

# *Come vincere a sudoku*

## *Nel caso classico del sudoku 9 x 9*

Luca Nicotra\*

\* Ingegnere e divulgatore scientifico. Membro onorario APAV e AFSU, Presidente dell'A.P.S. "Arte e Scienza", Direttore responsabile di «ArteScienza», «Bollettino dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane», «Periodico di Matematica». Direttore editoriale di UniversItalia; [luca.nicotra1949@gmail.com](mailto:luca.nicotra1949@gmail.com).



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v6n3.141

**Sunto:** *Si descrive il metodo "a celle proibite" che consente di risolvere il caso classico del sudoku 9 x 9 fino al livello difficile. Esso consiste nell'individuare successivamente, per ciascun numero naturale da 1 a 9, l' unica cella di ciascuna regione dove quel numero può essere inserito, escludendo le celle della regione (celle proibite) appartenenti a righe o colonne contenenti quel numero.*

**Parole Chiave:** *Sudoku, quadrati latini, quadrati magici.*

**Abstract:** *The "forbidden cells" method is described, which allows you to solve the classic 9 x 9 sudoku case up to the difficult level. It consists of subsequently identifying, for each natural number from 1 to 9, the only cell in each region where that number can be inserted, excluding the cells of the region (forbidden cells) belonging to rows or columns containing that number.*

**Keywords:** *Sudoku, Latin squares, magic squares.*

## 1 - Cos'è il sudoku

Come è noto, il sudoku è un gioco matematico basato sulla logica<sup>1</sup> che consiste nel riempire una matrice o griglia quadrata  $n \times n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) in modo tale che ogni riga, ogni colonna e ciascuna delle  $n$  sottomatrici (figura 1) contigue di  $n$  elementi, (dette anche riquadri, regioni o blocchi), contengano tutti i primi  $n$  numeri naturali in ordine differente.<sup>2</sup> Ciascuna sottomatrice è pertanto di ordine  $\sqrt{n}$ .

Più in generale gli elementi della matrice possono essere simboli qualunque, purché diversi fra loro.

La versione più diffusa è quella del sudoku classico, costituito da una matrice  $9 \times 9$  suddivisa in 9 sottomatrici contigue  $3 \times 3$  di 9 elementi.

---

<sup>1</sup> A volte si vuole precisare che è un gioco di “logica” e non “matematico”, considerando che gli “oggetti” da disporre nelle celle possono essere in generale non numeri. Ma la matematica non è la scienza dei numeri soltanto e comprende anche la logica formale! Il sudoku è quindi un gioco logico-matematico perché contiene concetti matematici (permutazioni, matrici, quadrati latini), utilizzati con le regole della logica. Esso deriva, come caso particolare (presenza delle regioni o sottomatrici o sottogriglie o blocchi), dai quadrati latini studiati nel 1782 da Leonhard Euler (1707-1783), *Recherches sur une Nouvelle Espece de Quarres Magiques*, Verh. Genootsch. der Wet. Vlissingen, 9, 85-232 (1782). La presenza delle sottogriglie rende la soluzione del sudoku molto più facile rispetto al quadrato latino, che ne è privo.

<sup>2</sup> Quindi numeri senza ripetizione detti “numeri solitari”. Infatti il nome del gioco in giapponese (数独<sup>2</sup>, *sūdoku*), è una abbreviazione del nome completo 数字は独身に限る *Sūji wa dokushin ni kagiru*, che tradotto in italiano significa : sono consentiti solo numeri solitari.

Regione 1			Regione 2			Regione 3		
Regione 4			Regione 5			Regione 6		
Regione 7			Regione 8			Regione 9		

**Fig. 1 – Le regioni o riquadri o blocchi del sudoku 9 x 9.**

In tal caso ogni riga, ogni colonna e ogni riquadro 3 x 3 dovrà contenere tutti i primi 9 numeri naturali in ordine differente, ovvero loro permutazioni.<sup>3</sup> Esistono anche versioni a matrici 16 x 16 (riquadri 4 x 4) con elementi nell'insieme  $S = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9, a, b, c, d, e, f, g\}$ .<sup>4</sup>

La soluzione del gioco consiste nel completare il riempimento della matrice, iniziando da un suo parziale riempimento detto *griglia proposta* o *matrice incompleta* (figura 2). Il sudoku viene distinto normalmente in diversi livelli di difficoltà (facile, medio, difficile, esperto, estremo), crescenti con il diminuire delle celle già riempite all'inizio del gioco. Ma la difficoltà, in realtà, dipende soprattutto dalla posizione delle celle già occupate e non tanto dal loro numero. In figura

---

<sup>3</sup> Non tutte ovviamente! Il numero delle soluzioni valide del Sudoku classico è 6670903752021072936960. Ma il numero delle soluzioni sostanzialmente diverse, escludendo le simmetrie dovute a rotazioni, riflessioni, permutazioni e rietichettature è 5472730538 (Jarvis, Russell, 2005).

<sup>4</sup> Esistono oggi oltre 200 varianti del sudoku.

2, le celle inizialmente riempite sono 37 su 81. Si tratta di un sudoku di media difficoltà.

Affinché la matrice iniziale incompleta sia considerata valida, ai fini del gioco, è necessario che la soluzione sia unica. Il gioco viene infatti considerato non valido se sussistono due o più soluzioni differenti. Pertanto il gioco non è d'azzardo, in quanto la vincita non è aleatoria, e può essere risolto con metodo deduttivo, applicando diversi criteri logici.

In questo articolo, si illustra un metodo di soluzione abbastanza semplice, applicabile con successo fino ai sudoku di livello difficile: il metodo delle "celle proibite".

9	7			6	3			4
	5		4	9			6	3
				5				2
	2		9	3			1	
5			8	2	6			9
	6			1	4		3	
2				4				
4	8			7	5		2	
6			2	8			4	1

**Fig. 2**

## 2 - Il metodo

Nella versione 9 x 9 online, più interessante di quella stampata, si chiede al giocatore di risolvere il sudoku in uno dei seguenti modi:

- senza errori e in un tempo indefinito;
- con un numero massimo di errori (usualmente 3) entro un determinato tempo (solitamente non oltre 10 minuti).

Procedere per tentativi, anche se guidati da buoni criteri probabilistici, conduce ben presto inevitabilmente a perdere la partita, proprio per la natura del gioco, la cui soluzione non è aleatoria ma unica e determinata da criteri deduttivi.

Esiste invece un metodo, detto “celle proibite” (da me ormai ampiamente sperimentato) che consente di risolvere il sudoku classico nella prima modalità, senza errori e senza limiti di tempo, nelle modalità facile, medio e difficile. Nel caso di soluzione senza errori e senza limiti di tempo, ovviamente anche la rapidità con cui si arriva alla soluzione viene tenuta in conto nelle classifiche. Nei sudoku di livello esperto ed estremo, occorre invece accostare al metodo delle “celle proibite” altri criteri più complessi, per stabilire la corretta collocazione dei numeri mancanti. Si tratta sempre, però, di metodi di analisi che permettono di stabilire con criteri logico-deduttivi la corretta collocazione dei numeri mancanti in maniera univoca.

Concettualmente il metodo è molto semplice e deriva direttamente dal rispetto dell’unica regola del gioco:

*Inserire ciascuno dei 9 numeri naturali mancanti nella matrice incompleta escludendo le celle della matrice che risultano appartenere a righe, colonne e regioni contenenti già il numero in oggetto.*

La caratteristica del metodo proposto è la sua attenzione primaria a completare il riempimento delle regioni piuttosto che delle righe e colonne. Il completamento di queste ultime

avviene soltanto secondariamente quando, durante il riempimento delle regioni, si ottengono righe o colonne con una sola cella vuota, in cui quindi è certo l'inserimento del numero mancante. È possibile collocare correttamente i numeri mancanti anche nel caso di una colonna o riga contenente due celle vuote, quando una di queste risulta cella proibita per uno dei due numeri candidati, perché intercettata da una riga o colonna contenente già quel numero.

8	4	1	3	7				
2	6	9	8		1	7		3
3	5	7	9			8		1
	1		6	3	7	2		
		6	1	2	5	3	7	
7	2	3	4	8	9	1	6	5
4	3		5	6		9	1	7
1	7		2	9		5	3	6
6	9		7	1	3	4	8	2

Fig. 3.

8	4	1	3	7				
2	6	9	8		1	7		3
3	5	7	9			8		1
	1		6	3	7	2		
		6	1	2	5	3	7	
7	2	3	4	8	9	1	6	5
4	3		5	6	8	9	1	7
1	7		2	9	4	5	3	6
6	9		7	1	3	4	8	2

Fig. 4.

Per esempio la colonna 3 di figura 10 ha due celle vuote da riempire con i numeri 5 e 7. Ma la cella 7 della colonna è proibita per il numero 7, che è presente nella riga 7. Pertanto, nella colonna 3 la cella 7 deve contenere il numero 5 e la cella 9 deve contenere il numero 7.

Un'altra applicazione del metodo "celle proibite" riguarda il caso di una regione con due celle vuote.

La regione 8 di figura 3 ha due celle vuote che devono essere riempite con i numeri mancanti 4 e 8. La riga 7 contiene, però, il numero 4 che pertanto deve essere inserito nella cella vuota appartenente alla riga 8. Di conseguenza il numero 8 deve essere inserito nella cella vuota appartenente alla riga 7 (figura 4).

In pratica conviene procedere nel seguente modo, cercando di inserire ciascuno numero da 1 a 9 nei riquadri dove non è già presente.

Con riferimento al caso di figura 2, cominciando, per esempio, dal numero 9, si considerano i riquadri 3, 4, 7, 8, 9 dove il 9 non compare. Fra questi si individuano i riquadri contenenti soltanto una cella disponibile per contenere il 9 rispettando la regola del sudoku. In altri termini, si devono escludere i riquadri contenenti due o più celle ove sarebbe possibile inserire il numero 9: chiamiamo tali celle "ambigue". Con X si sono marcate le "celle proibite" per il 9, appartenenti a righe e colonne già contenenti il 9 (figura 5). Per esempio, nel caso della figura 2 le regioni 3, 7, 8, 9 contengono celle ambigue per il 9 mentre soltanto la regione 4 contiene una sola cella disponibile per il 9: in essa quindi è possibile inserire con certezza il 9 rispettando la regola del sudoku (figura 6).

9	7	x	x	6	3	x	x	4
x	5	x	4	9	x	x	6	3
x			x	5				2
x	2	x	9	3	x	x	1	x
5	x	x	8	2	6	x	x	9
x	6		x	1	4		3	x
2			x	4				x
4	8		x	7	5		2	x
6			2	8			4	1

Fig. 5

9	7			6	3			4
	5		4	9			6	3
				5				2
	2		9	3			1	
5			8	2	6			9
	6	9		1	4		3	
2				4				
4	8			7	5		2	
6			2	8			4	1

Fig. 6.

Lo stesso procedimento si può applicare successivamente ai numeri 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. Normalmente non si riesce a sistemare ciascun numero in tutti i 9 riquadri in un solo "giro", ma ne occorrono diversi. Spesso, dopo un primo giro, riquadri che prima contenevano celle ambigue per un certo numero, risultano invece possedere un'unica cella "certa" per accogliere quel numero, essendo state occupate da altri numeri, alla fine del primo giro, le celle "ambigue".



9	7			6	3			4
	5		4	9			6	3
		6		5				2
	2		9	3			1	
5			8	2	6			9
	6	9	5	1	4		3	
2				4				
4	8			7	5		2	
6			2	8			4	1

Fig. 7.

Per esempio, dopo avere collocato il 5 nell'unica cella certa della regione 5 di figura 7, questa risulta possedere un sola cella vuota che ovviamente può essere riempita con il numero mancante in tale regione: il 7 (figura 8).

9	7			6	3			4
	5		4	9			6	3
		6		5				2
	2		9	3	7		1	
5			8	2	6			9
	6	9	5	1	4		3	
2				4				
4	8			7	5		2	
6			2	8			4	1

Fig. 8.

9	7	2	1	6	3			4
	5		4	9	2		6	3
3	4	6	7	5	8		9	2
	2		9	3	7		1	
5			8	2	6			9
	6	9	5	1	4	2	3	
2	9			4	1			
4	8			7	5	9	2	
6			2	8	9		4	1

**Fig. 9.**

Il processo di riempimento dei riquadri conduce a un certo punto alla situazione di figura 9 che differisce da quella di figura 8 per l'inserimento in alcuni riquadri dei numeri 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9. I numeri 2 e 9 sono stati inseriti in tutti i riquadri.

Dopo l'inserimento del 9 nella terza regione, la terza riga presenta una sola cella vuota (figura 9) che evidentemente deve essere riempita con l'unico numero mancante: 1 (figura 10).

Proseguendo si arriva alla situazione di figura 10 in cui sono stati inseriti in tutti i riquadri i numeri: 1,2,3,4,6,8,9.

Mancano i numeri 5 e 7, da inserire nel riquadro 7 dove sono vuote due celle, ma ciascuna di esse è anche l'unica cella vuota delle righe 7 e 9. Risulta pertanto univocamente definita la collocazione sia del 5 sia del 7 (figura 11). La soluzione del sudoku è ottenuta.

La matrice quadrata del sudoku risolto si presenta come un quadrato latino di ordine 9 e più in generale di ordine  $n$ . Infatti un quadrato latino di ordine  $n$  è:

Una matrice quadrata nella quale ogni riga ed ogni colonna siano una permutazione dei numeri  $0,1, \dots, n-1$ , (eventualmente dei simboli  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ ).

9	7	2	1	6	3	8	5	4
1	5	8	4	9	2	7	6	3
3	4	6	7	5	8	1	9	2
8	2	4	9	3	7	6	1	5
5	1	3	8	2	6	4	7	9
7	6	9	5	1	4	2	3	8
2	9		6	4	1	3	8	7
4	8	1	3	7	5	9	2	6
6	3		2	8	9	5	4	1

**Fig. 10.**

.....  
 Il nome fu dato da Eulero per il fatto che egli era solito denotare gli elementi della prima riga (e quindi delle altre) con lettere latine.

Un quadrato latino si può riguardare come una generalizzazione dei gruppi finiti, in quanto un quadrato latino si può assumere come la tavola di composizione di un struttura algebrica, meno ricca dei gruppi, denominata quasi-gruppo. (Eugeni, 2021, pp. 20-21).

9	7	2	1	6	3	8	5	4
1	5	8	4	9	2	7	6	3
3	4	6	7	5	8	1	9	2
8	2	4	9	3	7	6	1	5
5	1	3	8	2	6	4	7	9
7	6	9	5	1	4	2	3	8
2	9	5	6	4	1	3	8	7
4	8	1	3	7	5	9	2	6
6	3	7	2	8	9	5	4	1

Fig. 11.

### 3 - Cenni storici

Dalla voce Sudoku in wikipedia:

*I primi giochi di logica basati sui numeri apparvero sui giornali verso la fine del XIX secolo, quando alcuni enigmisti francesi iniziarono a sperimentarli rimuovendo opportunamente dei numeri dai quadrati magici. Le Siècle, un quotidiano parigino, pubblicò nel 1892 un quadrato magico di dimensioni 9×9 parzialmente completo con sottoquadrati di dimensioni 3×3. Non si trattava di un sudoku così come lo conosciamo oggi poiché conteneva numeri a doppia cifra e, per essere risolto, richiedeva l'aritmetica piuttosto che la logica, ma ammetteva comunque la regola per cui ogni riga, colonna e sottoquadrato dovesse contenere gli stessi numeri senza ripeterli. Successivamente un giornale rivale de Le Siècle, La France, ridefinì le regole di questo gioco, avvicinandosi di molto al sudoku moderno: ogni riga, colonna e sottoquadrato del quadrato magico doveva essere riempita soltanto con i numeri da 1 a 9, sebbene i sottoquadrati non fossero marcati all'interno dello schema. Questi giochi settimanali furono pubblicati anche da*

altri quotidiani francesi come *L'Echo de Paris* per circa un decennio, ma poi scomparvero all'epoca della prima guerra mondiale.

Secondo l'enigmista statunitense Will Shortz, il sudoku moderno fu realizzato da Howard Garns, un ex architetto in pensione dell'Indiana (morto nel 1989), e pubblicato per la prima volta nel 1979 da *Dell Magazines* all'interno della rivista *Dell Pencil Puzzles and Word Games* con il titolo *Number Place*.

Il gioco venne introdotto in Giappone dalla casa editrice Nikoli nella rivista *Monthly Nikolist* nell'aprile del 1984 con il titolo *Suuji wa dokushin ni kagiru* (数字は独身に限る<sup>2</sup>), successivamente abbreviato da Maki Kaji in *Sudoku* prelevando soltanto i primi caratteri kanji del nome completo. Nel 1986 Nikoli introdusse due novità: il numero massimo di celle già riempite fu ristretto a 32 e le griglie diventarono "simmetriche" (nel senso che i numeri già stampati venivano distribuiti su celle simmetriche).

Nell'ottobre del 2004 il sudoku venne importato in Gran Bretagna da un ex giudice neozelandese, Wayne Gould, per poi diffondersi in Europa e nel resto del mondo nel 2005. Sempre nel 2005, "sudoku" venne eletta parola dell'anno dalla *Oxford University Press*.

## Bibliografia

BAMMEL S.F. , ROTHSTEIN J. (1975). The number of  $9 \times 9$  Latin squares, «*Discrete Mathematics*» 11 93–95.

EUGENI F. (2021). *La geometria proiettiva ed affine II : quadrati greco-latini e piani affini finiti*. «*Periodico di Matematica*» (IV) Vol. III (2) settembre 2021.

FELGENHAUER B., JARVIS F. (2005). *Enumerating possible Sudoku grids*. Department of Computer Science TU Dresden 01069

Dresden, Germany; Department of Pure Mathematics University of Sheffield, Sheffield S3 7RH, U.K.

<http://www.afjarvis.staff.shef.ac.uk/sudoku/sudoku.pdf>

JARVIS F., Ed RUSSELL (2005). *There are 5472730538 essentially different Sudoku grids ... and the Sudoku symmetry group*, su Frazer Jarvis's home page, 7 settembre 2005.

<https://web.archive.org/web/20061004103338/http://www.afjarvis.staff.shef.ac.uk/sudoku/sudgroup.html>

MCKAY B. D., ROGOYSKI E. (1995). Latin squares of order 10, *Electronic J. Combin.* 2, Note 3, approx 4pp. (electronic)