**Il Terzo problema di Hilbert (equiscomponibilità dei poliedri)**

**Breve scheda di Franco Eugeni**

È noto sin dai tempi dei geometri greci che due poligoni piani di eguale area sono anche equiscomponibili, ossia è possibile decomporre uno di essi in un numero finito di poligoni che, ricomposti, formano l'altro. La dimostrazione è un po' macchinosa ma elementare, e si basa essenzialmente su tre fatti:

1. ogni poligono si decompone in triangoli;
2. un triangolo è equiscomponibile con un rettangolo avente stessa base e metà altezza;
(3) l'equiscomponibilità è una relazione d'equivalenza.

Durante la sua famosa conferenza al Congresso di Parigi (1900), D. Hilbert osservò che tutte le dimostrazioni note del fatto che il volume di una piramide è 1/3 del volume di un parallelepi-pedo con stessa base e stessa altezza si basano sul principio di Cavalieri o su qualche metodo equivalente (esaustione, calcolo integrale). Egli pose pertanto la seguente domanda, che figurava al terzo posto nella sua famosa lista di 23 problemi irrisolti e divenne nota come

**Terzo Problema di Hilbert**. Dati un cubo e un tetraedro aventi lo stesso volume, è possibile decomporre uno di essi in un numero finito di poliedri che, ricomposti, formano l'altro?

Dunque Hilbert chiedeva, sostanzialmente, se poliedri equivalenti fossero anche equiscomponibili, cioè se il risultato noto per i poligoni potesse essere esteso in dimensione 3.

La risposta negativa arrivò quasi immediatamente (prima ancora che gli Atti del Congresso di Parigi fossero stampati) ad opera di uno studente di dottorato di Hilbert, destinato a diventare uno dei più importanti esperti di topologia del '900. Si trattava di  [Max Wilhelm Dehn](https://en.wikipedia.org/wiki/Max_Dehn) (1878-1952)..

La dimostrazione di Dehn era basata su un argomento molto ingegnoso, che può essere riassunto come segue. Se un poliedro viene tagliato in un numero finito di parti e ricomposto, il volume è chiaramente una quantità che si conserva, ossia un "invariante". Dehn osservò che è possibile definire un'altra quantità che si conserva, una particolare combinazione di lunghezze di spigoli e valori di angoli diedri (misurati in radianti) che oggi si chiama in suo onore [invarianti di Dehn](https://en.wikipedia.org/wiki/Dehn_invariant).

È facile vedere che ogni cubo ha invariante di Dehn pari a zero, mentre l'invariante di Dehn di un tetraedro regolare è non nullo. Pertanto, un cubo e un tetraedro di egual volume non possono mai essere equiscomponibili.

La dimostrazione originale di Dehn, pubblicata in [Dehn1901], venne poco dopo semplificata, nel 1903, dal matematico ebreo russo Benjamin Fedorovich Kagan (1869-1953). La risposta definitiva al terzo problema di Hilbert arrivò nel 1965, quandoil matematico ebreo svizzero Jean Pierre Sydler (1921-1988) dimostrò in [Syd65] ***che due poliedri in R3 sono equiscomponibili se e solo se hanno lo stesso volume e lo stesso invariante di Dehn.***

***Nota biografica***. Max Dehn (1878-1952) ricevette il suo dottorato a Gottinga nel 1900, sotto la supervisione di D. Hilbert. Fra i suoi numerosi contributi in topologia, oltre alla risoluzione del Terzo Problema di Hilbert, possiamo annoverare la classificazione topologica delle superfici, la soluzione del problema della parola per i loro gruppi fondamentali e la costruzione del sistema di generatori per il loro Mapping Class Group oggi noto come [Dehn twists](https://en.wikipedia.org/wiki/Dehn_twist). Egli introdusse quella che oggi è chiamata la [Dehn surgery](https://en.wikipedia.org/wiki/Dehn_surgery) per produrre nuovi esempi di homology spheres oltre a quello di Poincaré, e fu il primo a dimostrare che il nodo a trifoglio destro non è equivalente a quello sinistro.

Nel 1935, dopo l'avvento al potere dei nazisti, Dehn , che era ebreo, dovette abbandonare il suo posto di professore a Francoforte e fuggire, prima in Norvegia, poi in Svezia e infine negli Stati Uniti, dove concluse la sua carriera come professore al Black Mountain College (North Carolina).

|  |
| --- |
| https://blogger.googleusercontent.com/img/b/R29vZ2xl/AVvXsEiKnR3XbIYrvyAiprDjwvv5LrBmc9Ro_w9eSoiKn_mGZ0O_afBQa_Huem7alaowgplNUP6UcpJm_4tZPGzHbOM_MLbqLcrW7n0QIgdo2XXsMHGe4lOtHB8lFYTCqrW7JG9PuqDjMZQisWc/s200/Max_Dehn.jpg |
| M. Dehn (fonte: Wikipedia) |

**Riferimenti:**

**[Dehn1901]** M. Dehn: Ueber den Rauminhalt, Mathematische Annalen 55 (3)(1901), 465–478. [doi:10.1007/BF01448001](https://doi.org/10.1007/BF01448001)
**[Syd65]** J-P. Sydler: Conditions nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des polyèdres de l'espace euclidien à trois dimension, *Comment. Math. Helv*. **40** (1965), 43– 80. [doi:10.5169/seals-30629](https://doi.org/10.5169/seals-30629)