Periodico di Matematica (IV) Vol. VI (4) dicembre 2024, pp. 75-86

# *Il triangolo ortico e la retta di Eulero con fantasia*

Paolo Severino Manca*

*Gia Professore Ordinario di Matematica Finanziaria all'Università di Pisa; paolo.severino.manca@gmail.com

DOI : 10.53159 /PdM(IV).v6n4.144

***Sunto:*** *Qui si scrive il sunto. Max 800 caratteri spazi inclusi.*

***Parole Chiave****: Qui si scrivono le parole chiave. Max 4 parole*

***Abstract:*** *Qui si scrive il sunto in inglese. Max 800 characters including spaces.*

***Keywords:*** *Qui si scrivono le parole chiave in inglese. Max 4 keywords*

## 1 - Introduzione

Pur essendo portato per l'arte e le materie letterarie, per circostanze fortuite e imprevedibili, come accade sempre nella vita , mi sono occupato di matematica.

Della matematica ho sempre apprezzato la fantasia più che il rigore, ammirando comunque con grande umiltà i grandi matematici che sono ricchi di fantasia e di rigore.[1]

Privilegiando la fantasia aborro le dimostrazioni lunghe, tediose, prive genialità e anche coloro che continuano a proporle, esaltati per il rigore e l'incomprensibilità delle loro disquisizioni, e continuo a credere che i grandi matematici prima "vedano" i risultati e solo successivamente li dimostrino.

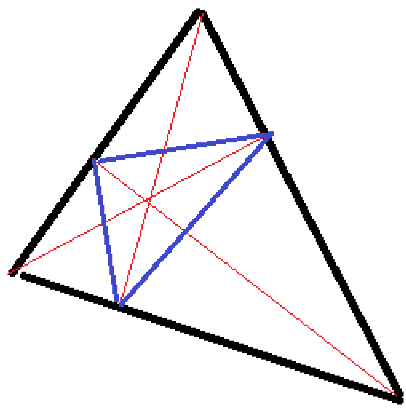
Queste premesse per presentare, nel campo elementare della geometria euclidea, una dimostrazione del tutto originale di un noto problema di minimo proposto da G. C. Fagnano e per ritrovare con immediatezza un risultato straordinario di Eulero che mi ha sempre colpito.

## 2 - Il triangolo ortico

Come noto il triangolo ortico di un triangolo acutangolo ha come vertici i piedi delle perpendicolari condotte dai vertici del triangolo acutangolo ai lati opposti.

---

[1] Anche per questo sostengo che i matematici , poiché si rifugiano nel mondo della fantasia più spinta, vanno protetti sia perché innocui sia perché poco adatti ad affrontare gli impegni pratici di ogni giorno.



Come noto nel triangolo ortico di un triangolo acutangolo le altezze del triangolo acutangolo sono bisettrici interne del triangolo ortico e ciò implica che i lati del triangolo ortico incontrano, due a due, i lati del tri acutangolo formando, con ciascuno di questi, angoli di eguale ampiezza.

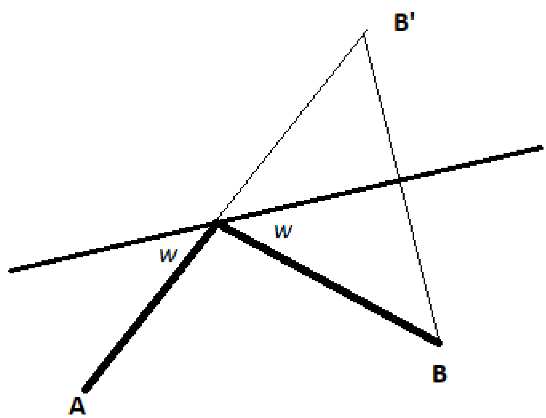
Nel 1775 Giulio Carlo Fagnano dei Toschi ,(1682 – 1766), propose il problema di caratterizzare, in un dato triangolo acutangolo, il triangolo inscritto il cui perimetro sia il minimo e diede anche una soluzione utilizzando il "calculus".

Si sono succedute altre procedure risolutive, alcune utilizzando l'analisi matematica, altre la geometria sintetica. La soluzione "sintetica" più elegante , ma comunque laboriosa, fu data in modo diverso ed indipendente da L. Fej´er e da While H. Amandus Schwarz, utilizzando le proprietà delle simmetrie assiali.

I risultati vengono tuttora ripresentati sul web : prevalgono le dimostrazioni incomplete e qualcuna errata in cui si confondono allegramente le condizioni necessarie da quelle sufficienti.

Direi che per pigrizia, sia per evitare di seguire i vari passaggi delle dimostrazioni disponibili, sia per evitare di trovare ogni volta errori ricorrenti, ho cercato qualcosa di più diretto e mi sembra di esserci riuscito.

Sono partito dal considerare le traiettorie di una biglia in un biliardo senza attrito e dall'utilizzare il noto elementare risultato per cui data una retta r e due punti A,B , in uno stesso semipiano rispetto ad r , allora la spezzata più breve tra A e B e che tocca r forma con r un angolo di incidenza pari all'angolo di riflessione, come del resto mostra direttamente la figura :

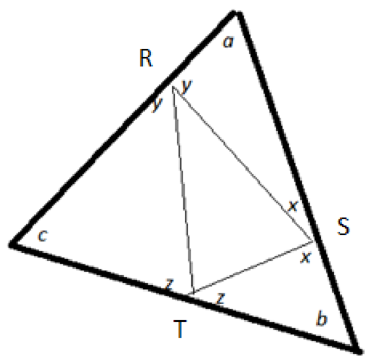



Da questa immediata constatazione segue che se un triangolo $T_i$ , inscritto nel triangolo acutangolo T , risulta di perimetro minimo allora necessariamente in Ti ogni coppia di lati incontra il corrispondente lato di T formando con tale lato un angolo di incidenza pari all'angolo di riflessione.

Indico dunque con A la classe dei tri che soddisfano alle condizioni necessarie sopra descritte osservando che A è non vuota perché appartiene ad A il tri ortico.

Indico con *a,b,c* il valore degli angoli di T e mostro che se il tri RST ∈ A e *x,y,z* sono gli angoli di incidenza dei lati di RST con i lati del tri T,allora [2] : $a = z$ , $b = y$ , $c = x$ .

Infatti poiché la somma degli angoli interni di un qualsivoglia tri vale π , deve risultare :




1. $a + b + c = \pi$
2. $a + y + x = \pi$
3. $b + z + x = \pi$
4. $c + z + y = \pi$
5. $x + y + z = \pi$

---

[2] Detti poi *p,q,r,* gli angoli di un tale tri Ti deve risultare :
$r + 2z = \pi$ $p + 2x = \pi$ $q + 2y = \pi$
cioè : $r = \pi - 2a$ $p = \pi - 2c$ $q = \pi - 2b$
e inoltre Ti deve individuare in T tre tri simili a T.

da cui segue necessariamente : $a = z$ , $b = y$ , $c = x$ .

Ne segue altresì che gli eventuali tri di A sono necessariamente simili e, inscritti in T , presentano i lati due a due paralleli.

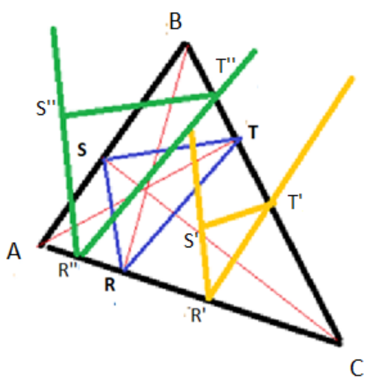
Mostro ora che il triangolo ortico è l'unico elemento di A.

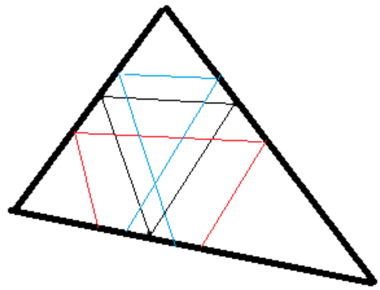
Indico con A,B,C i vertici del triangolo acutangolo e con R,T,S i vertici del suo tri ortico RST.

Se infatti esistesse un altro triangolo appartenente ad A di vertici R',S',T' , detto R' il suo vertice incidente sul lato su cui incide R , se risulta $\underline{AR'} > \underline{AR}$ , poiché i triangolo RST ed R'S'T' sono simili ed $\underline{RT} > \underline{R'T'}$ , dovrebbe essere anche

$\underline{ST} > \underline{S'T'}$ ma ciò implica che S' sia interno ad ABC.

Egualmente se esistesse un triangolo appartenente ad A di vertici R'',S'',T'' , detto R'' il suo vertice incidente sul lato su cui incide R , se risulta $\underline{AR''} < \underline{AR}$ , poiché i triangolo RST ed R''S''T'' sono simili, dovrebbe essere anche $\underline{RT} < \underline{R''T''}$ e dunque anche $\underline{ST} < \underline{S''T''}$ ma ciò implica che S'' sia esterno ad ABC.





Dalla dimostrazione segue anche che in un biliardo triangolare acutangolo esiste una sola traiettoria periodica di lunghezza minima : il triangolo ortico.

## 3 - La retta di Eulero

È straordinario che in un triangolo le tre altezze si incontrino sempre in un punto, l'ortocentro Oo, è straordinario che in un triangolo le tre assi si incontrino sempre in un punto, il circocentro Oc , è straordinario che in un triangolo le tre mediane si incontrino sempre in un punto, il baricentro Ob, ma è "miracoloso" che Oo, Ob, Oc si trovino su una stessa retta, con Ob in mezzo e con Oo e Oc a distanza da Ob una doppia dell'altra.

Parlo di un noto teorema di Eulero.[3]

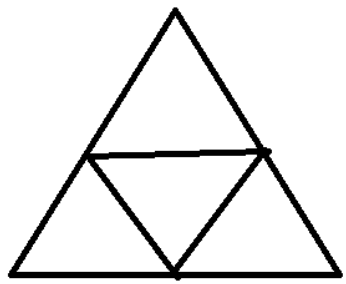
---

[3] Eulero, ( 1707-1783) , di risultati strepitosi ne ha ottenuti ben altri e in quantità industriali-

Mi sono chiesto come Eulero abbia “visto” un tal risultato , perché sicuramente prima lo ha visto poi lo ha dimostrato.

Non essendo riuscito a trovare gli scritti originali di Eulero ho cercato comunque di trovare una strada che permettesse di intuire come sia possibile “ prima vedere e poi dimostrare”.

Considero un triangolo equilatero di centro O, che indico con E e il suo tri mediale[4] che indico con Em .



Dalla figura e’ immediato “vedere” :

che E ed Em hanno lo stesso centro, sia O,

che Em è anch’esso equilatero di lato pari alla metà del lato di E

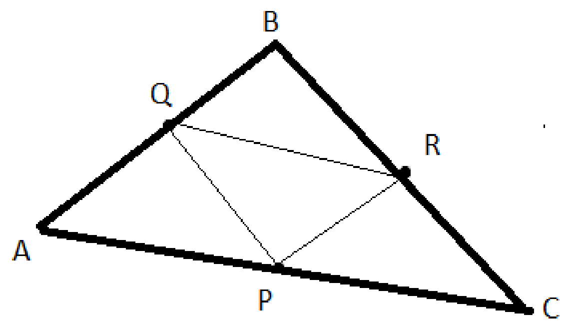
che Em “divide” E in quattro tri equilateri congruenti per cui l’area di Em è ¼ dell’area di E ,

Insomma in definitiva “si vede” che Em si può ottenere “ribaltando” e “dimezzando” E.

[4] triangolo mediale : che ha i vertici nei punti medi dei lati del triangolo dato.

In linguaggio più consono ciò significa che Em si può ottenere da E con una omotetia di centro O e rapporto di omotetia r = -1/2.

C'è da chiedersi cosa avvenga quando si prenda in considerazione un triangolo non equilatero T e il suo corrispondente triangolo mediale Tm.




Anche in questo caso e' immediato stabilire:

- che Tm è simile a T e di lati pari alla metà dei lati di T
- che Tm "divide" T in quattro triangolo congruenti per cui l'area di Tm è ¼ dell'area di T ,

Sembra ragionevole a questo punto chiedersi se, egualmente al caso di Em e C, il triangolo Tm si possa ottenere da T con una omotetia di rapporto r = -1/2

Se tale omotetia esiste, per trovarla occorre cercarne il punto fisso e ciò si verifica poiché T e Tm hanno le stesse mediane e dunque che T ed Tm hanno lo stesso baricentro.

A questo punto l'idea vincente è quella di trovare i trasformati di Oc e di Oo.

Indicando con Ob′,Oc′, Oo′ il baricento, circocentro, ortocentro di Tm , risulta Ob = Ob′. Meno facile scoprire che Oc′ = Oo .

Ciò accade in quanto le altezze condotte dai vertici di Tm ai lati opposti di Tm coincidono con gli assi di T e dunque poichè le altezze di Tm si incontrano nell'ortocentro Oc′ mentre gli assi di T si incontrano nel circocentro Oo di T , risulta: Oc′ = Oo.

A questo punto, se esiste l'omotetia, Ob ne rappresenta necessariamente il centro e il rapporto di omotetia necessariamente vale : -1/2.

Per definizione in una tale omotetia se P è un punto di T e P′ è il suo trasformato, allora i punti P, Ob , P′ risultano allineati, con X dalla parte opposta di X′ rispetto ad Ob , e con : X<u>′.Ob</u> = ½ X<u>.Ob</u> ( dove indico con <u>A.B</u> la lunghezza del segmento AB).

L'omotetia di centro Ob e rapporto r= -1/2 esiste effettivamente perché trasforma i vertici di T rispettivamente nei vertici di Tm.

Così, con riferimento alla figura precedente, il vertice B viene trasformato nel vertice P , poiché per la nota proprietà del baricentro, risulta <u>P.Ob</u> = ½ <u>B.Ob</u> .

Analogamente per A ed R , analogamente per C e Q.

Poichè l'ortocentro Oo di T viene trasformato nell'ortocentro Oo' di Tm risulta : e Oo.Ob = ½ Oo'.Ob. Ma l'ortocentro Oo' di Tm coincide col circocentro Oc di T e dunque Oo, Ob , Oo' =Oc risultano allineati, con Oo dalla parte opposta di Oc rispetto ad Ob , e con :

(*) Oc.Ob = ½ Oo.Ob

La linea dimostrativa è dunque :

- T e Tm sono simili avendo eguali gli angoli, e, per Talete, il rapporto di similitudine vale ½.
- T e Tm hanno le stesse mediane e dunque lo stesso baricentro.
- L'ortocentro di Tm coincide col circocentro di T
- Tm si ottiene da T con una omotetia di centro Ob e rapporto r = -1/2.

Concludendo in ogni triangolo Ob,Oc, Oo coincidono se il triangolo è equilatero, se il triangolo non è equilatero Ob,Oc, Oo si trovano su una stessa retta con Oo dalla parte opposta di Oc rispetto ad Ob , e con :

(*) Oc.Ob = ½ Oo.Ob

*i Fuzzy,* Bologna: Etaslibri.


VOL. 11 RIGHE E QUADRETTI
Carlo Toffalori
CORIANDOLI
Tra matematica e letteratura
mateinitaly