Periodico di Matematica (IV) Vol. VI (3) settembre 2024, pp. 15-40

La geometria proiettiva di Luigi Cremona

La storia integrata nella didattica della matematica

Laura Tomassi*

*Università di Roma Tor Vergata; tomassi@axp.uniroma2.it

DOI : 10.53159 /PdM(IV).v6n3.138

Sunto: *Questo lavoro esponel'idea diproporre agli studenti di scuole di diverso grado alcuni elementi di geometria proiettiva, seguendo un'indicazione didatticadi Luigi Cremona, descritta nel suo testo di geometria proiettiva per studenti degli istituti tecnici. La metodologia suggerita è quella nota oggi come teoria dell'integrazione della storia nella didattica della matematica. Dalla traccia dello sviluppo storico della geometria proiettiva si possono derivare idee che portano a strategie risolutive geometriche in ambito non necessariamente geometrico.*

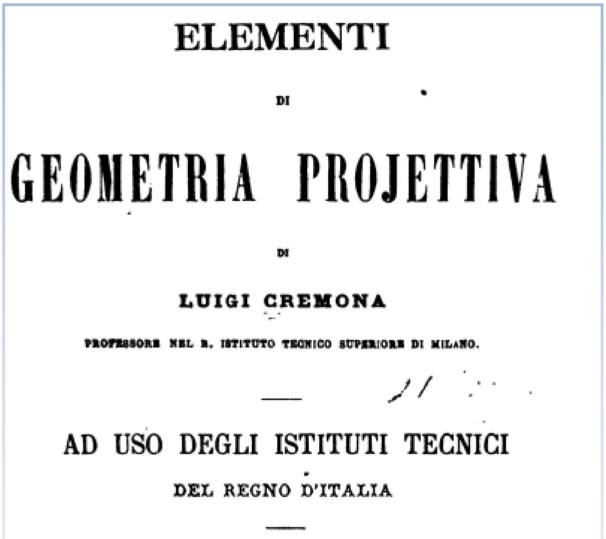
Parole Chiave: *storia integrata, pensiero proiettivo, teorema di Menelao .*

Abstract: *This work exposes the idea of offering students of schools of different levels some elements of projective geometry, following a didactic indication by Luigi Cremona, described in his text on projective geometry for students of technical institutes. The suggested methodology is known today as the theory of the integration of history in mathematics teaching. From the trace of the historical development of projective geometry, ideas can be derived that lead to geometric solution strategies in a field that is not necessarily geometric.*

Keywords: *integrated history, projective thinking, Menelaus theorem*

1 -Introduzione

Gli studi di Luigi Cremona furono determinanti per lo sviluppo di numerosi metodi geometrici in Italia nella seconda metà del XIX secolo. La sua personalità va considerata integralmente, per l'impegno politico durante e dopo il Risorgimento e per il suo pensiero in ambito scientifico e didattico. Fu ministro dell'Istruzione per pochi giorni nel ministero Di Rudinì, ma il suo contributo più importante alla didattica lo diede come insegnante e come autore di testi. In questo studio si segue il filo logico del testo di Cremona *Elementi di geometria projettiva ad uso degli Istituti Tecnici del Regno d'Italia*, testo nel quale chiaramente l'autore precorre il quadro teorico della storia integrata nella didattica della matematica, prendendo in esame le fonti storiche ed il dipanarsi nel tempo delle dialettiche che costruirono la geometria proiettiva. Il criterio didattico di Cremona diventa oggetto storico esso stesso ed entra nel flusso di idee che costruisce un parallelismo tra l'evoluzione del pensiero matematico in quanto tale e quella del pensiero degli studenti, arrivando a recuperare significati e perseguire obiettivi che vanno al di là dell'apprendimento della geometria stessa (Radford & al., 2014). Nei prossimi paragrafi saranno prese in considerazione, in un' ottica storico-pedagogica, le fonti che Cremona cita all'inizio del suo libro, per arrivare alla preistoria della geometria proiettiva: in primis, il teorema di Menelao, la sua declinazione araba nella *Figura Chata*, che Fibonacci descrive nel *Liber Abbaci* e nella *Practica Geometriae* e che dice di aver appreso da Ametus; in seguito, nel «giardino di Desargues» (Catastini, 2004) l'ampliarsi dell'orizzonte della struttura gestaltica del triangolo di Menelao utilizzata da Fibonacci.



ELEMENTI

DI

GEOMETRIA PROJETTIVA

DI

LUIGI CREMONA

PROFESSORE NEL R. ISTITUTO TECNICO SUPERIORE DI MILANO.

AD USO DEGLI ISTITUTI TECNICI

DEL REGNO D'ITALIA

Fig. 1- La copertina del libro di Luigi Cremona

1.1 – Il contesto culturale e scolastico dell'Italia subito dopo l'unità d'Italia

Nella seconda metà dell'Ottocento in Italia il mondo dell'Istruzione è caratterizzato da un intento riformistico e fondante. La legge Casati del 1859 è stata in vigore fino alla *Riforma Gentile* del 1923. Essa aveva come fine ultimo dell'istruzione scolastica la formazione di una classe dirigente colta ed umanistica: l'università era l'obiettivo della gioventù che aveva la possibilità di dedicarsi agli studi ginnasiali e liceali. Parallelamente scorreva chi si dedicava alla frequenza degli istituti tecnici, che non davano accesso all'università ad eccezione dell'indirizzo fisico matematico. Proprio in questo tipo di scuola crebbero menti di illustri matematici (Volterra, Severi ad esempio) e la mente illuminata di una pedagogista sorprendentemente moderna per il suo tempo, Maria Montessori (Scocchera, 1993), provvidenzialmente relegata dai suoi studi tecnici alla frequenza della facoltà di biologia. Gli Istituti Tecnici furono oggetto di molta attenzione da parte di Luigi Cremona, che scrisse il testo di geometria proiettiva già citato. In realtà le attività culturali di Cremona a favore della Scuola erano di respiro più ampio e radicale, egli che influenzò e fu attivo nella stesura dei programmi del decreto Coppino del 1867. Il suo pensiero a proposito della geometria, per la quale materia ripristinò come libro di testo gli *Elementi* di Euclide, è esposto nel seguente brano estratto dal testo del decreto Coppino (Giacardi, 2006):

> *Insegnata col metodo degli antichi la geometria è più facile e più attraente che non la scienza astratta dei numeri. [...] Si raccomanda al docente che si attenga al metodo euclideo, perché questo è il più proprio a creare nelle menti giovanili la abitudine al rigore inflessibile nel raziocinio. Soprattutto non intorbidi la purezza della geometria antica, trasformando teoremi geometrici in formole algebriche, cioè sostituendo alle grandezze concrete [...] le loro misure.*

Una riflessione: in quegli anni Baldassarre Boncompagni, riportava alla luce dopo secoli di buio, che la ricerca storica ha cercato di spiegare, il testo del *Liber Abbaci* di Leonardo Pisano detto Fibonacci, che scriveva così (Boncompagni, 1852):

> *E poiché la scienza aritmetica e quella geometrica sono connesse e si sostengono a vicenda, non si può trasmettere una piena dottrina del numero se non intersecandola con alcuni concetti di geometria o spettanti alla geometria, che in questo caso pratica il giusto modo di operare sui numeri; modo che è assunto per molte argomentazioni e dimostrazioni che si fanno con le figure geometriche. Proprio in un altro*

> *libro che ho composto sulla pratica geometrica, spiegavo ciò che è pertinente alla geometria e a molte altre cose, descrivendolo con la singola figura, dimostrando ogni singola cosa con dimostrazioni geometriche poste sotto. Senz'altro questo libro spetta più alla teoria che alla pratica. Così chi volesse conoscere bene la pratica di questa scienza dovrà applicarsi con uso continuo ed esercizio giornaliero nella pratica di essa, perché se la conoscenza si muta in abitudine attraverso la pratica, la memoria e l'intelligenza concordano a tal punto con le mani e i segni che quasi in un unico impulso e anelito, in uno stesso istante, si accordano naturalmente su tutto; e allora quando il discepolo avrà conseguito un abito mentale, a poco a poco potrà pervenire facilmente alla perfezione di questa.*

È inevitabile pensare che Maria Montessori, che in quegli anni frequentava la Regia Scuola Tecnica di Roma, fosse fortemente influenzata dalla sua formazione giovanile quando ebbe a dire in una conferenza tenutasi il 5 maggio 1931

> *Fino a una certa epoca aritmetica e geometria procedevano unite, poi fu necessario dividerle. Ma la cosa più semplice e più chiara è l'origine delle cose: come ripeto sempre, il bambino deve avere l'origine delle cose perché l'origine è più chiara e più naturale per la sua mente. Noi dobbiamo solo trovare un materiale che renda l'origine accessibile.*

Certo è che non può sfuggire il denominatore comune tra le tre teorie così lontane nel tempo: l'inscindibilità di aritmetica e geometria; la sollecitazione dell'apprendimento attraverso la percezione e la stimolazione periferica, tanto importante per le moderne teorie neuro-scientifiche.

1.2 – Il programma didattico di Luigi Cremona

Nell'introduzione al libro *Elementi di geometria projettiva ad uso degli Istituti Tecnici del Regno d'Italia*, Cremona individua limpidissimamente gli obiettivi didattici, i contenuti e la metodologia.

Innanzitutto chiarisce:

> *Non tutta la geometria tradizionale è necessaria per capire il mio libro: basteranno le poche proposizioni fondamentali sul cerchio ed i triangoli simili.*

Gli argomenti fondamentali sono: il rapporto anarmonico; la proiezione centrale per determinare il concetto degli elementi a distanza infinita; il principio di dualità; l'alternanza della geometria piana e solida; la definizione delle coniche come proiezione del cerchio; la teoria dei poligoni inscritti e circoscritti ; i teoremi di Pascal e Desargues.

Dall'inizio è evidente che egli intende utilizzare il metodo dell'integrazione della storia nella didattica della matematica e descrive così i contenuti del suo libro di testo:

> *Le proposizioni sono tutte di vecchia data, tanto che per non poche bisognerebbe risalire ai geometri della più remota antichità; e ciascuno potrà rintracciarle in Euclide (285 a. C), in Apollonio di Perga (247 a. C), in Pappo d'Alessandria (IV sec. d. C), in Desargues di Lione (1593- 1662), in Pascal (1623-1662), in Delahire (1640-1718), in Newton (1642-1727), in Maclaurin (1698-1746), in J. H. Lambert (1728-1777),[…]Le teorie ed i metodi, che di queste proposizioni fanno un insieme omogeneo ed armonico, soglìon essere detti moderni, perchè creati o perfezionati da geometri più vicini a noi, come Carnot, Brianchon, Poncelet, Möbius, Steiner, Chasles, Staudt.*

Questa è la dichiarazione riguardo ai contenuti che Cremona fa all'inizio del suo libro, nel momento in cui sta battezzando la "sua" geometria, che definisce «projettiva», ispirandosi alla definizione di Poncelet autore di *Traité des propriétés projectives des figures* (Poncelet, 1822).

La scelta di storicizzare la matematica è parte della tradizione pedagogica italiana, il «ritorno all'origine delle cose»di Montessori, che ha investito la didattica della matematica di Emma Castelnuovo, la quale intravede la necessità di ricostruire la storia della matematica andando oltre la storia classica: si pensi alla sua didattica del concetto dell'affinità in bambini di undici anni (Castelnuovo, 1967). Negli ultimi decenni l'utilizzo della storia nell'insegnamento della matematica è stato definito e motivato in maniera dettagliata dal quadro teorico dei professori Luis Radford e Fulvia Furinghetti ed ha evidenziato risultati positivi (Radford, 2014). Obiettivi simili vengono esplicitati da Cremona, quando cita Euclide, Pappo, Menelao, Desargues e Ceva con la seguente motivazione:

> *Vorrei far toccare con mano che sono cose in gran parte venerande per antichità, tutte maturate nelle menti dei più insigni pensatori e ridotte ormai a quella forma dì estrema semplicità che Gergonne considerava come segno di perfezione per una teoria scientifica.*

Altra motivazione è far conoscere i nomi e le opere dei grandi matematici del passato, nonché, attraverso questa conoscenza, facilitare il tener a mente i teoremi ed i risultati da essi ottenuti.

2 – I contenuti

Il livello di approfondimento del libro di Cremona rispetto ai testi scolastici attuali è decisamente molto elevato sia per quanto riguarda i contenuti, sia per quanto riguarda il rigore dimostrativo. Inoltre bisogna tener presente che le tavole grafiche sono tutte poste alla fine del testo: questi elementi testimoniano di un momento storico in cui agli studenti veniva richiesta grande attenzione e capacità di rielaborare. Verranno prese in considerazione alcune delle definizioni e proposizioni della parte iniziale del libro. Le figure riportate sono quelle dell'appendice, disegnate a mano da un tecnico e da uno studente licenziato della scuola dove Cremona aveva insegnato, il Regio Istituto Tecnico Superiore di Milano.

2.1 – La proiezione centrale

Dopo aver introdottola nozione di proiezione centrale, facendo riferimento ai disegni"*Fig.1*" e "*Fig.2*" nella Fig.2-, viene definito il punto all'infinito come caso limite di punto corrispondente alla rotazione di un raggio rotante attorno ad O che fa corrispondere il punto A′ ad A: quando il raggio è parallelo ad A, allora A′ cade in I′,punto di fuga o punto limite corrispondente al punto I di a, punto all'infinito.

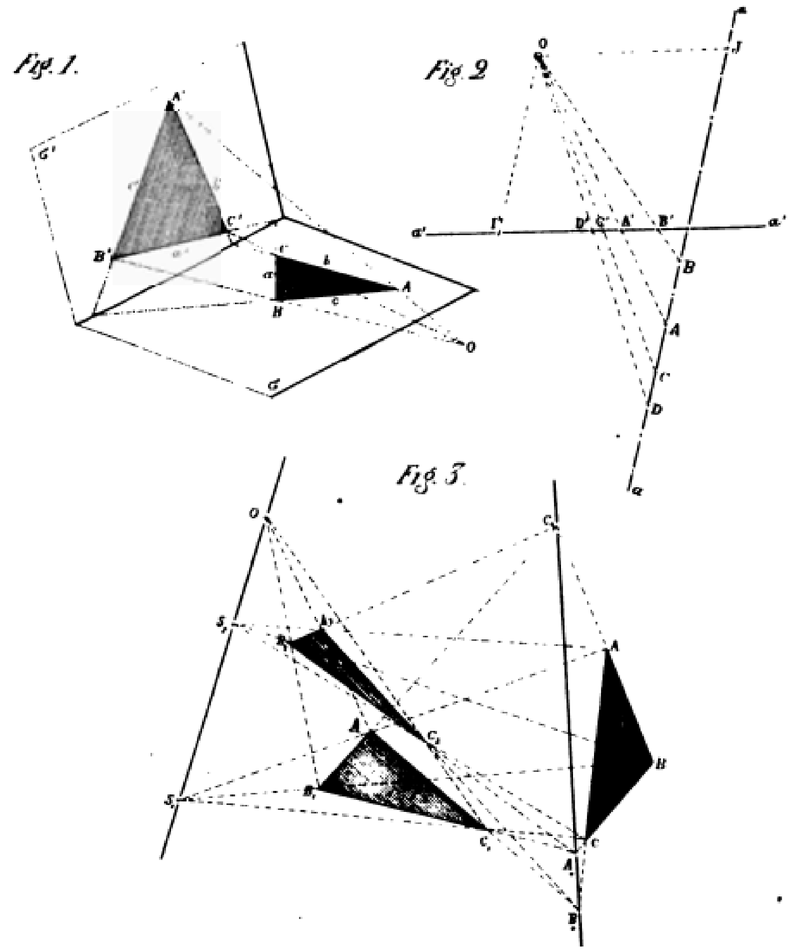


Fig. 2 - Le illustrazioni della proiezione centrale nel testo di Cremona

Due rette parallele hanno lo stesso punto all'infinito e tutte le rette parallele ad una data sono da considerarsi come aventi un punto comune all'infinito. Facendo riferimento ai disegni *"Fig.2"* e *"Fig.3"*nella figura 2 si dimostra il Teorema 12:

> *Se due triangoli sono prospettivi, le intersezioni dei lati corrispondenti sono in linea retta.*

Esso è valido sia nel caso che i due triangoli giacciano su due piani diversi (disegno "*Fig. 2*"), sia nel caso che giacciano sullo stesso piano (disegno "*Fig. 3*").

Una delle caratteristiche di questo testo esplicitata nell'introduzione e puntualmente mantenuta nella trattazione dei diversi teoremi è l'alternanza della geometria piana e della stereometria:

> *Fin dal principio io alterno senza distinzione i teoremi della geometria piana con quelli della solida, giacché l'esperienza m'ha insegnato, o altri lo aveva già osservato , che le considerazioni stereometriche suggeriscono bene spesso il modo di rendere facile ed intuitivo ciò che in geometria piana sarebbe complicato e di malagevole dimostrazione: di più, esse acuiscono l'intelletto e aiutano lo svolgimento di quella immaginativa geometrica che è qualità essenziale all'ingegnere, perché ei possa pensare le figure nello spazio anche senza il sussidio di un disegno o di un modello.*

L'altra caratteristica è il principio di dualità, cioè il fatto di considerare che vi sono sempre due maniere correlative e reciproche di generare figure e svolgerne le proprietà.

2.2 – Rapporto armonico

Nel paragrafo 8, Cremona riporta il seguente Teorema 38:

> *Se in una retta s sono dati tre punti A, D, C e se si costruisce un quadrangolo completo (KLMN) in modo che due Iati opposti (KL,MN) concorrano in A, altri due lati opposti {KN, ML) concorrano in B e il quinto lato (LN) passi per C, il sesto lato (KM) segherà la retta data in un punto D, che è determinato mediante i tre dati, cioè non varia, comunque sì mutino gli elementi arbitrari del quadrangolo. I quattro pun-*

ti ADCD diconsi armonici, ovvero si dice che la forma geometrica costituita dai quattropunti suddetti è armonica.

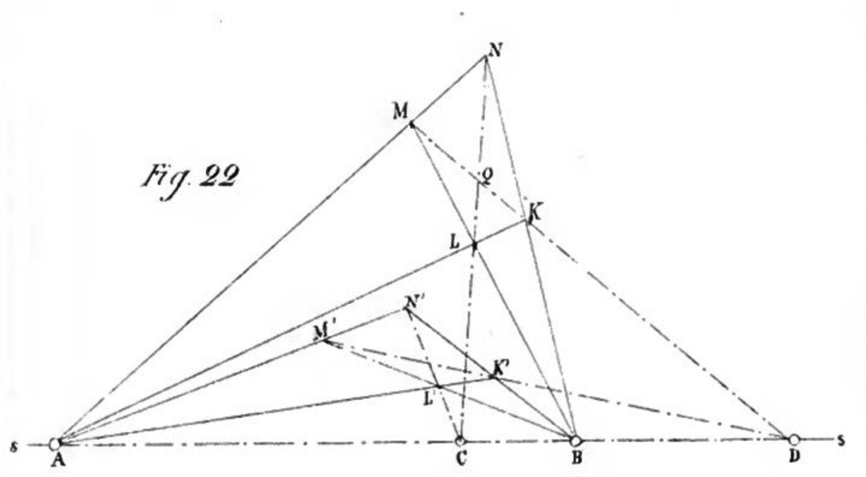


Fig. 3 - Illustrazione di Cremona delle forme armoniche relative al Teorema 38

In ottemperanza al criterio di dualità l'impaginazione è tale che vengono illustrati su due colonne i due teoremi correlativi, così come riportato in parte nella figura 4.

2.3- Rapporto anarmonico

I paragrafi che vanno dal 53 al 59 del libro di Cremona riguardano i rapporti anarmonici, la cui teoria completa è attribuita a Möbius, ma dei quali Euclide, Pappo e Desargues avevano dimostrato la proposizione fondamentale del n° 53. Con riferimento alla Figura 5 (nel Testo di Cremona la *Fig. 31)*, con la dimostrazione riportata in nota di chiusura.[i]

38. Teorema (1). — Se in una retta *s* sono dati tre punti *A*, *B*, *C*, e se si costruisce un quadrangolo completo (*KLMN*), in modo che due lati opposti (*KL*, *MN*) concorrano in *A*, altri due lati opposti (*KN*, *ML*) concorrano in *B*, e il quinto lato (*LN*) passi per *C*, il sesto lato (*KM*) segherà la retta data in un punto *D*, che è determinato mediante i tre dati, cioè non varia, comunque si mutino gli elementi arbitrari del quadrangolo (fig. 22ª).

Dim. — Infatti, se si costruisce un secondo quadrangolo completo *K'L'M'N'*, il quale soddisfaccia alle prescritte condizioni; siccome allora i due quadrangoli hanno cinque paja di lati corrispondenti che concorrono sulla retta data, così anche il sesto pajo concorrerà sulla retta medesima (Nº 30, *e*, a sinistra).

Se tre rette date (in un piano) *a*, *b*, *c* concorrono in un punto *S* e se si costruisce un quadrilatero completo (*klmn*), in modo che due vertici opposti (*kl*, *mn*) cadano in *a*, altri due vertici opposti (*kn*, *ml*) cadano in *b*, e il quinto vertice (*ln*) si trovi in *c*, il sesto vertice (*km*) cadrà in una retta *d* passante pel punto dato, la quale è determinata, cioè non varia, comunque si mutino gli elementi arbitrari del quadrilatero (fig. 23ª).

Infatti, se si costruisce un secondo quadrilatero completo *k'l'm'n'*, il quale soddisfaccia alle prescritte condizioni, siccome allora i due quadrilateri hanno cinque paja di vertici corrispondenti allineate col punto dato, così anche il sesto pajo sarà in linea retta col punto medesimo (Nº 30, *e*, a destra).

Fig. 4 - I due teoremi correlativi, della proposizione n 38

$$AC/BC:AD/BD$$

si dice rapporto anarmonico o doppio rapporto dei quattro punti in linea retta ABCD e il rapporto anarmonico di quattro punti in linea retta non è alterato da qualsivoglia proiezione.

3 - Il metodo della storia integrata nella didattica

Quanto esposto nei paragrafi precedenti, proposto come materiale di studio nel secondo biennio della scuola tecnica nel 1871 nel Regno d'Italia, difficilmente troverebbe spazio nella scuola attuale. Tuttavia, potrebbe essere utile introdurre il "Pensare proiettivo" (Ciliberto, 2023).

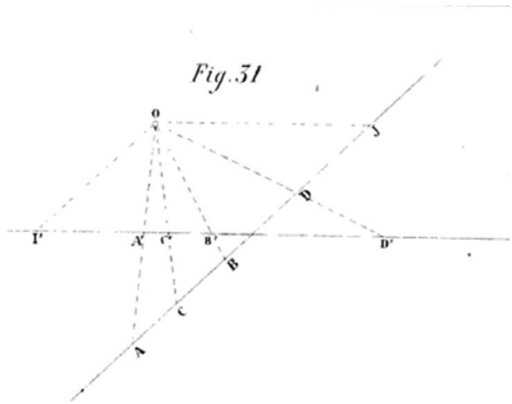


Fig. 5 - Il rapporto anarmonico

Il pensiero proiettivo sposta la descrizione geometrica dello spazio fisico sulla visionedell'osservatore e questo è funzionale ad un modello didattico che mette i bambini e i ragazzi al centro, con la loro percezione come mezzo fondamentale.

Nel nostro caso però, intendiamo ricalcare quanto suggerito da Cremona riguardo l'utilità dell'integrazione della storia nello studio e nell'apprendimento della matematica, tornando "all'origine delle cose", sulla traccia del percorso storico da lui stesso segnato.

Per quanto riguarda gli argomenti riportati nel paragrafo precedente, riferibili al concetto di bi-rapporto vengono forniti dall'autore come fonti storiche Pappo e Desargues, ma ad un attento studio si possono rintracciare delle radici storiche diverse, che permettono anche di trasportare l'uso didattico in un ambito in cui, come auspicato dai "maestri" citati all'inizio di questo articolo, quali Montessori e Fibonacci, la geometria è strettamente connessa all'aritmetica, come era all'origine. Risalendo al Desargues ed al suo teorema, si può intravedere il legame con un altro "discorso matematico" fatto quattrocento anni prima da Leonardo Pisano detto Fibonacci, il quale ritiene di esporre un risultato a lui ancora precedente di secoli.

Nel capitolo IX del *Liber Abbaci* di Fibonacci vengono presentate le regole del baratto come "regola del cinque".

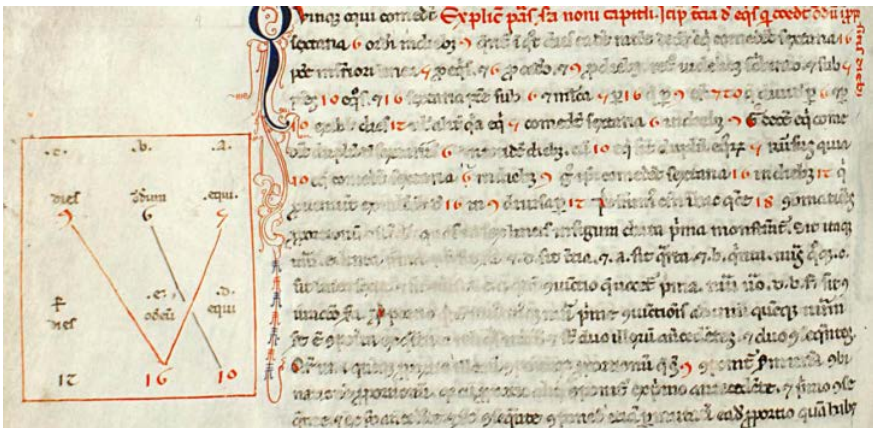
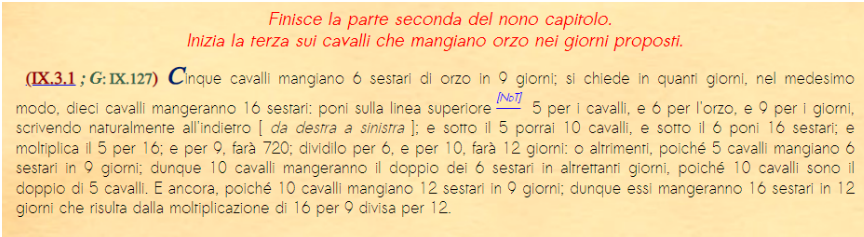


Fig. 6 - Il problema dell'orzo e dei cavalli ed il relativo diagramma di soluzione. Parte della pagina iniziale capitolo nono sezione 3 del Liber Abbaci. Conv. Sopp. C.I. 2616, BNCF, folio 55



Finisce la parte seconda del nono capitolo.
Inizia la terza sui cavalli che mangiano orzo nei giorni proposti.

(IX.3.1 ; G: IX.127) Cinque cavalli mangiano 6 sestari di orzo in 9 giorni; si chiede in quanti giorni, nel medesimo modo, dieci cavalli mangeranno 16 sestari: poni sulla linea superiore [NoT] 5 per i cavalli, e 6 per l'orzo, e 9 per i giorni, scrivendo naturalmente all'indietro [*da destra a sinistra*]; e sotto il 5 porrai 10 cavalli, e sotto il 6 poni 16 sestari; e moltiplica il 5 per 16; e per 9, farà 720; dividilo per 6, e per 10, farà 12 giorni: o altrimenti, poiché 5 cavalli mangiano 6 sestari in 9 giorni; dunque 10 cavalli mangeranno il doppio dei 6 sestari in altrettanti giorni, poiché 10 cavalli sono il doppio di 5 cavalli. E ancora, poiché 10 cavalli mangiano 12 sestari in 9 giorni; dunque essi mangeranno 16 sestari in 12 giorni che risulta dalla moltiplicazione di 16 per 9 divisa per 12.

Fig. 7 - Il problema dell'orzo e dei cavalli nella traduzione sul sito www.progettofibonacci.it

Per la soluzione di questo problema Fibonacci propone il seguente algoritmo visivo (dal sito www.progettofibonacci.it):

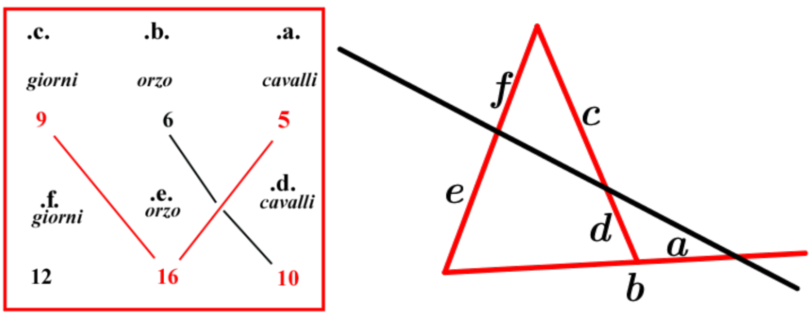


Fig. 8 - Una visione schematica del diagramma risolutivo e la figura FiguraChata da cui deriva: d/(c)=a/b×e/f
a×e×c=d×b×f

Fibonacci chiamatale diagramma*regulabaracti*, in quanto permette di trovare le quantità esatte di merci da scambiare, egli dà una spiegazione di tipo storico(*Liber Abbaci* IX, 1):

> *Questo modo infatti proviene dalla proporzione che ha la prima merce rispetto all'altra; che mostrerò essere composta da due proporzioni, cioè dalla proporzione che c'è tra la quantità di vendita della prima merce e il numero del suo prezzo, e dalla proporzione che ha il numero del prezzo dell'altra merce rispetto alla quantità di vendita della sua merce,[…] è infatti tale formulazione delle proporzioni è quella che si mostra nella Figura Chata, quella con la quale Tolomeo ha insegnato nell'Almagesto a trovare la dimostrazione e molte altre cose, e Ameto pose 18 combinazioni riguardo ad essa nel libro che scrisse sulle proporzioni*

Due le fonti citate da Fibonacci: Tolomeo (*Almagesto*) e Ameto(*Figura Chata*),nome latinizzato di Ahmed Ibn Yusuf, che fondano la spiegazione di questo diagramma risolutivo su un terreno geometrico, come sempre Fibonacci fa nel suo*Liber*e come aveva ereditato dal mondo arabo, nel quale si era formato e dove aveva appreso l'algebra, con le sue fondamenta di geometria euclidea. Diverse sono le ipotesi sulla effettiva lettura da parte di Fibonacci delle fonti che cita, includendo anche l'ipotesi che Fibonacci non conoscesse la lingua araba in una maniera così approfondita da permettere una lettura accurata di fonti arabe (Hughes, 2003). In realtà si potrebbe rispondere formulando l'ipotesi che egli abbia letto *l'Epistola de proportione et proportionalitate* tradotta da Gherardo da Cremona in latino. Esistono diversi manoscritti di questa opera ed una trascrizione latina nonché una traduzione in inglese (Schrader, 1961) che evidenziano una pressoché totale coincidenza tra la trattazione di Fibonacci e *l'Epistola*, per quanto riguarda la 18 combinazioni di proporzioni che si possono ottenere con il triangolo tagliato da trasversale.Non è chiaro se l'influenza su Leonardo Fibonacci fosse da parte di Menelao o di Tolomeo. Sebbene esistesse una versione araba delle *Sferiche* di Menelao da cui fu fatta una traduzione latina nella prima metà del IX secolo, testo latino che avrebbe potuto essere a disposizione di Leonardo, è ovvio dalle sue stesse parole che anche Leonardo associò "le diciotto combinazioni di Ameto" con Tolomeo anziché con Menelao. Fondamentalmente *la figura Figura Chata* o teorema di Menelao piano si riassume in questo passo del *De Practica Geoemetriae* di Fibonacci (Hughes, 2008):

> *Se in un triangolo .abg. tracciamo delle rette .be. e .gd. che escono dagli angoli .b. .g. e se queste si incontrano nel punto .z. allora, se è noto il rapporto tra .ge. e .ae. e tra .bd. e .ad. allora è noto anche il rapporto tra .bz. e .ze. e tra .gz. e .zd*

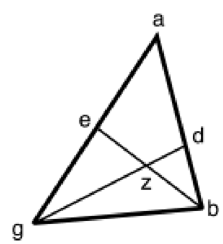


Fig. 9 - La Figura Chata in PracticaGeometriae (Hughes, B., 2008)

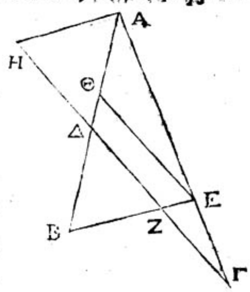
Un punto di vista molto utile in didattica èandare a studiare questo teorema come caso limite del teorema di Talete, ad esempio attraverso l'utilizzo di una costruzione dinamica con Geogebra. Il legame tra la *Figura Chata* e il teorema di Menelao piano è più chiaro se si analizza quest'ultimo, che corrisponde al lemma I della proposizione VII, riportato nella prossima illustrazione tratta da una pagina della traduzione dall'arabo al latino del trattato di Menelao, quella di Halley del 1758, che affianca le altre duetraduzioni dall'arabo, quella di Gherardo da Cremona e di Maurolico.

Sphæricorum Lib. III. 83

Lemma I.

Si ad duas rectas A B, A Γ *concurrentes in* A *ducantur duæ aliæ* Γ Δ, B E *ſeſe interſecantes in puncto* Z: *dico rectam* A E *eſſe ad* E Γ *in ratione compoſita ex ratione* Δ Z *ad* Z Γ *& ratione* B A *ad* B Δ.

Per A *enim ipſi* B E *parallela ducatur* A H, *occurrens ipſi* Δ Γ *productæ in* H. *Jam quoniam* A H *parallela eſt ipſi* E Z, *erit ut* A E *ad* E Γ *ita* H Z *ad* Z Γ. *Sumptâ autem mediâ recta* Z Δ, *ratio* H Z *ad* Z Γ *componetur ex ratione quam habet* H Z *ad* Z Δ, *& ex ea quam habet* Z Δ *ad* Z Γ. *Sed ob parallelas* A H, B Z, *erit &* Z H *ad* Z Δ *ſicut* B A *ad* B Δ: *ratio igitur* H Z *ad* Z Γ, *hoc eſt* A E *ad* E Γ, *componitur ex ratione quam habet* B A *ad* B Δ *& ex ea quam habet* Δ Z *ad* Z Γ.



Iiſdem poſitis; dico quoque Γ A *eſſe ad* A E *in ratione compoſita ex ratione quam habet* Γ Δ *ad* Δ Z *& ex ea quam habet* Z B *ad* B E.

Ipſi Γ Δ *parallela ducatur* E Θ, *& ob eaſdem parallelas, erit ut* Γ A *ad* A E *ita* Γ Δ *ad* E Θ; *ſumatur* Δ Z *media, & ratio* Γ Δ *ad* E Θ *componetur ex ea quam habet* Γ Δ *ad* Δ Z *& ex ea quam habet* Δ Z *ad* E Θ. *Ob parallelas vero* Δ Z, Θ E, *erit* Δ Z *ad* E Θ *ſicut* Z B *ad* B E: *ratio igitur* Γ Δ *ad* E Θ, *hoc eſt* Γ A *ad* A E, *compoſita eſt ex ratione* Γ Δ *ad* Δ Z *& ratione* Z B *ad* B E. Q. E. D.

Fig. 10-Il teorema di Menelao nella traduzione di Halley

È molto importante notare che nel testo si parla di rapporto composto, ma in nessun punto di esso si rintraccia la notazione di prodotto tra rapporti associato nelle moderne notazioni al rapporto composto. D'altra parte non avrebbe potuto che essere così, visto che nella matematica greca non esisteva minimamente un'aritmetica del logos, paragonabile a quella dei numeri razionali, a cui spesso in una rappresentazione simbolica moderna i rapporti stessi sono assimilati. Il teorema di Menelao piano è in realtà un lemma che serve a dimostrare un teorema analogo per i triangoli sferici. La geometria della sfera non prevede parallelismo ed in questo ambiente il teoremadi Menelao serve per sviluppare una teoria quantitativa del rapporto tra i lati dei triangoli sferici: in questo ambito vi sono concetti invarianti per proiezione, come il rapporto armonico, comuni con la geometria proiettiva. Queste grandezze sono utili per l'astronomia, motivo per il quale sono riprese nell'Almagesto di Tolomeo, da cui è ripresa l'immagine che illustra l'analogo del teorema di Menelao:

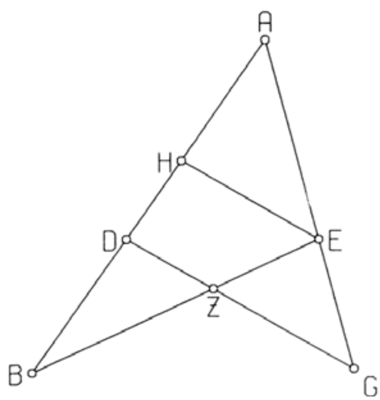


Fig. 11 - Teorema di Menelao nell'Almagesto (Toomer, 1984)

La dimostrazione del lemma I,13 di cui la figura è la rappresentazione, fa utilizzo della parallela ausiliaria EH e porta al risultato: GA:AE=(GD:DZ).(ZB:BE).

Letteralmente ciò èespresso nel seguente lemma che permetteva a Tolomeo di calcolare l'altezza del Sole:

Il rapporto di GA a AE è combinato da (συνήπται εκ, συγκειται εκ) il rapporto di GD a DZ e il rapporto di ZB a BE.

Rispetto a quest'ultimo la figura *Figura Chata* di Fibonacci è chiusa in un triangolo, un'ottima struttura gestaltica per uno scopo didattico (Catastini, 2005), come era quello di Fibonacci.

4 - Il teorema di Desargues

Nel *Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres d'un cone avec un plan,* di Desargues del 1639, il teorema di Menelao cambia fisionomia (Catastini, 2004):

Quand en une droite H, D, G, comme tronc, a trois points H,D,G, comme noeus, passent trois droites comme rameaux déployer Hkh, Dqh, Gqk, le quelconque brin Dh, du quelconque de ces rameaux Dqh contenu entre son noeu D, & le quelconque des deux autres rameaux Hkh, est a son accuplé le brin Dq contenu entre le mesme noeu D, & l'autre troisième des mesmes rameaux Gqk en raison mesme que la composée des raisons d'entre les deux brins de chacun des autres deux rameaux convenablement ordonnez, à savoir de la raison du brin comme Hh, au brin comme Hk, & de la raison du brin comme Gk, au brin comme Gq

[Quando su una retta HDG, pensata come tronco, per tre punti H, D, G, pensati come nodi, passano tre rette come rami dispiegati Hkh, Dqh, Gqk, qualunque getto Dh di qualunque di questi rami Dqh che esce dallo stesso nodo D e arriva al ramo Hkh, sta al suo getto accoppiato Dq che esce dallo stesso nodo D arriva al terzo ramo Gqk, nello stesso rapporto del rapporto composto tra i getti su ciascuno degli altri due rami convenientemente ordinati (libera traduzione, Catastini 2004)]

L'accento di questo teorema è sul tronco. I rami possono ruotare e andare a disporsi in posizioni diverse,anche parallele. Ciò che accade, infatti, quando k tende all'infinito è che il rapporto tra Gk e Hk tende a 1 e la regola si riduce alla uguaglianza

Dh/Dq=Hh/Gq

che esprime la proporzionalità dei lati corrispondenti in due triangoli HhD e GqD che diventano simili quando il ramo per H è parallelo a quello per G. Il teorema sulla proporzionalità dei lati nei triangoli simili diventa una degenerazione del teorema di Menelao quando parte della figura va all'infinito.

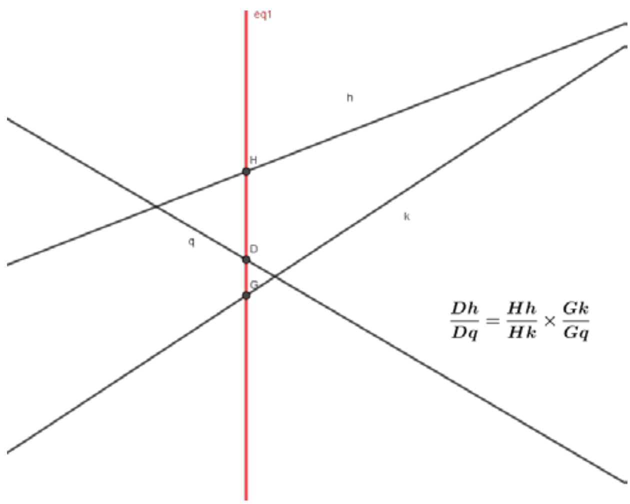


Fig. 12 -Teorema di Desargues (Catastini, 2004)

Un modo per portare questi risultati in classe con gli studenti di liceo è quello di matematizzare la prospettiva che possono aver appreso nel disegno e far vedere come le proiezioni dei lati delle figure e delle loro ombre si intersechino in punti che giacciono su una stessa linea, in accordo con il teorema di Desargues (Casati, 2000).

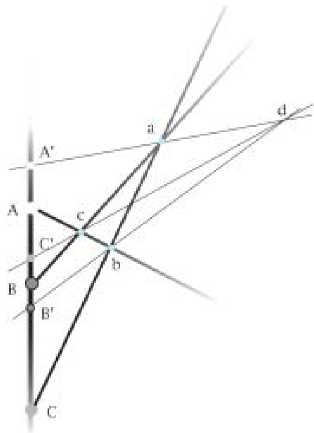


Fig. 13 - Involuzione: proiettando sul tronco da un punto d scelto ad arbitrio i buta ,b, c nei punti A′, B′, C′ ed accoppiandoli con i nodi ABC otteniamo le coppie AA′, BB′, CC′. La relazione Ab/Ac=Ba/Bc×Cb/Ca degenera nella AB'/AC'=BA'/BC'×CB'/CA'

5 – Conclusioni

Nei paragrafi precedenti si sono prese in esame diverse modalità con le quali una relazione matematica è sottesa a teoremi risalenti ad epoche storiche differenti, partendo da Menelao, passando per la *Figura Chata* degli Arabi, poi per Fibonacci, arrivando fino a Desargues e poi a Cremona. Questo percorso storico, oltre a fornire un esempio di come le idee cambiano forma nel cammino evolutivo della matematica, può essere spunto di diverse attività didattiche che esulano dal campo della geometria e la portano ad essere metodologia risolutiva in ambiti non geometrici.

Bibliografia

BONCOMPAGNI, B. (1852). Della vita e delle opere di Leonardo Pisano, matematico del secolo decimoterzo, Roma: Tipografia delle belle arti.

BRIGAGLIA, A. (2006). Luigi Cremona e la nuova scuola della nuova Italia: dagli obiettivi ai contenuti e alla loro valutazione,Valutare in matematica. XXV Congresso Nazionale UMI-CIIM, Siena, 27-29 ottobre 2005 (Vol. 11, pp. 31-40). Unione Matematica Italiana.

CASATI, R. (2000). La scoperta dell'ombra: da Platone a Galileo: la storia di un enigma che ha affascinato le grandi menti dell'umanità, Bari: Laterza

CATASTINI, L. (2004). Il giardino di Desargues. *Bollettino dell' Unione Matematica Italiana* , *7* (2), 321-345.

CATASTINI, L., Ghione, F. (2023). La matematica che trasformò il mondo: il Liber abbaci di Leonardo Pisano detto Fibonacci, Roma: Carocci editore.

CATASTINI, L., Ghione, F. (2005). Nella mente di Desargues tra involuzioni e geometria dinamica,*Bollettino dell' Unione Matematica Italiana*, *8*(1), 123-147.

CILIBERTO, C., (2023) Argomenti di matematica elementare da un punto di vista superiore. Spunti per l'organizzazione di lavoro interdisciplinare e laboratoriale nelle classi di scuola secondaria di II grado,Torino:Utet.

CASTELNUOVO, E., (1967).È possibile un'educazione al ``saper vedere'' in matematica?*Bollettino dell' Unione Matematica Italiana 22.4 : 539-549.*

CREMONA, L. (1873). *Elementi di geometria projettiva (Vol. 1)*, Torino: GB Paravia e comp.

FURINGHETTI, F., & SINCLAIR, N. (2014). History of mathematics and mathematics education. *Mathematics & Mathematics Education: Searching for Common Ground,* 89-110

GIACARDI, L. M. (2006). Da Casati a Gentile. Momenti di storia dell'insegnamento secondario della matematica in Italia,Lugano: Lumières Internationales.

HALLEY, E., & COSTARD, G. (1758). *Sphæricorum libri III*, Oxford: Sumptibusacademicis.

HUGHES, B. (Ed.). (2008). *Fibonacci's De practicageometriae,* New York, NY: Springer New York.

PTOLEMY, A. (1984), *Almagest, edited by G. J. Toomer*, London: Bristol Classical Press.

SCHRADER, M.,W.,R., (1961). The "epistola de proportione et proportionalitate" of Ametus filius Iosephi.*The University of Wisconsin-Madison.*

SCOCCHERA, A., (1993).Maria Montessori: una biografia intellettuale, in Opera Nazionale Montessori (a cura di), Maria Montessori: il pensiero, il metodo, 2 volumi, Firenze: Petruccione, Lisciani & Giunti Editori.

SCOPPOLA, B., (2022).*Più bravi di quel che pensiamo,* Roma: Gedi.

NOTE

---

[i] JA:JO=I'O:I'A'   JB:JO=I'O:I'B'

che discendono dalla similitudine di OAJ e B'OI', da cui

JA*I'A'=JB*I'B'=JO*I'O

Ciò equivale a dire il rettangolo JA.I'A'è costante, qualunque sia la coppia dei punti corrispondenti A, A'.

I'A'=k/JA' I'B'=k/JB'

I'B'-I'A'= (k(JA-JB))/(JA.JB)

I'B'-I'A'=A'B' JA-JB=-AB

A'B'= - k/(JA.JB) AB

Se si considerano quattro punti ABCD e le quattro proiezioni A'B'C'D' allora

A'C'/B'C':A'D'/B'D'=AC/BC:AD/BD


Periodico di Matematica
PER
L'INSEGNAMENTO SECONDARIO
Anno XXXIX - Serie IV – volume VI (3)
Supplemento settembre 2024
A cura di
Ferdinando CASOLARO – Franco EUGENI – Luca NICOTRA
Atti IV Convegno Matematica, Natura e Scienze
dell'Alta Costiera Amalfitana - Agerola
5-8 settembre 2024
curati da
Aniello Buonocore, Ferdinando Casolaro,
Giovanna Della Vecchia, Giovanni Vincenzi