Periodico di Matematica (IV) Vol. VI (4) dicembre 2024, pp. 7-48

Bruno de Finetti, così è se vi pare

«..ma davvero esiste la probabilità? e cosa mai sarebbe? Io risponderei che non esiste»[1]

I Parte

Luca Nicotra*

* Ingegnere meccanico, giornalista pubblicista, Accademico onorario APAV e AFSU, Presidente dell'Associazione Culturale "Arte e Scienza", Direttore responsabile dei periodici «ArteScienza», «Bollettino dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane», «Periodico di Matematica». Direttore editoriale di UniversItalia; luca.nicotra1949@gmail.com.

DOI : 10.53159/PdM(IV).v6n4.142

Sunto. *Bruno de Finetti è universalmente noto come uno dei più grandi matematici del XX secolo, grazie soprattutto alla sua teoria soggettiva della probabilità. Tuttavia, la sua figura non può essere isolata entro il recinto aristo-*

[1] Il presente articolo è una rielaborazione dell'omonimo pubblicato in più puntate in «Notizie in … Controluce» anno XIII nn. 6,8,9,11,12 (2004), anno XIV nn. 1,2 (2005), che è stato citato nella voce "Bruno de Finetti" dell'Enciclopedia Treccani (Lucarelli, Lunghini, 2013).

cratico dei grandi matematici, perché la sua complessità e originalità, dal punto di vista sia culturale sia umano, ne fanno uno dei più fulgidi simboli intellettuali del secolo appena trascorso. In questo articolo si delinea un ritratto a tutto campo della sua figura di scienziato e uomo, partendo dall'opera sua scientifica che lo ha reso più celebre e toccando successivamente i temi più caratteristici della sua vita di scienziato, uomo di cultura e cittadino: la sua critica al determinismo, la didattica della matematica, il suo impegno sociale che lo vide sempre acuto osservatore dei costumi della società del suo tempo e soprattutto critico appassionato delle disfunzioni delle istituzioni.

Parole chiave: *Bruno de Finetti, probabilità, probabilità soggettiva, determinismo, didattica, didattica della matematica***.**

Abstract. *Bruno de Finetti is universally known as one of the greatest mathematicians of the twentieth century, thanks above all to his subjective theory of probability. However, his figure cannot be isolated within the aristocratic enclosure of the great mathematicians, because its complexity and originality, from both a cultural and a human point of view, make it one of the most brilliant intellectual symbols of the last century. In this article a full-length portrait of his figure as a scientist and man is de-linearized, starting from his scientific work that has made him more famous and then touching on the most characteristic themes of his life as a scientist, man of culture and citizen: his criticism of determinism, mathematics education, his social commitment that saw him always keen observer of the customs of the society of his time and above all passionate critic of the dysfunctions of the institutions.*

Keywords: *Bruno de Finetti, probability, subjective probability, determinism, didactics, mathematics education*

1 - La probabilità, questa sconosciuta: finzione e realtà

Se a una persona di media cultura, e non matematico, si chiedesse che cosa intende per probabilità, "probabilmente" risponderebbe con un'espressione del tipo: é la fiducia (speranza o timore) che "noi" riponiamo nell'avverarsi di un evento. Anche la risposta alla nostra domanda non è reputata certa, bensì affetta da un'indeterminabile dose d'incertezza, che esprimiamo con il termine "probabilmente". Nella risposta, inoltre, è contenuto come "soggetto" il pronome personale "noi", che toglie ogni dubbio sul carattere "soggettivo" della valutazione della probabilità di un evento, sottraendola a ogni tentazione di una valutazione "oggettiva" indipendente dal soggetto. In questa ipotetica (ma probabile) risposta è contenuto tutto lo spirito della teoria soggettiva della probabilità, di cui Bruno de Finetti (1906-1985) è stato il principale padre agli inizi del secolo scorso.

Quando abbiamo dubbi sul significato di un termine di uso generale, tutti noi ricorriamo a un vocabolario della lingua italiana.

Ebbene, se consultiamo il classico vocabolario della lingua italiana di Nicola Zingarelli, alla voce "probabilità" leggiamo:

> *1- Condizione, carattere di ciò che è probabile; 2- La misura in cui si giudica che un avvenimento sia realizzabile o probabile.*

E poiché in entrambe le definizioni si rimanda all'aggettivo "probabile", leggiamo che cosa dice lo Zingarelli a tal proposito:

> *Degno di approvazione; verosimile; che si può approvare; da provare; credibile, ammissibile in base ad argomenti abbastanza sicuri.*

Se la prima accezione può indurre a una concezione oggettiva della probabilità, la seconda accezione sgombra la mente da ogni dubbio con quel «si giudica».

Certamente un vocabolario linguistico contiene soprattutto termini del linguaggio ordinario e soltanto alcuni dei numerosi termini oggi appartenenti, più propriamente, a gerghi tecnici, perché denotanti concetti di pertinenza di specifiche branche del sapere. Il concetto di probabilità è uno di questi, ma a differenza di molti altri prettamente tecnici, esso, prima ancora di divenire oggetto d'indagine scientifica circa 350 anni fa, è stato utilizzato, forse da sempre, da tutti gli uomini, e tutt'oggi, nella sua forma intuitiva e vaga, fa parte della vita quotidiana dell'uomo, perché esprime forme incerte di conoscenza (è probabile che domani piova, probabilmente otterrò una promozione sul lavoro, ecc.) che riguardano la maggior parte degli eventi della nostra vita. Incertezza significa difetto e non totale assenza di certezza, e quindi induce sempre in noi, più o meno consapevolmente, ad attribuire "un grado di fiducia" al verificarsi di un evento. La probabilità, dunque, fa parte del patrimonio culturale di tutti, e non solo dei matematici.[2]

2 - Cenni storici sulla probabilità

Allo stato attuale degli studi, sembra che nell'Antichità il concetto di probabilità non fosse noto. Tuttavia, anche gli antichi praticavano i giochi d'azzardo, nell'ambito dei quali è

[2] L'insegnamento del Calcolo delle Probabilità, a livello universitario, è relativamente recente, essendo iniziato circa 150 anni fa.

nato poi il concetto di probabilità. Allora, per quale motivo a nessun matematico dell'antichità è venuto in mente di formulare una teoria matematica della probabilità? I giochi

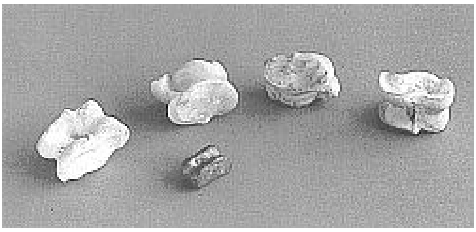

Fig. 1 – Gli astragali.

d'azzardo erano effettuati con strumenti, gli "astragali" (figura 1), che avevano forme talmente diverse tra loro, da non permettere forse l'osservazione di nessuna "regolarità" nei risultati ottenibili con i lanci e quindi anche nessuna forma di previsione. Tuttavia, proprio considerando il lancio degli astragali Gerolamo Cardano (1501-1576) fece le sue prime riflessioni sulla probabilità.

Il primo cenno al concetto di probabilità si trova nel commento fatto da Giovanni della Lana (1276?-1350?) nel 1324 (o 1325?) a una terzina del IV Canto del Purgatorio della *Divina Commedia* di Dante Alighieri (1265-1321), che cita il popolare "gioco della zara",[3] un gioco molto diffuso a Firenze, che consisteva nel lanciare ogni volta tre dadi assieme: prima del lancio il giocatore doveva pronunciare a voce alta il numero

[3] La parola zara deriverebbe dall'arabo *zahr*, che significa dado, e da essa sarebbe derivato in italiano il termine "azzardo" per indicare qualcosa di rischioso.

che secondo lui sarebbe risultato come somma dei 3 numeri rivelati dai dadi:

Quando si parte il giuoco della zara
Colui che perde si rimane dolente
Ripetendo le volte e tristo impara

Giovanni della Lana commenta che i giocatori imparano a loro spese («tristo impara») che la combinazione più facile da ottenere è la (4, 3, 1) indipendentemente dall'ordine.

I primi cenni a una "teoria della probabilità" si possono far risalire, però, al matematico Luca Pacioli (1445 circa - 1517), che si occupa del problema della ripartizione della posta tra giocatori nel caso di interruzione di un popolare gioco in uno dei capitoli della *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* pubblicata nel 1494:

> *Una squadra gioca a palla in modo che siano necessari 60 punti per vincere la partita e la posta in gioco è 22 ducati. Per qualche incidente, non si può più giocare e una squadra ha 50 punti mentre l'altra ne ha 30. Quale quota del montepremi appartiene a ciascuna squadra? (trad. dell'A.).*

Il problema fu poi ripreso da Niccolò Tartaglia (1499?-1557) e infine risolto da Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665).

I primissimi tentativi di "formalizzazione matematica" della probabilità, invece, hanno inizio nel Rinascimento per opera del matematico, fisico, medico e astrologo Gerolamo Cardano che, perdendo sistematicamente nel "gioco della zara", intraprese per primo lo studio matematico della probabilità, scrivendo in età giovanile il libro *Liber d*e *ludo aleae* (Libro sul gioco dei dadi):

> *La metà del numero totale di facce rappresenta sempre un'uguaglianza di possibilità; pertanto ci sono eguali possibilità che un dato numero esca o non esca in tre lanci, dal momento che il circuito totale viene completato in sei; o, ancora, che uno dei tre numeri esca in un lancio.* [4]

In esso sono contenuti due importanti teoremi del futuro Calcolo delle Probabilità: la probabilità dell'evento prodotto logico (A e B) di due eventi semplici A, B e una anticipazione della legge dei grandi numeri. A Cardano si deve una prima rudimentale definizione di probabilità come rapporto fra il numero degli eventi favorevoli e il numero di quelli possibili, tutti considerati equiprobabili.

Tuttavia, i suoi studi caddero nell'oblio e il *Liber de ludo aleae* fu pubblicato postumo soltanto nel 1663.

Anche Galileo Galilei (1564-1642), nella sua opera *Sopra le scoperte dei dadi* (data incerta 1612-1623 circa), si occupò di probabilità, stimolato dagli stessi quesiti già affrontati da Cardano a proposito del gioco della zara e a lui postigli forse dallo stesso Granduca di Toscana. Probabilmente Galilei venne a conoscenza della soluzione già data da Cardano, ma la sua esposizione, in sole quattro pagine, è molto più chiara,

---

[4] Secondo Massimo Tamborini (2006) lo scritto fu iniziato presto, nel 1524 o nel 1525, quando Cardano era ancora uno studente di ventitré anni. Cardano si riferì ad esso in un certo numero di sue opere nel corso degli anni. Rimaneggiò il testo originario sporadicamente fino quasi al 1570, senza mai però completarne la revisione. Dello scritto è rimasta una sua bozza con alcune incongruenze, che fu ritrovata fra le carte di Cardano nel 1576 e poi pubblicata postuma soltanto nel 1663.

didattica e priva di errori (Barra, n.d.) Il quesito era questo: perché escono con maggiore frequenza le somme 10 e 11 rispetto a 9 e 12? (Galilei, 1897):

> *… ancor che il 9 e il 12 in altrettante maniere si componghino in_quante il 10 e l' 11, per lo che di eguale uso devriano esser reputati, si vede non di meno che la lunga osservazione ha fatto da i giocatori stimarsi più vantaggiosi il 10 e l'11 che il 9 e il 12.*

Infatti, un primo esame superficiale farebbe affermare che ciascuna di esse possa uscire ugualmente in sei modi. Infatti, la somma 9 si compone con: 1,2,6; 1,3,5; 1,4,4; 2,2,5; 2,3,4, 3,3,3; la somma 10 con: 1,3,6; 1,4,5; 2,2,6; 2,3,5; 2,4,4; 3,3.4; la somma 11 con: 1,4,6; 1,5,5; 2,3,6; 2,4,5; 3,3,5; 3,4,4 e infine la somma 12 con: 1,5,6; 2,4,6; 2,5,5; 3,3,6; 3,4,5; 4,4,4. Galilei comincia, però, con l'osservare che lanciando assieme ogni volta i tre dadi, le possibili terne di valori mostrate dalle facce in vista dei dadi sono $6^3 = 216$ (Galilei, 1897):

> *Ma se noi insieme col primo getteremo il secondo dado,…, avvenga che ogni faccia del primo dado può accoppiarsi con ciascuna del secondo,…, onde è manifesto esser 6 vote 6, cioé 36. E se noi aggiungeremo un terzo dado,…, 6 volte 36, cioè 216, tutte fra di loro differenti.*

Le somme che si possono realizzare con i numeri delle facce in vista dei tre dadi sono i 16 numeri naturali da 3 a 18 («Ma perché i punti non sono se non 16, cioè 3. 4. 5 ecc. sino a 18»). Le 216 possibili uscite non sono un multiplo di 16 e quindi non possono essere ripartite in maniera uguale per ciascuna delle somme 3, 4, 5,…18. In altri termini tali somme possono uscire in numeri differenti di modi (Galilei, 1897):

Ma perché i punti non sono se non 16, cioè 3. 4. 5 etc. sino a 18, tra i quali si hanno a compartire le dette 216 scoperte, è necessario che ad alcuni di essi ne tocchino molte;.

Tabella I

10	9	8	7	6	5	4	3
6.3.1 / **6**	6.2.1 / **6**	6.1.1 / **3**	5.1.1 / **3**	4.1.1 / **3**	3.1.1 / **3**	2.1.1 / **3**	1.1.1 / **1**
6.2.2 / **3**	5.3.1 / **6**	5.2.1 / **6**	4.2.1 / **6**	3.2.1 / **6**	2.2.1 / **3**		
5.4.1 / **6**	5.2.2 / **3**	4.3.1 / **6**	3.3.1 / **3**	2.2.2 / **1**			
5.3.2 / **6**	4.4.1 / **3**	4.2.2 / **3**	3.2.2 / **3**				
4.4.2 / **3**	4.3.2 / **6**	3.3.2 / **3**					
4.3.3 / **3**	3.3.3 / **1**						
27	**25**	**21**	**15**	**10**	**6**	**3**	**1**
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**
1.4.6 / **6**	1.5.6 / **6**	1.6.6 / **3**	2.6.6 / **3**	3.6.6 / **3**	4.6.6 / **3**	5.6.6 / **3**	6.6.6 / **1**
1.5.5 / **3**	2.4.6. / **6**	2.5.6 / **6**	3.5.6 / **6**	4.5.6 / **6**	5.5.6 / **3**		
2.3.6 / **6**	2.5.5 / **3**	3.4.6 / **6**	4.4.6 / **3**	5.5.5 / **1**			
2.4.5 / **6**	3.3.6 / **3**	3.5.5 / **3**	4.5.5 / **3**				
3.3.5 / **3**	3.4.5 / **6**	4.4.5 / **3**					
3.4.4 / **3**	4.4.4 / **1**						
27	**25**	**21**	**15**	**10**	**6**	**3**	**1**

Galilei, quindi, con questa osservazione, prepara già il lettore a sospettare che il numero di casi favorevoli all'uscita delle somme indagate (9, 10, 11 e 12) possa essere diverso per ciascuna di esse e che per dare una risposta al quesito postogli sarà necessario calcolare il numero di casi favorevoli all'uscita di ciascuna somma realizzabile nel lancio dei tre dadi (Galilei, 1897):

> *… e se noi ritroveremo quante ne toccano per ciaschedu-no, avremo aperta la strada di venire in notizia di quello che cerchiamo.*

Nella tabella I sono riportate per ciascuna somma le possibili terne non ordinate che le realizzano: in totale 56, un numero ben inferiore ai 216 modi in cui invece si possono realizzare. Questo scarto è dovuto al fatto che abbiamo finora ignorato che le stesse terne possono uscire con ordine differente dei loro numeri. Per esempio la somma 9 può essere ottenuta con: 1, 2, 6; 1, 6, 2; 2, 1, 6; 2, 6, 1; 6, 1, 2; 6, 2, 1. Tutti i possibili modi di formare le somme considerate sono quindi tutte le terne ordinate formate con gli stessi numeri delle terne non ordinate già indicate.[5] Esse sono quindi le permutazioni di queste ultime, semplici o con ripetizione a seconda che i numeri della terna siano tutti diversi o che uno di essi si ripeta.[6]

In tabella I sulla destra delle terne non ordinate relative a ciascuna somma è indicato in grassetto e in rosso dopo / il numero delle terne ordinate ottenibili scambiando l'ordine dei numeri componenti[7] e in fondo a ciascuna colonna è in-

---

[5] Che sono quelle combinazioni semplici e con ripetizione di classe 3 dei 6 numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6 che formano ciascuna delle somme dei numeri "usciti" nel lancio dei 3 dadi, fra le quali le somme 9, 10, 11, 12 considerate nel quesito di cui si occupa Galilei.

[6] In una terna di numeri non si può avere più di un numero che si ripete, perché altrimenti si avrebbero più di tre numeri.

[7] Il numero delle permutazioni semplici di *n* oggetti è $P_n = n!$, mentre il numero delle permutazioni con ripetizione di *n* oggetti in cui alcuni di essi si ripetono è il quoziente fra il numero delle permutazioni semplici degli n oggetti e il prodotto del numero di permutazioni semplici degli oggetti che si ripetono. Nel nostro caso, quindi, il numero di permutazioni (semplici)

dicato il numero totale delle possibili uscite relative alla somma considerata.

Per motivi didattici di maggiore chiarezza ho riportato nella tabella I i risultati relativi a tutte le 16 somme realizzabili con le facce in vista dei tre dadi. Galilei, invece, si limita alla metà superiore della tabella, relativa alle somme 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Perché? Ce lo spiega lui stesso (Galilei, 1897):

> *basterà far tale investigazione dal 3 sino al 10, perché quello che converrà ad uno di questi numeri, converrà ancora al suo sossopra.*

Infatti su ogni dado la somma di due facce opposte è 7 e quindi su tre dadi è 21. Allora se la somma delle facce in vista è 3, 4, 5,…, 18, la somma delle facce opposte («sossopra») deve essere rispettivamente: 18, 17, 16, …, 3, cioè deve essere il complemento a 21. Inoltre, ad ogni disposizione delle facce in vista corrisponde la stessa disposizione delle facce opposte e quindi il numero di modi per ottenere una certa somma S sulle facce visibili è uguale al numero di modi per ottenere la somma 21-S sulle facce opposte: dunque sarà sufficiente riportare in tabella i numeri dei modi per ottenere le somme da 3 a 10 (considerate quelle delle facce in vista), perché gli stessi saranno quelli delle somme da 18 a 11 (delle facce opposte non in vista). Infatti, osservando la tabella I si ha che le

---

delle terne di numeri tutti diversi è 3! = 6, mentre il numero delle permutazioni (con ripetizione) delle terne con due numeri uguali è 3! / 2! = 3. Nel caso, infine, di terne costituite da tre numeri uguali ovviamente scambiando comunque l’orrdine si ottiene la stessa terna e infatti 3! / 3! = 1.

somme 10 e 11 si realizzano entrambe in 27 modi, mentre le somme 9 e 12 si realizzano entrambe in 25 modi.

Galilei per giustificare razionalmente «la lunga osservazione» che ha fatto concludere ai giocatori che è più vantaggioso scommettere sulle somme 10 e 11 piuttosto che 9 e 12, perché evidentemente risultavano uscire con una maggior frequenza, utilizza il concetto di probabilità classica (già presente nel *Liber de ludo aleae* di Cardano) come rapporto fra numero di casi favorevoli e di casi possibili («scoperte di un dado») che considera equiprobabili osservando esplicitamente che ciascun dado «può indifferentemente fermarsi, sopra ciascuna» delle 6 facce.

Infatti il rapporto 27/216 è la probabilità di ottenere le somme 10 o 11 leggermente maggiore di 25/216 che è la probabilità di ottenere le somme 9 o 12.

Altri due interventi di Galilei sulla probabilità sono stati recentemente indagati (Barra, n.d.). Il primo riguarda il calcolo della distanza dalla Terra di una nuova stella della costellazione Cassiopea scoperta da Tycho Brahe (1546-1601) nel novembre 1572 e poi scomparsa nel 1574,[8] mentre il secondo riguarda la correttezza della stima economica di un cavallo.

---

[8] Galilei osserva che nelle misurazioni strumentali gli errori sono inevitabili, che sono distribuiti simmetricamente, che gli errori piccoli sono più probabili di quelli grandi, che conviene considerare la misurazione intorno alla quale concorre il numero massimo di misurazioni. Anticipa, così, qualitativamente di circa 200 anni la "Legge di frequenza degli errori" di Gauss, che viene espressa con una densità di probabilità distribuita secondo la caratteristica forma a "campana" detta "Gaussiana" o "Normale".

Ancora quesiti sulle scommesse al gioco dei dadi furono posti nel 1654 dal nobile francese Antoine Gombaud, Chevalier de Mérè, all'amico Blaise Pascal, filosofo e sommo matematico "dilettante".

Uno di questi era: un giocatore, gettando otto volte un dado, deve tentare di far uscire il numero uno; dopo tre tentativi infruttuosi, ciascuno costituito da una serie di otto lanci, il giocatore rinuncia a proseguire: in che misura egli ha diritto alla posta pattuita? Un altro era: è conveniente scommettere alla pari l'uscita di un 12, lanciando due dadi per 24 volte? In altrri termini: è corretto reputare del 50% la probabilità che lanciando per 24 volte due dadi assieme esca almeno una volta il numero 12? Ne seguì un carteggio fra Blaise Pascal e Pierre de Fermat, magistrato e anch'egli geniale matematico "dilettante".[9] Nella loro corrispondenza sono contenute le prime leggi del calcolo combinatorio e del calcolo delle probabilità poi pubblicate da Pascal nel *Traité du Triangle Arithmétique, avec quelques autres petits traitez sur la mesme matière* (1654), che spesso - a torto, considerando le precedenti ricerche di Pacioli, Cardano e Galilei - è considerato l'atto di nascita della Teoria e del Calcolo delle Probabilità, vale a dire di quella branca della matematica che si propone di dare una definizione di probabilità per eventi semplici, tale da consentire di attribuire ad essa un valore numerico e stabilire la probabilità di un evento complesso, in funzione delle probabilità degli eventi semplici componenti. Oggi, più propriamente, si distingue il Calcolo delle Probabilità, che studia in modo rigoroso le relazioni fra le probabilità degli eventi

[9] Ovviamente l'aggettivo "dilettante" qui sta a significare semplicemente che Pascal e Fermat non erano matematici per professione.

composti e quelle degli eventi semplici componenti, dalla Teoria della Probabilità che studia le possibili definizioni della probabilità degli eventi semplici, che, come vedremo fra poco, possono essere molto diverse fra loro. In altri termini, mentre possono variare le definizioni "operative" di probabilità degli eventi semplici stabilite nella Teoria della Probabilità, le "regole" per il Calcolo delle Probabilità degli eventi composti a partire dalle probabilità degli eventi semplici componenti sono le medesime e possono essere stabilite in modo matematicamente rigoroso nel Calcolo delle Probabilità.

Christiaan Huygens (1629-1695), il fondatore della teoria ondulatoria della luce, nel 1657 nella sua opera *De ratiociniis in ludo aleae* (Sui ragionamenti nel giuoco dei dadi) ripropose in maniera più sistematica il contenuto del carteggio fra Pascal e Fermat, dando anche una risposta al quesito di Gombaud, non risolto da Pascal, di quale fosse la cifra equa da pagare a un giocatore per subentrargli in una data puntata.

Nel 1666 Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) pubblica la sua *Dissertatio de arte combinatoria*.

Il primo vero trattato sulla nuova scienza, però, sarà pubblicato soltanto nel 1713 con il titolo *Ars conjectandi* (figura 2) dal grande matematico Jacques (o Jacob) Bernoulli (1654-1705), che così scriveva:

> *Noi definiamo l'arte di congetturare, o stocastica, come quella di valutare il più esattamente possibile le probabilità delle cose, affinché sia sempre possibile, nei nostri giudizi e nelle nostre azioni, orientarci su quella che risulta la scelta migliore, più appropriata, più sicura, più prudente; il che costituisce il solo oggetto della saggezza del filosofo e della prudenza del politico.*

Nel 1812 il matematico e fisico francese Pierre Simon de Laplace apportò notevoli contributi allo sviluppo del Calcolo delle Probabilità nel suo trattato *Théorie Analytique des Probabilités* (de Laplace 1820). Nello stesso periodo il grande matematico, astronomo e fisico Johann Friedrich Carl Gauss, assieme a Laplace, formulò la famosa "distribuzione normale" conosciuta con il nome di *distribuzione di Gauss-Laplace*, che costituisce uno dei cardini della statistica moderna.

Abbiamo usato finora il termine evento, senza chiederci qual è il suo significato. La risposta può variare secondo il tipo di definizione di probabilità che, come vedremo poco oltre, può essere di quattro tipi: classica, frequentista, assiomatica, soggettiva. Senza entrare nelle discussioni delle diverse accezioni di tale termine nelle quattro scuole di pensiero appena citate, possiamo appellarci al concetto intuitivo, anche se vago, che ognuno di noi ha del termine "evento": risultato di una prova, qualsiasi affermazione della quale sia verificabile il contenuto di verità, un fatto univoco e ben descrivibile.

Un evento "semplice" non è scindibile (almeno per il nostro punto di vista) in altri eventi componenti. Viceversa, un evento "complesso" è un evento che può essere considerato formato da più eventi semplici. Il lancio di un solo dado dà luogo all'evento semplice "caduta del dado su una faccia"; il lancio contemporaneo di due dadi dà luogo all'evento composto dai due eventi semplici e indipendenti "caduta di ciascun dado su una faccia".

La nozione di probabilità - nata nell'ambito delle scommesse ai giochi d'azzardo - per opera del fisico scozzese James Clerk Maxwell (1831-1879), intorno alla metà del secolo

XIX, cominciò a entrare nel campo scientifico, trovando applicazioni in fisica, dove ebbe nel successivo secolo XX sempre più ampie e profonde applicazioni nello studio dei fenomeni delle particelle elementari (meccanica quantistica). Infine la statistica moderna, con tutti i suoi svariati campi d'applicazione (fisica, scienze mediche, biologia, scienze sociali, psicologia, ecc.) non esisterebbe senza il Calcolo delle Probabilità.

Da questi brevissimi cenni sulle origini del concetto matematico di probabilità, è possibile trarre alcuni elementi essenziali e specifici. L'origine di questa nuova scienza matematica, com'è evidenziato nei titoli dei primi libri intorno ad essa (Cardano, Galilei, Huygens), è il giuoco d'azzardo, e non ha quindi origini auliche come altri rami della matematica. Inoltre, già nel titolo del trattato di Jacob Bernoulli, si pone l'accento su un altro aspetto caratteristico della probabilità, insolito per la matematica: la nuova scienza è "arte del congetturare", che contrasta con l'assolutismo della verità matematica che ha imperato fin dall'antichità. La rivoluzione "relativista" del pensiero matematico, in base alla quale le asserzioni e i concetti matematici non hanno validità assoluta, bensì soltanto entro un certo sistema ipotetico-deduttivo, è una conquista del secolo XIX conseguente alla nascita delle geometrie non-euclidee, quindi posteriore al periodo in cui nasce il Calcolo delle Probabilità. In tale nuova scienza matematica, poi, si è ben consapevoli di trattare con contenuti che non hanno il marchio della certezza, ma al contrario dell'incertezza, essendo eventi e fatti "da provare", da dimostrare essere certi, ("probabile" deriva dal latino *probabilis*, che è ciò che deve essere *probatus*, cioè provato) in contrapposizione a quelli "provati", cioè dimostrati, propri di tutte le altre branche della matematica.

Tutto ciò pone questa nuova branca in una posizione particolare e alquanto singolare rispetto alle altre della matematica. All'uomo comune viene subito spontanea un'osservazione: com'è possibile che la matematica, scienza esatta per antonomasia, si occupi di ciò che a priori ha il marchio dell'incertezza, che è "ammissibile in base ad argomenti abbastanza sicuri" ma non completamente sicuri? «Il nome solo di Calcolo delle Probabilità è un paradosso: la probabilità, opposta della certezza, è ciò che non si sa, e come può calcolarsi ciò che non si conosce?» (Poincaré, 1950, p. 176). E non è strano che questa "matematica dell'incertezza" sia fondata, però, su una certezza: la consapevolezza dell'incertezza? L'uomo della strada, non condizionato dai pregiudizi matematici del passato, nella maniera più spontanea, oggi, penserebbe che una siffatta scienza non può avere quel carattere di "oggettività" proprio delle altre scienze matematiche, e non si scandalizzerebbe, anzi si meraviglierebbe del contrario, di fronte ad un suo approccio "soggettivista". Chi non sa di matematica dà quasi per scontato che, se si vuole dare un valore numerico alla probabilità, vale a dire all'aspettativa che un evento, non certo, si manifesti vero o si realizzi, l'unico modo "naturalmente" accettabile di farlo è in base a un criterio soggettivo. Così vorrebbe il buon senso comune. Se la Teoria della Probabilità fosse nata verso la fine del XIX secolo, tale punto di vista, "probabilmente", sarebbe stato adottato anche dai matematici, grazie ai profondi mutamenti critici del pensiero matematico iniziati in quel secolo con l'avvento delle geometrie non-euclidee e maggiormente sviluppatisi nel successivo secolo XX. Ma nella prima metà del secolo XVIII, quando la Teoria della Probabilità effettivamente nacque con l'*Ars Conjectandi* di Bernoulli, la mentalità matematica era ben diversa: i concetti matematici erano considerati veri in sé e per sé, e il loro valore era considerato oggettivo. Parlare di "soggettivo" in matematica era un non senso. Tutto questo spiega la "pretesa" di fondare la Teoria della Probabilità su una realtà che, com'è stato argutamente obiettato, è soltanto "artificialmente oggettiva", mentre di fatto non lo è. Dunque, non deve meravigliare che le prime definizioni che i matematici hanno proposto per la probabilità abbiano avuto l'ambizione di attribuire ad essa un valore oggettivo, indipendente dall'osservatore, quasi che essa fosse una proprietà intrinseca degli eventi ai quali viene riferita.

3 - Probabilità classica, frequentista, assiomatica

Diceva il matematico e filosofo americano Charles Sanders Pierce (1839-1914): «Questa branca della matematica, la probabilità, è la sola, credo, in cui anche validi autori hanno dato spesso risultati erronei». E ancora Bertrand Russell (1872-1970) ironicamente: «Il concetto di probabilità è il più importante della scienza moderna, soprattutto perché nessuno ha la più pallida idea del suo significato». Queste affermazioni mostrano, in maniera molto incisiva, che il terreno delle argomentazioni sulla probabilità è stato, e forse ancora è, molto "scivoloso". Ancor oggi, è possibile leggere vari sproloqui sulla probabilità, mascherati da quel mitico rigore matematico cui sempre ci si appella, anche ingiustificatamente, per dar consistenza alle nostre argomentazioni. Le definizioni che illustreremo si riferiscono tutte a eventi semplici.

3.1 - La definizione classica

La prima definizione matematica di probabilità, detta perciò "classica", si trova esplicitamente indicata nel Libro II del trattato *Théorie analytique des probabilités*[10] pubblicato nel 1812 dal matematico francese Pierre Simon de Laplace (de Laplace, 1820, p. 181):

> *On a vu dans l'Introduction que la probabilité d'un événement est le rapport du nombre des cas qui lui sont favorables au nombre de tous les cas possibles, lorsque rien ne porte à croire que l'un de ces cas doit arriver plutôt que les autres, ce qui les rend, pour nous, également possibles.*
>
> *(Come abbiamo visto nell'Introduzione la probabilità di un evento è il rapporto tra il numero di casi favorevoli ad esso e il numero di tutti i casi possibili, quando non c'è nulla che ci faccia credere che un caso dovrebbe verificarsi piuttosto che qualsiasi altro, in modo che questi casi siano, per noi, ugualmente possibili).*

La definizione data da Laplace in realtà non era nuova perché, come abbiamo già visto, era stata già utilizzata da Cardano e Galilei anche se non espressa in maniera esplicita.

Ovviamente l'aggettivo "favorevole" non è riferito al contenuto dell'evento, bensì alla nostra attesa che esso si realizzi: favorevole è semplicemente l'evento su cui fissiamo l'attenzione, che ci attendiamo che si realizzi o che sia vero,

---

[10] Il trattato era diviso in due libri: *Calcul des Fonctions géneratrices* e *Théorie générale des probarilités*. Raccoglieva articoli scritti da Laplace fin dal 1774.

di cui vogliamo valutare numericamente (con la probabilità) la possibilità di accadere o di essere vero, indipendentemente dal fatto che sia o no un evento piacevole o vantaggioso. Essa, a volte, è detta anche "definizione per partizione", poiché implica una partizione dell'insieme di tutti gli eventi possibili nei due sottoinsiemi degli eventi favorevoli e degli eventi non-favorevoli. Questa definizione ha un dominio di applicazione limitato da due condizioni:

1) è applicabile soltanto in tutti i casi in cui è possibile conoscere quali e quanti sono gli eventi che si possono realizzare e quali e quanti sono quelli favorevoli;
2) gli eventi possibili devono avere tutti la stessa probabilità, vale a dire non ci deve essere nessun motivo che favorisca la realizzazione dell'uno piuttosto che dell'altro.

Il classico esempio di applicazione di questa definizione è il lancio di una moneta, perfettamente "equilibrata" o "simmetrica", nel senso che non ci sia maggior concentrazione di massa su una faccia piuttosto che sull'altra, che favorirebbe la caduta della moneta su una delle due facce. Gli eventi possibili sono due (testa, croce), mutuamente escludentisi, mentre l'evento favorevole è uno dei due (o testa o croce). Si esclude il caso, che in realtà potrebbe verificarsi, che la moneta cada di taglio, senza presentare quindi nè testa nè croce. In questa scelta si utilizza già, in maniera "sottaciuta", una valutazione di probabilità molto piccola che la moneta cada di taglio, tale da giustificare l'esclusione a priori che l'evento accada, concludendo che la probabilità che in un lancio la moneta cada presentando croce o testa ("o" esclusivo) sia dunque 1/2. La presenza dell'aggettivo "equiprobabile" rende difettosa questa definizione dal punto di vista logico, chiudendola in un circolo vizioso, poiché essa fa uso dello stesso concetto di probabilità che "pretende" di definire: «Eccoci dunque costretti a definire il probabile col probabile. Come sapremo che due casi possibili sono ugualmente probabili? Sarà per una convenzione?» (Poincaré, 1950, p. 176). Usualmente, tale anomalia è superata ricorrendo al Principio della Ragion Non Sufficiente o Principio d'Indifferenza,[11] introdotto da Pierre Simon de Laplace, per il quale gli eventi vanno intesi come equiprobabili se non si può formulare nessuna ragione per credere il contrario, in quanto si presume che vi sia simmetria perfetta rispetto ai casi possibili. Ma è chiaro che anche una siffatta giustificazione non è del tutto soddisfacente e attira facilmente critiche ben fondate: il non essere in grado di formulare ragioni in contrario non esclude che in realtà ve ne siano.

3.2 - La definizione frequentista

La definizione classica di probabilità presuppone la possibilità di eseguire "virtualmente", e non materialmente, l'esperimento o prova che può dar luogo all'evento atteso, individuando tutti i possibili esiti, e fra questi quelli in cui si presenta l'evento in considerazione, dal semplice esame dell'oggetto protagonista dell'evento: il lancio di un dado può essere facilmente immaginato e con esso i suoi possibili

[11] Da non confondersi con il Principio di Ragion Sufficiente di Leibniz, secondo il quale "nulla accade senza che vi sia ragione perché accada proprio così invece che altrimenti".

risultati, eventi croce o testa, anche senza materialmente effettuare l'esperimento, perché l'esame dell'oggetto "dado" ci consente di sapere quali essi sono.[12] Ma tale possibilità riguarda soltanto un limitato sottoinsieme dell'universo di tutti i casi reali, nella maggior parte dei quali, invece, non è applicabile la definizione classica di probabilità.

In molte situazioni reali, infatti, l'evento di cui vogliamo calcolare la probabilità non può essere generato da un esperimento virtuale, ma, al contrario, può manifestarsi soltanto "a posteriori", con l'esperienza effettiva. Occorre, dunque, compiere materialmente gli esperimenti che generano l'evento. Utilizzando i risultati ottenuti, viene spontaneo calcolare il rapporto fra il numero di esiti positivi dell'esperimento (quelli in cui si presenta l'evento atteso) e il numero totale delle prove, cioè la frequenza relativa dell'evento, rapporto che caratterizza bene la "presenza" di questo nella totalità degli esperimenti compiuti. In situazioni di questo tipo si è tentati di riproporre l'applicazione della definizione classica identificare i casi favorevoli con gli esiti positivi delle prove e i casi possibili con le prove effettuate. In questi casi, però, c'è una sostanziale differenza rispetto alle situazioni in cui è applicabile la definizione classica: ora infatti i casi possibili sarebbero "soltanto" le prove finora effettuate, che non esauriscono tutte quelle effettuabili, che sono infinite, e analogamente i casi favorevoli sarebbero "soltanto" gli esperimenti finora effettuati che hanno generato l'evento atteso. In altre parole, nella definizione classica di probabilità gli eventi favorevoli e possibili sono "tutti" quelli

[12] Si consideri, però, l'osservazione precedente relativa alla possibilità della caduta del dado di taglio.

che effettivamente sono favorevoli e possibili; nelle nuove situazioni investigate, invece, essi sono quelli "finora esperiti" e quindi risultano variabili secondo il numero di prove effettuate, che è necessariamente una scelta dello sperimentatore. Qualunque sia il numero di esperimenti da questi deciso, le prove non ancora fatte, ma fattibili, costituiscono altrettanti casi possibili, fra i quali potranno esserci altri casi favorevoli. Pertanto, se assumessimo *tout court* come probabilità la frequenza relativa dell'evento, avremmo una probabilità variabile perché dipendente dal numero di esperimenti effettuati, che è variabile, contrariamente all'unicità del valore calcolato con la definizione classica. Ciò che possiamo investigare è, invece, se esistono condizioni che autorizzano tale assunzione entro un grado di approssimazione accettabile, consapevoli quindi che dovremmo accontentarci di un valore "approssimativo" di probabilità, che non può essere rigorosamente unico come nella definizione classica.

A tale scopo, occorre prendere in considerazione i casi in cui è calcolabile la probabilità per partizione, effettuando "realmente" un certo numero di prove. Consideriamo il solito lancio di una moneta. Ebbene, effettuando più lanci della moneta, "cercando" di mantenere inalterate le condizioni sotto cui essi avvengono, si può osservare che all'aumentare del loro numero, la frequenza relativa dell'evento "croce" (e lo stesso vale per l'evento complementare "testa") tende a stabilizzarsi attorno a un valore molto prossimo alla probabilità (0,5 o 50%) calcolata con la definizione classica. Tale tipo di esperimento si può ripetere in tutti i casi ai quali è applicabile quest'ultima. Eseguendo successive serie di esperimenti, in ciascuna delle quali si aumenta progressivamente il numero di esperimenti, si osserva che all'aumentare del numero di questi, il valore della frequenza relativa dell'evento considerato tende a stabilizzarsi attorno a uno stesso valore: è la cosiddetta "legge empirica del caso" o "legge empirica dei grandi numeri". Tale legge, spesso, erroneamente è confusa con il teorema di Bernoulli:

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{P}\left\{\left|\left(\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{N}}\right) - \mathrm{p}\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

che asserisce semplicemente che aumentando indefinitamente il numero N di prove, tende alla certezza (P = 1) che la probabilità della frequenza relativa dell'evento scarti dalla probabilità classica p per meno di un numero positivo ε comunque piccolo. Questo teorema, qualche volta, viene erroneamente utilizzato come anello di congiunzione fra le definizioni classica e frequentista di probabilità, come è stato acutamente criticato da Bruno de Finetti:

> *… non si sfugge al dilemma che la stessa cosa non si può assumere prima per definizione e poi dimostrare come teorema, né alla contraddizione di una definizione che assumerebbe una cosa certa mentre il teorema afferma che è soltanto molto probabile.*

L'unico anello di congiunzione plausibile fra probabilità per partizione e frequenza relativa è invece la semplice e più onesta legge empirica del caso, in virtù della quale risulta "plausibile" ribaltare i termini dell'osservazione sperimentale, e "assumere" come probabilità la frequenza relativa dell'evento determinata per un numero "abbastanza grande" di esperimenti, in tutti quei casi in cui è possibile "ripetere a pari condizioni" l'esperimento. Questo valore limite, nel senso non matematico ma sperimentale, viene assunto come valore della probabilità nella definizione frequentista. Esso, non essendo un "limite" in senso matematico, non è determinabile tramite operazioni matematiche, bensì tramite un numero teoricamente infinito di esperimenti, in aperto contrasto con il modo operativo sperimentale che conosce soltanto il "finito", per cui in pratica è determinabile con un "opportuno" numero finito di esperimenti. Secondo la definizione frequentista dunque,[13] " *la probabilità di un evento è il rapporto fra il numero di esperimenti in cui esso si è verificato e il numero totale di esperimenti eseguiti nelle stesse condizioni, essendo tale numero opportunamente grande*". Quale debba essere in pratica tale numero non è determinabile a priori, ma è solo lo sperimentatore che può definirlo, in base alla legge empirica dei grandi numeri, che lo autorizza a porre fine all'esecuzione degli esperimenti quando rileva che la frequenza relativa dell'evento presenta oscillazioni sempre più piccole: il valore medio di queste è assunto come valore della probabilità (figura 2).

Tale decisione non può che essere soggettiva, approssimativa e variabile da sperimentatore a sperimentatore e, anche per uno stesso sperimentatore, ancora variabile da una serie di esperimenti all'altra (perché, per esempio, non è mai possibile mantenere perfettamente identiche le condizioni sotto cui avviene la prova, per cui il numero di esperimenti oltre il quale le oscillazioni della frequenza relativa diventano "sempre più piccole" cambierà per lo stesso sperimentatore da una serie di esperimenti all'altra).

---

[13] Proposta da Richard von Mises, Hans Reichenbach e Guido Castelnuovo agli inizi del secolo XX.

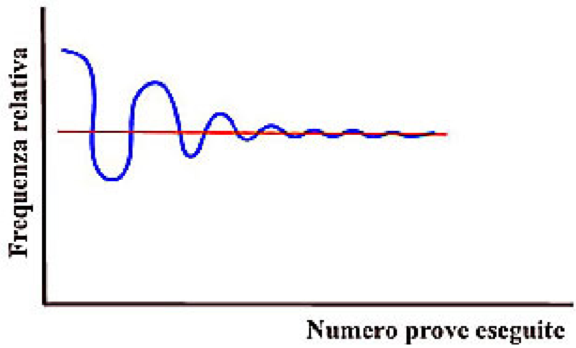

Fig. 2 – Frequenza relativa di un evento versus numero di prove eseguite.

La probabilità, in tale definizione, dipende dunque non soltanto dal numero di esperimenti fatti ma anche dalla valutazione di identità delle condizioni operative, per cui non è univocamente determinabile ed è affetta da errore sperimentale, come la misura di una qualunque altra grandezza fisica.

La definizione frequentista, essendo fondata su un'operatività sperimentale, non richiede che gli esiti dell'esperimento siano equiprobabili e quindi ha il pregio di superare il limite fondamentale di quella classica, per la quale invece tale requisito è indispensabile. È opportuno, però, rilevare che la legge dei grandi numeri giustifica, sperimentalmente, di assumere la frequenza relativa come probabilità nei casi per i quali la simmetria (vale a dire l'equiprobabilità) degli esiti possibili renderebbe applicabile la definizione classica. Pertanto, l'estensione della definizione frequentista ai casi in cui quella di Laplace non è applicabile è un'estrapolazione che ha una certa arbitrarietà. Inoltre, stando sempre alle sue giustificazioni "sperimentali", la definizione frequentista dovrebbe essere applicata soltanto ad eventi ripetibili, ovvero generati da esperimenti ripetuti esattamente nelle stesse condizioni quante volte si voglia. Tuttavia, in pratica, specialmente in statistica, la frequenza relativa è assunta come probabilità di eventi che non hanno tali caratteristiche, bensì hanno la connotazione di "accadimenti" avvenuti nel passato e non riproducibili quante volte si voglia "in laboratorio", nel presente o nel futuro. Un esempio servirà a chiarire quanto detto. Volendo dare oggi una stima della probabilità alla mortalità scolastica nel primo biennio della facoltà d'ingegneria, lo statistico otterrà tale valore come frequenza relativa dell'evento "abbandono degli studi da parte di studenti d'ingegneria entro il secondo anno", riferendosi ad un determinato periodo del passato, per esempio dal 1990 al 2018. A tale scopo, prenderà in considerazione il numero di iscritti a ingegneria in quel periodo e dividerà per esso il numero di studenti che nello stesso periodo hanno abbandonato gli studi entro il secondo anno. È vero che potrebbe prendere in considerazione altri periodi di tempo, il che equivarrebbe a scegliere in qualche modo il numero di "esperimenti" (che in realtà sono invece accadimenti), ma la sua è sempre una scelta condizionata, poiché non può scegliere a piacere il numero di anni cui riferire la sua indagine, anzi può capitargli di avere a disposizione un solo campione di dati numericamente non rappresentativo. In tutte queste situazioni, si fa una forzatura, utilizzando come probabilità la frequenza relativa di eventi per loro natura legati esclusivamente al passato e quindi non ripetibili.

3.3 - La definizione assiomatica

Alcuni matematici,[14] sotto la spinta dell'assiomatismo, hanno proposto una definizione assiomatica della probabilità fondata su tre definizioni e tre assiomi. Le definizioni sono:

- una prova è l'esecuzione di un esperimento "ripetibile", nel senso che deve essere possibile ripeterlo nelle stesse condizioni, e con esito "aleatorio", vale a dire non prevedibile con certezza, qualunque possono essere i nostri sforzi d'indagine;
- l'insieme dei possibili esiti di una prova si dice universo o spazio campione U;
- un evento E è un qualsiasi sottoinsieme dell'universo U. Lo spazio degli eventi S è l'insieme degli eventi d'interesse, e quindi, in generale, è un insieme di insiemi. Per esempio, con riferimento al lancio dei dadi, i cui esiti possibili sono testa (T) e croce (C), e quindi è $U = \{T,C\}$, si può assumere come spazio degli eventi S l'insieme delle parti $\{T\}$, $\{C\}$, $\{\varnothing\}$, $\{T,C\}$ dell'universo U che comprende anche l'insieme vuoto $\{\varnothing\}$ e U stesso.

---

[14] Il primo a esporre una teoria assiomatica coerente e sistematica della probabilità è stato il matematico russo Andrei Nicolaieviè Kolmogorov nel 1933, con la sua monografia *Grundebegriffe der Wahrscheinlichkeitrechnung* (*Fondamenti del calcolo delle probabilità*), soddisfacendo in parte le richieste di David Hilbert di dare una fondazione assiomatica alla teoria della probabilità.

In particolare se E é costituito da un solo esito si dice evento elementare, mentre se é costituito da più esiti, si dice evento composto. L'universo U è anche l'evento certo, poiché è costituito da tutti gli esiti possibili. Ad ogni esito si può associare un punto di uno spazio euclideo a n dimensioni; U è pertanto lo spazio i cui punti rappresentano tutti e soli gli esiti possibili di una prova, mentre un evento E è un sottoinsieme di tale spazio, cioè è costituito da una parte dei punti di U, potendo ridursi a un solo punto nel caso di evento elementare.

Per fissare le idee, si pensi al lancio di un dado, di due dadi, di tre dadi, ...di n dadi: l'esito della prova è rispettivamente il numero, la coppia di numeri, la terna di numeri ...l'ennupla di numeri delle facce dei dadi rivolte verso l'alto. Dunque, ad ogni esito si può associare un numero, una coppia di numeri, una terna di numeri, una ennupla di numeri, che possono essere intesi come coordinate di uno spazio euclideo a 1, 2, 3, ...n dimensioni. Se, per esempio, nel lancio di un dado l'evento è l'uscita del numero 2, si ha l'evento elementare $E = \{2\}$, mentre se l'evento considerato è l'uscita di un numero pari si ha l'evento composto $E = \{2, 4, 6\}$, vale a dire l'evento occorre se l'esito del lancio del dado è uno dei numeri 2, 4, 6. Nel caso di eventi composti, due eventi si dicono compatibili quando la loro intersezione è un insieme non vuoto: $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$ (quindi hanno almeno un evento semplice in comune), incompatibili quando invece la loro intersezione è un insieme vuoto: $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ (quindi non hanno alcun evento semplice in comune).

Due eventi incompatibili sono, per esempio, gli eventi testa e croce nel lancio di un dado, l'uno escludendo l'altro;

due eventi compatibili, invece, sono l'uscita di una figura e di una carta di cuori nell'estrazione di una carta da un mazzo, potendo una carta di cuori essere anche una figura.

La probabilità assiomatica è una funzione d'insieme[15] *P definita sullo spazio degli eventi S, ovvero è una legge in grado di assegnare ad ogni evento E appartenente ad* **S** *un numero che soddisfa i tre assiomi di Kolmogorov*:

1) *la probabilità di un evento E è un numero reale non negativo:* $0 \leq P(E) \in \mathbb{R} \leq 1$;
2) *la probabilità di un evento certo è 1: $P(U) = 1$ (U è per definizione l'evento certo);*
3) *la probabilità di un evento composto dagli eventi semplici E_1 e E_2 incompatibili ($E_1 \cap E_2 = \emptyset$) è la somma delle probabilità di E_1 e di E_2: $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$.*

Così introdotta, la probabilità è formalmente definita come misura di un insieme, e rientra pertanto come caso particolare nella più generale Teoria della misura, potendo essere interpretata come misura normalizzata $P(E)$ dell'insieme-evento E (il suo valore è un numero compreso tra 0 ed 1, estremi inclusi).

L'impostazione assiomatica della probabilità è accattivante per il suo rigore formale, con cui è possibile dedurre tutta la teoria della probabilità dalle premesse (definizioni, assiomi), soddisfacendo pienamente lo spirito deduttivo del matematico, ma ha un grosso difetto: non definisce cos'é in real-

[15] Cioè una funzione definita non su un insieme numerico bensì su un insieme di insiemi.

tà la probabilità. Infatti, come in qualunque teoria assiomatica, la probabilità non è definita nella sua natura, ma è definita soltanto implicitamente come "un" (e non "quel") numero reale non negativo che soddisfa i tre assiomi di Kolmogorov. Tale numero dipende dalla funzione d'insieme scelta, in altri termini il valore della probabilità assiomatica dipende dal criterio scelto per la misura dell'insieme-evento. Insomma, si ha una situazione analoga alla geometria euclidea, in cui il punto, la retta e il piano non sono definiti esplicitamente, ma implicitamente attraverso le loro mutue relazioni (assiomi), per cui, come paradossalmente diceva David Hilbert (1862-1943), i punti, le rette e i piani potrebbero in realtà essere anche bicchieri, posate o quant'altro, purché soddisfacenti gli assiomi euclidei. La teoria assiomatica della probabilità, oltre il rigore logico, ha un altro pregio. Riportando le considerazioni sugli eventi a calcoli sugli insiemi corrispondenti, attraverso il concetto di probabilità come misura normalizzata dell'insieme-evento, consente la determinazione della probabilità in casi in cui non é possibile applicare la definizione classica, come per esempio quando è infinito non numerabile[16] sia il numero degli esiti possibili sia il numero di quelli favorevoli. In altre parole, la probabilità assiomatica può fornire una risposta a quesiti del tipo: quale è la probabilità che un ago, imperniato ad una sua estremità nel centro di un cer-

[16] "Non numerabile" significa che non può essere posto in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri naturali 1,2,3,... Un'infinità numerabile è discreta in quanto costituita da una distribuzione discontinua di infiniti elementi; una infinità non numerabile è continua perché è costituita da una distribuzione continua di infiniti elementi (per esempio i punti di un segmento).

chio, cada entro un determinato settore di questo, per esempio di 30°? È chiaro, infatti, che assumendo come eventi elementari le posizioni assunte dall'ago quando si ferma, sia quelle entro l'intero cerchio (eventi possibili) sia quelle entro il settore considerato di 30° (eventi favorevoli) sono infinite non numerabili, perché costituiscono un *infinitum continuum*: la probabilità classica sarebbe data quindi dal rapporto ∞ / ∞ che è una forma indeterminata. Invece, con la teoria assiomatica, la probabilità può essere assunta come la misura normalizzata dell'insieme degli esiti favorevoli, vale a dire il rapporto fra la misura del settore entro cui ci si aspetta che l'ago cada (30°) e la misura dell'angolo giro corrispondente all'intero cerchio (360°), che costituisce l'universo U, e quindi $P = 30°/360° = 8{,}3\%$

4 - Le critiche della scuola soggettivista

Le definizioni di probabilità fin qui date, pur risultando proficue in numerosi casi, offrono il fianco a varie critiche:

1) sono ottenute sulla base unicamente di eventi già accaduti o ripetibili e quindi non sono applicabili a quella stragrande maggioranza di casi in cui gli eventi di cui vogliamo stimare la probabilità non sono mai accaduti oppure sono per loro stessa natura irripetibili. Per esempio, è palese a tutti che con nessuna delle definizioni finora date (classica, frequentista, assiomatica) è possibile stabilire la probabilità di eventi del tipo: domani pioverà, il prossimo presidente della repubblica italiana sarà

una donna, nel 2020 nasceranno gli Stati Uniti d'Europa, il prossimo papa sarà africano. Di fatto, è relativamente a casi di questo tipo che nella vita di tutti i giorni siamo maggiormente stimolati a esprimere una nostra "ragionevole" previsione e quindi a stabilirne la probabilità;

2) la ripetibilità degli esperimenti è un'utopia, perché in realtà nessun esperimento è perfettamente ripetibile in quanto non è possibile mantenere rigorosamente identiche le condizioni sotto cui è ripetuto;
3) le definizioni per partizione (classica) e in base alla frequenza relativa non sono vere definizioni, ma metodi per ottenere il valore della probabilità, sono quindi tutt'al più definizioni operative e non dicono nulla sulla vera natura della probabilità; la definizione assiomatica, infine, non è operativa ed è una definizione implicita per assiomi, che nulla quindi può dire su "cosa è" la probabilità;
4) ad onta della loro pretesa oggettività, sono in esse presenti elementi soggettivi che dipendono dal soggetto che valuta la probabilità: la valutazione della equiprobabilità degli eventi possibili nella definizione classica, la scelta del numero di esperimenti da effettuare e la valutazione della identità delle condizioni sperimentali in quella frequentista, la scelta della funzione d'insieme che fornisce la misura dell'insieme-evento nella definizione assiomatica;

5) si allontanano dal senso comune originario di probabilità, che è ben evidenziato invece nelle definizioni "non matematiche" del vocabolario Zingarelli, che sottintendono un punto di vista squisitamente soggettivo che senz'altro riscuote il consenso dell'uomo comune

Parlare di soggettivismo, in genere, non è stato ben accetto da matematici e scienziati, abituati da sempre a pensare in termini oggettivi, fin quando Bruno de Finetti, nel secolo scorso, molto scettico nei confronti degli atteggiamenti decisamente deterministici e assolutisti della scienza tradizionale, si è imposto al mondo scientifico internazionale come strenuo e originale propugnatore del soggettivismo nel campo della probabilità,[17] criticando il "presunto" rigorismo e oggettivismo delle vecchie definizioni di probabilità (de Finetti, 1974):

> *Esse non definiscono nulla; peggio ancora nascondono, con sproloqui e arcane definizioni, colme di fumo e di vuoto, il vero senso in cui il termine è usato dall'ultimo uomo della strada... La cosiddetta definizione basata su partizioni in casi ugualmente probabili richiede sia già acquisito, in senso soggettivo, il concetto di uguale probabilità. E quella basata sulle frequenze richiede il medesimo circolo vizioso ed in più un'intuizione (necessariamente grossolana) di un nesso tra osservazione di frequenze e valutazioni di probabilità, nesso di cui soltanto un'adeguata elaborazione della teoria delle*

[17] Anche il logico inglese Frank Ramsey (*The foundations of mathematics and other logical essays*, 1931) giunse, indipendentemente da de Finetti, a una concezione soggettivista della probabilità.

> *probabilità (soggettive) permette di stabilire il significato in base ad effettiva analisi delle circostanze in gioco.*

In tale spirito Bruno de Finetti diede la quarta e fondamentale definizione di probabilità:«grado di fiducia di un dato soggetto, in un dato istante e con un dato insieme di informazioni, riguardo al verificarsi di un dato evento» (de Finetti, 1970, vol.1. p. 6) .

Questa definizione della probabilità riporta il significato di probabilità alla comune accezione dell'uomo della strada.

La definizione soggettiva non è una definizione "operativa", nel senso che non indica una procedura specifica per assegnare alla probabilità un valore numerico, salvo che dovrà essere un valore (compreso fra 0 e 1) tanto più vicino a uno quanto maggiore è la nostra convinzione che l'evento si verifichi, e tanto più vicino a zero quanto maggiore è la nostra convinzione che l'evento non si verifichi.

Secondo lo schema delle scommesse, prediletto dalla impostazione soggettivista di de Finetti, il valore assegnato alla probabilità di un evento è il rapporto tra la "posta" di chi valuta la probabilità e la somma delle "poste" dei due scommettitori.

Così, per esempio, se Giovanni è disposto a scommettere 3 contro 1 che il cavallo Destriero vincerà la prossima corsa, significa che il suo avversario è invece disposto a scommettere 1 contro 3 che quel cavallo vincerà: la probabilità che Giovanni attribuisce alla vittoria di Destriero, quindi, è per lui, ¾, vale a dire il 75%, mentre per il suo avversario è ¼, pari al 25%.

In altri termini la scuola soggettivista di de Finetti e Ramsey, provocatoriamente, assegna alla probabilità di un evento il valore numerico pari «alla massima somma di denaro che un soggetto razionale è disposto a scommettere a fronte di una vincita lorda unitaria». La "posta" impegnata nella definizione di de Finetti può essere determinata in svariati modi (simulazioni al computer, calcoli scientifici, calcoli combinatori, frequenza relativa, valutazioni puramente intuitive, rapporto casi favorevoli/casi possibili, ecc.), ma sempre in maniera "equa e coerente con le informazioni" possedute dal soggetto che valuta la probabilità.[18]

La definizione soggettivista di probabilità, dunque, non rigetta le precedenti definizioni, ma le recupera sottraendole all'errata pretesa di oggettivismo, per utilizzarle più ragionevolmente e realisticamente in ottica soggettivista, come scelte non necessarie, bensì ritenute utili da chi deve dare un valore alla probabilità, in base alle "sue" informazioni o al "suo" intuito. Il soggettivismo in essa presente non è pertanto "arbitrarietà", come a volte è frainteso da alcuni, ma l'espressione dell'opinione del soggetto che valuta la probabilità, coerente con le informazioni, di qualunque tipo, di cui egli dispone sull'evento, comprendendo fra esse anche la conoscenza di diverse valutazioni della probabilità dell'evento espresse da altri soggetti o, perfino, la mancanza di qualunque informazione.

Le tecniche di calcolo messe a punto da Bruno de Finetti sono tali da consentire di ricavare, in maniera coerente con le premesse, il valore della probabilità e pertanto sono "oggettive", pur essendo le premesse stesse soggettive, in accordo

[18] Sarebbe qui troppo lungo illustrare il significato della frase «equa e coerente con le informazioni», per il quale si rimanda alle trattazioni specialistiche sulla probabilità soggettiva.

con l'osservazione, precedentemente data in queste pagine, sulla sostanziale differenza fra il calcolo delle probabilità, cha ha valore oggettivo, e i metodi per la definizione di probabilità, che possono variare. La definizione di probabilità dello Zingarelli: «La misura in cui si giudica che un avvenimento sia realizzabile o probabile», che a prima vista può sembrare poco scientifica, contiene, invece, proprio i tre elementi essenziali che caratterizzano la definizione più generale di probabilità data da de Finetti: misura, giudizio e realizzabilità.

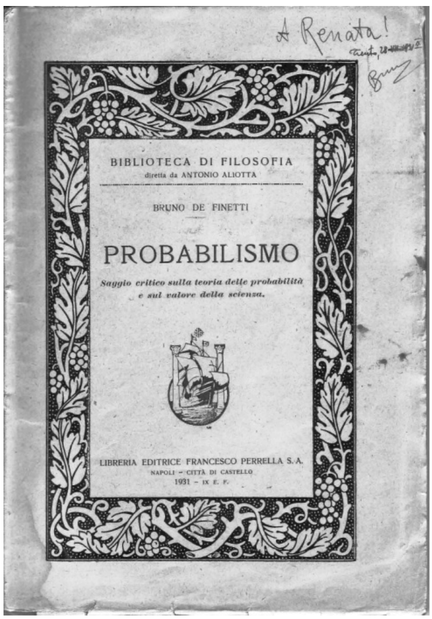

Fig. 3 – Bruno de Finetti, Probabilismo con la dedica di Bruno de Finetti alla moglie Renata (1930). Fotografia tratta da Fulvia de Finetti e Luca Nicotra, Bruno de Finetti, un matematico scomodo, Belforte, 2008.

La definizione definettiana ha il pregio innegabile di fornire "sempre" un valore della probabilità, anche nei casi in cui l'evento non è ripetibile, non è mai accaduto o le informazioni disponibili sono molto scarse o inesistenti. Inoltre, è notevole constatare che esistono casi in cui alcuni eventi sono composti di altri ai quali, in base alle precedenti definizioni, non sarebbe possibile assegnare alcun valore di probabilità e che, d'altra parte, la probabilità di tali eventi complessi risulta poco influenzata dalle probabilità assegnate agli eventi componenti. Di conseguenza, non ha molto senso discutere sulla "attendibilità" dei valori di probabilità assegnati agli eventi elementari, mentre è essenziale prendere l'iniziativa di assegnare in qualche modo tali valori. L'approccio soggettivista consente di sbloccare brillantemente tali situazioni, applicando il calcolo delle probabilità laddove sarebbe impossibile con le altre definizioni di probabilità. Bruno de Finetti applicò le sue vedute probabilistiche anche in psicologia, a molti aspetti dell'istinto, del subconscio e dell'intuizione, ai quali riconobbe sempre un ruolo decisivo nel processo della scoperta matematica. Una curiosità: egli pose in evidenza, per esempio, la manifestazione di un certo senso della probabilità da parte dei cinghiali quando, inseguiti dai cacciatori, cercano di trovare una via di scampo.

Il soggettivismo di de Finetti è frutto essenzialmente di quell'assenza di rigidezza mentale, che è cosa ben diversa dal rigore, che ha sempre contraddistinto il suo pensiero, caratterizzando il matematico italiano come acerrimo e autorevole nemico di ogni forma stereotipata di schemi mentali. Nel passato, pur essendo ben lontano da un approccio soggettivista, già il grande matematico francese Simone de Laplace nel

1814, nel suo *Essai philosophique des probabilités*, aveva espresso idee tutt'altro che rigide sulla probabilità: «In fondo la teoria delle probabilità è soltanto senso comune espresso in numeri».

Il "senso comune", si sa, non è qualcosa di determinato secondo rigide leggi, ma è soprattutto "opinione" ragionevole. Tale affermazione, dunque, già allora apriva una strada in fondo alla quale non è difficile scorgere la visione soggettivista della probabilità.

La probabilità, con Bruno de Finetti, ritorna alle sue origini, delle scommesse e della concezione spontaneamente soggettiva dell'uomo della strada.

Fig. 4 - Targa commemorativa accanto al portone d'ingresso della casa natale di Bruno de Finetti a Innsbruck. In testa si legge la famosa frase: *La probabilità non esiste*.

È il frutto del suo effettivo "realismo" (ben diverso dal presunto realismo degli oggettivisti della probabilità!), della sua disarmante onestà e semplicità scientifica, che rigetta sdegnosamente i falsi idoli, da chiunque vengano creati (de Finetti B., 1969, p. 94):

> *Sul piano accademico alligna in genere la civetteria di voler separare e collocare su uno sgabello più onorifico o certe speciali cose o certi linguaggi più pomposi per trattare di comuni cose, in modo da riservare a ciò che si colloca sullo sgabello, e negare a ciò che si lascia sul pavimento, la qualifica di scienza. Molti dei criteri di separazione adottati a questo scopo e delle discussioni cui conducono hanno indubbiamente valore e interesse da qualche punto di vista, [...] ma ogni erezione di una qualunque siffatta distinzione a criterio di discriminazione accademica costituisce una mutilazione suicida: si uccide la scienza che è vita cui nulla è precluso, collocando al suo posto un feticcio imbalsamato e gonfio di cattedratica boria.*

E ancora (de Finetti B. , 1980, p. 1146):

> *La probabilità: chi è costei? Prima di rispondere a tale domanda è certamente opportuno chiedersi: ma davvero 'esiste' la probabilità? e cosa mai sarebbe? Io risponderei di no, che non esiste. Qualcuno, cui diedi questa risposta (ribadita, col motto in tutte maiuscole - PROBABILITY DOES NOT EXIST- nella prefazione all'inglese di Teoria delle probabilità [1970]), mi chiese ironicamente perché mai, allora, me ne occupo.*
>
> *Mah! Potrei anche dire, viceversa e senza contraddizione, che la probabilità regna ovunque, che è, o almeno dovrebbe essere, la nostra 'guida nel pensare e nell'agire', e che perciò mi interessa. Soltanto, mi sembra improprio, e perciò mi urta, vederla concretizzata in un sostantivo, 'probabilità', mentre riterrei meglio accettabile e più appropriato che si usasse soltanto l'aggettivo, 'probabile', o, meglio ancora, soltanto l'avverbio, 'probabilmente'.*
>
> *Dire che la probabilità di una certa asserzione vale 40 per cento appare - purtroppo! - come espressione concreta di una verità apodittica. Non pretendo né desidero che tale modo di*

esprimersi vada bandito, ma certo è che l'asserzione apparirebbe assai più appropriatamente formulata se la si ammorbidisse dicendo, invece, che quel fatto lo si giudica 'probabile al 40 per cento', o, meglio ancora (a parte che suona male) , che ci si attende ' al 40 per cento- probabilmente' che sia o che risulti vero.

Bibliografia

Barra Mario (n.d.). *Galileo Galilei e la probabilità,* on-line in http://www.fundacionorotava.org/media/web/files/page145__cap_01_05_Barra.pdf.

Bernoulli Jacob (1713). *Ars conjectandi*.

Cardano Gerolamo (1524?-1570?). *Liber de ludo aleae.*

de Finetti Bruno (1969). *Un matematico e l'economia*. Milano: Franco Angeli.

de Finetti Bruno (1970). *Teoria delle Probabilità*. Voll. 1 e 2. Torino: Einaudi.

de Finetti Bruno (1974). *Interventi* al Convegno della C.I.I.M., Viareggio 24-25 ottobre 1974.

de Finetti Bruno (1980). Probabilità. *Enciclopedia Einaudi*, Torino: Einaudi.

de Laplace Pierre Simon (1814). *Essai philosophique sur les probabilités.* Paris: Courcier, Imprimeur-Libraire.

de Laplace Pierre Simon (1820). *Théorie analytique des probabilités* (1820) in *Ouvres completes De Laplace* publiees sous les auspices de l'Académie des Sciences, Tome Septième. Paris: Gauthier-Villars, Imprimeur-Libraire, 1886. Prima edizione 1812.

Huygens Christiaan (1657). *De ratiociniis in ludo aleae.*

Galilei Galileo (1897). Sopra le scoperte de i dadi, In *Le Opere di Galileo Galilei, Edizione Nazionale (E.N.)* a cura di Antonio Favaro, La Barbèra 1897, Vol. VIII, pp. 591-594.

Kolmogorov Andrei Nicolaievič (1933). *Grundebegriffe der Wahrscheinlichkeitrechnung.*

Pacioli Luca (1494). *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*.

Pascal Blaise (1654). *Traité du Triangle Arithmétique, avec quelques autres petits traitez sur la mesme matière.*

von Leibniz Wilhelm Gottfried (1666). *Dissertatio de arte combinatoria.*