, frequenza relativa, valutazioni puramente intuitive, rapporto casi favorevoli/casi possibili, ecc.), ma sempre in maniera “equa e coerente con le informazioni” possedute dal soggetto che valuta la probabilità.¹⁸

La definizione soggettivista di probabilità, dunque, non rigetta le precedenti definizioni, ma le recupera sottraendole all’errata pretesa di oggettivismo, per utilizzarle più ragionevolmente e realisticamente in ottica soggettivista, come scelte non necessarie, bensì ritenute utili da chi deve dare un valore alla probabilità, in base alle “sue” informazioni o al “suo” intuito. Il soggettivismo in essa presente non è pertanto “arbitrarietà”, come a volte è frainteso da alcuni, ma l’espressione dell’opinione del soggetto che valuta la probabilità, coerente con le informazioni, di qualunque tipo, di cui egli dispone sull’evento, comprendendo fra esse anche la conoscenza di diverse valutazioni della probabilità dell’evento espresse da altri soggetti o, perfino, la mancanza di qualunque informazione.

Le tecniche di calcolo messe a punto da Bruno de Finetti sono tali da consentire di ricavare, in maniera coerente con le premesse, il valore della probabilità e pertanto sono “oggettive”, pur essendo le premesse stesse soggettive, in accordo

¹⁸ Sarebbe qui troppo lungo illustrare il significato della frase «equa e coerente con le informazioni», per il quale si rimanda alle trattazioni specialistiche sulla probabilità soggettiva.

con l'osservazione, precedentemente data in queste pagine, sulla sostanziale differenza fra il calcolo delle probabilità, che ha valore oggettivo, e i metodi per la definizione di probabilità, che possono variare. La definizione di probabilità dello Zingarelli: «La misura in cui si giudica che un avvenimento sia realizzabile o probabile», che a prima vista può sembrare poco scientifica, contiene, invece, proprio i tre elementi essenziali che caratterizzano la definizione più generale di probabilità data da de Finetti: misura, giudizio e realizzabilità.

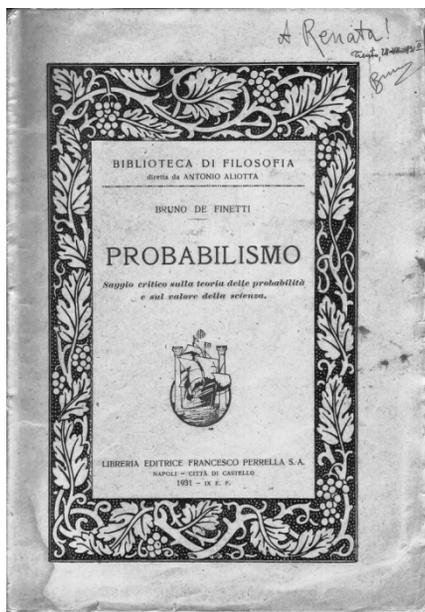


Fig. 3 – Bruno de Finetti, Probabilismo con la dedica di Bruno de Finetti alla moglie Renata (1930). Fotografia tratta da Fulvia de Finetti e Luca Nicotra, Bruno de Finetti, un matematico scomodo, Belforte, 2008.

La definizione definettiana ha il pregio innegabile di fornire “sempre” un valore della probabilità, anche nei casi in cui l’evento non è ripetibile, non è mai accaduto o le informazioni disponibili sono molto scarse o inesistenti. Inoltre, è notevole constatare che esistono casi in cui alcuni eventi sono composti di altri ai quali, in base alle precedenti definizioni, non sarebbe possibile assegnare alcun valore di probabilità e che, d’altra parte, la probabilità di tali eventi complessi risulta poco influenzata dalle probabilità assegnate agli eventi componenti. Di conseguenza, non ha molto senso discutere sulla “attendibilità” dei valori di probabilità assegnati agli eventi elementari, mentre è essenziale prendere l’iniziativa di assegnare in qualche modo tali valori. L’approccio soggettivista consente di sbloccare brillantemente tali situazioni, applicando il calcolo delle probabilità laddove sarebbe impossibile con le altre definizioni di probabilità. Bruno de Finetti applicò le sue vedute probabilistiche anche in psicologia, a molti aspetti dell’istinto, del subconscio e dell’intuizione, ai quali riconobbe sempre un ruolo decisivo nel processo della scoperta matematica. Una curiosità: egli pose in evidenza, per esempio, la manifestazione di un certo senso della probabilità da parte dei cinghiali quando, inseguiti dai cacciatori, cercano di trovare una via di scampo.

Il soggettivismo di de Finetti è frutto essenzialmente di quell’assenza di rigidità mentale, che è cosa ben diversa dal rigore, che ha sempre contraddistinto il suo pensiero, caratterizzando il matematico italiano come acerrimo e autorevole nemico di ogni forma stereotipata di schemi mentali. Nel passato, pur essendo ben lontano da un approccio soggettivista, già il grande matematico francese Simone de Laplace nel

1814, nel suo *Essai philosophique des probabilités*, aveva espresso idee tutt'altro che rigide sulla probabilità: «In fondo la teoria delle probabilità è soltanto senso comune espresso in numeri».

Il “senso comune”, si sa, non è qualcosa di determinato secondo rigide leggi, ma è soprattutto “opinione” ragionevole. Tale affermazione, dunque, già allora apriva una strada in fondo alla quale non è difficile scorgere la visione soggettivista della probabilità.

La probabilità, con Bruno de Finetti, ritorna alle sue origini, delle scommesse e della concezione spontaneamente soggettiva dell'uomo della strada.



Fig. 4 - Targa commemorativa accanto al portone d'ingresso della casa natale di Bruno de Finetti a Innsbruck. In testa si legge la famosa frase: *La probabilità non esiste.*

È il frutto del suo effettivo “realismo” (ben diverso dal presunto realismo degli oggettivisti della probabilità!), della sua disarmante onestà e semplicità scientifica, che rigetta

sdegnosamente i falsi idoli, da chiunque vengano creati (de Finetti B., 1969, p. 94):

Sul piano accademico alligna in genere la civetteria di voler separare e collocare su uno sgabello più onorifico o certe speciali cose o certi linguaggi più pomposi per trattare di comuni cose, in modo da riservare a ciò che si colloca sullo sgabello, e negare a ciò che si lascia sul pavimento, la qualifica di scienza. Molti dei criteri di separazione adottati a questo scopo e delle discussioni cui conducono hanno indubbiamente valore e interesse da qualche punto di vista, [...] ma ogni erezione di una qualunque siffatta distinzione a criterio di discriminazione accademica costituisce una mutilazione suicida: si uccide la scienza che è vita cui nulla è precluso, collocando al suo posto un feticcio imbalsamato e gonfio di cattedratica boria.

E ancora (de Finetti B. , 1980, p. 1146):

La probabilità: chi è costei? Prima di rispondere a tale domanda è certamente opportuno chiedersi: ma davvero 'esiste' la probabilità? e cosa mai sarebbe? Io risponderei di no, che non esiste. Qualcuno, cui diedi questa risposta (ribadita, col motto in tutte maiuscole - PROBABILITY DOES NOT EXIST- nella prefazione all'inglese di Teoria delle probabilità [1970]), mi chiese ironicamente perché mai, allora, me ne occupo.

Mah! Potrei anche dire, viceversa e senza contraddizione, che la probabilità regna ovunque, che è, o almeno dovrebbe essere, la nostra 'guida nel pensare e nell'agire', e che perciò mi interessa. Soltanto, mi sembra improprio, e perciò mi urta, vederla concretizzata in un sostantivo, 'probabilità', mentre riterrei meglio accettabile e più appropriato che si usasse soltanto l'aggettivo, 'probabile', o, meglio ancora, soltanto l'avverbio, 'probabilmente'.

Dire che la probabilità di una certa asserzione vale 40 per cento appare - purtroppo! - come espressione concreta di una verità apodittica. Non pretendo né desidero che tale modo di

esprimersi vada bandito, ma certo è che l'asserzione apparirebbe assai più appropriatamente formulata se la si ammorbidisse dicendo, invece, che quel fatto lo si giudica 'probabile al 40 per cento', o, meglio ancora (a parte che suona male), che ci si attende 'al 40 per cento- probabilmente' che sia o che risulti vero.

Bibliografia

Barra Mario (n.d.). *Galileo Galilei e la probabilità*, on-line in http://www.fundacionorotava.org/media/web/files/page145_c_ap_01_05_Barra.pdf.

Bernoulli Jacob (1713). *Ars conjectandi*.

Cardano Gerolamo (1524?-1570?). *Liber de ludo aleae*.

de Finetti Bruno (1969). *Un matematico e l'economia*. Milano: Franco Angeli.

de Finetti Bruno (1970). *Teoria delle Probabilità*. Voll. 1 e 2. Torino: Einaudi.

de Finetti Bruno (1974). *Interventi al Convegno della C.I.I.M., Viareggio 24-25 ottobre 1974*.

de Finetti Bruno (1980). *Probabilità. Enciclopedia Einaudi*, Torino: Einaudi.

de Laplace Pierre Simon (1814). *Essai philosophique sur les probabilités*. Paris: Courcier, Imprimeur-Libraire.

de Laplace Pierre Simon (1820). *Théorie analytique des probabilités* (1820) in *Ouvres complètes De Laplace* publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences, Tome Septième. Paris: Gauthier-Villars, Imprimeur-Libraire, 1886. Prima edizione 1812.

Huygens Christiaan (1657). *De ratiociniis in ludo aleae*.

Galilei Galileo (1897). Sopra le scoperte de i dadi, In *Le Opere di Galileo Galilei, Edizione Nazionale (E.N.)* a cura di Antonio Favaro, La Barbèra 1897, Vol. VIII, pp. 591-594.

Kolmogorov Andrei Nicolaievic (1933). *Grundebegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*.

Pacioli Luca (1494). *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*.

Pascal Blaise (1654). *Traité du Triangle Arithmétique, avec quelques autres petits traitez sur la mesme matière*.

von Leibniz Wilhelm Gottfried (1666). *Dissertatio de arte combinatoria*.

Il pensiero diagrammatico nel Liber Abbaci

Silvia Cerasaro* Laura Tomassi**

* Dipartimento di matematica - Università Tor Vergata di Roma;
cerasaro@axp.mat.uniroma2.it

** Dipartimento di matematica - Università Tor Vergata di Roma;
tomassi@axp.mat.uniroma2.it



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v6n4.143

Sunto: *In questo articolo si mostrano le origini storiche di due diagrammi presenti nel Liber Abbaci di Fibonacci, trattato di aritmetica del XIII secolo, ponendo in evidenza la loro valenza didattica, spiegata in maniera dettagliata prima dell'applicazione nella risoluzione di problemi legati alla realtà del tempo. I diagrammi descritti vengono usati dal matematico pisano con gli stessi principi che oggi sono spiegati dalle neuroscienze, mostrando quanta attenzione venisse data all'apprendimento dell'aritmetica.*

Parole Chiave: *Diagramma, Euclide, Fibonacci, Liber Abbaci*

Abstract: *This article shows the historical origins of two diagrams present in Fibonacci's Liber Abbaci, a 13th century arithmetic treatise, highlighting their didactic value, explained in detail before their application in solving problems linked to the reality of time. The diagrams described are used by the Pisan mathematician with the same principles that are today explained by neuroscience, showing how much attention was given to learning arithmetic.*

Keywords: *Diagram, Euclid, Fibonacci, Liber Abbaci*

1 - Introduzione

Dalla lettura dell'opera più nota di Leonardo Pisano detto Fibonacci, il *Liber Abbaci* (1202)¹ appare evidente la presenza di numerosi diagrammi che affiancano il testo. La motivazione di questa caratteristica strutturale dell'opera potrebbe essere attribuita al fatto che si tratta di un libro in cui si descrivono gli algoritmi del sistema decimale posizionale di origine indo-arabica.²

Si potrebbe affermare che la finalità didattica giustifichi la necessità di numerose illustrazioni. Ad una riflessione più attenta non sfugge che l'utilizzo del diagramma è una caratteristica in comune con la matematica degli *Elementi* di Euclide, più volte dichiarato da Fibonacci come fonte di ispirazione per la metodologia di lavoro usata nella redazione del *Liber Abbaci*. A differenza dei libri d'abbaco successivi, dei

¹ La prima edizione del *Liber Abbaci* è del 1202, mentre la seconda è del 1228, di cui sono disponibili diversi codici.

² «La traduzione del titolo corretto *Liber Abbaci* è *Libro del calcolo* e non, come spesso invece si legge, *Libro dell'abaco*, facendo riferimento al titolo errato *Liber abaci*. Infatti il libro fu scritto da Leonardo Pisano, detto Fibonacci, per far conoscere il nuovo modo di calcolare reso possibile dalla notazione posizionale decimale in contrapposizione al vecchio modo di calcolare con l'uso dell'abaco. L'errata traduzione nasce dall'ignoranza della distinzione fra i termini *abacus* e *abbacus*: il primo indica l'abaco, mentre il secondo indica l'algoritmo ovvero (come veniva chiamata in quell'epoca) la tecnica di calcolo con le dieci cifre del sistema posizionale indo-arabico» (Nicotra, 2014, p. 11). Il termine *abbacus* fu introdotto da Leonardo Pisano e venne poi largamente utilizzato nel latino medioevale per indicare il modo di calcolare basato sul sistema di numerazione decimale posizionale indo-arabico (Devlin, 2013, pp. 21-22).

quali è il capostipite, il *Liber Abbaci* è permeato da un formalismo e un rigore maggiore, compatibilmente con lo sviluppo del pensiero matematico dell'epoca, essendo il trattato che introdusse in Occidente le tematiche innovative della matematica araba fusa con la tradizione euclidea. Numerosi studi hanno infatti caratterizzato le illustrazioni degli *Elementi* di Euclide come mezzo dimostrativo ed espressivo di ciò che è stato definito "pensiero diagrammatico euclideo". Nei prossimi paragrafi si esporranno in maniera dettagliata queste considerazioni che riguardano la storia della matematica, ma anche l'apprendimento della matematica stessa, come dimostrato dagli attuali studi delle neuroscienze. Dato che il pensiero diagrammatico ha a che fare con le abilità matematiche innate, come dimostrato dalle neuroscienze, si può prendere in considerazione anche una sua influenza sulla didattica della matematica.

2 - Come leggere un testo storico

Il forte desiderio di conoscenza degli studiosi che nutrono interesse verso la storia della scienza rischia di identificare solo il contenuto del testo storico, tralasciando, invece, la forma da cui poter comprendere anche più del contenuto stesso. La matematica antica e medievale vengono molto spesso, in maniera impropria e anacronistica (Grattan-Guinness, 1996), tradotte in oggetti algebrici. Ridurre il contenuto di un testo storico ad un insieme di formule algebriche rischia di non dare la giusta importanza al pensiero originale dello studioso inserito in un particolare contesto storico, anche se aiuta la comprensione di ciò che si legge

(Unguru, 1975; Rowe, Unguru, 1981). La storia è uno strumento di conoscenza, è uno studio dei metodi e dei mezzi usati nella matematica antica e non nel contenuto matematico (Netz, 1999). Nel momento in cui si decide di considerare un testo storico matematico, occorre tener presente dell'evoluzione del linguaggio nel corso dei secoli: dal linguaggio naturale e retorico della matematica antica, a quello arricchito dall'utilizzo di alcuni simboli, fino all'attuale simbolismo algebrico.

Questi metodi differenti usati dall'uomo per parlare di matematica testimoniano un'evoluzione del pensiero matematico e filosofico, il che induce a pensare che a volte si fanno delle forzature ad interpretare il passato con gli strumenti di cui disponiamo oggi.

Nei testi matematici babilonesi e greci, in cui si parla di aritmetica (discussa solo oralmente per i Babilonesi) e geometria, non ci sono simboli e formule, tutt'al più si possono trovare "formule" intese come formulazioni, un insieme di parole, una descrizione ricorrente, come ad insegnare una stessa metodologia per risolvere problemi diversi.

Per cui, nel momento in cui si vuole studiare un testo matematico antico, occorre avere a disposizione una "cassetta degli attrezzi" che permetta non solo di comprendere il contenuto matematico, ma anche di impostare correttamente le implicazioni logiche dei ragionamenti effettuati (Netz, 1999). Tale cassetta era quella di cui disponeva anche il matematico greco, il quale costruiva una teoria matematica, utilizzando le caratteristiche di quello che definirei discorso storico matematico, se si tengono in considerazione le

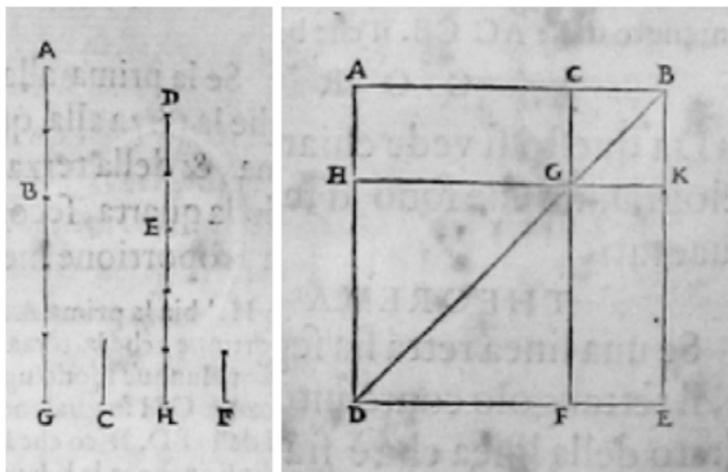
caratteristiche dell'attuale *mathematical discourse* (Sfard, 2008). Il discorso storico matematico è così caratterizzato:

- uso di significati specifici attribuiti, attraverso opportune definizioni, a termini usati nella vita quotidiana, dovuto alla povertà del vocabolario utilizzato;
- realizzazione di un diagramma con lettere, che supporta visivamente la dimostrazione di un teorema, presente, oltre che nei testi ellenistici, anche nei testi medievali, chiaramente ispirati a quelli del passato;
- lessico, a volte ambiguo, usato nelle dimostrazioni, supportato, come già detto, dal diagramma;
- formulazioni ricorrenti per descrivere opportuni procedimenti.

Nelle dimostrazioni e nei diagrammi, che hanno una relazione simbiotica, non sono presenti caratteri speciali ma le lettere del linguaggio comune, che sono inserite in sequenza, in base all'ordine in cui compaiono nella dimostrazione stessa. Le formule, come già anticipato, sono intese come formulazioni, come un insieme di vocaboli che si ripetono per descrivere una metodologia, come avviene, ad esempio, nella teoria delle proporzioni di Euclide, negli *Elementi*, dal quinto al settimo libro. In particolare, nel sesto libro, in cui si parla di similitudine, la visualizzazione geometrica del diagramma incontra la verbalità e l'uso della formula ed il risultato è stata una bellissima e solida teoria alla base di tutta la matematica utilizzata nei millenni successivi.

3 - Il *Liber Abbaci*

Il *Liber Abbaci* è il trattato di aritmetica che introdusse nel mondo europeo il sistema decimale posizionale, le frazioni e altri contenuti matematici provenienti dal mondo indo arabico nel 1202.



Figg. 1 e 2 - Diagrammi tratti dagli Elementi di Euclidedi Federigo Commandino, 1575 (Libro V, prop. 2, p. 66, Libro II, prop. 4, p. 33)

Le figure indiane erano state già gradualmente introdotte da Gerberto d'Aurillac intorno all'anno 1000, ma non la loro aritmetica.

Nel 1228, a seguito di una richiesta da parte di Michele Scoto di poter leggere il suo trattato, Leonardo Pisano lo rivisitò apportando correzioni e ampliandolo, come afferma lui stesso nel Prologo, in cui è presente la dedica al filosofo e astronomo presso la corte di Federico II da Svevia. Nel Prologo è possibile anche leggere le motivazioni che hanno spinto Leonardo Pisano a scrivere questo trattato: emerge

l'amore per l'aritmetica araba, ben mescolata con quella ellenistica.

Esistono diversi codici del *Liber Abbaci*, molti dei quali incompleti, presi tutti in considerazione da Enrico Giusti per il suo studio sulle opere di Leonardo Pisano, e, in particolare, per la scrittura della prima edizione critica completa, elaborata assieme a Paolo d'Alessandro nel 2020 (D'Alessandro, Giusti, 2020).

Il trattato ha una prima parte, che consiste di sette capitoli (I-VII) in cui si parla di aritmetica: dopo l'introduzione al sistema decimale posizionale che fa uso delle figure indiane, Leonardo descrive l'aritmetica dei numeri interi e delle frazioni. In particolare, egli sembra mostrare, attraverso esempi relativi alla scrittura dei numeri con le nuove figure, quanta semplificazione sia stata apportata nel fare i conti con le nuove cifre e il nuovo sistema, soprattutto nelle operazioni della moltiplicazione e della divisione,³ oltre a definire diversi tipi di frazioni.⁴

³Leonardo descrive la moltiplicazione a scacchiera a p. 19 della versione di Boncompagni, sicuramente più agevole di quella romana, che avviene in linea, e sfruttando la proprietà distributiva, facendo uso dell'abaco. Nella divisione, in particolare nel resto, compaiono delle novità in assoluto, i numeri razionali, che Leonardo Pisano chiama numeri rotti, i quali non erano presi affatto in considerazione nell'aritmetica romana, nella quale comparivano particolari rapporti non considerati come numeri.

⁴ Si fa riferimento alle frazioni che oggi definiremmo continue ed ascendenti, con più numeratori e denominatori, in diversa posizione, a cui resta associato un diagramma per poterle prendere in considerazione con semplicità.

Nei quattro capitoli successivi (VIII-XI), sono mostrate applicazioni dell'aritmetica descritta precedentemente: si risolvono problemi della vita quotidiana inerenti acquisti, vendite, baratti, finalizzati a rendere familiari gli algoritmi del nuovo sistema. In questi capitoli compare un particolare diagramma, utile per determinare il quarto proporzionale, significato matematico utilizzato nella regola del 3. Il XII capitolo è il più ampio del trattato, nel quale sono affrontati problemi "surreali" per mostrare aspetti importanti della matematica avanzata, alcuni risolvibili con la regola del 3 o del 5. Si tratta di matematica ricreativa che fa uso di progressioni aritmetiche (trattate con l'utilizzo di un interessante diagramma) e di progressioni geometriche: è trattato il problema della scacchiera (Boncompagni, 1857, p. 309), ovvero il problema che prevede di raddoppiare il numero di chicchi di riso presenti in ognuno delle 64 caselle della scacchiera, seguendo la potenza di due, che ricorda la leggenda dell'inventore degli scacchi Sissa Nassir.

C'è un problema del tutto simile ad uno presente nel papiro di Rhind: Sette vecchiette vanno a Roma; di queste ognuna ha 7 muli; e su ogni mulo ci sono 7 bisacce; e in ogni bisaccia 7 pani; e ogni pane ha 7 coltelli, e ogni coltello ha 7 foderi. Si chiede quale sia il totale di tutto quello appena detto. (Traduzione a cura di Progetto Fibonacci di Boncompagni, 1857, p. 312)

Sempre nello stesso capitolo è presente il problema per cui oggi il più delle volte viene ricordato Leonardo Pisano, ovvero il problema dei conigli:

Un tale mise una coppia di conigli in un posto, che era circondato dappertutto da un muro, per sapere quante paia sarebbero nate in un anno, essendo nella loro natura di partorire ogni mese un'altra coppia, e partoriscono nel secondo mese dalla loro nascita.

(Traduzione a cura di Progetto Fibonacci di Boncompagni, 1857, p. 283)

Nel capitolo XIII sono mostrati, invece, problemi risolvibili con il metodo della doppia falsa posizione, mentre negli ultimi due capitoli, il XIV e il XV, si parla di questioni algebriche e di radici quadrate e cubiche, argomenti che fanno pensare che proprio questi due capitoli vadano a formare il commentario al libro X degli *Elementi* di Euclide.

Il giovane Leonardo, dopo la sua formazione a Pisa, ebbe i migliori maestri nel suo soggiorno a Bugia durante i suoi viaggi nel Mediterraneo. Non è facile risalire alle fonti che, però possono essere ricondotte a due grandi gruppi: i testi della tradizione araba e quelli della tradizione greco-latina.

La tradizione araba lo influenzò in campo aritmetico e algebrico: Abu Kamil, Ibn al-Yasamin e, soprattutto, Al-Khwarizmi, le cui traduzioni di sue opere circolavano già in Europa, ed in Italia, dopo la traduzione effettuata da Roberto da Chester nel 1145 e da Gherardo da Cremona nel 1150. Gli *Elementi* di Euclide erano stati tradotti nella lingua araba da al-Hajjajibn Matar e Ishaq al-'Ibadi. Inoltre, anche la scuola di Maghreb influenzò Fibonacci, soprattutto per la scrittura delle frazioni continue multiple ascendenti. Per la tradizione greco-latina, la maggiore influenza fu data dagli *Elementi* di Euclide. All'interno del *Liber Abbaci* sono presenti molti passi in cui sono evidenti le conoscenze di Fibonacci apprese dalle proprie fonti. Ad esempio, Nel paragrafo II.37, Leonardo spiega la

moltiplicazione facendo riferimento alla teoria del terzo e quarto proporzionale degli *Elementi* di Euclide, basato sui risultati della proposizione VII.19:

Mostrerò inoltre che questo modo di moltiplicare deriva da ciò che accade tra i numeri tra loro proporzionali. Infatti quando tre numeri sono proporzionali, cosicché il primo sta al secondo come il secondo sta al terzo, allora la moltiplicazione del primo col terzo è uguale alla moltiplicazione del secondo in sé. E quando quattro numeri sono proporzionali, si avrà che come il primo sta al secondo così il terzo sta al quarto. Allora la moltiplicazione del primo nel quarto è uguale alla moltiplicazione del secondo nel terzo, come si trova in Euclide. Infatti un numero sale all'infinito per posizioni continue; poiché come la (il numero in) prima posizione sta alla seconda così la seconda sta alla terza e la terza alla quarta e ciascun antecedente al suo conseguente. Perciò la moltiplicazione di una seconda posizione in sé fa la stessa posizione fatta della moltiplicazione della prima con la terza. E la moltiplicazione di una seconda posizione nella terza fa la posizione fatta dalla moltiplicazione della prima con la quarta. (Traduzione a cura di Progetto Fibonacci di Boncompagni, 1857, p. 15).

Risulta che Euclide sia l'autore più citato da Fibonacci, che conosce molti dettagli dell'opera. Diversi studiosi si sono chiesti quale versione degli *Elementi* egli avesse consultato, per certo non si sa molto, ma si pensa che, oltre a versioni tradotte dall'arabo al latino giunte dall'Europa, egli utilizzò anche una versione greco-latina composta in Sicilia presso la corte di Federico II da Svevia, luogo d'incontro delle tre culture dell'epoca. (Busard, 1987). In differenti parti sia del *Liber Abbaci* che della *Pratica Geometriae* Leonardo enuncia in modi diversi gli stessi risultati e ciò mostra una evidente

conoscenza dell'opera di Euclide, come se sapesse a memoria i risultati che si appresta ad utilizzare nel proprio lavoro (Folkerts, 2004). Inoltre, in alcuni casi, si pensa che le citazioni che utilizza siano il risultato di un diretto studio della versione greca degli *Elementi*, e ciò si deduce dalla presenza di termini tecnici specifici, direttamente dal greco. In altri passaggi, invece, è evidente l'influenza della versione araba dell'opera euclidea. Leonardo Pisano conosceva anche un compendio ai libri XIV e XV degli *Elementi*, trasmessi insieme alla versione greco-latina, e non è escluso, come ritiene Busard, che sia stato proprio lui a compilare tale testo (Folkerts, 2004).

4 - Un'eredità preziosa per Fibonacci: il pensiero diagrammatico degli *Elementi* di Euclide

In questo paragrafo si analizza la scelta di Fibonacci di prendere gli *Elementi* di Euclide come riferimento sostanziale. Considerando l'aspetto trattatistico del *Liber Abbaci*, tale scelta appare logica e perfettamente in linea con un periodo storico, il XIII secolo, in cui si disponeva della traduzione di molte opere greche attraverso la mano araba, cultura tanto importante nella formazione di Fibonacci. Ma l'eredità di Euclide per Fibonacci è preziosa in un senso più lato, sostanziale e riguarda anche l'aspetto didattico del *Liber Abbaci*. Una caratteristica distintiva della geometria euclidea è il carattere naturale e intuitivo delle sue dimostrazioni, cosa che ha garantito ad essa un posto di rilievo nella storia e nell'educazione matematica (Hamami, Mumma, 2013). Infatti dal momento della sua nascita nell'antica Grecia fino al XIX

secolo, la geometria euclidea rimane nell'ambito dell'insegnamento della matematica una materia fondamentale per avviare gli studenti al metodo del ragionamento deduttivo. Il lettore degli *Elementi* di Euclide «immerso nella moderna saggezza algebrica» molto spesso riesce a «discernere la linea di pensiero algebrica dietro il tradizionale ragionamento geometrico» e a «trascrivere la proposizione nel simbolismo moderno» (Unguru, 1975, p. 97). Inoltre nella nostra prospettiva attuale, il fine di Euclide sembra essere quello di porre le basi di una trattazione assiomatico-deduttiva della matematica. Ma sarebbe opportuno porsi la questione se davvero ci fosse in Euclide un tentativo di dirigersi verso l'assiomatica moderna, come essa stessa ha assunto quando ha preteso di superare le criticità intraviste negli *Elementi*, o se invece il pensiero di Euclide non fosse inquadrabile all'interno di un contesto filosofico (non soltanto matematico) in cui egli doveva difendersi dalle obiezioni mosse dai sofisti (De Risi, 2024). Con l'obiettivo di salvaguardare l'autenticità storica, è molto importante considerare non solo il contenuto matematico, ma anche osservare attentamente e senza pregiudizio le modalità di espressione del pensiero di Euclide: insieme questi due aspetti riescono a rendere conto della permanenza di interesse nei secoli nei confronti della matematica euclidea. Come già detto, la cassetta degli attrezzi della matematica greca conteneva i diagrammi. Questa modalità espressiva negli *Elementi*, unita al fatto che altrove (ad esempio in Aristotele) talvolta la parola *διαγράμμα* è usata nel senso di teorema, hanno fatto sorgere in alcuni studiosi l'ipotesi che la matematica greca abbia avuto un'origine diagrammatica

(Netz, 1999) o comunque “dalle prove dell'antica pratica geometrica greca, suppongo che vedere nel diagramma debba essere stata la forma primaria della teoria e del ragionamento geometrico” (Manders, 2008, p. 81).

Negli *Elementi* la parte proposizionale e le immagini hanno pressoché lo stesso spazio, con una interazione continua tra testo ed immagini, tanto che alcune inferenze possono essere definite tout court “inferenze diagrammatiche”. Ad un esame più attento si rintracciano delle “inferenze implicite” ed un pensiero non assiomatico (dal punto di vista del lettore moderno) che si esprime e fa uso strutturale del diagramma, definito “pensiero diagrammatico” (Manders, 2008).

Una dimostrazione geometrica nella matematica classica poggia spesso sulle abilità visuo-spaziali, ossia sulla e. Quando i diagrammi hanno valore epistemico e sono usati per dimostrare teoremi si parla di “ragionamento diagrammatico”; a volte, i diagrammi arricchiscono le dimostrazioni testuali, consentendo di trarre “inferenze diagrammatiche”, che non sono né esplicite né basate su principi proposizionali.

Recenti studi neuroscientifici sull'epistemologia del pensiero visuale in matematica (Giaquinto, 2015) supportano l'ipotesi che le rappresentazioni visive abbiano valore epistemologico in matematica, in particolare nella scoperta di nuovi risultati in geometria e aritmetica. In quest'ottica il ragionamento diagrammatico euclideo si pone al crocevia tra studi di logica, filosofia e scienza cognitiva (Hamami, Mumma, 2013) e apre la strada a indagini empiriche riguardanti:

1. le origini cognitive del ragionamento diagrammatico euclideo;
2. le rappresentazioni cognitive delle relazioni spaziali nei diagrammi euclidei;
3. la natura dei processi cognitivi e delle rappresentazioni cognitive coinvolte nei diagrammi euclidei;
4. la complessità del ragionamento diagrammatico euclideo per il sistema cognitivo umano.

Altri studi di neuroscienze (Regni, Fogassi, 2019) pongono il movimento e in particolare il movimento delle mani (Pasquazi, 2020; Sinclair, 2024) come elemento importante nell'apprendimento della matematica. È sorprendente come nel prologo del *Liber Abbaci* tutto questo sia detto su base assolutamente empirica e intuitiva da Fibonacci:

E poiché la scienza aritmetica e quella geometrica sono connesse e si sostengono a vicenda, non si può trasmettere una piena dottrina del numero se non intersecandola con alcuni concetti di geometria o spettanti alla geometria, che in questo caso pratica il giusto modo di operare sui numeri; modo che è assunto per molte argomentazioni e dimostrazioni che si fanno con le figure geometriche. Proprio in un altro libro che ho composto sulla pratica geometrica, spiegavo ciò che è pertinente alla geometria e a molte altre cose, descrivendolo con la singola figura, dimostrando ogni singola cosa con dimostrazioni geometriche poste sotto. Senz'altro questo libro spetta più alla teoria che alla pratica. Così chi volesse conoscere bene la pratica di questa scienza dovrà applicarsi con uso continuo ed esercizio giornaliero nella pratica di essa, perché se la conoscenza si muta in abitudine attraverso la pratica, la memoria e l'intelligenza concordano a tal punto con le mani e i segni che quasi in un unico impulso e anelito, in uno stesso istante, si accordano

naturalmente su tutto; e allora quando il discepolo avrà conseguito un abito mentale, a poco a poco potrà pervenire facilmente alla perfezione di questa. (Traduzione a cura di Progetto Fibonacci di Boncompagni, 1857, p. 1)

Non meno sorprendente è il massiccio uso della forma diagrammatica all'interno del trattato di Fibonacci.

5 - Esistenza del IV proporzionale e regola del tre

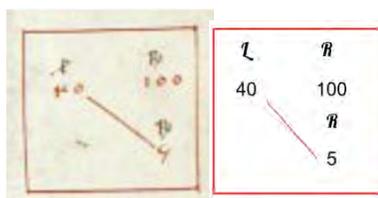
Nella teoria delle proporzioni, descritta a partire del quinto libro degli *Elementi*, Euclide affronta i concetti di rapporto (*logos*) e di proporzione (*analogos*), che nel periodo medievale venivano denotati, rispettivamente, con le parole *proportio* e *proportionalitas*, come fa anche Fibonacci nel *Liber Abbaci*. Leonardo mostra attraverso i suoi problemi, di conoscere bene la teoria euclidea, applicata ai numeri. Ciò che distingue Fibonacci da Euclide è che per l'aritmetica che egli usa, dati dei numeri in proporzione $a:b=c:d$, il quarto proporzionale d esiste sempre ed è un numero razionale, che può esprimere anche un quoziente non risolto, un numero da porre sulla retta dei numeri. Questo in Euclide non accadeva: nelle proposizioni VI.11 e 12, Euclide mostrava che esiste sempre il terzo e il quarto proporzionale dopo due e tre rette⁵ date attraverso la loro costruzione geometrica, ma lo stesso non accadeva per i numeri. Nel settimo libro degli *Elementi*, Euclide applica la teoria delle proporzioni al numero, specificando il rapporto tra due numeri con i concetti di

⁵Euclide allude ai segmenti.

numero come parte e parti di un altro numero⁶. Il rapporto tra due numeri esiste solo se l'algoritmo euclideo tra i due numeri dati ha termine, condizione affinché i numeri dati siano tra loro commensurabili. Nel nono libro, nelle proposizioni 16, 17, 18, 19 Euclide elencava le condizioni affinché esistessero il terzo e quarto proporzionale con i numeri: egli concludeva che esistono solo nel caso sia possibile avere un numero intero nella divisione ottenuta dal procedimento svolto, ovvero solo se si tratta di numeri interi. La novità introdotta da Leonardo Pisano, influenzato dall'elevata aritmetica araba fu proprio l'introduzione dei numeri razionali (numeri rotti, descritti a partire dal quinto capitolo), garanti dell'esistenza del terzo e del quarto proporzionale, che fu strumento di conoscenza di cui l'uomo disponeva fino all'introduzione del pensiero algebrico.

Nel capitolo VIII paragrafo I del *Liber Abbaci*, con l'intento di «procurarsi il prezzo delle merci nel modo migliore», Fibonacci enuncia una *regula*, cioè una formula risolutiva in forma retorica e diagrammatica, meglio nota come regola del tre, che risolve il seguente problema: «in tutti i grandi commerci si trovano sempre quattro numeri proporzionali tre dei quali sono noti mentre l'altro non si conosce» (Traduzione a cura di Progetto Fibonacci di Boncompagni, 1857, p. 85).

⁶ VII.3: Dati due numeri, il minore si dice parte del maggiore quando lo misura. VII.4 Un numero si dice parti di un altro quando non lo misura.



Figg. 3 e 4 - Diagramma tratto dal cap. VIII del *Liber Abbaci*, p. 85 (Conv. Soppr. C.1. 2616, ff. 1r-214r, Firenze) e sua ricostruzione

Nella descrizione Fibonacci dice di porre uno sotto l'altro i numeri che rappresentano grandezze omogenee tra loro, ottenendo così un diagramma rettangolare dove il prodotto dei numeri posizionati agli estremi delle due diagonali è uguale. Ciò permette di calcolare uno dei quattro numeri se gli altri tre sono noti.

Nella seconda parte dell'VIII capitolo, egli promette di spiegare la motivazione di ciò ed afferma che la regola appena spiegata è stata dimostrata in aritmetica e geometria («*ut in arismetricis et in geometria probatum est*»), (Boncompagni, 1857, p. 83) facendo riferimento al VI e VII libro degli *Elementi* di Euclide. Le grandezze prese in esame da Fibonacci sono costi, monete, pesi, volumi di merci. Il diagramma della regola del 3 è mutuato da altri studiosi precedenti, ad R. Abrahamibn Esra (Silberberg, 1895). Il diagramma della regola del tre è generalizzato nella regola del cinque.

6 - Diagramma lambdaide nel *Liber Abbaci*

Nel XII capitolo del *Liber Abbaci* Leonardo Pisano risolve dei problemi mediante l'utilizzo delle progressioni

aritmetiche, introducendo un diagramma particolare, di forma lambdaide, dalle origini antiche.

VIII.1.1

Incipit capitulum octauum de reperiendis precis mercium per maiore

In omnibus itaque negotiationibus quattuor numeri proportionales semper ex quibus tres sunt noti, reliquus uero est ignotus: primus quidem illorum numerorum est numerus uenditionis cuiuslibet mercis, siue constet pondere, siue mensura. Numero quidem ut centum coria, uel centum beccupondera quoque ut cantarum, uel centum, uel libre, aut unce et similia. Mutra metra olei, sextaria frumenti, et canne panni et similia. Secundum autem illius uenditionis, hoc est illius primi numeri, siue sit quantitas quorumlibet siue bizantium, siue tarenorum, uel alicuius alie currentis monete. Tertiumque erit aliqua eiusdem uendite mercis quantitas, cuius pretium, scilicet quod ignoratur; et quandoque erit aliqua similis quantitas secundi pretii, cuius quartus ignotus numerus, iterum ignorabitur. Quare, ut ignotus numerus periat, talem in omnibus tradimus regulam uniuersalem, uidelicet ut in dextera parte scribas primum numerum, scilicet mercem; retro in eadem pretium ipsius mercis, uidelicet secundum numerum; tertium quoque scribe eum sub merce, scilicet sub primo; et si fuerit pretium, scribe eum uidelicet sub secundo; ita tamen, ut sicut fuit ex genere ipsius, sub quo sita etiam sit ex qualitate uel ex quantitate ipsius in numero, uel in pondere; hoc est si superior numerus, sub quo scribendus est, fuerit numerus ipse similiter fiat rotulorum; si librarum, librarum; si unciarum, unciarum; si denariorum, denariorum; et si bizantium, bizantium. Quod manifestissime apparebit, quod duo illorum positi erunt semper ex se simul multiplicentur; et summa multiplicationis eorum, si per reliquum tertium diuidatur, quartus ignotus nimirum inuenietur: et ut hoc apertius intelligatur uersis mercibus et pretiis, in sequentibus explanabimus.

Fig. 5 - Immagine tratta da Boncompagni (1857, p. 83).

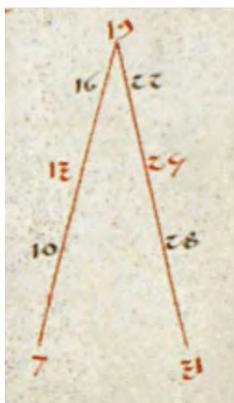


Fig. 6 - Diagramma tratto dal cap. XII del Liber Abbaci, p. 70 (Conv. Soppr. C.1. 2616, ff. 1r-214r, Firenze).

Leonardo lo pone accanto al seguente testo, nel quale descrive come effettuare una somma dei termini di quella che oggi chiamiamo progressione aritmetica, specificando anche la ragione.

XII.1.2

Expliciunt partes XII^m capituli. Incipit pars prima de collectionibus numer-

Cum autem vis super aliquem datum numerum colligere numeros quotcumque ab ipso dato numero equaliter, ut per ascensionem unitatis, uel bin; ternarii, uel alterius cuiuslibet numeri, dimidium multitudinis cunctorum nu in collectione positorum per coniunctum extremis multiplica; uel dimidium extremorum, scilicet primi et ultimi numeri, per numerum multitudinis nu ducas, et habebis propositum. Verbi gratia: uolo colligere super 7 numeros, q dunt per ternarium ab ipso septenario usque in 31, ut 7, et 10, et 13, et usque in 31. Multitudo quidem numerorum predictorum est 9, hoc est quo numeri sunt in predicta collectione; ex quibus unus est septenarius. Reliqui sunt octo, qui habentur ex tertia de 24, que remanent de 31, extractis in 7. Cor itaque ex extremis, scilicet de 7, et 31, et 38: quare si multiplicaueris dimi 9 per 38, uel dimidium de 38 per 9, reddunt 171 pro summa collectionis ne sitorum numerorum: per hanc quidem regulam possunt inueniri collectiones st quas etiam demonstrabimus alio modo.

Fig. 7 - Immagine tratta da Boncompagni (1857, p. 1679).

Nella descrizione si allude all'utilizzo di tale diagramma, considerandolo, come faceva Euclide, parte integrante del discorso matematico intrapreso. Questo diagramma aiuta nell'operazione che si compie nell'effettuare la somma dei termini della progressione, permettendo oggi di trasformare in formula il procedimento descritto. Dalla descrizione si evince che i termini della progressione vengono divisi in due metà ed ognuna di esse è posizionata rispettivamente sui lati del diagramma. Se il numero dei termini da sommare è dispari, il termine centrale sarà posizionato in cima al diagramma. La somma S dei termini posizionati sui lati del diagramma dello stesso livello sarà la stessa, per cui la somma totale dei termini sarà S moltiplicata per la metà del numero n dei termini a cui va, eventualmente, sommata la metà di S se il numero dei termini della progressione è dispari.

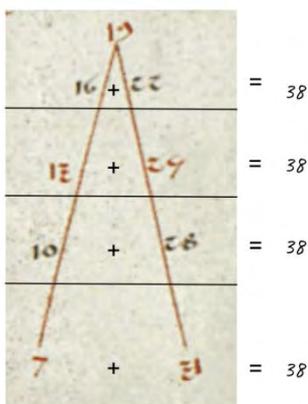


Fig. 8 - Studio del diagramma lambdaoide del cap. XII del *Liber Abbaci*.

In linguaggio matematico moderno, se si vogliono sommare n termini di una progressione aritmetica $a_1+a_2+a_3+\dots+a_n$, si possono presentare le seguenti situazioni:

n pari

Si dispongono $\frac{n}{2}$ termini su ciascun lato e si ponga

$$S = a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1}.$$

La somma dei termini della progressione sarà $S \times \frac{n}{2}$.

n dispari

Si dispongono su ciascun lato un numero di termini pari alla parte intera di $\frac{n}{2}$ e si ponga

$$S = a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1}.$$

Al vertice si troverà il termine centrale della progressione $\frac{S}{2}$.

La somma dei termini della progressione sarà $S \times \frac{n+S}{2}$.

Il diagramma utilizzato da Fibonacci è presente nel manoscritto greco del *Timeo* di Platone, riportato anche nel commento di Calcidio e nel *Commentario al Timeo* di Proclo (Huglo, 2008). Tale diagramma è chiamato *Psychogonia*, generazione dell'anima, ed indica l'armonia dell'anima del mondo. Nel *Timeo* ne compaiono di diverse tipologie, quella maggiormente conosciuta è quella in cui all'apice c'è il numero 1, sul lato destro le potenze di 2 fino ad 8, nel lato sinistro le potenze di 3 fino al 27, e tali numeri indicano le distanze della Terra dai corpi celesti: sono delle serie geometriche di ragione 2 e 3.

Sommando i termini secondo i versi delle frecce, si nota che la loro somma è proprio 27. Il diagramma lambdaoide fu molto usato nella musica nel periodo medievale, soprattutto nel *De*

Institutione musica di Boezio, influenzato da Platone: lo studioso lo usa per l'accrescimento, la diminuzione, e per le consonanze.

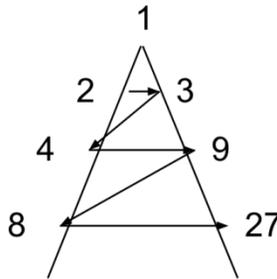


Fig. 9- Ricostruzione del diagramma Psychogonia

Tra il XII ed il XIII secolo, Jean de Garlande utilizzò lo stesso diagramma, ponendo ugualmente le serie di 2 e 3 come usate da Platone, ma arrivando rispettivamente a 512 e a 729 (Meyer, Panti, 2007). Forse proprio la presenza delle serie geometriche e delle varie somme tra i termini ha dato l'idea a Fibonacci di usare lo stesso diagramma per risolvere i problemi che sfruttano le somme delle progressioni aritmetiche. D'altra parte nella letteratura matematica del XII secolo, periodo immediatamente precedente a quello in cui egli visse, si possono rintracciare degli elementi cui Fibonacci si sarebbe potuto ispirare. Infatti nel manoscritto dell'opera *Libro del numero* di Abraham Ibn Ezra (1092-1167) viene riportato un diagramma molto simile a quello che Fibonacci avrebbe usato per calcolare la somma dei termini di una successione.

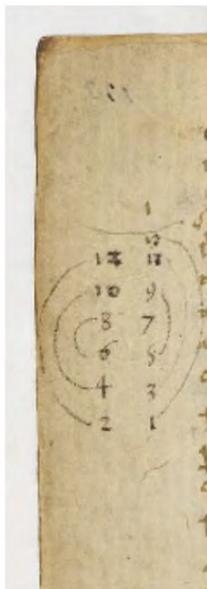


Fig. 10 - Diagramma tratto da Folio 100v del Manoscritto Latin 7377A 4.° Liber augmenti et diminutionis, qui vocatur numeratio divinazionis secundum Indos: authore Abraham Judaeo.(Abraham Ibn Ezra).

Il metodo proposto da Leonardo Pisano per effettuare la somma delle progressioni geometriche è stato tramandato nei secoli successivi, come molti altri significati matematici: nel *General Trattato* di Tartaglia (1556, capitolo V, p. 3), nel primo libro sono presentate le progressioni, e viene descritto attraverso il linguaggio naturale il procedimento per fare la somma dei suoi termini. In particolare, per le progressioni aritmetiche. Tartaglia riporta lateralmente un diagramma, meno intuitivo di quello presentato da Fibonacci, in quanto Tartaglia porta per iscritto, attraverso le cifre indo arabiche, le operazioni descritte precedentemente a parole. In realtà si assiste ad un graduale passaggio dal modello geometrico del

ragionamento matematico verso quello di tipo algebrico, introdotto poco più avanti dal punto di vista storico.

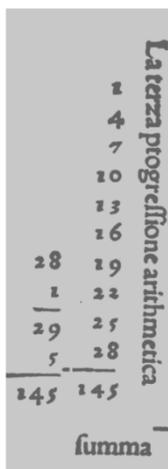


Fig. 11 - Diagramma presente in Tartaglia (1556), Libro primo, parte seconda, capitolo V, p. 3

7 - Conclusioni

Nel corso di questo articolo abbiamo descritto come la teoria euclidea abbia influenzato Fibonacci nella redazione a scopo didattico del *Liber Abbaci*, dove egli ne ha trasposto sia il ragionamento diagrammatico sia la modalità comunicativa, arricchiti dall'elevata matematica araba. Guardando questi aspetti dal punto di vista didattico, interpretando, quindi, la storia dal punto di vista educativo (Guillemette, Radford, 2022) potremmo dire che il modo di illustrare questo contenuto matematico, usando la teoria della Sfard (2016), è prettamente "ritualistico", contrariamente a quello di Fibonacci, di tipo "esplorativo", che permette non solo di

raggiungere l'obiettivo, ovvero fare la somma, ma anche considerare altri aspetti che emergono durante il procedimento usato.

Bibliografia

Barbin E., Stehlikova N., & Tzanakis C. (2008). *History and epistemology in mathematics education*. Prague: Vydavatelský servis.

Busard H.L. (1987). *The medieval latin translation of Euclid's Elements*, Franz Steiner Verlag Stuttgart.

Commandino M. F. (1575). *Degli elementi di Euclide libri quindici*, Urbino Domenico Frisolino.

De Risi V. (2024). *Spazio e geometria da Aristotele a Kant*. Corso per le scuole di dottorato di filosofia e matematica.

Fibonacci L. (2020). *Liber abbaci*, Prima edizione critica a cura di Enrico Giusti e Paolo D'Alessandro. Firenze: Olschki.

Folkerts M. (2004). Leonardo Fibonacci's Knowledge of Euclid's "Elements" and of Other Mathematical Texts, Fabrizio Serra Editore in «*Bollettino di storia delle scienze matematiche*» : XXIV, 1, pp. 93-113.

Giaquinto M. (2015). *The epistemology of visual thinking in mathematics*. Oxford University Press.

Grattan-Guinness, I. (1996). Numbers, Magnitudes, Ratios, and Proportions in Euclid's Elements: How Did He Handle Them? «*Historia Mathematica*» 23, pp. 355-375.

Guillemette, D., & Radford, L. (2022). History of mathematics in the context of mathematics teachers' education: A dialogical/ethical perspective. «*ZDM-Mathematics Education*», 54(7), pp. 1493-1505.

Hamami Y., Mumma J. (2013). Prolegomena to a cognitive investigation of Euclidean diagrammatic reasoning. «*Journal of Logic, Language and Information*», 22, pp. 421-448.

Huglo M.(2008). Recherches sur la tradition des diagramme de Calcidius. «*Scriptorium*», 62(2), pp. 185-230.

Devlin K. (2013), *I numeri magici di Fibonacci*. Titolo originale: *The Man of Numbers*. Milano: Rizzoli.

Manders K. (2008). The Euclidean Diagram (1995),(w:) The Philosophy of Mathematical Practice, red. P. Mancosu

Meyer C., Panti C. (2007). L'ame du monde dans la rationalité musicale ou l'expérience sensible d'un ordre intelligible. *Atti del convegno internazionale di Roma, 14-15 dicembre 2005, SismelEdizioni del Galluzzo*

Netz R. (1999). *The shaping of deduction in Greek mathematics: A study in cognitive history* (No. 51). Cambridge University Press.

Nicotra L. (2014). Dalla cultura alle culture: un viaggio senza ritorno? «*Arte-Scienza*», Anno I, N. 1, pp. 9-36. DOI: 10.30449/AS.v1n1.001

Pasquazi D. (2020). Capacità sensoriali e approccio intuitivo-geometrico nella preadolescenza: un'indagine nelle scuole. *Cadmo: giornale italiano di pedagogia sperimentale*: 1, 2020, 79-96.

Regni R., Fogassi L. (2019). *Maria Montessori e le neuroscienze*. Fefè.

Sfard A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge university press.

Sfard, A. (2016). Teaching mathematics as an exploratory activity: A letter to the teacher. In *Research for educational change*, Routledgepp. 123-132.

Silberberg M. (ed., trans.) (1895). *Sefer ha-mispar. Das Buch der Zahl, ein hebräisch-arithmetisches Werk des R. Abraham ibn Esra. Zum ersten Male herausgegeben, ins Deutsche übersetzt und erläutert.* Frankfurt a.M.: J. Kaufmann.

Sinclair N. (2024). Knowing as remembering: Methodological experiments in embodied experiences of number. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 10(1), pp. 29-46.

Tartaglia N. (1556). *La Prima (- seconda) parte del General trattato di numeri, et misure di Nicolò Tartaglia.* Venezia: Curtio Troiano de i Nauò.

Unguru S (1975). On the Need to Rewrite the History of Greek Mathematics, «*Archive for History of Exact Sciences*», 30.XII.1975, Vol. 15, No. 1, Springer , pp. 67-114.

Unguru S., Rowe D. (1981). Does the quadratic equation have greek roots? A study of “geometric algebra”, “application of areas” and related problems. *Libertas mathematica*, vol. 1.

IL
LIBER ABBACI
D I
LEONARDO PISANO

PUBBLICATO

SECONDO LA LEZIONE DEL CODICE MAGLIABECHIANO
C. I, 2616, *Badia Fiorentina*, n.° 73.

DA

BALDASSARRE BONCOMPAGNI

SOCIO ORDINARIO DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA DE' NUOVI LINCEI, E SOCIO
CORRISPONDENTE DELL'ACCADEMIA REALE DELLE SCIENZE DI TORINO,
DELLA REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI NAPOLI,
E DELLA PONTIFICIA ACCADEMIA DELLE SCIENZE
DELL'ISTITUTO DI BOLOGNA



ROMA

TIPOGRAFIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE
VIA LATA NUM.° 211
MDCCCLVII.

Il triangolo ortico e la retta di Eulero con fantasia

Paolo Severino Manca*

*Già Professore Ordinario di Matematica Finanziaria all'Università di Pisa;
paolo.severino.manca@gmail.com



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v6n4.144

Sunto: Si illustra il ruolo dell'intuizione in matematica presentando : una dimostrazione, basata sul principio elementare della legge di riflessione, del noto teorema di Fagnano sul triangolo di perimetro minimo inscritto in un triangolo acutangolo, la retta di Eulero e le sue proprietà. La ricerca di cammini minimi tra i triangoli inscritti in un triangolo acutangolo viene affrontata utilizzando il principio di riflessione e ritrovando il triangolo ortico quale traiettoria di lunghezza minima su un biliardo triangolare. La retta di Eulero viene ritrovata con un semplice ricorso all'omotetia.

Parole Chiave: triangolo ortico, perimetro minimo, traiettorie periodiche nel biliardo, omotetia, retta di Eulero.

Abstract: The role of intuition in mathematics is illustrated by presenting: a demonstration, based on the elementary principle of the law of reflection, of the well-known theorem of Fagnano on the triangle of minimum perimeter inscribed in an acute-angled triangle, the Euler line and its properties. The search for shortest paths between triangles inscribed in an acute-angled triangle is addressed using the principle of reflection and finding the ortic triangle as a trajectory of minimum length on a triangular billiard table. The Euler line is found with a simple recourse to homothety.

Keywords: Ortic triangle, minimum perimeter, periodic trajectories in billiards, homothety, Euler line.

1 - Introduzione

Pur essendo portato per l'arte e le materie letterarie, per circostanze fortuite e imprevedibili, come accade sempre nella vita, mi sono occupato di matematica.

Della matematica ho sempre apprezzato la fantasia più che il rigore, ammirando comunque con grande umiltà i grandi matematici che sono ricchi di fantasia e di rigore.¹

Privilegiando la fantasia aborro le dimostrazioni meticolose e prive di genialità e anche coloro che continuano a proporle.

È ben noto che per far odiare una lingua basta cominciare con la grammatica, per far odiare la storia basta insistere sulla necessità di memorizzare le date delle battaglie, per fare odiare la matematica basta trascurarne l'aspetto creativo, la curiosità, l'immaginazione e insistere sul formalismo e sulle tecniche.

Così, ad esempio, delle oltre trecento dimostrazioni del teorema di Pitagora² perché non partire dalla semplice dimostrazione "visiva" illustrata nella figura 1?

Continuo a credere che i grandi matematici prima "vedano" i risultati e solo successivamente li dimostrino, e

¹ Anche per questo sostengo che i matematici, poiché si rifugiano nel mondo della fantasia più spinta, vanno protetti sia perché innocui sia perché poco adatti ad affrontare gli impegni pratici di ogni giorno.

² Elisha Scott Loomis nel suo libro del 1927 "The Pythagorean Proposition" elenca 371 differenti dimostrazioni del teorema

voglio illustrare quanto detto con due esempi nel campo elementare della geometria euclidea: una presentazione originale del triangolo “orbitale”/ortico e una traccia di dimostrazione, usando l’omotetia, per ritrovare con immediatezza la retta di Eulero e le sue proprietà.

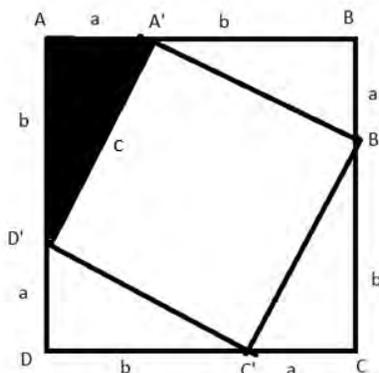


Fig. 1

2 - Triangolo di perimetro minimo

2.1

Invece di introdurre il triangolo ortico con la nota definizione, parto dal problema relativo alla ricerca di traiettorie minimali in un biliardo triangolare.

In un biliardo triangolare senza attrito le traiettorie di una biglia³ sono caratterizzate, come noto, da un angolo di incidenza pari all’angolo di riflessione.

³ Una biglia “puntuale” priva di “effetto”.

Cerco le traiettorie periodiche, orbite, di lunghezza minima.

Chiamo triangolo orbitale di un dato triangolo, sia T , un triangolo, sia T_i , se esiste, che è inscritto in T e che rispetta la legge di riflessione, per cui ogni coppia di lati di T_i incontra il corrispondente lato di T formando con tale lato un angolo di incidenza pari all'angolo di riflessione.

Mostro che per un qualsivoglia triangolo PQR esiste un unico triangolo circoscritto, sia ABC , che risulta acutangolo e avente PQR come triangolo orbitale.

Sia infatti PQR un generico triangolo di angoli $2u, 2v, 2z$.

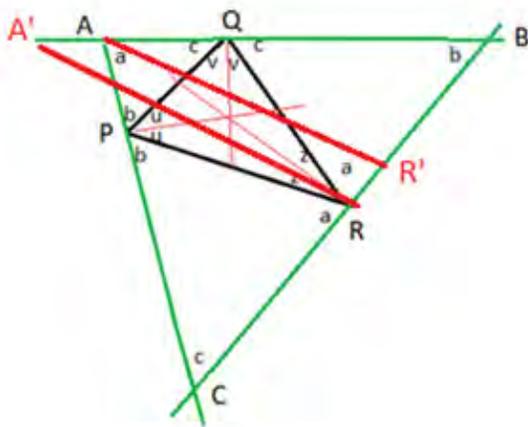


Fig. 2

Dai vertici di PQR conduco le perpendicolari alle bisettrici. Essendo le bisettrici due a due non parallele risultano tali

anche le perpendicolari che dunque si incontrano due a due nei punti che chiamo rispettivamente A, B, C.

Il triangolo cercato T è proprio quello di vertici A,B,C.

La dimostrazione elementare sfrutta esclusivamente la proprietà per cui la somma degli angoli interni di un triangolo vale l'angolo piatto. Indico con u, v, c gli angoli di ABC e , per non appesantire la trattazione, faccio riferimento alla figura 2.

Osservo che deve risultare :

$$u + v + z = \pi/2$$

$$u + b = \pi/2$$

$$v + c = \pi/2$$

$$z + a = \pi/2$$

$$a + b + c = \pi$$

e dunque: $a = \pi/2 - z$, $b = \pi/2 - u$, $c = \pi/2 - v$,

e dunque: $a = u + v$, $b = v + z$, $c = u + z$

con : $a < \pi/2$, $b < \pi/2$, $c < \pi/2$

Mostro ora che il triangolo orbitale, così come sopra definito, è quello avente per vertici i piedi delle perpendicolari condotte dai vertici di T ai lati opposti e che dunque, coincide con il triangolo ortico.⁴

Con riferimento alla figura 2 devo dimostrare che AR è la perpendicolare condotta da A al lato opposto CB, e analogamente per PB e QC.

Indico con R' il piede della perpendicolare condotta da A al lato BC.

⁴ tri ortico: quello definito come avente come vertici i piedi delle perpendicolari condotte dai vertici del tri circoscritto ai lati opposti.

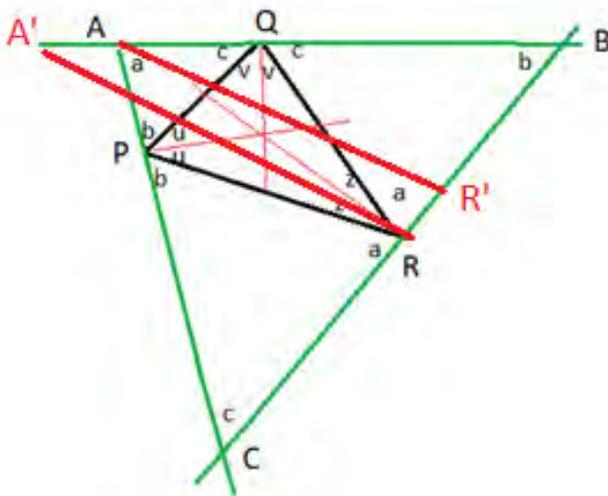


Fig. 3.

Il triangolo $AR'B$ è rettangolo in R' e di angoli : $b, \pi/2, \pi - \pi/2 - b$, cioè : $b, \pi/2, u$.

Anche $AR'C$ è rettangolo in R' e di angoli : $c, \pi/2, \pi - \pi/2 - c$, cioè : $c, \pi/2, z$.

Indico con A' il punto in cui la bisettrice passante per R incontra il lato AB .

Il triangolo $A'RB$ è rettangolo in R e di angoli : $b, \pi/2, \pi - \pi/2 - b$, cioè : $b, \pi/2, u$.

Anche $AR'C$ è rettangolo in R' e di angoli : $c, \pi/2, \pi - \pi/2 - c$, cioè : $c, \pi/2, z$.

Dunque $AR'B$ e $A'RB$ sono simili e anche $AR'C$ e $A'RC$ sono simili e dunque i segmenti AR' e $A'R$ devono risultare paralleli e ciò accade se e solo se $A=A', R=R'$.

Dunque per ogni triangolo PQR esiste unico un triangolo acutangolo circoscritto T avente PQR come triangolo orbitale.

2.2

Mostro che per ogni triangolo acutangolo T esiste un unico triangolo orbitale.

Con riferimento alla figura sottostante indico con a, b, c sia gli angoli di T che il loro valore e mostro che se il triangolo PQR è orbitale e x, y, z sono gli angoli di incidenza dei lati di PQR con i lati del triangolo T , allora : $z = a, y = b, x = c$.

Infatti poiché la somma degli angoli interni di un qualsivoglia triangolo vale π , con riferimento alla figura 4.

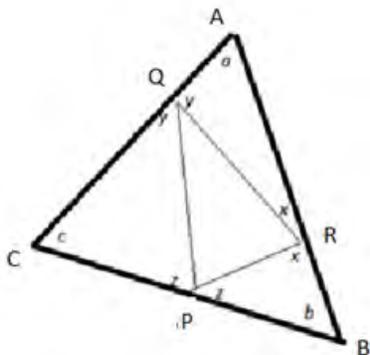


Fig. 4.

deve risultare :

$$a + b + c = \pi$$

$$a + y + x = \pi$$

$$b + z + x = \pi$$

$$c + z + y = \pi$$

$$(\pi - 2x) + (\pi - 2y) + (\pi - 2z) = \pi^5$$

$$\text{da cui : } z = a, y = b, x = c.$$

⁵ La (5) cioè $x + y + z = \pi$ consegue dalle precedenti.

Ne segue allora che gli eventuali triangoli orbitali sono necessariamente simili e, visti inscritti in T , presentano i lati due a due paralleli: ciò comporta l'unicità.

Se infatti RTS e $R'T'S'$ fossero entrambi orbitali, detto R' il vertice incidente sul lato su cui incide R , se risulta $\underline{AR'} > \underline{AR}$ ⁶, poiché i triangoli RST ed $R'S'T'$ sono simili ed $\underline{RT} > \underline{R'T'}$, dovrebbe essere anche $\underline{ST} > \underline{S'T'}$ ma ciò implica che S' sia interno ad ABC .

Eguale se esistesse un triangolo orbitale di vertici R'',S'',T'' , con $\underline{AR''} < \underline{AR}$, essendo R'' il suo vertice incidente sul lato su cui incide R , poiché i triangolo RST ed $R''S''T''$ sono simili, dovrebbe essere anche $\underline{RT} < \underline{R''T''}$ e dunque anche $\underline{ST} < \underline{S''T''}$ ma ciò implica che S'' sia esterno ad ABC .

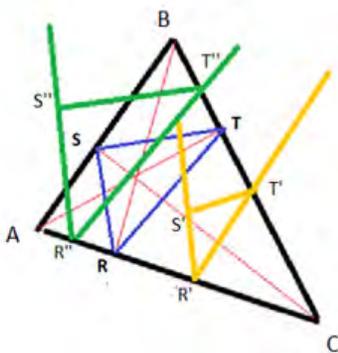


Fig. 5.

⁶ Dato un segmento GH indico con \underline{GH} la sua lunghezza.

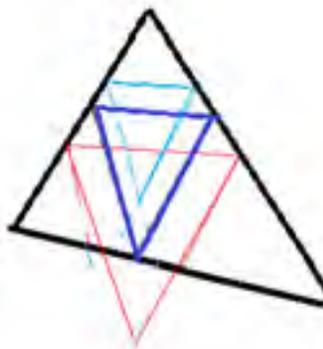


Fig. 6.

2.3

Nel 1775 Giulio Carlo Fagnano dei Toschi, (1682 - 1766), propose il problema di caratterizzare, in un dato triangolo acutangolo, il triangolo inscritto il cui perimetro sia il minimo e diede anche una soluzione utilizzando il *calculus*.

Si sono succedute altre procedure risolutive, alcune utilizzando l'analisi matematica, altre la geometria sintetica.

La soluzione "sintetica" più elegante fu data, in modo diverso ed indipendente, da L. Fej'er e da While H. Amandus Schwarz, utilizzando le proprietà delle simmetrie assiali. I risultati vengono tuttora ripresentati sul web : prevalgono le dimostrazioni incomplete e più di una errata.

Ora è immediato intuire che il triangolo orbitale, in quanto unico triangolo inscritto che soddisfa le condizioni di riflessività, ha perimetro minimo, ove si faccia riferimento alle proprietà fisiche di un raggio luminoso o di una massa puntuale in presenza di urti perfettamente elastici.

Per confermare con rigore l'affermazione sfrutto il noto elementare risultato, attribuito ad Erone, per cui data una retta r e due punti A, B , in uno stesso semipiano rispetto ad r , allora la spezzata più breve tra A e B e che tocca r forma con r un angolo di incidenza pari all'angolo di riflessione, come del resto mostra direttamente la figura 7.

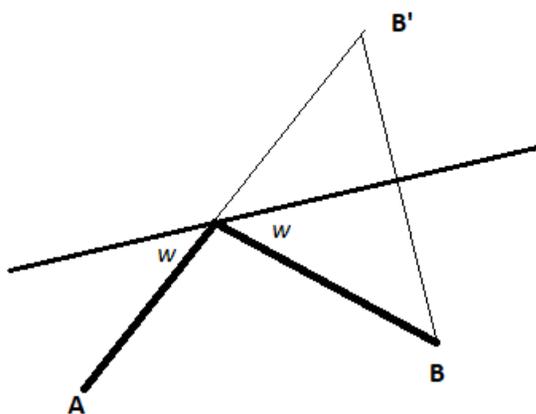


Fig. 7.

Da questa immediata constatazione osservo che se un poligono T_i , inscritto in un poligono T , risulta di perimetro minimo allora necessariamente in T_i ogni coppia di lati incontra il corrispondente lato di T formando con tale lato un angolo di incidenza pari all'angolo di riflessione.

Mostro infine che, nel caso del triangolo, la condizione necessaria risulta anche sufficiente.

Sia PQR il triangolo orbitale (ortico) di ABC

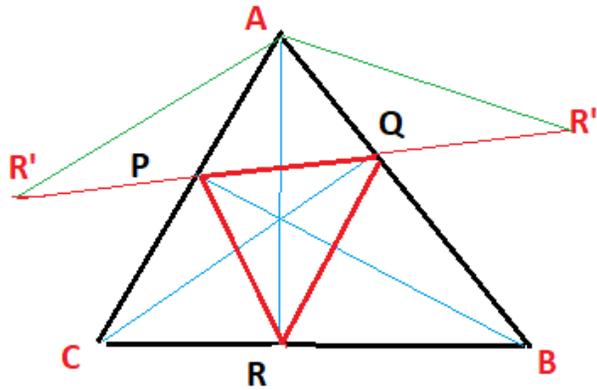


Fig. 8.

Sia R' il simmetrico di R rispetto ad AC , sia R'' il simmetrico di R rispetto ad AB : essendo PQR orbitale i punti R',P,Q,R'' risultano allineati e , per costruzione, il segmento $R'R''$ ha la stessa lunghezza del perimetro di PQR , inoltre, poiché risulta $\underline{AR'} = \underline{AR} = \underline{AR''}$, l'angolo $R'AR''$ vale due volte l'angolo PAQ .

Sia UVZ un altro triangolo inscritto in ABC .

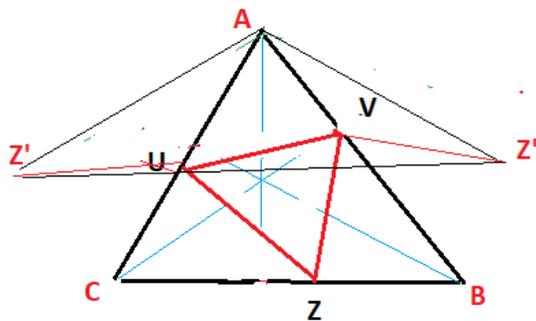


Fig. 9.

Sia Z' il simmetrico di Z rispetto ad AC , sia Z'' il simmetrico di Z rispetto ad AB :

la spezzata Z',U,V,Z'' ha la stessa lunghezza del perimetro di UVZ , e dunque la lunghezza del segmento $Z'Z''$ è uguale o inferiore alla lunghezza della spezzata Z',U,V,Z'' .

Basta allora dimostrare che risulta $Z'Z'' > R'R''$.

Intanto per costruzione risulta $\underline{AZ'} = \underline{AZ} = \underline{AZ''}$ e quindi l'angolo $Z'AZ''$ vale due volte l'angolo PAQ .

I triangoli $R'AR''$ e $Z'AZ''$ hanno lo stesso angolo in A , sono isosceli e, poiché $\underline{AZ} > \underline{AR}$, essendo AR la minima distanza di A dalla retta passante per CB , è anche $\underline{AZ'} > \underline{AR'}$ e quindi anche $\underline{Z'Z''} > \underline{R'R''}$.

Dunque il perimetro di UVZ è maggiore del perimetro di PQR .

A margine osservo che, generalizzando, data una curva C e un poligono di n vertici, sia \mathbf{Pn} , si può definire \mathbf{Pn} "orbitale di C " se \mathbf{Pn} risulta inscritto in C e i suoi lati soddisfano la legge di riflessione.

La ricerca di poligoni orbitali e l'eventuale proprietà di minimo si inserisce nello studio affascinante delle traiettorie in un "biliardo ideale".⁷

L'argomento esula dagli obiettivi di questa nota. Per chi fosse interessato segnalo comunque: S. Tabachnikov (2005). *Geometry and Billiards*. American Mathematical Society.

⁷ Ad esempio con riferimento alla circonferenza appare evidente che un poligono è orbitale se è regolare e che il poligono orbitale di perimetro minimo coincide col triangolo equilatero.

3 - La retta di Eulero

È straordinario che in un triangolo le tre altezze si incontrino sempre in un punto, l'ortocentro O_o , è straordinario che in un triangolo le tre assi si incontrino sempre in un punto, il circocentro O_c , è straordinario che in un triangolo le tre mediane si incontrino sempre in un punto, il baricentro O_b , ma è "miracoloso" che O_o, O_b, O_c si trovino su una stessa retta, con O_b in mezzo e con O_o e O_c a distanza da O_b una doppia dell'altra.

Parlo di un noto teorema di Eulero.⁸

Mi sono chiesto come Eulero abbia "visto" un tal risultato, perché sicuramente prima lo ha visto poi lo ha dimostrato.

Una strada che permette di intuire tale risultato è il ricorso all'omotetia.

Considero un triangolo equilatero di centro O , che indico con E e il suo triangolo mediale⁹ che indico con Em .

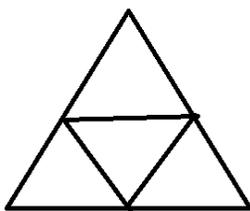


Fig. 10.

⁸ Eulero, (1707-1783), di risultati strepitosi ne ha ottenuti ben altri e in quantità industriali.

⁹ triangolo mediale: che ha i vertici nei punti medi dei lati del triangolo dato.

Per costruzione E ed E_m hanno i lati paralleli e dalla figura e' immediato "vedere" :

- che E ed E_m hanno lo stesso centro, sia O ;
- che E_m è anch'esso equilatero di lato pari alla metà del lato di E ;
- che E_m "divide" E in quattro triangoli equilateri congruenti per cui l'area di E_m è $\frac{1}{4}$ dell'area di E .

In definitiva "si vede" che E_m si può ottenere "ribaltando" e "dimezzando" E e ciò, in linguaggio più consono, significa che E_m si può ottenere da E con una omotetia di centro O e rapporto di omotetia $r = -1/2$.

C'è da chiedersi se il risultato sussiste anche quando si prenda in considerazione un triangolo non equilatero T e il suo corrispondente triangolo mediale T_m .

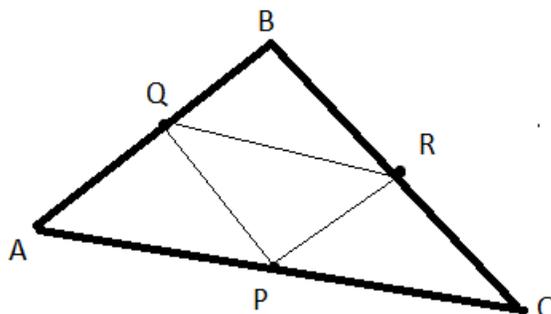


Fig. 11.

Per costruzione T e T_m hanno i lati paralleli e anche in questo caso è immediato stabilire:

- che T_m è simile a T e di lati pari alla metà dei lati di T ;
- che T_m “divide” T in quattro triangoli congruenti per cui l’area di T_m è $\frac{1}{4}$ dell’area di T .

Poiché T e T_m hanno le stesse mediane e dunque che T e T_m hanno lo stesso baricentro, sia O_b , sembra ragionevole a questo punto chiedersi se, egualmente al caso di E_m e E , il triangolo T_m si possa ottenere da T con una omotetia di rapporto $r = -1/2$.

L’omotetia di centro O_b e rapporto $r = -1/2$ esiste effettivamente perché trasforma i vertici di T rispettivamente nei vertici di T_m .¹⁰

A questo punto l’idea vincente è quella di trovare i trasformati di O_c e di O_o .

Indicando con O_b', O_c', O_o' il baricentro, circocentro, ortocentro di T_m , risulta $O_b = O_b'$. Meno facile scoprire che $O_c' = O_o$.

Ciò accade in quanto le altezze condotte dai vertici di T_m ai lati opposti di T_m coincidono con gli assi di T e dunque poiché le altezze di T_m si incontrano nell’ortocentro O_c' mentre gli assi di T si incontrano nel circocentro O_o di T , risulta: $O_c' = O_o$.

Per definizione in una tale omotetia se P è un punto di T e P' è il suo trasformato, allora i punti P, O_b, P' risultano

¹⁰ Come noto il baricentro divide ogni mediana nelle proporzioni di $1/3$ e $2/3$.

allineati, con X dalla parte opposta di X' rispetto ad Ob , e con : $\underline{X'.Ob} = \frac{1}{2} \underline{X.Ob}$.

Dunque poiché l'ortocentro Oo di T viene trasformato nell'ortocentro Oo' di Tm risulta : $\underline{Oo.Ob} = \frac{1}{2} \underline{Oo'.Ob}$

Ma l'ortocentro Oo' di Tm coincide col circocentro Oc di T e dunque $Oo, Ob, Oo' = Oc$ risultano allineati, con Oo dalla parte opposta di Oc rispetto ad Ob , e con :

$$\underline{Oc.Ob} = \frac{1}{2} \underline{Oo.Ob}$$

Concludendo in ogni triangolo i punti Ob, Oc, Oo coincidono se il triangolo è equilatero; se il triangolo non è equilatero i punti Ob, Oc, Oo si trovano su una stessa retta con Oo dalla parte opposta di Oc rispetto ad Ob e a distanza doppia.

La doppia marea: una semplice spiegazione

Giuseppe D'Angelo
Docente di materie scientifiche presso il Liceo Scientifico
"Leonardo" di Giarre - CT sitdang010762@mail.com



DOI : 10.53159/PdM(IV).v6n4.145

Sunto: Molti testi scientifici, sia di carattere divulgativo che specialistico, attribuiscono il fenomeno della doppia marea alla costante forza centrifuga generata dalla rotazione del sistema Terra-Luna attorno al loro baricentro comune. Alcuni dati contrastanti, relativi al momento d'inerzia e al momento angolare dei due corpi, suggeriscono una più semplice spiegazione del fenomeno basata sulla costanza del momento angolare associato alla rotazione terrestre.

Parole Chiave: Doppie maree, baricentro Terra-Luna, alta marea, forza centrifuga

Abstract: Many scientific texts, both popular and specialist, attribute the double tide phenomenon to the constant centrifugal force generated by the rotation of the Earth-Moon system around their common center of gravity. Some conflicting data, relating to the moment of inertia and the angular momentum of the two bodies, suggest a simpler explanation of the phenomenon based on the constancy of the angular momentum associated with the Earth's rotation.

Keywords: double tides, Earth-Moon barycenter, high tide, centrifugal force

1 - Introduzione

Con la scoperta della legge di gravitazione universale di Isaac Newton trovarono spiegazione non soltanto le tre leggi di Keplero sul movimento dei pianeti attorno al Sole ma anche altri fenomeni naturali come, ad esempio, le maree. Apparve subito chiaro che il rigonfiamento delle acque marine che si verifica in corrispondenza del passaggio della Luna sul meridiano del luogo doveva essere causato proprio dall'attrazione gravitazionale del nostro satellite. Per spiegare però il rigonfiamento contemporaneo delle acque anche dal lato opposto della Terra si rese necessario considerare come la forza attrattiva della Luna si eserciti parimenti sia sull'acqua che sulla terra in base alla distanza da essa. Di conseguenza la minore forza attrattiva esercitata dalla Luna sulle acque presenti sul lato opposto della Terra possa consentire un innalzamento del loro livello considerando anche la costante forza centrifuga che le spinge verso l'esterno, dovuta al moto di rotazione della Terra, insieme alla Luna, attorno al centro di massa comune, del sistema da esse formato. In tal modo, mentre la Luna percorre un giro per equilibrare la forza attrattiva della Terra, anche questa completa una rivoluzione attorno al centro di massa del sistema che si trova all'interno della Terra medesima. Questa spiegazione della doppia marea è quella ufficiale ed appare in tutti i testi di settore. Ad esempio, al seguente link

https://cla.unisalento.it/c/document_library/get_file?folderId=7415906&name=DLFE-246801.pdf si legge: «*Le maree sono dovute all'attrazione gravitazionale esercitata soprattutto dalla Luna e dal Sole sulle masse marine e oceaniche. Nel fenomeno interviene anche la forza centrifuga dovuta alla rivoluzione del*

sistema Terra-Luna intorno al baricentro comune. Le maree sono essenzialmente legate al ritmo dei movimenti lunari. Ma non è questa la sola causa del fenomeno che quando in un punto si ha l'alta marea, essa si presenta anche al suo antipodo: ciò è dovuto al fatto che, oltre all'attrazione lunare, nel fenomeno interviene anche la forza centrifuga dovuta al moto di rivoluzione del sistema Terra-Luna». Il link suggerito presenta, in modo sintetico, l'insieme degli aspetti del fenomeno mareale ed è utile per una veloce chiarimento degli stessi. Un altro link divulgativo è il seguente: https://divulgazione.uai.it/index.php/Le_maree, dove viene riportata questa spiegazione della doppia marea: «Oltre alla gravità bisogna chiamare in causa un altro fenomeno: considerando il sistema costituito dalla Terra e dalla Luna, non è esattamente vero dire che la Luna compie un giro attorno alla Terra in un mese lunare. Piuttosto è come se la Terra e la Luna fossero i pesi disuguali del manubrio di un atleta, e ruotassero insieme attorno al baricentro comune del sistema. L'effetto della sola rotazione (ignorando la forza di gravità) è quello di far sì che le acque situate dal lato opposto rispetto alla Luna, tendano a sollevarsi per effetto della cosiddetta forza centrifuga. (La forza centrifuga, ricordiamo, è una forza apparente che si manifesta quando un corpo, che naturalmente tenderebbe a muoversi in linea retta, compie una traiettoria circolare o comunque curvilinea.) In conclusione, l'effetto gravitazionale fra la Terra e la Luna è più intenso dal lato della Terra che è affacciato verso la Luna, dato che la Luna è più vicina, e questa attrazione fa avvicinare le acque verso la Luna e crea un "rigonfiamento mareale" verso la Luna. La Terra, d'altra parte, sperimenta un'attrazione centripeta che la costringe, si fa per dire a ruotare attorno al baricentro del sistema Terra-Luna. La differenza fra queste due forze, in sostanza la combinazione di gravità e inerzia, crea due rigonfiamenti mareali: uno si forma nel punto più vicino

alla Luna, l'altro nel punto diametralmente opposto. Questi rigonfiamenti, per forza di cose, rimangono allineati lungo la direzione Terra-Luna». Come si può osservare viene sempre ribadito il concetto del sistema Terra-Luna visto come corpo "rigido" che ruota attorno ad un asse passante per il baricentro comune. In questo modo vennero spiegate le maree ed anche il fatto che ce ne fossero due al giorno. Con la legge di Newton molte altre cose divennero chiare. La Terra, ad esempio, è rotonda come conseguenza della risultante dell'attrazione gravitazionale di tutte le sue parti che è diretta verso il suo centro di massa posto al suo interno. Però non è esattamente rotonda perché ruota su sé stessa di modo che, a causa della forza centrifuga, si genera un rigonfiamento equatoriale e uno schiacciamento polare. Infatti, il diametro equatoriale è più grande di quello polare di circa 43 Km (1). Altre verifiche della validità della legge di gravitazione giunsero dalle osservazioni sul modo in cui ruotavano le lune di Giove e sui tempi da esse impiegati per farlo. Per quanto riguarda il fenomeno della doppia marea la spiegazione ufficiale appare soddisfacente dal punto di vista fisico, tuttavia, sembra possibile fare alcune puntualizzazioni che potrebbero offrire un approccio scientifico simile, altrettanto utile, per giustificare il fenomeno. In questa breve relazione si vuole chiarire proprio questo differente punto di vista prendendo in considerazione, per semplicità di trattazione, solo gli effetti gravitazionali della Luna. Le maree però vengono determinate, per le stesse ragioni fisiche, anche dal Sole che però essendo molto più distante dalla Terra, rispetto alla Luna, produce effetti minori.

¹https://static.treccani.it/export/sites/default/Portale/resources/multimedia/Lezioni_Astrofisica/Terra/LEZIONE_Terra.pdf

In tal modo i due effetti gravitazionali possono sommarsi o sottrarsi in funzione della reciproca posizione assunta dai due astri in riferimento a quella della Terra (sizigie o quadratura) determinando il fenomeno delle maree vive o delle maree morte. In ogni caso le considerazioni di seguito espresse valgono anche per la marea solare.

2 - Grandezze fisiche di riferimento

L'esame della problematica posta in discussione nella introduzione non può prescindere dal chiarimento di alcune comuni grandezze fisiche relative al moto dei corpi posti in rotazione attorno ad un asse. Aver chiaro il loro concetto ci permetterà di comprendere meglio la riflessione qui presentata. Prendiamo intanto come sistema di corpi di riferimento il sistema Terra-Luna e proviamo a ricordare i concetti di centro di massa, momento di una forza, momento d'inerzia e momento angolare.

2.1 - Centro di massa di un corpo

Il centro di massa di un corpo o di un sistema di corpi è quel punto nel quale tutta la massa del sistema può essere considerata concentrata per intero in. Il centro di massa non sempre coincide con il baricentro fisico del corpo che invece deve intendersi come il punto di applicazione, su di esso, della forza peso. Le due definizioni possono descrivere lo stesso punto a condizione che si consideri l'accelerazione di gravità costante su tutto il corpo. Per determinare il centro di massa di un corpo si calcola la media ponderata tra i prodotti di ciascuna massa componente (m_i) per la rispettiva coordinata (x_i) e la sommatoria delle masse componenti. Le coordinate

del centro di massa saranno quindi date dalle seguenti formule:

$$1) \quad x_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} ; \quad y_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i} ; \quad z_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

2.2 - Momento di una forza (o momento torcente)

Il momento di una forza è dato dal prodotto (vettoriale) tra la componente tangenziale di una forza e la distanza (detta braccio, misurata perpendicolarmente) dall'asse di rotazione alla quale essa è applicata. È l'equivalente rotazionale del concetto di forza.

$$\vec{M} = \vec{r} \cdot \vec{F}$$

Il modulo del momento di una forza può essere determinato con la seguente formula:

$$m_f = r \cdot F \cdot \sin \alpha$$

Con

r = distanza dall'asse di rotazione

α = angolo formato dai vettori \vec{F} e \vec{r}

L'unità di misura del momento torcente è il N . m che corrisponde al J che è l'unità del lavoro, ma le due grandezze sono differenti e non vanno confuse tra loro. Pertanto si usa chiamare Joule (1J = 1N . m) solo l'unità del lavoro.

2.3 - Momento d'inerzia

Per momento d'inerzia o inerzia rotazionale di un corpo si intende il prodotto scalare tra la massa del corpo e il quadrato della distanza dall'asse di rotazione. Nel SI la sua unità di misura è il kilogrammo per metro quadrato (Kg . m²)

$$m_I = \sum m_n r_n^2$$

Con

m_n = componente elementare del corpo

r_n = distanza di ciascuna componente elementare dall'asse di rotazione

Il momento d'inerzia di un corpo rotante è una grandezza scalare e non dipende soltanto dalla sua massa ma anche dal modo in cui questa massa è distribuita rispetto all'asse di rotazione. Quindi a parità di massa se cambia la distanza dall'asse di rotazione la forza necessaria per porre in rotazione il corpo può diventare molto differente.

2.4 - Momento angolare di un corpo rigido

Il momento angolare o momento della quantità di moto è il prodotto vettoriale tra il momento d'inerzia (così come sopra definito) rispetto all'asse di rotazione e la velocità angolare del corpo: $\vec{m}_\alpha = m_I \vec{\omega}$

L'unità SI per il momento angolare è il kilogrammo per metro quadro al secondo (Kg . m²/s) equivalente al Joule per secondo (J . s)

3 - Centro di massa, momento d'inerzia e momento angolare del sistema terra-luna

Applichiamo adesso le relazioni matematiche sopra ricordate al sistema Terra-Luna con lo scopo di chiarire quale possa essere il ruolo da esse ricoperto nella manifestazione del fenomeno delle maree. Con tale finalità cominciamo con il

calcolare la posizione del centro di massa secondo la direzione congiungente i due corpi celesti.

Applicando la 1) per la direzione prescelta otteniamo il risultato riportato nella tabella 1.

La corrente interpretazione fisica del fenomeno della doppia marea, cioè del fatto che una data tipologia di marea (ad esempio alta marea) si verifica contemporaneamente anche agli antipodi del luogo considerato, tiene conto dell'equilibrio con il quale le masse del sistema Terra-Luna si pongono attorno al centro di massa dello stesso.

Tabella 1 -Calcolo del centro di massa del sistema Terra-Luna						
Massa luna (Kg)	Raggio luna (km)	Massa terra (kg)	Raggio terra (km)	Distanza terra-luna (km)	Posizione centro di massa sistema rispetto al centro della terra (Km)	Profondita' centro di massa sistema terra-luna (km)
7,34E+22	1738	5,97E+24	6372,797	384400	4667,97	1704,827

Questo equilibrio di masse fa sì che la forza centrifuga (dovuta al moto di rotazione del sistema medesimo) lungo la congiungente Terra-Luna, che assume verso opposto all'attrazione gravitazionale esercitata dal nostro satellite, bilanci perfettamente quest'ultima proprio lungo la congiungente medesima. Pertanto, quando, a seguito del moto di rotazione terrestre, le varie aree del nostro pianeta si

trovano ad attraversare tale linea immaginaria si verifica un innalzamento contemporaneo del livello delle acque agli estremi opposti della Terra, lungo la suddetta congiungente. Infatti, dal lato della Terra in opposizione alla Luna la forza centrifuga è maggiore rispetto al lato in congiunzione mentre la forza attrattiva lunare è inferiore. Dal lato opposto (rivolto verso la Luna) si verifica esattamente il contrario. Nel complesso le due azioni si bilanciano e così si hanno due alte maree antipodali simultanee alle quali succederanno a distanza di circa sei ore due basse maree. Affinché si verifichi questo equilibrio si considera che il sistema Terra-Luna ruoti come un unico corpo solido attorno al centro di massa dello stesso. Quindi la Terra compirà una rotazione completa attorno al centro di massa del sistema nello stesso tempo in cui la Luna farà la stessa cosa. In tal modo il vettore forza centrifuga (dovuta all'inerzia del moto di rotazione) giace sulla stessa direzione del vettore forza di gravità ma con verso opposto. Se così non fosse le due maree con la stessa fase non potrebbero verificarsi agli antipodi.

Tabella 2 – Calcolo dei momenti d'inerzia di Terra e Luna e della distanza dall'asse di rotazione del medesimo sistema di astri.

Distanza centro luna-centro di massa sistema (km)	Distanza centro terra-centro di massa sistema (km)	Momento d'inerzia luna rispetto al centro di massa del sistema (kg . M ²)	Momento d'inerzia terra rispetto al centro di massa del sistema (kg . M ²)
387842,8	4667,97	1,10e+34	1,30e+32

Trattandosi di un moto di rotazione di un sistema di corpi (considerato rigido) attorno ad un asse bisogna considerare quindi il momento angolare (e quindi il momento d'inerzia) di entrambi. Per garantire poi un moto di rotazione sincrono attorno al medesimo asse è necessario che i due momenti angolari si eguaglino. Cioè, bisogna che si verifichi :

$$1) \vec{m}_{aT} = \vec{m}_{aL}$$

Cioè:

$$2) m_{IT} \vec{\omega} = m_{IL} \vec{\omega}$$

Essendo ω uguale per entrambi i corpi abbiamo:

$$3) m_T r_T^2 = m_L r_L^2$$

Se ad r_T diamo il valore riportato in tabella di fig. 1 (4667,97 km) e ad r_L il valore della distanza dal centro della Luna al centro di massa del sistema, pari a 387842,8 Km,² utilizzando i valori noti delle masse dei due corpi celesti otteniamo valori differenti del momento d'inerzia per entrambi. La seguente tabella mostra i valori corrispondenti dei due momenti d'inerzia.

Anche i momenti d'inerzia del sistema Sole-Terra non coincidono se riferiti alla posizione del centro di massa del sistema che cade in prossimità del centro della nostra stella. La tabella 3 ci mostra i valori trovati.

² Il valore è ottenuto sommando il valore del raggio lunare (1738 Km) più la distanza Terra-Luna (384400 Km) più la distanza del centro di massa del sistema dalla superficie terrestre (1704,8 Km).

Tabella 3 – Calcolo dei momenti d'inerzia del Sole e della Terra

Massa sole (kg)	Raggio sole (km)	Massa terra (kg)	Raggio terra (km)	Distanza terra-sole (km)	Posizione centro di massa	Distanza dalla superficie del sole del centro	Distanza centro terra-centro di massa sistema	Momento d'inerzia terra	Momento d'inerzia sole
1,99E+30	6,95E+05	5,97E+24	6372,797	1,50E+08	449,19	6,95E+05	1,50E+08	1,35E+41	4,01E+35

Dai dati ottenuti risulta evidente che la mancata uguaglianza dei momenti d'inerzia, e quindi dei momenti angolari dei due corpi del sistema rigido Terra-Luna, non sostiene la motivazione della rotazione del sistema medesimo attorno al suo centro di massa come causa del verificarsi delle maree doppie. Infatti, se i due momenti d'inerzia non corrispondono in modulo ciò dovrebbe comportare che Terra e Luna dovrebbero avere velocità angolare differenti attorno all'asse di rotazione del sistema (immaginato passante per il centro di massa del sistema, così come sopra calcolato) per poter eguagliare i momenti angolari di entrambi. Se si sostiene che Terra e Luna costituiscono un unico sistema allora esso deve essere equiparato concettualmente ad un corpo rigido. Per un corpo rigido in rotazione attorno ad un asse esiste, infatti, un unico momento angolare riferito a quell'asse. Cioè, l'asse di rotazione è posto ad una distanza tale che ogni elemento di massa del corpo possiede una quantità di moto in grado di, insieme alle quantità di moto di tutti gli altri elementi di massa del corpo, stabilizzare la rotazione del

corpo medesimo. Nel nostro caso, però, per uniformare il momento angolare di Terra e Luna (che presentano momenti d'inerzia differenti) l'unico modo sarebbe quello che i due corpi presentino velocità angolare differente. In tal caso i tempi di rotazione attorno al centro di massa non sarebbero gli stessi per Terra e Luna. Ciò comporterebbe una conseguente variazione della posizione del centro di massa medesimo. Infatti, il centro di massa dipende dalla distanza reciproca delle masse considerate, pertanto, spostarne una in riferimento all'altra fa cambiare anche la posizione del centro di massa medesimo. In altri termini i due corpi sarebbero scollegati, non in equilibrio rotazionale l'uno rispetto all'altro. Di conseguenza, come già sostenuto, la gobba formata dalle masse liquide come effetto della forza centrifuga non sarebbe antipodale a quella dovuta all'attrazione gravitazionale della Luna, come dimostra il disegno di fig. 1. Come giustificare questo paradosso teorico?

4 - Ipotesi giustificativa

Terra e Luna rappresentano certamente un sistema di corpi celesti dal punto di vista gravitazionale. Insieme al Sole e agli altri pianeti partecipano al popolamento dello spazio di questo sistema stellare, occupando specifiche orbite così come impone la legge della gravitazione universale dedotta da Newton e perfezionata da Einstein con la teoria della relatività generale. I corpi minori si muovono all'interno della deformazione gravitazionale dello spaziotempo creata dai corpi di massa maggiore con una velocità che dipende dalla distanza dal corpo attorno al quale gravitano così come impone, peraltro, la terza legge di Keplero. Il momento

angolare dagli stessi presentato dipende sostanzialmente dall'entità della forza gravitazionale del corpo attraente,³ dalla loro specifica massa mentre la velocità di rotazione dipende dalla distanza.⁴ Minore è la distanza maggiore deve essere la velocità angolare alla quale il corpo celeste si muove. Ciò serve per garantire la necessaria componente centrifuga capace di bilanciare la componente gravitazionale del corpo di massa maggiore, garantendo, in tal modo, un equilibrio rappresentato dall'andamento ciclico lungo l'orbita. Se consideriamo il sistema Terra-Luna (come anche il sistema Terra-Sole, o qualsiasi altro sistema simile) esso appare dotato di una certa stabilità nel tempo. Stabilità che si manifesta con una costante velocità di rivoluzione del corpo di dimensioni minori intorno a quello di dimensioni maggiori, come anche con una certa costanza della distanza che li separa. Da questo punto di vista se proprio vogliamo immaginare il sistema come un corpo rigido che ruota attorno ad un asse, quest'ultimo dovrebbe però collocarsi nella giusta posizione tra i due perché altrimenti, come abbiamo visto, i rispettivi momenti angolari (propri di un corpo rigido) non si uguagliano. Appare più probabile che l'equilibrio gravitazionale nel quale si trova il sistema Terra-Luna non comporti necessariamente una configurazione propriamente rigida del sistema medesimo. Solo in un corpo rigido vero e

³ Che, a sua volta, dipende dalla sua stessa massa. Più massivo è il corpo attraente maggiore è la deformazione dello spaziotempo da esso indotto e, di conseguenza, il corpo di massa minore "cade" più velocemente nell'"imbuto" gravitazionale così creato.

⁴ Così come accade ad una pattinatrice sul ghiaccio quando, eseguendo un avvistamento, avvicina le braccia al corpo per ruotare più velocemente o le allontana per rallentare.

proprio si verificherebbe una uguaglianza dei momenti angolari, ma in tal caso l'asse di rotazione sarebbe posto a distanza ben maggiore rispetto al centro di massa del sistema medesimo.⁵ Non appare quindi indispensabile impostare la dimostrazione delle cause delle doppie maree sul concetto di rotazione del sistema Terra-Luna (considerato rigido) attorno al centro di massa dei due corpi. Direi, anzi, che tale interpretazione possa essere fuorviante. Infatti, come

⁵ Nel calcolo effettuato in tabella di fig. 4 affinché i due momenti d'inerzia di Terra e Luna siano uguali, in modo da poter avere anche una uguale velocità angolare, il centro per cui far passare l'asse di rotazione dovrebbe trovarsi fuori dalla Terra ad alcune decine di migliaia di chilometri da essa. Se si vuole determinare la posizione del centro per cui dovrebbe passare l'asse di rotazione del sistema Terra-Luna affinché vengano eguagliati i due momenti d'inerzia si può procedere nel seguente modo. Si ponga la massa della Luna in rapporto a quella della Terra che viene assunta come unità. Il valore così ottenuto è pari a 0,012293. Adesso si ponga pari all'unità anche la distanza centro della Luna - centro della Terra [384400 Km + 1738 Km (raggio Luna) + 6372,8 Km (raggio Terra) = 392510,8 Km]. A questo punto è possibile impostare la seguente uguaglianza basata sulla formula del momento d'inerzia.

$$\begin{aligned}
 0,0122928 * (1 - r_T)^2 &= 1 * r_T^2 \\
 0,0122928(1 - 2r_T + r_T^2) &= 1 * r_T^2 \\
 0,987707r_T^2 + 0,024585r_T - 0,0122928 &= 0 \\
 \frac{-0,02459 \pm \sqrt{0,00060445 + 0,0485667}}{2 * 0,987707}
 \end{aligned}$$

Dalla risoluzione di questa equazione si ottiene il valore 0,099808 che moltiplicato per la distanza Terra-Luna (392510,8 Km) già ricordata permette di determinare la distanza del centro della Terra dall'asse di rotazione del sistema Terra-Luna. Tale distanza è pari a 39176 Km. Se si considera questa distanza i due momenti d'inerzia si equivalgono.

sappiamo, i pianeti del sistema solare presentano, come conseguenza della terza legge di Keplero, una velocità orbitale via via crescente man mano che diminuisce la loro distanza dal Sole. Quindi anche la velocità angolare è diversa per ciascuno di essi. Il verificarsi della doppia marea può essere spiegato più semplicemente ammettendo invece il principio della conservazione del momento angolare in riferimento al solo moto di rotazione terrestre. L'attrazione luni-solare che causa il sollevamento delle acque al passaggio di questi corpi celesti sul meridiano del luogo crea una anomala distribuzione delle masse idriche, accumulandole dal lato della superficie terrestre rivolto a questi corpi. Se questo fenomeno non venisse contrastato in tempo reale anche da un sollevamento del livello dei mari sul lato opposto della superficie terrestre (reazione inerziale) ciò provocherebbe un disequilibrio di masse rispetto al centro di massa del nostro pianeta. Se ciò si realizzasse provocherebbe una sorta di minima oscillazione dell'asse di rotazione con ripercussioni gravi sull'intero pianeta. La Terra nel corso del tempo assumerebbe un moto di rotazione oscillante, tipo trottola quando perde velocità. Il principio della conservazione della quantità di moto (gestito comunque dal principio d'inerzia) si oppone a tutto ciò permettendo alle acque di fluire uniformemente verso i poli opposti dove vengono creati i necessari accumuli di acqua utili a mantenere l'equa distribuzione delle masse.

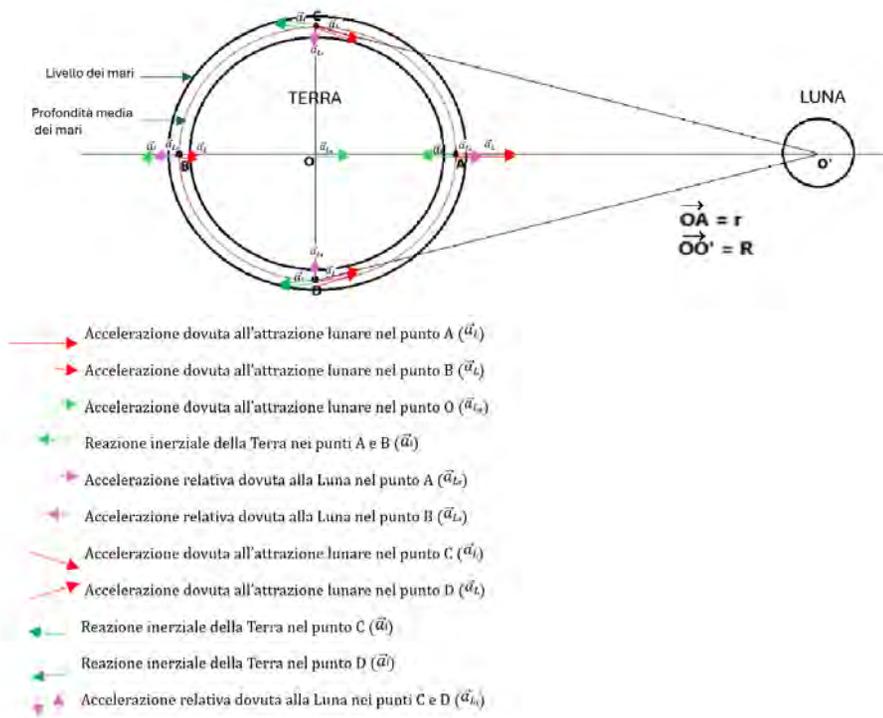


Fig. 1 – Effetti mareali antipodali identici come conseguenza dell'equilibrio tra l'azione gravitazionale della Luna sulla Terra e la reazione inerziale di quest'ultima.

Insomma, si ha una reazione inerziale della Terra alla forza attrattiva operata dalla Luna che equilibra le masse idriche ai lati opposti. Si prenda infatti in riferimento la figura 1.

In A l'accelerazione relativa al centro della Terra dovuta alla Luna è la differenza tra \vec{a}_L (dovuta alla forza gravitazionale della Luna) e \vec{a}_i (dovuta alla reazione inerziale e rivolta in verso opposto alla prima) che risultano essere parallele. Quindi l'accelerazione risultante sarà:

$$\begin{aligned}\vec{a}_{Lr}(A) &= \vec{a}_L(A) - \vec{a}_i = -G \frac{m_L}{(R-r)^2} + G \frac{m_L}{R^2} \\ \vec{a}_{Lr}(A) &= Gm_L \left[\frac{1}{(R-r)^2} - \frac{1}{R^2} \right] = Gm_L \frac{2Rr-r^2}{(R-r)^2 R^2}\end{aligned}$$

Poiché il raggio r della Terra è piccolo rispetto alla distanza R tra Terra e Luna possiamo trascurare il termine r^2 al numeratore, mentre al denominatore al posto della grandezza $(R-r)^2$ si può lasciare soltanto R^2 .

Pertanto, avremo:

$$\vec{a}_{Lr}(A) = 2 \frac{Grm_L}{R^3}$$

Analogamente al punto A, anche nel punto B possiamo applicare lo stesso procedimento.

$$\begin{aligned}\vec{a}_{Lr}(B) &= \vec{a}_L(B) - \vec{a}_i = -G \frac{m_L}{(R+r)^2} + G \frac{m_L}{R^2} \\ \vec{a}_{Lr}(B) &= Gm_L \left[\frac{1}{(R+r)^2} - \frac{1}{R^2} \right] = Gm_L \frac{2Rr-r^2}{(R+r)^2 R^2} \\ \vec{a}_{Lr}(B) &= 2 \frac{Grm_L}{R^3}\end{aligned}$$

In questo secondo caso poiché l'accelerazione risultante $\vec{a}_{Lr}(B) < \vec{a}_i$ essa punta in verso opposto rispetto alla medesima risultante nel punto A. In tal modo in entrambi i punti antipodali A e B agisce la medesima risultante tra forza gravitazionale lunare e relativa reazione inerziale terrestre di modo che si hanno contemporaneamente due alte maree di uguale ampiezza. Nei punti C e D invece le accelerazioni relative dovute alla Luna ($\vec{a}_L(C)$ e $\vec{a}_L(D)$) sono dirette verso il centro della Terra. Di conseguenza l'azione dell'acqua rafforza la gravità e si verifica un abbassamento del livello dei mari.

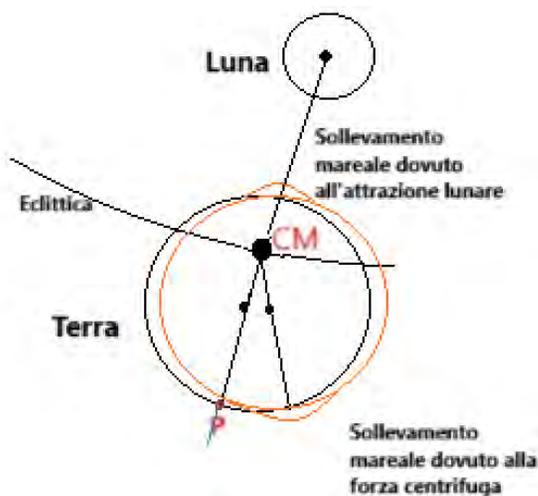


Fig. 2 – Ipotesi di differenti momenti angolari di Terra e Luna. La differente velocità angolare della Terra attorno al centro di massa del sistema disallinea il rigonfiamento antipodale delle acque dovuto all'inerzia rispetto a quello dovuto alla forza gravitazionale esercitata dalla Luna.

5 – Conclusioni

Le considerazioni fatte finora sembra rendano superflua la spiegazione della doppia marea come conseguenza della rotazione del sistema Terra-Luna attorno al suo centro di massa. L'ipotesi giustificativa del fenomeno della doppia marea appena esplicitata risolverebbe anche una probabile problematica teorica relativa a possibili errori di parallasse⁶ che dovrebbero verificarsi nella determinazione della posizione di oggetti astronomici osservati giornalmente alla stessa ora nel corso del mese siderale.

⁶ Per un più ampio approfondimento sulla parallasse stellare si consulti: https://oberon.roma1.infn.it/alessandro/astro2015/Astronomia015_4.pdf

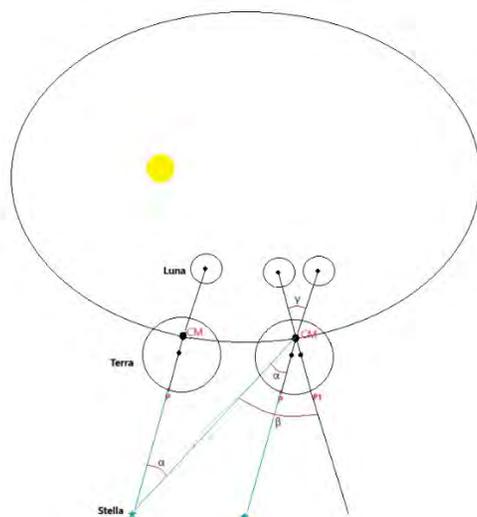


Fig. 3 – Descrizione grafica dell'errore di parallasse che si verificherebbe se giornalmente la Terra ruotasse anche attorno al centro di massa del sistema Terra-Luna. Dopo 23 h 56 m 4 s, alla medesima ora del giorno precedente, un osservatore dovrebbe ruotare il proprio telescopio non soltanto dell'angolo orbitale compiuto dalla Terra nel suo moto di rivoluzione attorno al Sole (angolo α) ma di un angolo maggiore (angolo β) perché nel frattempo il centro di massa della Terra ha subito una rotazione attorno al centro di massa del sistema Terra-Luna e l'osservatore (punto P) si troverebbe spostato spazialmente nel punto P1. L'angolo γ riportato in figura è l'angolo di cui si sposta la Luna attorno alla Terra giornalmente.

Teniamo conto, infatti, che la Terra nel tempo in cui compie una rotazione completa attorno al proprio asse si sposta anche lungo la sua orbita attorno al Sole di un certo angolo giornaliero, che varia in funzione della sua posizione orbitale e quindi in base alla stagione.

Se la Terra, nel compiere una rotazione attorno al proprio asse, ruotasse anche attorno al baricentro comune con la Luna, le coordinate del corpo celeste cercato dovrebbero differire

ulteriormente, anche se di poco, rispetto alla sola variazione dovuta allo spostamento lungo l'orbita (vedi fig. 3).

Bisogna comunque tenere presente che la visibilità degli oggetti astronomici presenti sulla Sfera Celeste dipende da svariati fattori. Tali fattori si possono così riassumere:

- Dalle coordinate geografiche dell'osservatore. Ma cambiano nel tempo a causa della rotazione della Terra (parallasse diurna).
- Per una data posizione sulla Terra e per una data ora, gli oggetti visibili cambiano nel corso dell'anno a causa del moto di rivoluzione della Terra intorno al Sole (parallasse annua).

In particolare, nel sistema equatoriale le coordinate Declinazione e Ascensione Retta (α e δ) di un dato oggetto astronomico, risultando indipendenti dalla posizione dell'osservatore nello spazio, dovrebbero rimanere costanti nel tempo. In realtà però si conoscono diverse cause che possono farne variare i valori:

- Aberrazione della luce (causata dalla rivoluzione della Terra)
- Precessione Luni-Solare (causata dal moto dell'asse della Terra)
- Precessione planetaria (causata dal moto dell'asse della Terra)
- Le nutazioni dell'asse terrestre
- Rifrazione (causata dall'atmosfera della Terra)
- Moti propri delle stelle.

Per un maggiore chiarimento sui fattori sopra elencati si rimanda alle specifiche letture consigliate nella sitobibliografia. L'esistenza di così tante fonti di errore nella determinazione delle coordinate astronomiche pone il dilemma di quali coordinate equatoriali bisogna considerare per i corpi celesti. Ad esclusione dei primi due fattori di cui si può facilmente tenere conto, per gli altri fattori, visto che le variazioni sono minime in rapporto ai tempi della vita umana, in pratica si assumono delle coordinate equatoriale corrette in un certo istante di tempo o, meglio, per una certa epoca, applicando alle stesse delle opportune variazioni. La maggior parte delle mappe e cataloghi usano l'epoca J2000.0 che indica il periodo che ha avuto inizio dall'anno 2000. Non vengono riportate in letteratura altre cause importanti di variazione nel tempo delle coordinate celesti, siano esse altazimutali o equatoriali. In particolare, non si trova traccia di parallasse dovuta al moto di rotazione della Terra attorno al centro di massa comune con la Luna. Dato che questo specifico errore di parallasse non è menzionato è presumibile che esso non si verifichi o che non sia stato ancora misurato. Quest'ultima ipotesi andrebbe quindi meglio verificata con opportune misurazioni angolari di confronto. In ogni caso la giustificazione teorica della doppia marea, riportata in questo breve lavoro, risulterebbe esente dalla problematica appena evidenziata non avendo riconosciuto nella rotazione del sistema Terra-Luna la causa del fenomeno della doppia marea. Inoltre, l'approccio logico deduttivo appena presentato della problematica della doppia marea sembrerebbe scientificamente condivisibile e di lineare comprensione.

Sito Bibliografia

D. Halliday, R. Resnick, J. Walker (2009). Fondamenti di fisica - Meccanica. Bologna, Zanichelli

<http://webusers.fis.uniroma3.it/bernieri/pdf/Coordinate.pdf>

http://webusers.fis.uniroma3.it/bernieri/pdf/Coordinate_ppt_1.pdf

https://cla.unisalento.it/c/document_library/get_file?folderId=7415906&name=DLFE-246801.pdf

<https://fisica.campusnet.unito.it/didattica/att/80b1.4663.file.pdf>

https://oberon.roma1.infn.it/alessandro/astro2012/Astronomia012_4.pdf

https://oberon.roma1.infn.it/alessandro/astro2015/Astronomia015_4.pdf

https://static.treccani.it/export/sites/default/Portale/resources/multimedia/Lezioni_Astrofisica/Distanze/presentazione.pdf

https://www.oact.inaf.it/wp-content/uploads/2021/02/Coordinate_2020-1.pdf

<https://www.unisalento.it/documents/20152/719430/Maree.pdf/>

Lucio Russo (2003). Flussi e riflussi -Indagine sull'origine di una teoria scientifica. Milano, Feltrinelli Editore

Richard Feynman (2023). La legge fisica. Bollati Boringhieri

Affinità tra figure frattali

Algoritmi combinatori alla scoperta delle coppie drago, farfalla e falena, siamese

Giorgio Pietrocola *

*APAV; giorgio.pietrocola@gmail.com



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v6n4.146

Sunto: In quest'articolo attraverso uno studio combinatorio si individuano quattro curve frattali (dette anche merletti), tra cui quella famosa individuata da Koch. Ripetendo su uno stesso segmento alcuni di questi merletti vengono costruite due coppie di figure frattali e evidenziate le loro proprietà. La nomenclatura introdotta evoca il sorprendente mondo dei lepidotteri.

Parole Chiave: *Frattale, algoritmo, curva di Koch, curva del drago, curva dei lepidotteri, drago ternario, farfalla, siamese, falena.*

Abstract: In this article, through a combinatorial study, four fractal curves (also called laces) are identified, including the famous one identified by Koch. By repeating some of these laces on the same segment, two pairs of fractal figures are constructed and their properties are highlighted. The introduced nomenclature evokes the surprising world of lepidoptera

Keywords: *Fractal, algorithm. Koch curve, dragon curve, lepidopteran curve, ternary dragon, butterfly, siamese, moth.*

1 - Introduzione

Negli anni Cinquanta l'autore era un bambino che era stato armato dal padre con un grosso retino e una bomboletta di etere per sopprimere, istantaneamente, le farfalle catturate. L'istinto del cacciatore aveva avuto il sopravvento sulle remore etiche, pure istintive, che avrebbero voluto risparmiare la vita di quegli insetti meravigliosi. Le vittime venivano poi preparate con cura da suo padre, fatte seccare con le ali aperte e uno spillo conficcato nel corpo per poterle sistemare in appositi contenitori, protetti con un vetro, per rendere quella bellezza immediatamente visibile e godibile a tutti.

Oggi questa caccia, giustamente, è vietata per proteggere le specie a rischio di estinzione e, più in generale, per salvaguardare la natura e quindi, in ultima analisi, noi stessi dai nostri comportamenti istintivi non più sostenibili.

Chi scrive sospetta di aver sublimato quell'istinto primordiale di cacciatore raccoglitore indirizzandolo verso il mondo virtuale della matematica, dove la ricerca del bello e del raro non implica la distruzione dell'oggetto che la racchiude. In particolare la caccia ai frattali e ai loro algoritmi, a volte sfuggenti, ha evocato emozioni di un'infanzia remota che in qualche modo sono servite da guida, suggerendo anche la nomenclatura proposta.

2 - Combinatoria per quattro merletti

Le quattro curve frattali presentate sono il limite di una crescita, il cui primo stadio è un segmento e negli stadi successivi, ogni segmento dello stadio precedente si trasforma

in due segmenti uguali più piccoli che insieme formerebbero un triangolo isoscele con angolo ottuso di 120 gradi.

Come è facile trovare, la misura dei suoi due lati uguali si ottiene dividendo la misura del terzo lato, il maggiore, per la radice di tre.

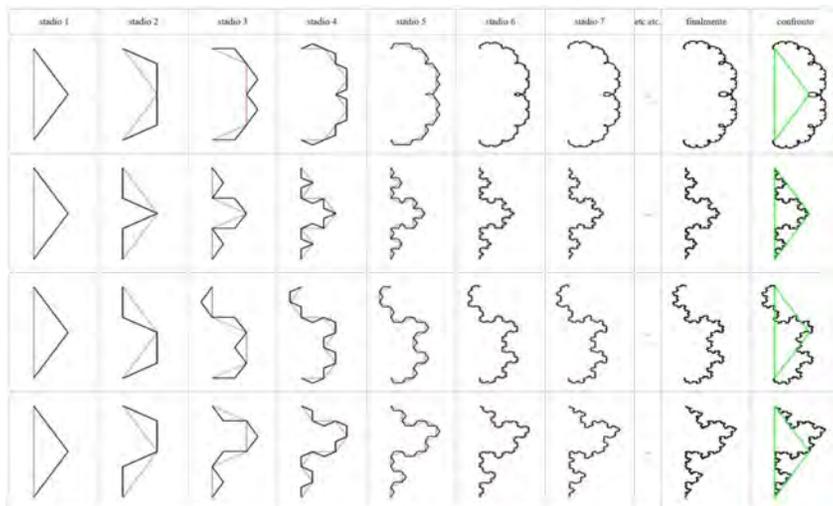


Fig. 1 - Le trasformazioni che hanno per limite i 4 merletti. In rosso lo stadio precedente. Nell'ultima colonna il confronto con lo stadio 1, in verde, per evidenziare la natura di replicanti del secondo ordine dei quattro che, infatti, divisi a metà, riproducono in scala ridotta l'intero merletto.

I segmenti subiscono sempre la stessa trasformazione raddoppiando a ogni livello ma a volte a destra, a volte a sinistra. I casi mostrati in figura 1 possono sintetizzarsi nel modo seguente:

D,DD,DDDD,DDDDDDDD,... e caso duale: CC, merletto delle pecore

D,SS,DDDD,SSSSSSSS,... e caso duale.: CA, merletto di Koch

D,DS,DSDS,DSDSDSDS,... e caso duale: AC, merletto dei draghi

D,SD,DSDS,SDSDSDSD,... e caso duale: AA, merletto dei lepidotteri

Dove la virgola indica il passaggio da uno stadio della costruzione all'altro e le lettere, iniziali di destra e sinistra, indicano la parte in cui avviene la sostituzione, partendo dal basso. Le lettere A per alternato e C per continuo si combinano con ripetizione nei quattro modi possibili. Il carattere locale è seguito da quello globale che si riferisce agli stadi dal secondo in poi. Per esempio CA, relativo al merletto di Koch, evidenzia una continuità locale, cioè all'interno di ogni stadio di sviluppo, e un alternanza globale cioè nel passaggio tra uno stadio e il successivo. I quattro casi potrebbero diventare otto iniziando con S invece che con D e lasciando invariato il resto. Poi le otto stringhe infinite potrebbero raddoppiare ancora considerando anche i duali di ognuna di esse cioè la stringa ottenuta scambiando destra con sinistra cioè, formalmente, S con D e viceversa. Potete trovare i sedici casi, con curve e programmi relativi all'indirizzo (url) dato nell'ultimo paragrafo.

3 - Figure frattali

Considerando i merletti come segmenti frattali, chiameremo poligoni frattali quei poligoni i cui lati sono sostituiti da segmenti frattali. Il caso più noto è quello del triangolo equilatero che sostituito in ogni lato dalla curva di Koch può formare tanto il fiocco di neve quanto il suo antifiocco come mostrato in Figura 2.

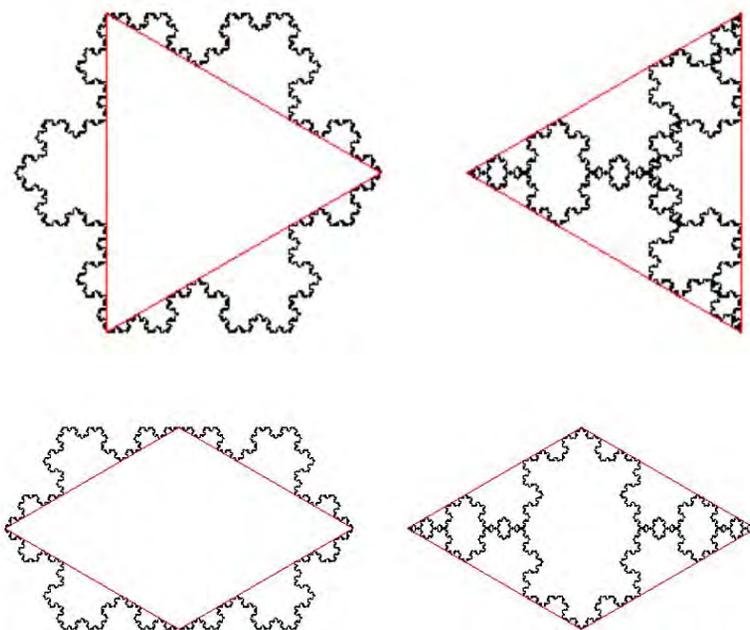


Fig. 2 - Poligoni frattali: in nero, sopra il fiocco e l'antifiocco, sotto il siamese e l'antisiamese (o fila di siamesi).

Osservando la Figura 1 si scopre che i merletti individuati, oltre che segmenti frattali, possono essere considerati anche come poligoni frattali.

Infatti, osservando i quattro triangoli verdi dell'ultima colonna, si nota che il lato maggiore corrisponde all'intero merletto e che i lati minori corrispondono a due copie simili ridotte nelle dimensioni. Partendo dal basso, l'orientamento è rispettivamente IE, EI, II, EE il che significa, per esempio, che il merletto dei lepidotteri, oltre al lato maggiore merlettato verso l'interno, sempre partendo dal basso, ha il primo lato minore verso l'interno (I) e il secondo verso l'esterno (E).

Alla ricerca di interessanti figure frattali, ho iniziato con il considerare il doppio segmento frattale cioè la sostituzione di un segmento con due merletti dello stesso tipo che insistono da ambo le parti dello stesso segmento. Non tutte le figure emerse in questo modo mi sono parse ugualmente interessanti. Ho così individuato le quattro figure frattali mostrate in Figura 3.

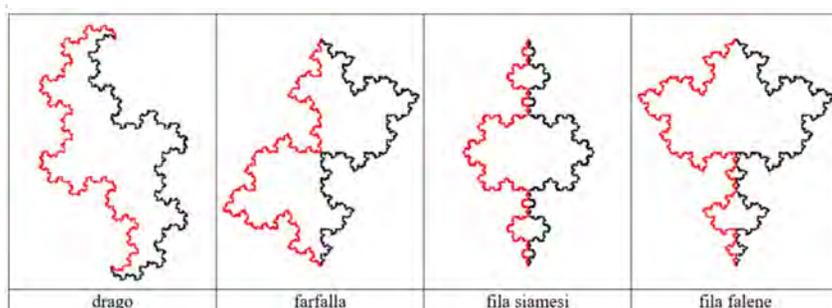


Fig. 3 - Le quattro figure frattali scelte: la coppia drago farfalla e la coppia siamesi falene.

Le figure che hanno attratto la mia attenzione sono risultate ricche di proprietà e hanno evidenziato due formidabili coppie!

Lascio le figure scartate, come la pecora e il drago arruffato, a futuri studi più approfonditi che non escludo possano far emergere virtù nascoste che mi sono sfuggite.

4 - Il drago e la farfalla

La figura che ho chiamato drago è conosciuta come Terdragon (Riddle-Scott 2022) ossia drago ternario per la

proprietà che ha di scomporsi in tre parti identiche, copie in scala della figura originale. La sua descrizione risale a uno stagionato articolo di matematica ricreativa (Knut-Chandler 1970). Molto meno nota appare invece la farfalla di cui poche tracce sono riuscito a trovare (Pietrocola 2009).

Cosa possono avere in comune due figure a prima vista così diverse? Molto anche se ci si ferma solo all'aspetto superficiale, infatti la prima sorpresa è che, se generati da segmenti uguali, il drago e la farfalla hanno anche le loro superfici di uguale misura. Procediamo dunque analizzando i vari punti condivisi.

4.1 - Analogie algoritmiche

Il drago ternario e la farfalla nell'algoritmo già presentato sono due varianti, una continua e l'altra alternata, della stessa trasformazione. Localmente entrambi alternano destra e sinistra, ma la farfalla, nelle varie fasi successive, alterna anche l'inizio. Esiste anche un altro algoritmo, mostrato in figura 4, che permette di arrivare direttamente all'area. L'algoritmo consiste nel sostituire iterativamente un segmento con una spezzata di tre segmenti uguali in modo che insieme formino le due metà di un triangolo equilatero. Ciò può essere fatto in due modi simmetrici che rappresenteremo per analogia con le lettere Z e S, le due figure frattali possono quindi essere descritte così:

$Z, ZZZ, ZZZZZZZZZ, Z^{27} \dots$ (drago)

$Z, SSS, ZZZZZZZZZ, S^{27} \dots$ (farfalla)

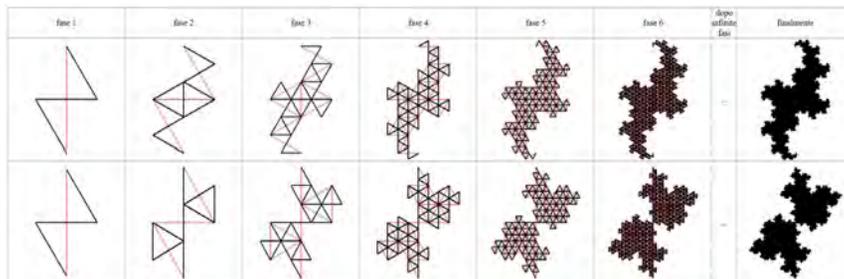


Fig. 4 - Confronto tra i primi livelli della generazione dell'area del drago e della farfalla. Nei due casi ogni segmento si trasforma in tre segmenti moltiplicandosi esponenzialmente. In rosso viene riportato il livello precedente per evidenziare le trasformazioni che, sono sempre dello stesso tipo (Z) nel primo caso mentre, dopo ogni fase, si alternano con la trasformazione simmetrica (S) nel secondo.

4.2 - Coincidenza di aree

Infatti l'alternanza locale tra destra e sinistra fa sì che ciò che si toglie e ciò che si aggiunge rispetto allo stadio precedente si compensi esattamente come evidenziato nella figura 1 . Dunque se i due frattali sono generati a partire da segmenti di ugual misura tali sono anche le loro aree dato che entrambe mantengono l'area del rombo di angoli 60,120,60,120 (figura 5) che ha per diagonale maggiore il lato di partenza.

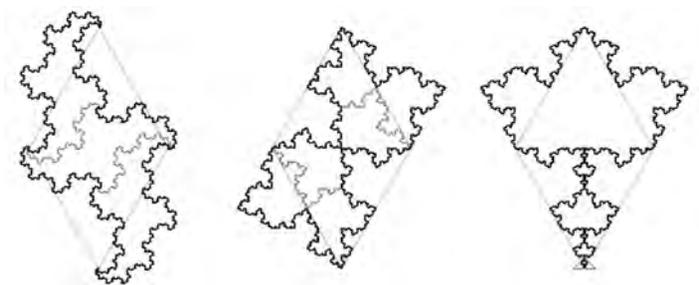


Fig. 5 - Confronti con l'area del rombo pari a due triangoli equilateri uniti dalla diagonale minore

4.3 - Replicanti del terzo ordine

Entrambe le figure, come mostrato in figura 6, sono replicanti del terzo ordine ma le tre copie ridotte della farfalla hanno la particolarità di essere immagini speculari della stessa. Quindi quest'ultima necessita di due generazioni per tornare in tutto come prima.

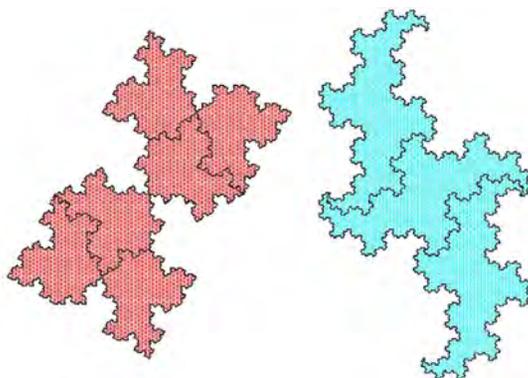


Fig. 6 - Replicanti del terzo ordine possono dividersi in tre copie identiche, simili all'originale.

4.4 - Corrispondenza di composizioni

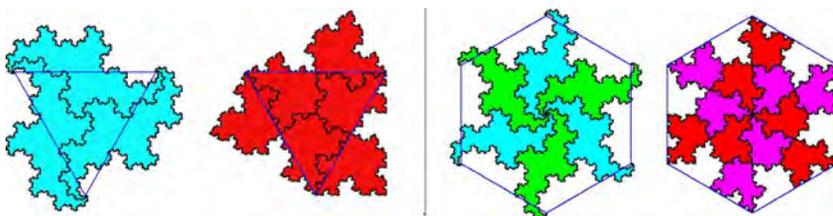


Fig. 7 - Corrispondenza tra aggregati triangolari ed esagonali di draghi e di farfalle

Come il triangolo equilatero e l'esagono regolare a cui sono legati, sia draghi che farfalle possono tassellare il piano come in figura 8.

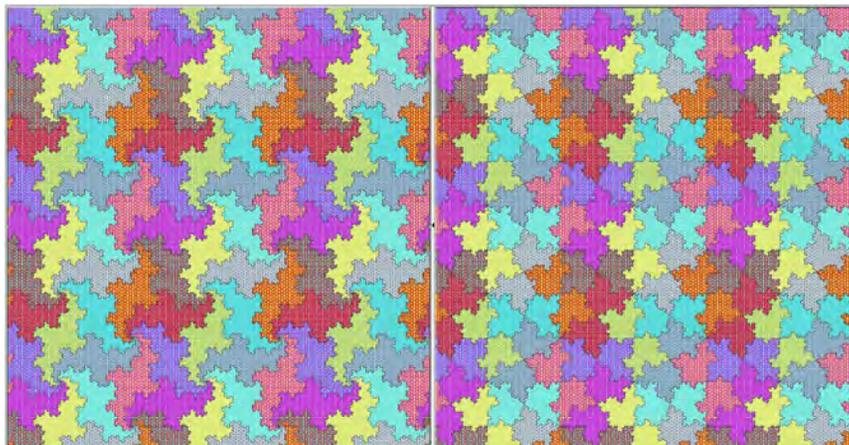


Fig. 8 - Tassellazione del piano con draghi e con farfalle.

5- Siamese e falena

Mentre a prima vista, il drago e la farfalla, non mostrano la loro somiglianza, le due file, di siamesi e di falene, hanno in comune il ripetersi all'infinito di una stessa figura con aree sempre più piccole, secondo una progressione geometrica di ragione 9.

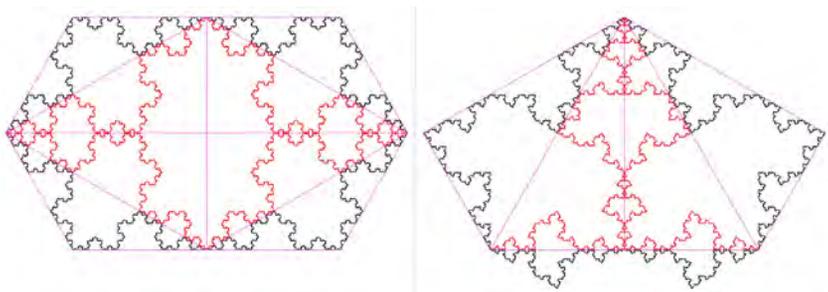


Fig. 9 - Nella prima immagine merlettando esternamente il rombo si ottiene il siamese (in nero), merlettandolo anche internamente si ottiene l'antisiamese (in rosso) che divide il siamese in infinite copie di se stesso. Lo stesso accade con la falena ottenuta merlettando opportunamente il triangolo equilatero

Quando, durante le mie ricerche, scoprii la fila di falene, notai subito l'analogia con la fila di siamesi che avevo già studiato e sospettai subito che la singola falena avesse le stesse proprietà che avevo scoperto precedentemente. Grande fu la soddisfazione di scoprire che era proprio così! Il siamese è un poligono frattale, un rombo merlettato esternamente dalla curva di Koch; se lo stesso rombo lo si merletta anche internamente, la sua figura viene scomposta in infinite parti, tutte con la stessa forma dell'originale. Analogamente, la falena è un triangolo equilatero merlettato esternamente ma, in un lato, solo con porzioni della curva dei lepidotteri (figura 9). Anche in questo caso aggiungendo la sua anti-figura, cioè

merlettando anche internamente il triangolo equilatero, si ottiene un'altra figura replicante di ordine infinito. Infatti la falena si scompone così in infinite copie di se stessa (figura 9). Sospetto di no, ma la questione rimane aperta.

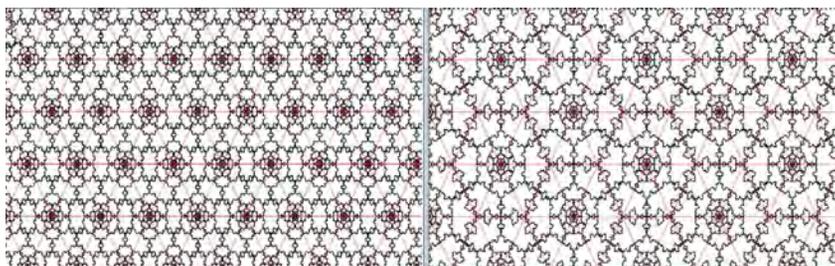


Fig. 10 - Tassellatura del piano con una sola figura frattale. Entrambi gli esempi ottenuti da una tassellazione con triangoli equilateri; il primo sostituendoli con antifiocchi, il secondo con antifalene

Accenno soltanto in figura 10 alle straordinarie proprietà tassellanti di queste due straordinarie figure frattali (Pietrocola 2023, 2025).

6 - MSWLogo

Tutte le illustrazioni di questo articolo sono state realizzate con FMSLogo, una versione del Logo che si può scaricare gratis. Alla url: "www.pietrocola.eu/periodicomat25.htm" troverete spiegazioni dettagliate su come ottenere questo programma insieme alle procedure per costruire le figure

frattali presentate in questo articolo con spiegazioni ed esempi del loro uso.

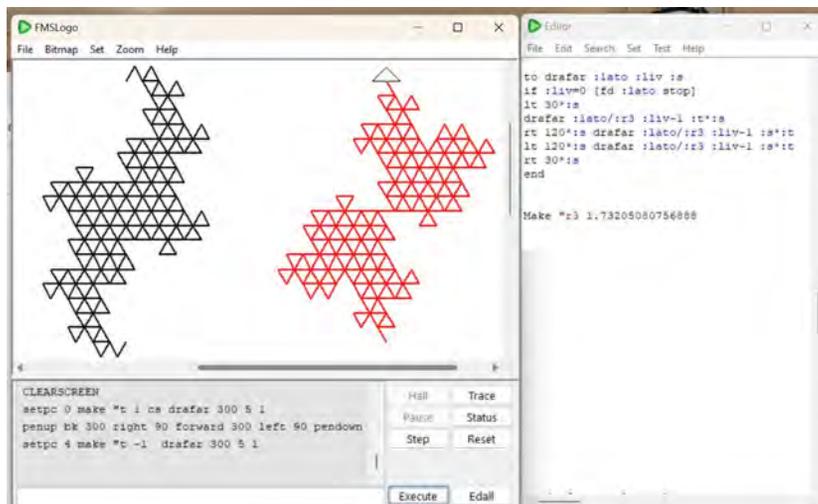


Fig. 11 - A destra , nella finestra “Edit” dell'FMSLogo le poche istruzioni necessarie per ottenere ciò che è mostrato a sinistra. Sotto i disegni realizzati vi è uno spazio dove rimane traccia dei comandi immessi nella linea bianca sottostante per realizzarli.

In figura 11 è visibile la finestra principale con il pulsante “Execute” per mandare in esecuzione gli ordini per l'automa tartaruga scritti nell'apposita linea dei comandi alla sinistra del pulsante. Appena sopra c'è un campo di testo dove rimane traccia delle immissioni. Superiormente c'è il campo grafico dove la tartaruga, rappresentata dal classico triangolino, esegue gli ordini impartiti. Nella figura è stato appena immesso il comando multiplo composto da `setpc 4` per scegliere il colore rosso, `make "t -1` per assegnare -1 alla variabile t che determina il tipo di figura frattale (1 drago e -1 farfalla) `drafar 300 5 1` per disegnare l'area della farfalla di

livello 5 partendo dal segmento di 300 pixel. Le pochissime primitive necessarie per iniziare sono spiegate nel vocabolario animato del Tartapelago (Pietrocola, 2005). Se avete il Logo premendo il tasto "Edall" si apre la finestra "Editor" visibile in figura. Dopo aver copiato il testo delle istruzioni e salvato mediante il menù "file", la tartaruga, a comando, eseguirà i vari disegni nelle dimensioni specificate. Tutto dovrebbe essere agevole ma se avete problemi non esitate a contattarmi.

Bibliografia

C. Davis and D. E. Knuth (1970), Number representations and dragon curves I, II, J. Recreational Math., 3, pp. 66-81

Larry Liddle - Agnes Scott College (2022), Terdragon ,
<https://larryriddle.agnesscott.org/ifs/heightway/terdragon.htm>

Giorgio Pietrocola (2005), Vocabolario animato primitive Logo, Tartapelago, Maecla,
<https://www.maecla.it/tartapelago/vocanimato/index.htm>

Giorgio Pietrocola (2009) , Mostra di frattali replicanti, Tartapelago, Maecla
www.pietrocola.eu/maecla/tartapelago/frattali/petalo.htm

Giorgio Pietrocola (2023) Il siamese di Koch, Periodico di Matematica (IV) Vol. V(2) giugno, pp. 109-123.

Giorgio Pietrocola (2024), Il siamese e la falena, due frattali per l'arte di Escher, Archimede 3/2024, pp.159-166

Profili biografici degli autori

Silvia Cerasaro (Roma) - cerasaro@xpmat.uniroma2.it

Ha conseguito la laurea in matematica presso l'Università degli Studi di Roma "Tor Vergata". Possiede le abilitazioni all'insegnamento alla scuola dell'Infanzia, alla scuola Primaria, alla classe di concorso A028 (Matematica e Scienze) per la scuola secondaria di primo grado, alle classi di concorso A026 (Matematica) e A027 (Matematica e Fisica) nella scuola di secondo grado. Insegna presso il Liceo Pietrobono di Alatri (FR) e attualmente è in esonero dal servizio per la frequenza al Dottorato di Ricerca in Didattica della Matematica. Collabora con Progetto Fibonacci ed alcune associazioni in merito alla didattica della matematica, tiene corsi di formazione per insegnanti ed è stata relatrice a diversi convegni e seminari nazionali. Ha pubblicato diversi articoli sull'uso della storia delle matematiche nella didattica.

Giuseppe D'Angelo (Giarre) - sitdang010762@gmail.com

Laureato in Scienze Agrarie, ha conseguito l'abilitazione all'esercizio professionale di Agronomo e l'abilitazione all'insegnamento in Scienze Naturali. Docente a tempo indeterminato presso il liceo Scientifico Statale "Leonardo" di Giarre (CT). Ha collaborato saltuariamente con la rivista scientifica «Coelum Astronomia», nella quale ha pubblicato recentemente l'articolo *Il paradosso di olbers: un metodo per conoscere il numero di stelle che popolano l'universo*, e con il «Periodico di Matematica» con l'articolo: *Se le calotte polari si sciogliono.....*. È autore di varie pubblicazioni su diverse altre riviste («La Chimica nella Scuola», «La tecnica della Scuola», «Linx Magazine») e del saggio *Lo Spazio*

Polisimmetrico – prima edizione Ed. Book Sprint (cod ISBN 978-88-6823-1729). È autore di varie pubblicazioni su diverse altre riviste («La Chimica nella Scuola», «La tecnica della Scuola», «Linx Magazine», «ArteScienza», «La Ricerca») e di alcuni saggi.

Paolo Severino Manca (Pisa) - paolo.manca.spas@alice.it

Già professore ordinario di Matematica Finanziaria all'Università di Pisa e direttore del Master in Mercati Finanziari dell' Università di Pisa e Fondazione Casse di Risparmio. Di recente ha scritto *Te la do io la probabilità* (Goware editore) e *Il giallo del teorema dei quattro colori* (ETS editore). Attualmente si occupa di teologia e ha pubblicato con successo *Ma Dio c'è?* (Goware editore). Nel passato ha esercitato anche la professione di maestro di sci. Come tenore e romanziere si presenta come Paolo Severino Nonchè (vedi YouTube e Amazon).

Luca Nicotra (Roma) - luca.nicotra1949@gmail.com

Laureato in Ingegneria Meccanica a pieni voti all'Università "Sapienza" di Roma. Giornalista iscritto all'Ordine Nazionale dei Giornalisti albo pubblicitari dal 2008. Autore di circa 450 articoli, culturali, tecnici e di divulgazione scientifica, e di vari libri fra cui: *Bruno de Finetti: un matematico scomodo* (coautore Fulvia de Finetti) Livorno: Belforte, 2008, la prima biografia mondiale del grande scienziato; *Ingegneria Assistita dal Computer, vol. 1.*(coautore F. Campana) Roma: UniversItalia, 1ed. 2012 e 2ed. 2014; *Nello specchio dell'altro: riflessi della bellezza tra arte e scienza* (coautore Rosalma Salina Borello) Roma: Universitalia, 2011; *Quasicristalli. Intrecci segreti fra natura, arte e scienza* (coautori C. Francou e U. Locatelli) Roma, UniversItalia, 2017. Ha svolto attività di ricerca nel campo della trasmissione del calore presso l'Istituto di Fisica Tecnica dell'Università "Sapienza" di Roma e nel settore dei sistemi di guerra elettronica nell'industria della difesa (Elettronica S.p.A. - Roma). È esperto di sistemi computerizzati per la progettazione e

produzione meccanica e ha svolto una intensa attività di formatore di progettisti meccanici presso molte importanti industrie nazionali. Dal 2014 tiene annualmente il “Corso Mechanical Design con CATIA V5” al Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale dell’Università “Sapienza” di Roma. È Presidente dell'Associazione Culturale "Arte e Scienza", membro onorario dell’Accademia Piceno Aprutina dei Velati (APAV) e dell’Accademia di Filosofia delle Scienze Umane (AFSU), membro del comitato scientifico della rivista «Science & Philosophy», fondatore e direttore responsabile dei periodici «ArteScienza», «Bollettino dell’Accademia di Filosofia delle Scienze Umane», «Periodico di Matematica». Direttore editoriale della casa editrice UniversItalia di Roma, per la quale cura la collana *Scienza e Cultura*. Dirige anche le collane *Ingegneria Industriale Assistita dal computer* e *Il filo della conoscenza* per la casa editrice Inriga di Bologna, con la quale ha pubblicato i libri *La progettazione meccanica con CATIA V5* (2023), *Le fasi del ciclo di vita del prodotto. Il ruolo dell’informatica* (2023), *La verità in matematica. Da Gödel a Euclide* (2024). Per le ricerche si veda il sito Research Gate.

Giorgio Pietrocola - giorgio.pietrocola@gmail.com

Laurea in matematica all'università "Sapienza" di Roma. Inizia la carriera come addetto alle esercitazioni nel corso di Analisi Matematica della facoltà di Architettura di Roma. Dopo il servizio militare insegna nelle scuole medie superiori fino al 2007 anno del pensionamento. Contemporaneamente svolge lavoro di programmatore realizzando anche software didattico. Si interessa al linguaggio Logo e alla filosofia educativa di Seymour Papert e crea nel proprio istituto un laboratorio di Matetica, Alla fine degli anni '90 collabora alla direzione e conduce workshop nei corsi di Perfezionamento Educazione e Tecnologie alla LUMSA di Roma Nel 2000, è tra gli autori e i curatori del libro *Apprendimento e nuove strategie educative* Edizioni Unicopli. Su Internet nel 2005 idea e

realizza il Tartapelago, un sito divulgativo, con animazioni didattiche di natura geometrica costruite mediante il linguaggio Logo. Dopo il pensionamento si diletta nella ricerca, si occupa soprattutto del problema classico della somma di potenze di interi successivi, facendo diverse scoperte alcune delle quali sembrano essere originali. Questa attività sfocia nella pubblicazione di articoli su riviste specializzate in matematica e in didattica nonché nella partecipazione a diversi convegni nazionali.

Laura Tomassi (Roma) - laura.tomassi@gmail.com

Laura Tomassi è insegnante nella Scuola Secondaria di Primo Grado, nata a Rieti il 06/03/1973, laureata in Chimica presso l'Università degli Studi di Roma La Sapienza. Ha conseguito il Dottorato di Ricerca in Biologia Cellulare e Molecolare presso l'Università degli Studi di Tor Vergata ed attualmente Dottoranda in Matematica presso lo stesso ateneo. Ha insegnato nelle Scuole Secondarie Secondo Grado e negli Istituti di Formazione Professionale. L'esperienza didattica nel campo delle Scienze Naturali e della Matematica ha acceso il suo interesse per lo studio, la progettazione la sperimentazione di attività laboratoriali, riproposte in qualità di formatrice presso i corsi dell'Accademia dei Lincei, presso l'Università di Tor Vergata e l'Università LUMSA. E' inoltre collaboratrice del progetto di ricerca sul Liber Abaci di Fibonacci, www.progettofibonacci.it. La sua attività di ricerca e di insegnante hanno in comune la tematica della storia integrata nella didattica della matematica e delle scienze e la progettazione di materiali didattici ispirati alla storia.