

Periodico di Matematica

**PER
L'INSEGNAMENTO SECONDARIO**

**Anno XXXIX - Serie IV – volume VI (3)
Supplemento settembre 2024**

A cura di
Ferdinando CASOLARO – Franco EUGENI – Luca NICOTRA

**Atti IV Convegno Matematica, Natura e Scienze
dell'Alta Costiera Amalfitana - Agerola
5-8 settembre 2024**

curati da
**Aniello Buonocore, Ferdinando Casolaro,
Giovanna Della Vecchia, Giovanni Vincenzi**



MATEMATICA - FISICA - INFORMATICA

PERIODICO DI MATEMATICA

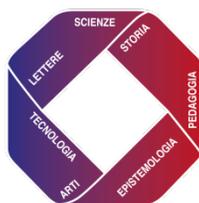
PER
L'INSEGNAMENTO SECONDARIO SUPERIORE

Fondato da Davide Besso nel 1886,
continuato da Aurelio Lugli e Giulio Lazzeri
e attualmente a cura di

Ferdinando Casolaro - Franco Eugeni - Luca Nicotra

Anno XXXIX - Serie IV - Volume VI (3)
Supplemento Settembre 2024

Atti IV Convegno Matematica, Natura e Scienze
dell'Alta Costiera Amalfitana
Agerola 5-8 settembre 2024



ACCADEMIA DI FILOSOFIA DELLE SCIENZE UMANE

Comitato Direttivo

Franco Eugeni
Ferdinando Casolaro
Giovanna Della Vecchia
Antonio Lungo
Antonio Maturo
Luca Nicotra
Renata Santarossa

Comitato Scientifico

Gian Italo Bischi (Urbino)
Giordano Bruno (Roma)
Mauro Cerasoli (L'Aquila)
Giuseppe Conti (Firenze)
Franco Francia (La Spezia)
Giangiacomo Gerla (Napoli)
Stefano Innamorati (L'Aquila)
Paolo Manca (Pisa)
Raffaele Mascella (Teramo)
Fabrizio Maturo (Caserta)
Mario Mandrone (Napoli)
Pietro Nastasi (Palermo)
Canio Noce (Salerno)
Nicla Palladino (Perugia)
Salvatore Rao (Napoli)
Ezio Sciarra (Chieti)
Salvatore Sessa (Napoli)
Massimo Squillante (Benevento)
Luca Tallini (Teramo)
Ugo Vaccaro (Salerno)
Giovanni Vincenzi (Salerno)

Copertina e progetto grafico

Luca Nicotra

Direzione e redazione

Direttore responsabile:

Luca Nicotra

Direttori di redazione:

Franco Eugeni
Via Lucania 1 l.
64026 Roseto degli Abruzzi (TE)
cell. 338 9644305
eugenif3@gmail.com.

Ferdinando Casolaro
Via Camaldolilli n. 1B
80128 Napoli- cell. 347 1960693
ferdinando.casolaro@unina.it

Luca Nicotra
Via Michele Lessona 5
00134 Roma- cell. 340 5065616
luca.nicotra1949@gmail.com.

Segreteria di redazione:

Giovanna Della Vecchia (Napoli)
giovanna.dellavecchia@gmail.com

Rivista di proprietà di:

Accademia di Filosofia delle
Scienze Umane - Zona Industriale
Colleranese - 65021 Giulianova
(TE) C.F. 91053660675
Copyright © 2023 Edizioni AFSU -
UniversItalia-Teramo, Roma -
ISSN Online: 2612-6745

® Reg. Versione online n.695/2019
del 19 luglio 2019 e Versione
cartacea n.695/2021 del 3 giugno
2021 Tribunale di Teramo.

Tutti i diritti riservati.

ISBN 978-88-3293-776-3

Gli scritti apparsi sulla Rivista
possono essere pubblicati altrove
purché se ne dichiarino la fonte.

Il Periodico di Matematica, che rinasce dopo 100 anni, si propone, oggi, come allora, di orientare i propri obiettivi di ricerca alla didattica dell'astronomia, della fisica, della matematica, aggiungendo a queste discipline il moderno campo dell'informatica. La metodologia proposta sarà quella storico-fondazionale-divulgativa, con forte interesse nelle direzioni di studi elementari da un punto di vista superiore. I saggi pubblicati, vagliati dai Referee del Comitato scientifico, saranno valutati tenendo conto dei seguenti criteri:

- originalità nella stesura del lavoro e dell'apparato critico;
- significatività didattica del tema proposto;
- correttezza scientifica e rigore metodologico;
- proprietà di linguaggio e fluidità del testo;
- approfondito apparato di riferimenti bibliografici.

I *referee* restano anonimi per un anno. Le comunicazioni, i report, i pareri e tutti i dati dei *referee* sono trattati e gestiti dal Comitato Direttivo, preposto alla redazione.

Per essere inseriti nella mailing list di coloro che, via mail, riceveranno il *Periodico di Matematica*, occorre scrivere, inviando un mini-curriculum di poche righe, alla prof.ssa Giovanna Della Vecchia (Napoli) giovanna.dellavecchia@gmail.com. Tutti i lavori vanno inviati al prof. Franco Eugeni, (eugenif3@gmail.com) secondo il template word e le norme editoriali della Rivista scaricabili dal sito dell'A.F.S.U. (www.afsu.it/istruzioni-per-gli-autori/).

I profili biografici dei membri del Comitato Direttivo sono disponibili nel sito www.afsu.it.

«Periodico di Matematica» è una rivista trimestrale distribuita con Licenza Creative Commons Attribuzione - Non commerciale - Non opere derivate 4.0 Internazionale:



PEZZULLI

I pezzulli, seguendo una antica idea di Roberto Giannarelli attuata sin dai primi numeri di «Archimede» (1949) e di «La scienza per i Giovani» (1952), poi ripresa da Bruno de Finetti per il «Periodico di Matematiche», sono piccole pillole di saperi e riflessioni, atti a riempire spazi vuoti nel testo di una rivista (ad esempio la pagina pari, o metà della stessa, di fine lavoro se vuota).

AVVERTENZE PER I COLLABORATORI

Gli articoli devono essere redatti nella forma *camera ready*, con MS Word utilizzando il *template* scaricabile dal sito dell'AFSU:

https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2020/03/Template_Periodico-di-Matematica-18-02-2020.doc

rispettando le norme editoriali pubblicate nello stesso sito:

<https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2020/03/Principali-Norme-Editoriali-per-la-scrittura-degli-articoli-18-02-2020.pdf>

Le figure utilizzate devono essere in alta risoluzione (300 dpi).

SOSTENITORI AFSU

Ferdinando Casolaro (Napoli), Silvana D'Andrea (Roseto), Franco Francia (Pisa), Gianni Di Paolo (Teramo), Diana Le Quesne (Roseto), Franco Eugeni (Roseto), Antonio Maturo (Pescara), Antonio Napoletano (Ancona), Luca Nicotra (Roma), Marisa Quartiglia (Roseto), Renata Santarossa (Napoli), Ezio Sciarra (Pescara), Salvatore Sessa (Napoli).

AMICI AFSU

Ivano Casolaro (Napoli) Gianluca Eugeni (L'Aquila), Andrea Manente (Teramo), Enrico Massetti (Ascoli Piceno), Giovanni Grelli (S.Benedetto del Tronto), Francesco Pezzoli (Ascoli Piceno), Federico Verrigni (Pineto), Alessandro Vicerè (Roseto), Orfeo Zaffi (Penne - PE).

Finito di stampare nel mese di settembre 2024 presso UniversItalia

Via di Passolombardo 421, 00133 Roma Tel. 06/2026342 -

e_mail: info@universitaliasrl.it-www.unipass.it.

INDICE

Redazione Periodico di Matematica	1-6
Editoriale	7-10
Tullio Aebischer	11-26
Tullio Aebischer - Marina Furlani	27-46
Giovanna Angelucci - Chiara Brocchetto	47-64
Ferdinando Casolaro	65-82
Anna Amirante	83-98
Francesca Coppa - Piera Filippi	99-122
Franco Eugeni	123-140
Roberto Copetti	141-162
Luca Dragone - Antonella Palma	163-184
Silvia Cerasaro	185-200
N. Palladino - R. Di Gennaro - D.Tondini	201-218
Ruben Sabbadini	219-238
Matteo Torre	239-254
Matteo Torre - Matteo Leone	255-276
Antonella Palma - Luca Dragone	277-298
Laura Tomassi - Daniela Tossini	299-323

Editoriale

Aniello Buonocore* Ferdinando Casolaro** Giovanna
Della Vecchia*** Giovanni Vincenzi****

*Presidente Mathesis Napoli "A. Morelli"; anibuono58@gmail.com

** Presidente ANFSU "R. Caccioppoli"; presidente.anfsu@gmail.com

***DIARC "Federico II"; giovanna.dellavecchia@gmail.com

****Dip. Matematica Università di Salerno; vincenzi@unisa.it



Il presente volume raccoglie i lavori presentati al IV Convegno "Matematica Natura e Scienze - Premio Alta Costiera Amalfitana" (5-6-7-8 settembre 2024, Campus Principe di Napoli, Agerola).

Il Convegno è stato organizzato - in collaborazione - dalle associazioni Mathesis Napoli "A. Morelli", Math&Phys di Salerno, Mathemare di Castellammare di Stabia e ANFSU (Associazione Napoletana di Filosofia e Scienze Umane) "R. Caccioppoli".

Hanno contribuito all'organizzazione l'Accademia AFSU (Accademia di Filosofia e Scienze Umane in Teramo) e l'Accademia APAV (Accademia Piceno Aprutina) che perseguono gli obiettivi comuni di promozione del dialogo interculturale e di scambio di esperienze, valori e conoscenze.

L'evento è giunto alla sua quarta edizione, dando seguito ai lavori precedentemente realizzati negli anni:

2021: *Quali conoscenze di Geometria nella Scuola di oggi? 8-9-10 settembre,*

2022: *La matematica nell'insegnamento della fisica e la fisica nell'insegnamento della matematica, 9-10-11 settembre,*

2023: *L'insegnamento e il fascino della Matematica nella lettura della natura, 14-17 settembre.*

Posta a 700 metri sul livello del mare tra il golfo di Napoli e quello di Salerno, Agerola costituisce un ponte ideale tra i due capoluoghi, favorendo la presenza di docenti e dirigenti delle Scuole e delle Università delle due prestigiose città. È da sottolineare altresì la forte attrazione turistica che la cittadina ha da sempre esercitato facendo registrare ogni anno migliaia di visitatori da ogni parte d'Italia.

La scelta della cittadina di Agerola è legata anche alla grande disponibilità che l'amministrazione, oggi presieduta dal sindaco Tommaso Naclerio, ha da sempre mostrato alla realizzazione delle nostre attività culturali.

Ogni anno Agerola ospita il "Festival dell'Alta Costiera Amalfitana" uno delle più importanti manifestazioni culturali della Campania promosse nel periodo estivo: il nostro IV convegno *Matematica Natura e Scienze* ne rappresenta il naturale proseguimento prima della fine dell'estate.

Questa edizione del convegno è dedicata ai Docenti, ai Dirigenti Scolastici della Scuola Secondaria di Primo e Secondo Grado e a tutti gli appassionati delle Scienze Matematiche Fisiche e Naturali.

L'evento intende non solo evidenziare gli aspetti contenutistici e innovativi della Matematica Pura e delle sue applicazioni alle Scienze ma anche far condividere alcune esperienze didattiche realizzate da docenti esperti, in relazione agli aspetti interdisciplinari degli Insegnamenti della Matematica, della Fisica, della Chimica e della Biologia.

Molto numerosi sono i contributi dei docenti che hanno inviato i risultati dei propri lavori da ogni parte d'Italia.

Ai docenti interessati è stata data altresì la possibilità di presentare un poster, di contenuto coerente con il tema del convegno, da affiggere alle pareti della sala di svolgimento dei lavori e sottoporre all'attenzione dei presenti.

Nel convegno si è voluto favorire lo scambio di opinioni e di esperienze per cui, oltre alla programmazione dei consueti spazi dedicati alle riflessioni e alle domande di chiarimento da porre alla fine di ogni comunicazione, è stato organizzato uno speciale "salotto culturale" dal titolo "*Progetti a 360 gradi*" destinato ad un confronto tra tutti i partecipanti su temi particolarmente significativi e sulle problematiche inerenti alla didattica della Matematica e delle Scienze.

Il salotto, nato da un'idea della prof.ssa Rosa Buonanno, è stata l'occasione per confrontarsi e dibattere, in tre momenti diversi, sulle seguenti tematiche:

1) Progetti scientifici a confronto

Sessione dedicata alla presentazione di progetti e problemi scientifici originali e stimolanti dal punto di vista didattico.

2) Progetti delle associazioni

Spazio dedicato alla presentazione delle varie associazioni presenti al convegno e del loro piano annuale delle attività per verificarne l'efficacia e raccogliere eventuali suggerimenti.

3) Presentazione dei Poster

Sessione creata per permettere agli autori dei poster di illustrare ai congressisti i lavori esposti per farne comprendere con chiarezza contenuti e obiettivi oltre che le scelte grafiche e ricavarne ulteriori spunti di indagini e riflessione.

Premio "Alta Costiera Amalfitana"

Riconoscendo l'efficacia della tecnica di comunicazione visiva costituita dalla redazione di un Poster scientifico, il comitato tecnico-organizzativo ha istituito il Premio "*Alta Costiera Amalfitana*" da consegnare all'autore del poster di maggior originalità e incisività, dopo consultazione di tutti i partecipanti al convegno.

Una Vignette di Klein sulla Retta dei Numeri: teoria, storia e didattica

Tullio Aebischer*

*Ph.D. School, Dip. di Matematica, Università degli Studi di Roma Tor Vergata; aebischer@axp.mat.uniroma2.it



Sunto: *La Retta dei Numeri è l'artefatto dove si incontrano geometria e teoria dei numeri, due delle più antiche branche della matematica. Ciò non viene approfondito adeguatamente nei testi scolastici e si utilizza la Retta dei Numeri solo per visualizzare le operazioni aritmetiche senza comprenderne il profondo significato. Per questo motivo questo artefatto rappresenta un ottimo spunto didattico per tre aspetti: la storia della definizione dei vari insiemi numerici, la teoria che caratterizza i singoli numeri e la loro rappresentazione, il laboratorio per costruire con riga e compasso (GeoGebra®) i punti, se possibile, che rappresentano i numeri. Pertanto, si suggerisce la redazione di una Vignette di Klein per offrire ai docenti tutte le informazioni storico-matematiche-didattiche necessarie.*

Parole Chiave: *Retta, Numeri, Klein, Storia*

Abstract: *The Number Line is the artifact where geometry and number theory, two of the oldest branches of mathematics, meet. This is not explored adequately in school textbooks and the Number Line is used only to visualize arithmetic operations without understanding their deep meaning. For this reason this artefact represent an excellent teaching starting point for three aspects: the history of the definition of the various numerical sets, the theory that characterizes the individual numbers and their representation, the laboratory for constructing the points with*

ruler and compass (GeoGebra®), if possible, which represent numbers. Therefore, we suggest the preparation of a Klein Vignette to offer teachers all the necessary historical-mathematical-educational background.

Keywords: *Straight line, Numbers, Klein, History*

1 -Le Vignette di Klein

Felix Klein (1849-1925) fu un matematico tedesco dell'Università di Göttingen che si interessò di geometria e con il cosiddetto *programma di Erlangen* (1872) unificò la geometria in quella proiettiva attraverso la teoria dei gruppi. Klein fu eletto primo presidente della costituenda Commissione Internazionale sull'Istruzione Matematica durante il Congresso Internazionale dei Matematici (IMC), fondato dallo stesso Klein e da G. Cantor (1845-1918), tenutosi a Roma nel 1908. Per quanto riguarda la didattica, negli anni immediatamente precedenti tenne dei corsi di preparazione all'insegnamento e il materiale utilizzato fu pubblicato ne *La matematica elementare da un punto di vista superiore* (3 voll.) nel cui primo volume introduce gli insiemi numerici (quasi ottanta pagine). Questo testo, poco conosciuto al di fuori della Germania, rappresenta una sfida intellettuale sia per i docenti che per i matematici poiché li obbliga a considerare e approfondire il rapporto tra la matematica come materia scolastica e la matematica come disciplina scientifica in continuo progresso grazie alla ricerca. Altra considerazione che esternò Klein fu che le tematiche universitarie avevano pochi collegamenti con quelle scolastiche e, di ritorno, i laureati che tornavano a scuola come docenti non ne

portavano le nozioni apprese. Da tale "non circolo virtuoso", e forse è da considerarlo uno dei motivi del non appeal della matematica, deriva la non trasmissione della vitalità e dei progressi contemporanei della stessa. Tutto ciò offre a più di un secolo di distanza un parallelo con l'obbligo per i docenti di un continuo aggiornamento (Legge 107/2015 art. 1 comma 124). In merito a ciò si deve evidenziare come l'attenzione all'aggiornamento su tematiche più contemporanee dello sviluppo della matematica si indirizzi maggiormente alla Secondaria di II Grado ma si ritiene non solo possibile ma necessario svolgerlo anche per i docenti della Secondaria di I Grado. Da considerare come il progetto delle Vignette sia neutrale rispetto ai programmi o indicazioni per la scuola dei vari stati essendo indirizzati ai singoli docenti. Con tale spirito la proposta di una Vignette di Klein sulla Retta dei Numeri può essere indirizzata anche agli alunni della terza classe della Secondaria di I Grado.

Con queste premesse si ha lo scopo di attuare nella Secondaria di I Grado quanto riportato nelle *Indicazioni Nazionali*:

Nella scuola secondaria di primo grado si realizza l'accesso alle discipline come punti di vista sulla realtà e come modalità di conoscenza, interpretazione e rappresentazione del mondo.

La valorizzazione delle discipline avviene pienamente quando si evitano due rischi: sul piano culturale, quello della frammentazione dei saperi; sul piano didattico, quello dell'impostazione trasmissiva. Le discipline non vanno presentate come territori da proteggere definendo confini rigidi, ma come chiavi interpretative disponibili ad ogni possibile utilizzazione. I problemi complessi richiedono, per essere esplorati, che i diversi punti di vista disciplinari

dialoghino e che si presti attenzione alle zone di confine e di cerniera fra discipline.[...]

Di estrema importanza è lo sviluppo di un'adeguata visione della matematica, non ridotta a un insieme di regole da memorizzare e applicare, ma riconosciuta e apprezzata come contesto per affrontare e porsi problemi significativi e per esplorare e percepire relazioni e strutture che si ritrovano e ricorrono in natura e nelle creazioni dell'uomo,

e nel paragrafo Obiettivi di apprendimento al termine della classe terza della scuola secondaria di primo grado si può leggere esplicitamente il seguente traguardo:

Rappresentare i numeri conosciuti sulla retta.

L'interdisciplinarietà tra scienza, storia, discipline umanistiche, arti e tecnologia come un nuovo umanesimo è lo studio non anacronistico della storia della matematica non basato solo sulle date ma il luogo socio-culturale nel quale sono nati e sviluppati i concetti e gli strumenti matematici che si utilizzano in un continuo movimento di accumulazione e progresso.

Per costruire una didattica della matematica come disciplina vitale, dal testo di Klein, fondamentale per il sistema d'istruzione tedesco e scritto per la formazione dei docenti delle superiori, nel 2008 l'IMU/ICMI (International Mathematical Union / International Commission on Mathematical Instruction) istituì il Progetto Kleinal quale seguirono delle conferenze per delinearne i contorni (la prima si svolse nel 2009 a Madeira (Portogallo)) per produrre risorse matematiche per gli insegnanti della scuola secondaria su argomenti di matematica contemporanea (XX e XXI secc.)

(<http://blog.kleinproject.org>). Lo scopo del progetto è di aiutare gli insegnanti a costruire collegamenti tra la propria didattica della matematica e l'evoluzione di questa dalla fine dell'Ottocento. Dal punto di vista didattico l'obiettivo è di incuriosire, informare e alimentare l'entusiasmo di insegnanti e studenti/studentesse verso la matematica e il suo insegnamento e apprendimento. Per tale scopo è stato istituito un gruppo di progettazione e sono stati formulati i piani per produrre delle Vignette ossia un breve testo (max 10 pagine) su un argomento di matematica contemporanea. Le Vignette di Klein sono disponibili in inglese e a oggi sono ventisette. Quasi la metà di queste è stata tradotta anche in italiano (<http://blog.kleinproject.org/?lang=it>).

Su tale linea di pensiero il Gruppo Licei Matematici dell'UMI (Unione Matematica Italiana) ha avviato nel 2021 il Progetto Klein Italia con l'obiettivo di colmare il divario tra la matematica oggetto delle Vignette e il loro utilizzo nelle classi attraverso un'attività di trasposizione didattica delle stesse in modo da adattare al contesto della scuola italiana, arricchendole di spunti, immagini, attività, applicazioni immediatamente fruibili dagli insegnanti e corredandole di opportune metodologie didattiche. A oggi si è operato sulle Vignette *Symmetry step by step* e *Matrices and Digital Images* riproponendole con i titoli *Le isometrie passo a passo* e *Matrici e Immagini digitali* (descrizione e materiale sono a disposizione al link <https://www.liceomatematico.it/progetto-klein-italia>).

La proposta di una Vignette sulla Retta dei Numeri parte dalla constatazione che le tematiche di quelle pubblicate non riguardano direttamente la teoria dei numeri (eccetto, forse, la Vignette *The Revenge of the Infinitesimals* di A. Nectoux che

considera l'analisi non-standard) pur avendo avuto questa, come già ricordato, uno sviluppo importante alla fine del XIX sec. prolungatosi nel XX sec. con ancora molte congetture da dimostrare: tra tutte quella di Riemann sulla retta critica a $\frac{1}{2}$ e i numeri primi o quella di Goldbach sempre sui numeri primi.

La proposta prende spunto anche dalla fase storico-matematica denominata "crisi dei fondamenti" o aritmetizzazione dell'analisi, così definita proprio da Klein in un suo discorso del 1895, che dall'inizio nell'Ottocento ha impegnato non solo matematici ma anche filosofi e logici a definire rigorosamente gli strumenti e gli oggetti matematici che da secoli si studiavano e si utilizzavano: i numeri, il limite, la funzione, la derivata, l'integrale, gli enti geometrici e i suoi assiomi.

Dal punto di vista didattico l'artefatto geometrico-aritmetico Retta dei Numeri è il luogo ideale dove approfondire le caratteristiche dei vari insiemi numerici e la loro rappresentazione senza le interferenze delle applicazioni. Ciò si ritiene sempre più necessario considerando l'esperienza professionale dell'Autore, corroborata dai risultati non esaltanti di alcuni item delle prove INVALSI della sezione Numeri, dalla constatazione di come gli studenti faticino a gestire i vari tipi di numeri non solo in ambito puramente matematico ma anche, a esempio, nelle scienze sperimentali (misura, approssimazione).

Lo studio storico-matematico dei numeri ebbe una svolta paradigmatica nell'Ottocento con la definizione nel 1872 dei numeri reali con la sezione di R. Dedekind (1831-1916) e le successioni fondamentali di Cauchy utilizzate da G. Cantor, e della loro costruibilità con riga e compasso a seguito della

teoria dei gruppi di E. Galois (1832). Tra le due costruzioni dei reali, quella dedekindiana si appoggia proprio sulla retta assiomatizzandone la continuità/completezza.

La stessa svolta si ebbe anche in geometria con la scoperta delle geometrie non-euclidee e con la rifondazione assiomatica di quella euclidea da parte di D. Hilbert (1862-1943). Tutto ciò partendo anche da una critica dell'utilissimo spunto didattico della Prop. I,1 degli *Elementi* per definire l'essenza dell'ente primitivo punto.

2 -La Retta dei Numeri

La Retta dei Numeri è un artefatto didattico praticamente immutato dal XVII sec. da quando fu pubblicato per la prima volta dal matematico inglese J. Wallis (1616-1703) in *Treatise of algebra* (1685) dove la parte negativa fu indicata con il tratto puntinato. Per questo motivo la si può definire un artefatto fossile.

La Retta dei Numeri la si deve considerare fondamentalmente astratta poiché la sua definizione richiede i punti geometrici e idealmente ha un'estensione infinita cosa che nella trasposizione materiale non può aversi. Pertanto, l'artefatto che materialmente viene a trovarsi tra le mani degli studenti è una materializzazione di due degli enti fondamentali della geometria.

Il disegno della Retta dei Numeri per punti si esegue con il metodo euclideo ossia quello descritto negli *Elementi* di Euclide (III sec. a.C.) utilizzando solo riga e compasso. La Retta dei Numeri ha la caratteristica dello spazio unidimensionale per soddisfare l'ordinamento totale dei vari

insiemi numerici. Per la costruzione euclidea gli *Elementi* mettono a disposizione oltre ai due suddetti strumenti, i seguenti enti geometrici fondamentali:

- a) il punto (Deff. I,1; I,3; Post. I,1);
- b) la 'linea retta', il segmento nel linguaggio moderno (Deff. I,2; I,4; I,6; Post. I,2);
- c) la circonferenza (Def. I,15; Post. I,3);
- d) la 'superficie', il piano nel linguaggio moderno (Def. I,7).

Al contrario di quanto si legge nei testi scolastici dove la Retta dei Numeri è data già disegnata, la sua costruzione punto per punto (destrutturazione / ristrutturazione) permette di evidenziare le caratteristiche dei vari insiemi numerici. Fondamentale dal punto di vista didattico-laboratoriale è l'uso di un software di geometria dinamica come GeoGebra® che permette un disegno più "preciso" rispetto a quello manuale e di elencare automaticamente i vari passi del disegno per una loro disamina critica.

3 - Costruzione di \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} ed \mathbb{R}

Dalla teoria dei numeri gli insiemi numerici si relazionano secondo la seguente catena insiemistica:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

ossia naturali, relativi, razionali, reali, l'uno sottoinsieme proprio del successivo. Per l'argomento trattato nel presente lavoro non si considerano i complessi che necessitano l'allargamento a un piano.

Considerando le regole di costruibilità, gli strumenti utilizzabili e la previa esposizione teorica delle caratteristiche dei singoli insiemi numerici come la definizione dei numeri reali, la consegna agli studenti si può così esplicitare:

Disegnare, in un piano, la Retta dei Numeri come progressiva aggregazione di punti seguendo la catena insiemistica degli insiemi numerici, dai naturali ai reali. Il disegno deve eseguirsi alla maniera euclidea ossia con i soli riga (non graduata) e compasso (collassabile), e senza tracciare la retta o parte di essa indicante la Retta dei Numeri.

Per costruire \mathbb{N} è necessario scegliere un punto del piano per identificarlo con lo 0. Nell'individuare il punto 0 ci si deve chiedere se scegliendone uno a caso si abbia la certezza di trovarlo. Ciò richiede che il piano sia formato da punti che siano continui (\mathbb{R}^2) e questa proprietà non è esplicitata negli *Elementi* anche se la si può dedurre dal Post. I,3. Comunque, tale sicurezza si ha praticamente con l'introduzione del piano cartesiano (punti = coppia ordinata di numeri reali) e teoricamente dall'analisi assiomatica svolta da Hilbert (1862-1943) a fine Ottocento (1899). Il posizionamento dell'1 è importante poiché identifica l'unità di cui si parla in Def. VII,1 e per la Def. VII,3 questa unità, sia aritmetica che geometrica, sarà la misura di tutta la nostra costruzione (Figura 1). La scelta del punto corrispondente a 1 è completamente arbitraria tra quelle che distano da 0 della distanza presa come unità. Volutamente non si è disegnato il segmento $\overline{01}$ poiché si vuole mettere in evidenza il 'vuoto numerico' esistente poiché in \mathbb{N} tra due naturali consecutivi

non vi è alcun altro naturale. Come per la costruzione per induzione del numero naturale successivo a n , si deve trovare una costruzione geometrica per costruire il punto corrispondente al 2 che disti $\overline{01}$ da 1 e sia lungo la retta che si sta costruendo. Non volendo applicare il Post. I,2 per la consegna data, l'assicurazione che la costruzione dei successivi naturali sia possibile senza l'uso della riga si appoggia al teorema Mascheroni-Mohr (1672/1797). Quindi, per costruire il vertice opposto a 0 di un poligono inscritto alla circonferenza di centro 1 si devono scegliere quelli con un numero di lati pari e con un vertice in 0. Tra questi poligoni è preferibile scegliere l'esagono poiché il suo lato è congruente con il raggio della circonferenza che lo circoscrive.

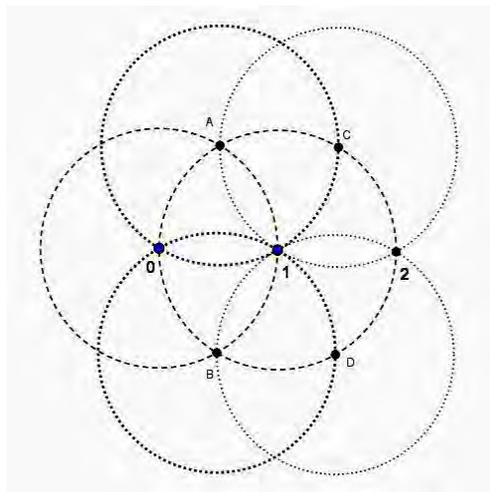


Fig. 1 - Costruzione dei numeri naturali.

Gli interi relativi \mathbb{Z} si costruiscono con la stessa procedura descritta per \mathbb{N} ma lungo anche il verso negativo (a sinistra per convenzione occidentale).

Nel caso di \mathbb{Q} l'insieme ha la caratteristica che tra due razionali vi è sempre un razionale. Nella suddivisione dell'intervallo tra due naturali successivi, il numero di punti razionali da costruire con denominatore m è pari a $m-1$, a meno di eventuali sovrapposizioni con punti già individuati come razionali equivalenti. Per il disegno si utilizza il teorema di Talete (Prop. VI,2) con due rette perpendicolari a quella ideale della Retta dei Numeri (Figura 2).

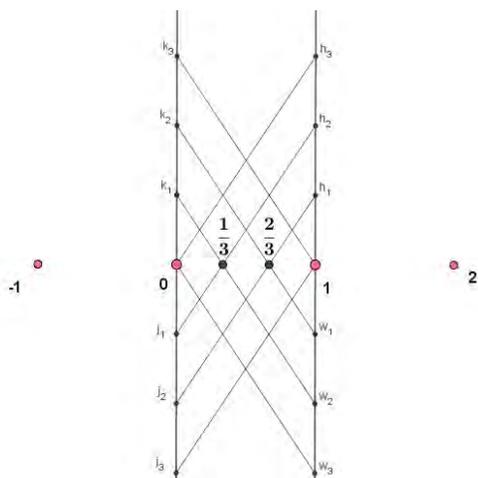


Fig. 2 - Costruzione dei numeri razionali.

Le caratteristiche dei naturali, interi e razionali sono tali che non possono descrivere tutti i punti della retta. Infatti, anche i razionali sono tali che tra due qualsiasi di essi vi sono numeri reali che non possono essere espressi come razionali: per esempio, non esiste un razionale il cui quadrato eguagli un numero naturale non quadratico ossia $\nexists q \in \mathbb{Q} : q^2 = 2$. Per tale motivo sorge la necessità di definire ulteriori numeri, gli irrazionali ($\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$), che possano coprire il continuum, ciò

che fu fatto come già ricordato, tra gli altri, da Dedekind (1872).

Tra gli irrazionali risulta agevole costruire i radicali \sqrt{n} con $\in \mathbb{N}$ e non quadratico, applicando il teorema di Pitagora (Prop. I,47) ossia costruendo un triangolo rettangolo con un cateto congruente all'unità e l'altro congruente con il naturale immediatamente precedente: il numero cercato sarà quello dell'ipotenusa (Figura 3).

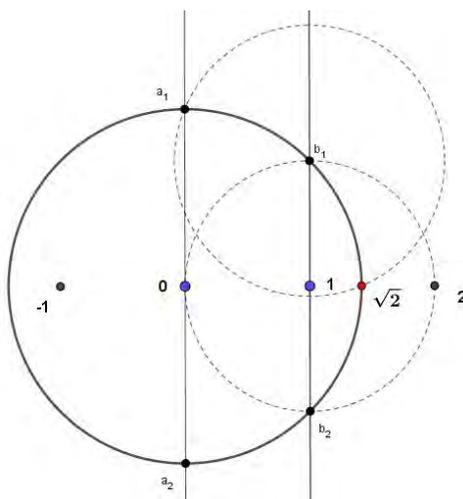


Fig. 3 - Costruzione dell'irrazionale $\sqrt{2}$.

A questo punto dell'attività abbiamo individuato i punti potenzialmente costruibili di una Retta dei Numeri dando un'idea migliore di quella che se ne deduce dai testi scolastici per la visibilità di punti non costruibili.

Per la sola rappresentazione ma non individuazione degli irrazionali non costruibili, è ora possibile tracciare, abbandonando la consegna, la retta passante per i naturali ritornando così ai testi scolastici ma rispetto a questi con una maggiore consapevolezza del significato intrinseco della

Retta dei Numeri stessa e delle caratteristiche degli insiemi numerici che la compongono con la loro rappresentazione per punti(Figura 4).

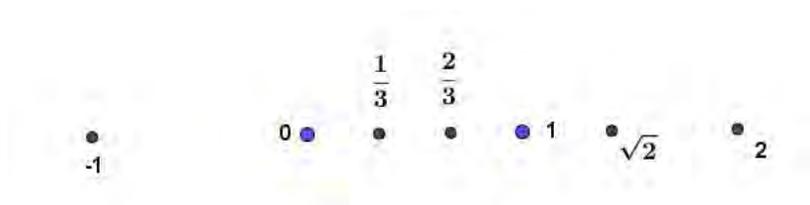


Fig. 4 - Abbozzo della Retta dei Numeri per punti.

4 - Conclusioni

La presente proposta di una Vignette di Klein sulla Retta dei Numeri ha notevoli potenzialità per una trasposizione didattica che può arricchire il curriculum didattico e la cultura di base di ogni docente. Tali potenzialità si possono così riassumere:

a) potenziale epistemologico: il tema permette di approfondire la conoscenza della natura e delle caratteristiche degli insiemi numerici e del loro sviluppo storico in rapporto anche con gli enti fondamentali della geometria;

b) potenziale didattico: i numeri sono utilizzati a scuola come oggetti dati e non conosciuti per il loro uso specie in un approccio interdisciplinare non solo all'interno della matematica stessa (teoria dei numeri, geometria, analisi) ma anche in relazione con altre discipline (storia, filosofia, tecnologia);

c) potenziale pratico: la conoscenza delle caratteristiche dei numeri ne permette una manipolazione più consapevole nelle

fasi, tra le altre, di approssimazione e di calcolabilità con gli algoritmi;

d) potenziale di connessione: i numeri sono alla base della matematica per cui pervadono ogni disciplina e la vita quotidiana del cittadino;

e) potenziale stimolante: l'approccio di tipo destrutturazione / ristrutturazione della Retta dei Numeri offre un nuovo punto di vista grazie anche all'uso dei Dynamic Geometrical Software come GeoGebra®. Inoltre, come ha evidenziato la dimostrazione, dopo più di tre secoli dalla sua enunciazione, dell'Ultimo Teorema di Fermat (1995), sui numeri vi sono ancora molte congetture da studiare e dimostrare (Ipotesi di Riemann, Goldbach, numeri primi gemelli, ecc.) per cui il primo passo è conoscerli in maniera ancora più approfondita;

f) potenziale culturale: i numeri sono stati e sono non solo una tematica della matematica ma ha coinvolto e coinvolge discipline filosofiche, storiche, artistiche, sociali denotando un'attenzione che va oltre le mere necessità del calcolo.

Tutto quanto detto evidenzia la filosofia del Klein Project che si identifica con lo spirito del matematico tedesco. Con ciò si intende il concepire la matematica come un "organismo vivente", in continua crescita, interconnesso, profondamente legato alle sue applicazioni e allo sviluppo della tecnologia. Accettare questo spirito è porsi l'obiettivo che l'educazione matematica e la conoscenza educativa di coloro che insegnano e studiano matematica, necessitano di un costante aggiornamento e rinnovamento. Sorprende o, per lo meno, conforta che tale necessità professionale e culturale era già presente da decenni e non si rivela una novità. D'altra parte,

lo spirito di Klein include la sua convinzione nell'importante ruolo degli insegnanti scolastici nello sviluppo e divulgazione della disciplina. Klein si fidava degli insegnanti dicendo esplicitamente che il suo libro non doveva essere preso come un programma o guida ma, piuttosto, uno stimolo per trarre ispirazione dai risultati e dai progressi della matematica per la loro pratica didattica. Tale stimolo è l'energia positiva dei matematici e degli insegnanti di matematica che lavorano fianco a fianco ponendo da parte le differenze (a volte significative) di opinioni su questioni curriculari e di valutazione contribuendo al progetto con il loro pensiero matematico. L'importante è che vi sia un dibattito costruttivo anche con chi proviene da esperienze formative diverse acquisendo sensibilità variegata nei confronti della matematica a maggior beneficio degli studenti.

Bibliografia

Aebischer, T. (2024), *Destructuring / restructuring of a virtual geometric artifact: the case of the Number Line*, Lowrie, T. & Gutiérrez, A. & Emprin, F. (Eds.), *Pre-Proceedings of the 26th ICMI Study Conference (Advances in Geometry Education)*, pp 303–310

Artigue, M. (2011). *Addressing the mathematical needs of teacher education: what can be offered by the ICMI-IMU Felix Klein Project?*, conferenza (Gerusalemme (Israele), 26 aprile 2011)

Arzarello, F. (2015). *Il progetto Klein dell'IMU-ICMI, La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana*, 1, 8, 2, pp 371–378

Barton, B. (2013). Creating a space for mathematicians and educators: The philosophical basis for the Klein Project, *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 8, 11, pp 405–409

Giacardi, L. (2019). Un insegnamento dinamico. Federigo Enriques e la formazione degli insegnanti, *Convegno PRISTEM-Mateinitaly (Siena, 6 aprile 2019)*

Hartshorne, R. (2000). *Geometry: Euclid and beyond*, Springer

Klein, F. (1895). Über Arithmetisierung der Mathematik. Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. *Geschäftliche Mitteilungen*, pp 82–91. Traduzione inglese *Bulletin of the American Mathematical Society*, 2, 1896, pp 241–249

Menghini, M. (2015). Felix Klein e le matematiche elementari da un punto di vista superiore: una nuova edizione, *Archimede*, 4, pp 169–171

Sbaragli, S. (2005). L'importanza delle diverse rappresentazioni semiotiche. Il caso degli enti primitivi della geometria. *Bollettino dei docenti di matematica*, 50, maggio, pp 69–76

Stumbo, F. (2023). *Costruzioni con riga e compasso*. Unione Matematica Italiana

Weigand, H.-G. & McCallum, W. & Menghini, M. & Neubrand, M. & Schubring, G., eds. (2019). *The Legacy of Felix Klein*. Springer Open

(https://www.researchgate.net/publication/329589894_Felix_Klein-Mathematician_Academic_Organizer_Educational_Reformer)

Wallis, J. (1685). *Treatise of algebra*. Londra

Ingranaggi e circuiti per calcolare: teoria e laboratorio

*Storia e attività didattiche
sugli strumenti di calcolo*

Marina Furlani *, Tullio Aebischer**

*Ph.D. School, Dip. di Matematica, Università di Roma Tor Vergata,
Italia; marina.furlani20@gmail.com

** Ph.D. School, Dip. di Matematica, Università di Roma Tor Vergata,
Italia; aebischer@axp.mat.uniroma2.it



Sunto: *Nell'era della trasformazione digitale, è fondamentale educare le nuove generazioni a comprendere, utilizzare e guidare la tecnologia in modo consapevole. Proponiamo un percorso storico-laboratoriale per le scuole secondarie sulla storia delle macchine di calcolo, evidenziando il legame tra matematica, tecnologia e società.*

Esso si articola sull'esame di due modelli significativi:

- *La macchina di Pascal, un esempio di calcolatrice meccanica automatica.*
- *L'addizionatore binario (half adder), basato sulla combinazione di porte logiche, elementi base dei moderni dispositivi elettronici.*

L'attività permette di consolidare la conoscenza dei principi matematici e logici del calcolo, l'evoluzione del pensiero scientifico e tecnologico ed inoltre sviluppare il pensiero critico e il lavoro collaborativo.

Parole Chiave: *Matematica e tecnologia; Storia delle macchine di calcolo; Laboratorio*

Abstract: *The rapid pace of digital transformation necessitates educating new generations to become informed users and responsible guides of technology.*

We propose a historical-laboratory learning path for secondary school students that explores two key computing machines: Pascal's machine, an example of an automatic mechanical calculator, and the half adder, a circuit based on logic gates, the fundamental building block of modern electronic devices. This activity allows students to solidify their understanding of mathematical and logical principles of calculation, appreciate the evolution of scientific and technological thinking, and develop critical thinking and teamwork skills.

Keywords: *Mathematics and technology; History of computing machines; Laboratory*

1 -Introduzione

La semplicità d'uso dei dispositivi digitali ne ha fatto esplodere la diffusione, permettendo a un numero sempre maggiore di persone di accedere a ogni genere di servizio. Bisogna considerare tuttavia un pericoloso effetto collaterale: spesso questi dispositivi vengono usati senza avere consapevolezza di come funzionano. È su questo aspetto che occorre lavorare, per aiutare le nuove generazioni a essere in grado di usare al meglio la tecnologia e guidarne la futura evoluzione: "Occorre far assimilare agli studenti l'idea che solo se si capisce la tecnologia, la si può dominare, altrimenti si rischia di esserne dominati!" (Lacchia F. 2018) Stimolare i ragazzi a capire "come funziona" un dispositivo digitale non è solo sviluppare una competenza tecnica, ma anche indurli a non accontentarsi di essere solamente fruitori di soluzioni che

vengono offerte dall'esterno. Imparare a “guardare dentro le cose” è la base per operare scelte consapevoli e orientare efficacemente il proprio futuro.

Il percorso presentato ha carattere storico-laboratoriale e può essere rivolto, con opportuni adattamenti, sia agli alunni della scuola secondaria di primo che a quelli di secondo grado. Vengono messe a confronto due diversi tipi di macchine addizionatrici. La prima di tipo meccanico è un contatore decimale ispirato alla pascalina in grado di effettuare addizioni e sottrazioni con riporto automatico; la seconda è un addizionatore binario costruito secondo un'opportuna combinazione di porte logiche.

L'attività mostra molteplici aspetti di interdisciplinarietà tra matematica, scienze (fisica) e tecnologia. Inoltre, l'inquadramento storico offre interessanti spunti di approfondimento con le discipline umanistiche.

L'importanza dell'integrazione tra matematica e tecnologia e, in generale, il rapporto tra scienza e società, è sottolineata in numerosi documenti istituzionali tra cui le *Indicazioni Nazionali per il Curricolo nei traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola secondaria di primo grado in Matematica, Scienze e Tecnologia*(Ministero dell'Istruzione 2012), ma anche nelle più recenti raccomandazioni contenute nel DigCompEdu(Commissione Europea 2017), il quadro di riferimento europeo sulle competenze digitali dei docenti e dei formatori (2017) e le *Linee guida per le discipline STEM*(Ministero dell'Istruzione 2023).

2 -Descrizione delle attività sperimentali

Le fasi dell'attività possono essere così sintetizzate:

- breve introduzione storica relativa alle macchine di calcolo
- calcolo meccanico e ingranaggi
- calcolo elettronico e logica binaria.

2.1 - Breve introduzione storica relativa alle macchine di calcolo

La storia dei calcolatori e del calcolo automatico può essere suddivisa in tre grandi periodi:

- il primo è quello degli strumenti di calcolo manuale. È il periodo più lungo, che va dalla preistoria fino al 1600 ca. nel quale furono inventati tra gli altri il pallottoliere, l'abaco e i bastoncini di Nepero.
- Il secondo periodo parte dal 1600 e arriva fino agli inizi del Novecento; è caratterizzato dai calcolatori meccanici basati su sistemi ingranaggi del tipo di quelli utilizzati per gli orologi. Nel 1642, fu inventata da Blaise Pascal (1623-1662) la macchina calcolatrice chiamata *Pascalina*. Le macchine calcolatrici meccaniche automatizzarono progressivamente le operazioni aritmetiche.
- Il terzo periodo è quello dei Calcolatori Elettronici progettati per codificare le informazioni in segnali elettrici che rappresentano valori binari. Le porte logiche combinano i segnali binari in base a operazioni logiche per eseguire calcoli e prendere decisioni tra quelle messe a disposizione del programmatore riuscendo così a

elaborare operazioni complesse in modo più efficiente e veloce.

2.2 -I calcolatori meccanici e la Pascalina

In questa parte del percorso, si inizia lo studio del moto degli ingranaggi, tecnologia sfruttata da Pascal per la progettazione della sua macchina calcolatrice, la Pascalina. Strumenti basati su tale tecnologia meccanica erano stati già realizzati in tempi ben più remoti. Non abbiamo la certezza che nel periodo ellenistico esistessero macchine in grado di eseguire le quattro operazioni tramite ingranaggi. Tuttavia, la macchina di Anticitera, risalente al II secolo a.C., rappresenta una prova concreta dell'utilizzo di ingranaggi per calcoli complessi come quello delle effemeridi. La sua complessità ingegneristica e la sua accuratezza nel predire eventi astronomici suggeriscono che la conoscenza della meccanica e dell'astronomia fosse molto avanzata all'epoca. Attraverso il moto di ruote dentate era possibile calcolare importanti dati astronomici come le fasi lunari, i movimenti dei cinque pianeti allora conosciuti, gli equinozi, e le date dei giochi olimpici, che iniziavano con la luna piena più prossima al solstizio estivo.



Fig. 1 –Ingranaggi appartenenti alla macchina di Anticitera (II sec.d.C.)

Nella sperimentazione proposta, per comprendere la trasmissione del movimento attraverso gli ingranaggi, vengono presentate agli studenti una serie di attività di assemblaggio e osservazione del moto di coppie di ruote dentate con lo stesso diametro o con diametro differente. In seguito, vengono ideate e realizzate strutture più complesse con ingranaggi sistemati in piani diversi; questi treni di ingranaggi offrono la possibilità di progettare sistemi con rapporti di trasmissione dati, necessari per il funzionamento di macchine di calcolo o di meccanismi per la misurazione del tempo (Tovena F. e Lamberti L. 2019).



Fig. 2- Sistema di ruote dentate a più stadi.

La realizzazione pratica di meccanismi di ruote dentate fornisce lo spunto per consolidare i concetti di prodotto e rapporto tra numeri interi (Tovena F. and Lamberti L. 2019), e utilizzarli in un contesto concreto per progettare sistemi reali con caratteristiche fissate.

Intrecciando narrazione e scienza, per comprendere i concetti matematici, si esplora il funzionamento della macchina matematica di Pascal, inventata dal filosofo e matematico francese nel 1642. Si propone, inoltre, la lettura della *Lettera di dedica al Monsignor Cancelliere relativa alla macchina recentemente inventata dal signor B. P. per eseguire ogni tipo di operazione aritmetica con un movimento senza penna né gettoni* e di altri due testi (Pascal, 1954; Giacardi, n.d) rivolti a personaggi di spicco della politica e della cultura con i quali Pascal promuove l'uso della sua invenzione (Manara 1995). In questi documenti, Pascal presenta la sua macchina calcolatrice meccanica, evidenziandone le caratteristiche e le potenzialità, e auspicandone un'ampia diffusione; le caratteristiche evidenziate sono:

- Efficienza e rapidità: la macchina permette di eseguire calcoli complessi con grande velocità e precisione, senza l'utilizzo di penna o gettoni.
- Semplicità d'uso: la macchina è facile da usare, anche per persone senza conoscenze matematiche avanzate.
- Versatilità: la macchina può eseguire diverse tipologie di operazioni aritmetiche, come addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni e divisioni. Verranno costruite circa 50 Pascaline destinate sia al calcolo scientifico che a quello contabile.

Pascal auspica che la sua macchina venga adottata da un pubblico ampio, non solo da matematici e scienziati, ma anche da mercanti, artigiani e chiunque necessiti di eseguire calcoli con precisione e rapidità.

Pascal sottolinea come il sostegno della classe politica sia fondamentale per l'affermazione e la diffusione della scienza. Questo supporto può avvenire non solo attraverso il finanziamento di ricerche e invenzioni, ma anche attraverso la promozione di una cultura che valorizzi la scienza e la sua utilità per la società.

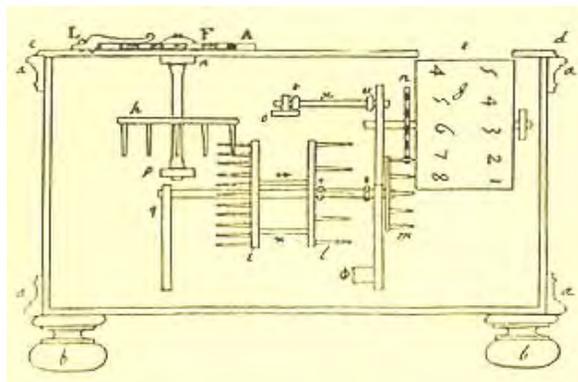


Fig. 3- Particolare dell'interno della Pascalina.

Dalle immagini originali si osserva che la tecnica utilizzata per la costruzione è quella degli orologi che si basa su combinazioni di ruote dentate.

La storia della macchina calcolatrice di Pascal evidenzia l'importanza della collaborazione tra diverse figure professionali per il progresso scientifico e tecnologico. La sinergia tra l'ingegno matematico di Pascal e l'abilità degli artigiani orologiai ha portato alla creazione di un'invenzione importante che ha aperto la strada a future innovazioni nel campo del calcolo.

2.3 - La sottrazione con la Pascalina: il metodo del complemento a 9

La macchina di Pascal era un'addizionatrice perché le ruote potevano muoversi solo in senso orario. Per eseguire le sottrazioni Pascal utilizzò perciò un metodo indiretto: il metodo del complemento a 9, che indicheremo col simbolo C_9 (Graziani, Sangoi 2005). I complementi a 9 dei numeri erano riportati sulla parte superiore dei rulli: una barra mobile permetteva di visualizzare i numeri sulla parte inferiore o sulla parte superiore del rullo a seconda dell'operazione da fare.

Supponiamo di dovere eseguire la sottrazione

$$72 - 23$$

Sposto la barra mobile in modo da rendere visibile il registro dei complementi a 9; calcolo il complemento a 9 del minuendo

$$99 - 72 = 27$$

questa operazione viene fatta sulla Pascalina girando le ruote di input fino a quando nel display superiore appare il numero 72 (e avrò il numero 27 nel registro inferiore non visibile).

Aggiungo il sottraendo girando la ruota di input delle unità di 3 passi in avanti e la ruota delle decine di 2 passi in avanti; eseguo così nel registro inferiore (non visibile) l'addizione

$$27 + 23 = 50$$

Nel registro superiore comparirà il complemento a 9 di 50, cioè $99 - 50 = 49$, che è esattamente il risultato della sottrazione iniziale

$$72 - 23 = 49$$

Riassumendo

$$\begin{aligned} 72 - 23 &= C_9(C_9 72 + 23) = C_9(99 - 72 + 23) \\ &= 99 - (99 - 72 + 23) = 72 - 23 \end{aligned}$$

In generale, con la tecnica del complemento a 9 è possibile trasformare una sottrazione in un'addizione secondo la formula

$$a - b = C_9 \left(C_9 a + b \right)$$

La tecnica del complemento permette di utilizzare un unico sistema meccanico per eseguire addizioni e sottrazioni.

Avendo impostato le procedure per l'addizione e sottrazione, Pascal sottolinea che la sua macchina può eseguire ogni tipo di operazione: moltiplicazioni come somme ripetute e divisioni come sottrazioni ripetute.

Dopo questa fase si mostra agli studenti una Pascalina moderna realizzata a scopo didattico (Maschietto and Savioli 2014) e si chiede di descriverne il funzionamento relativamente al movimento degli ingranaggi, in particolare il meccanismo del cambio nell'addizione e nella sottrazione,

anche evidenziando analogie e differenze rispetto al dispositivo originale di Pascal.

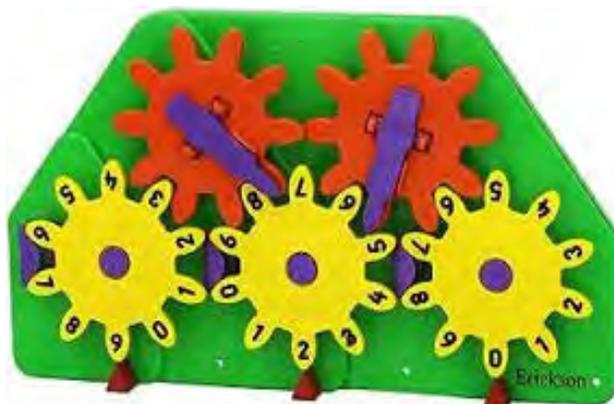


Fig. 4- La Pascalina didattica Zero+1 Quercetti.

2.4 -I calcolatori elettronici e la logica binaria

Questa parte del percorso didattico ha come scopo la costruzione di un circuito addizionatore di numeri scritti in base 2 attraverso un'opportuna combinazione di porte logiche. È consigliabile svolgerla successivamente al laboratorio sulle calcolatrici meccaniche in accordo alla successione storica, ma può essere proposta anche in modo autonomo.

L'algebra booleana, sviluppata da George Boole (1815-1864) nel XIX sec., ha fornito il fondamento teorico per l'integrazione della logica nei circuiti elettronici. Claude Shannon (1916-2001), negli anni '30 e '40 del XX sec., ha dimostrato come le operazioni logiche possano essere rappresentate da circuiti elettronici utilizzando porte logiche come AND, OR e NOT. Questo ha aperto la strada allo

sviluppo dei primi circuiti logici elettronici, da cui sono derivate le prime generazioni di computer (Nahin 2015).

2.5 - Circuiti e logica booleana

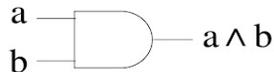
Uno dei componenti fondamentali di questi calcolatori è il circuito sommatore. Attraverso la combinazione di specifiche porte logiche, è possibile realizzare un circuito che somma correttamente numeri rappresentati in formato binario. Poiché è impossibile individuare visivamente tali elementi negli attuali componenti elettronici estremamente miniaturizzati, si propone la costruzione di un sommatore binario con elementi macroscopici e di facile reperibilità per evidenziare la combinazione delle operazioni logiche necessarie a questo scopo.

Dopo aver ripreso il concetto di sistema di numerazione posizionale e la struttura del sistema di numerazione binario, saranno proposte agli alunni le operazioni di somma e moltiplicazione in questo sistema e le procedure di conversione da sistema binario a decimale e viceversa (Fink 1967). Si mette in evidenza quindi la connessione tra sistema binario e logica booleana.

Ogni proposizione logica può essere associata alla rappresentazione binaria perché può assumere solo uno dei due valori di verità: Vero o Falso. Una situazione fisica che rappresenta perfettamente questa situazione a due valori è quella dei circuiti elettrici: in un circuito o passa corrente (valore booleano 1) o non ne passa (valore booleano 0). Il più semplice circuito elettrico è formato da un generatore di corrente (pila) collegato con un filo metallico a una lampadina

e a un interruttore. È possibile la seguente corrispondenza tra proposizione logica e posizione dell'interruttore: interruttore aperto \rightarrow proposizione Falsa; interruttore chiuso \rightarrow proposizione Vera. Attraverso un'opportuna disposizione degli elementi del circuito è possibile visualizzare le principali operazioni logiche, la cui funzione è descritta nelle seguenti tabelle di verità che danno la risposta del circuito in funzione del o degli input. Le seguenti foto sono relative alla sperimentazione svolta in una classe terza della scuola secondaria di primo grado con utilizzo di materiali poveri.

a	b	$a \wedge b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



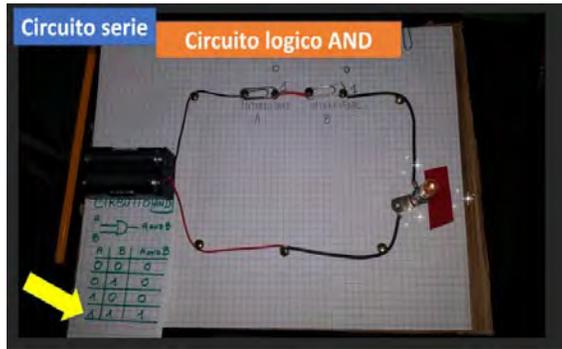


Fig. 5- Tavola di verità e circuitodella porta AND.

a	b	$a \vee b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

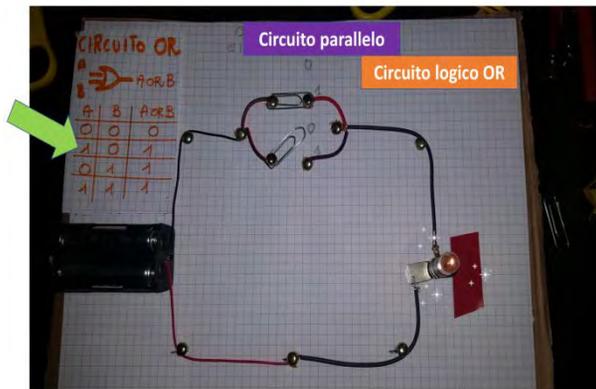
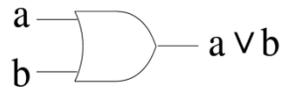
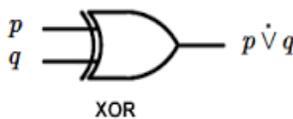


Fig. 6 - Tavola di verità e circuitodella porta OR.

p	q	$p \dot{\vee} q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



WWW.ANDREAMININI.ORG

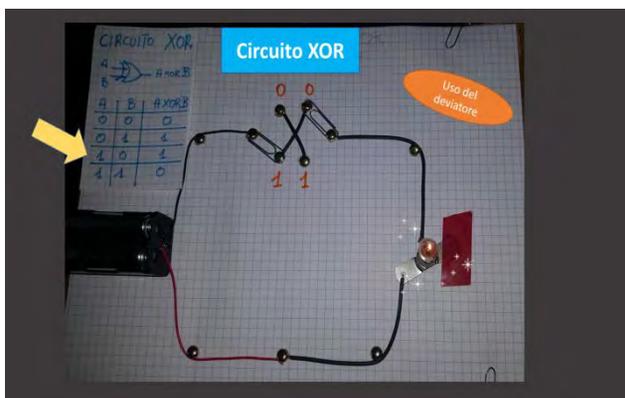


Fig. 7 - Tavola di verità e circuito della porta XOR.

2.6 - Circuito Sommatore

Assemblando opportunamente le porte logiche è facile costruire circuiti in grado di eseguire operazioni aritmetiche. Per esempio, con AND e XOR è possibile costruire un circuito in grado di calcolare la somma di due bit: un sommatore (HALF ADDER).

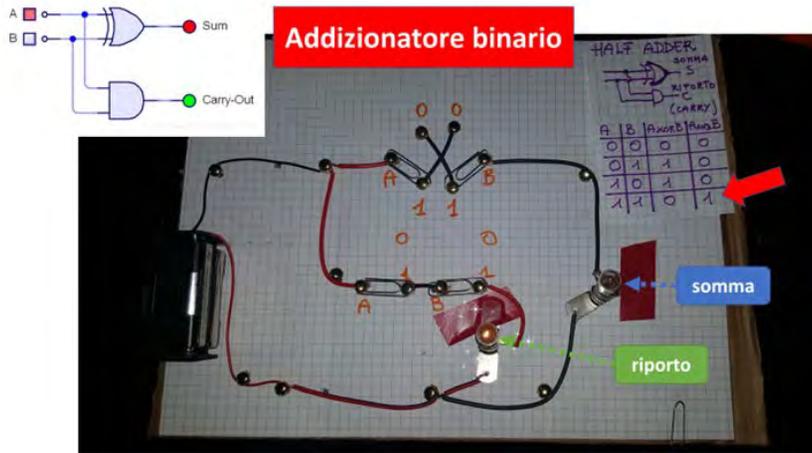


Fig. 8- Half Adder

Si deve tenere presente che, in generale, nella somma di due cifre in una certa posizione va tenuto in conto l'eventuale riporto derivante dalla somma delle cifre dell'ordine precedente. Analogamente, il risultato in una certa posizione è costituito dalla cifra risultante per quella posizione più l'eventuale riporto per le due cifre da sommare nella posizione successiva.

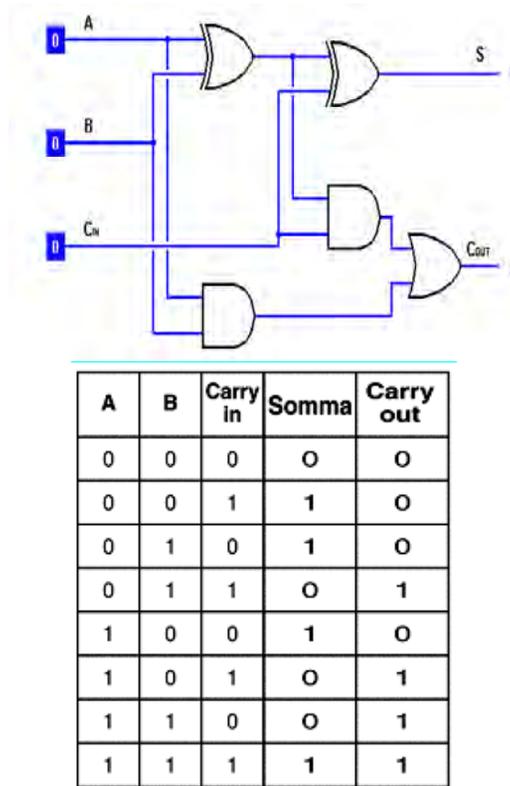


Fig. 9 Circuito logicodel Full Adder e relativa tabella di verità; si tiene conto di un eventuale riporto proveniente dall'ordine precedente.

La visualizzazione della costruzione e del funzionamento di circuiti più complessi, come quello riportato in figura, può essere verificata anche con software di simulazione come *logic.ly* o Logisim.

L'addizione di numeri binari è fondamentale in molti aspetti del calcolo e in compiti complessi come l'elaborazione di immagini, la simulazione scientifica, ecc... Il circuito sommatore è uno degli elementi chiave all'interno dell'unità di elaborazione centrale (CPU) contribuendo direttamente alla capacità di calcolo del processore stesso.

3. Conclusioni

Il rapido sviluppo della tecnologia pone sfide inedite per noi e soprattutto per le nuove generazioni. Diventa quindi fondamentale non subirla passivamente, ma conoscerla a fondo per poterla guidare nel suo evolversi.

Le attività proposte mirano a stimolare la ricerca dell'origine delle cose, ripercorrendo momenti significativi nella storia delle macchine di calcolo. Attraverso questo viaggio nel tempo, si delinea lo sviluppo del pensiero scientifico, della conoscenza e della tecnologia, un percorso non lineare, ma ricco di ostacoli, sfide ed errori che hanno portato a nuove riflessioni e a un'incessante ricerca per il loro superamento.

In conclusione, il percorso didattico proposto offre un'esperienza di apprendimento motivante che coniuga matematica, storia e laboratorio. Un viaggio alla scoperta della storia delle macchine di calcolo che non solo fornisce agli alunni le conoscenze teoriche, ma, attraverso il laboratorio, li rende anche protagonisti attivi del processo di apprendimento.

L'obiettivo ultimo è quello di formare cittadini consapevoli e competenti, in grado di utilizzare la tecnologia in modo responsabile e consapevole.

Bibliografia e Sitografia

Commissione Europea. (2017). DigCompEdu. Quadro Di Riferimento per Le Competenze Digitali Degli Educatori. Lussemburgo:Ufficio Delle Pubblicazioni Dell'Unione Europea.

FINK Donald G. (1967). *Le Macchine Calcolatrici - Come Sono Fatte e Come Funzionano*. Bologna: Zanichelli.

GIACARDI Livia (n.d.). "Pascal e Macchina Aritmetica". <https://php.math.unifi.it/convegnostoria/materiali/Giacardi-PascaleMacchinaAritmetica.pdf>.

GRAZIANI Pierluigi, SANGOI Massimo (2005). "La Macchina Aritmetica di Blaise Pascal". *Isonomia*. Università di Urbino.

LACCHIA Francesco (2018). *Come Funzionano i Computer- Capirli per Usarli senza Farsi Usare*. Programma il futuro. www.programmailfuturo.it.

MANARA Carlo Felice (1995). "Blaise Pascal Matematico". *Rivista Di Filosofia Neo-Scolastica*, Vol. 4, 540-41.

MASCHIETTO Michela, SAVIOLI Ketty (2014). *Numeri in Movimento - Attività per Apprendere La Matematica con la Pascalina*. Erikson.

Ministero dell'Istruzione. (2012). *Indicazioni Nazionali per il Curricolo della Scuola dell'infanzia e del Primo Ciclo d'istruzione*.

Ministero dell'Istruzione. (2023). "Linee Guida per le Discipline STEM". Nota Prot. 4588 del 24 ottobre 2023.

<https://eur-lex.europa.eu/legal-content/IT/TXT/PDF/?uri=CELEX:52021IP0296&from=EN>.

NAHIN Paul. (2015). *Il Logico e l'Ingegnere*. Codice Edizioni.

PASCAL Blaise. (1954). *Oeuvres Complètes, Texte Établi, Présenté et Annoté Par Jaques Chevalier*. Paris: Gallimard.

TOVENA Francesca, LAMBERTI Laura. (2019). "Frazioni, Ingranaggi e Orologi Lunari". In *DI.FI.MA Matematica e Fisica Nella Cultura e Nella Società*, 354–61.

Un'attività interdisciplinare per le classi della scuola secondaria di I grado:

*sai che cosa sono le spirali? Le possiamo
vedere anche in natura?*

Giovanna Angelucci * Chiara Brocchetto **

* Università degli Studi di Milano e Mathesis Bergamo APS;
giovanna.angelucci@unimi.it

** Università degli Studi di Milano.



Sunto: *questo lavoro presenta un laboratorio a carattere interdisciplinare, tra matematica e botanica, pensato per la scuola secondaria di I grado, ideato e condotto in collaborazione con studentesse e studenti del Corso di Laurea Magistrale in Matematica dell'Università degli Studi di Milano. L'intento del lavoro è stato quello di provare a introdurre un argomento non curriculare e di portare gli alunni alla comprensione di proprietà geometriche osservabili nelle piante. Le attività, che vertono sul concetto di spirale piana, sono state sperimentate coinvolgendo otto classi della provincia di Bergamo e sono state gestite con il metodo del lavoro collaborativo a gruppi.*

Parole Chiave: *laboratorio interdisciplinare, lavoro di gruppo, spirali, fillofassi.*

Abstract: *this work presents an interdisciplinary laboratory, between mathematics and botany, designed for lower secondary schools, conceived and conducted in collaboration with students of the Master Degree Course in Mathematics of the University of Milan. The aim of the work was to try to introduce a non-curricular topic and to lead students to understand geometric properties observable in plants. The activities, which focus on the concept of plane spiral, were tested involving*

eight classes in the province of Bergamo and were managed using the collaborative group work method.

Keywords: *interdisciplinary laboratory, group work, plane spiral, phyllotaxis.*

1 - Introduzione

Che cosa sono le spirali? Le possiamo vedere anche in natura? Con questo lavoro si intende presentare un laboratorio nato dall'esigenza di trattare l'argomento delle spirali in un'attività divulgativa curata dal Dipartimento di Matematica e presentata in Orto Botanico Città Studi (Università degli Studi di Milano) e rivolta inizialmente al pubblico generico. Da questa prima proposta è stato sviluppato un laboratorio a carattere interdisciplinare, tra matematica e botanica, pensato per la scuola secondaria di I grado, ideato e condotto in collaborazione con studentesse e studenti del Corso di Laurea Magistrale in Matematica (Università degli Studi di Milano) nell'ambito delle loro attività di Laboratorio didattico e tirocinio.

1.1 - Coerenza con le indicazioni europee e nazionali

Tra le otto competenze-chiave contenute nelle Raccomandazione del Consiglio del Parlamento Europeo del 18 dicembre 2006 (2006/962/CE) possiamo leggere che:

«la competenza matematica è l'abilità di sviluppare e applicare il pensiero matematico per risolvere una serie di problemi in situazioni quotidiane. [...]. La competenza in campo scientifico si riferisce alla capacità e alla disponibilità a usare l'insieme delle conoscenze e delle metodologie possedute per spiegare il mondo che ci circonda...».

Se poi scorriamo le “Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell’infanzia e del primo ciclo d’istruzione” (MIUR, 2012) troviamo scritto che uno dei traguardi per lo sviluppo delle competenze è avere rafforzato *«un atteggiamento positivo rispetto alla matematica attraverso esperienze significative e [...] capito come gli strumenti matematici appresi siano utili in molte situazioni per operare nella realtà»*. Inoltre, tra gli obiettivi di apprendimento al termine della classe terza della scuola secondaria di primo grado viene detto che l’alunno dovrebbe essere in grado di *«visualizzare oggetti tridimensionali a partire da rappresentazioni bidimensionali»*.

1.2 - Materiali e metodi

Il laboratorio è stato inizialmente proposto in ambito universitario nell’inverno 2022-2023 e poi sperimentato in contesto scolastico in otto classi prime di due scuole secondarie di I grado in Bergamo e provincia durante l’a. s. 2023-2024. Le attività sono state svolte in parte in classe e in parte nel cortile o giardino della scuola e proposte con il metodo del lavoro collaborativo a gruppi. Esse vertono sul concetto di spirale piana con brevi cenni al suo sviluppo nello spazio, con l’intento di introdurre un argomento non curriculare e di portare gli alunni alla comprensione di proprietà geometriche osservabili nelle piante. Nella parte dell’attività che viene svolta in cortile i ragazzi sono stimolati a cercare tre esemplari di piante con diversa “fillotassi” e in particolare a trovarne una (o più di una) con le foglie disposte a spirale. Prima di iniziare la ricerca, viene esplicitato loro che la fillotassi è la disciplina che studia la disposizione delle foglie su un fusto. Il termine fillotassi deriva dal greco phyllon

= foglia e taxis = ordine (Longo, 1986; Bell, 1993). Si presenta agli studenti un modello di fillotassi spiralata, prima in immagine e poi in tre dimensioni, che mostra come le foglie si dispongono attorno al fusto di una pianta. Supponendo di modellizzare il fusto di una pianta (erbacea o arborea) con una superficie conica è possibile immaginare di posizionare le foglie sulla superficie del cono seguendo una linea con andamento a elica attorno al modello di fusto (Figura 1). Una volta proiettata la linea su un piano, che potrebbe essere un foglio di carta, bene, abbiamo ottenuto una spirale (Angelucci, 2024).

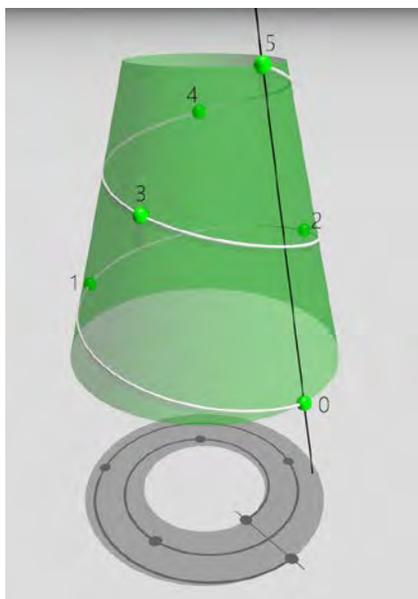


Figura 1: immagine realizzata con il software Geogebra da Riccardo Moschetti (Angelucci, 2024).

2 - Attività 1. Sai che cosa sono le spirali?

Partendo da questa domanda introduttiva, che viene rivolta alla classe a inizio laboratorio, si presenta brevemente l'attività che intende introdurre il concetto di spirale piana. A ciascun gruppo viene consegnata una scheda di lavoro (allegato 1) e, partendo da una breve descrizione di queste particolari curve, si chiede ad ogni componente del gruppo di individuare sul disegno della spirale (Figura 2) gli elementi che la caratterizzano (polo, spira e passo) per poi giungere ad una risposta condivisa dal gruppo e riportarla nella scheda. Il ruolo della guida/insegnante (in questo caso lo studente tirocinante) è quello di guida vigile che non fornisce le risposte corrette, ma stimola il pensiero critico, l'uso delle diverse abilità personali e la collaborazione tra le diverse componenti del gruppo nello spirito del *Cooperative Learning* (Ellerani & Padan, 2004).

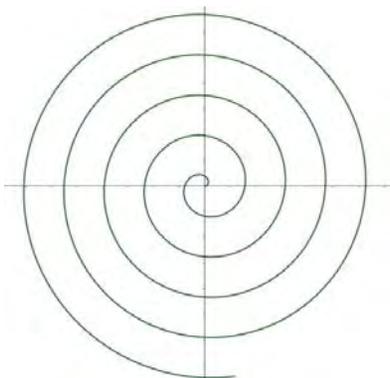


Figura 2: spirale di Archimede, immagine ottenuta con il software Geogebra.

2.1 - Osservazioni

La maggior parte degli studenti riesce ad individuare il polo e a disegnarlo correttamente in corrispondenza del centro degli assi cartesiani rappresentati nell'immagine. Alcuni studenti arrivano ad individuare in poco tempo e precisamente le diverse spire (Figura 3), facendo coincidere il punto di inizio della prima spira con il polo, senza bisogno di intervento della guida e/o di strumenti ausiliari. Una piccola parte di studenti giunge a disegnare la singola spira partendo da un punto qualsiasi scelto sulla curva (Figura 4). Evitano cioè di partire dai punti "preferenziali" come quelli di intersezione della curva con gli assi cartesiani, dal momento che non è esplicitata questa indicazione nella scheda attività.

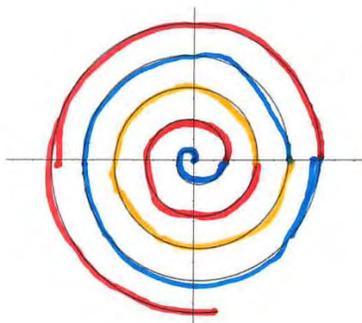


Figura 3.

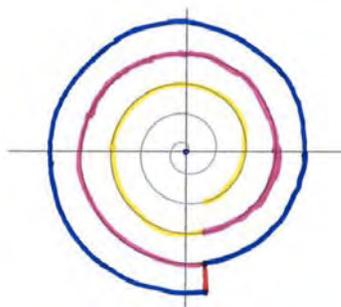


Figura 4.

Gli studenti che dimostrano di aver compreso il concetto di spira sin dalla fase iniziale dell'attività hanno poi saputo verbalizzare la differenza tra la curva spirale e la singola spira. Inoltre questi studenti hanno potuto aiutare gli altri componenti del gruppo a raggiungere questa consapevolezza. La maggior parte degli alunni ha disegnato correttamente il passo (Figura 5) solo dopo il confronto con la guida presente in aula, mostrando che il passaggio dalla definizione fornita nelle schede alla sua raffigurazione non è sempre immediato.

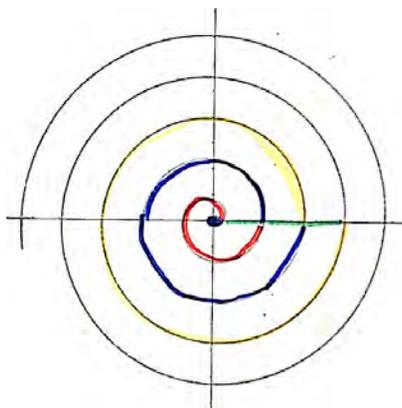


Figura 5.

La difficoltà più grande registrata è quella in generale di passare dalla definizione matematica ad una raffigurazione concreta. I ragazzi creano un'immagine mentale (che poi riportano su carta) del passo intendendolo come "spazio" tra una spira e l'altra; ciò porta poi a soluzioni ambigue (Figura 6 e Figura 7). L'immagine mentale e il significato intuitivo di passo risultano per lo studente molto più forti della definizione, che non viene più considerata, nonostante suggerisca loro come fare per rappresentare nel giusto modo il passo tra due spire.

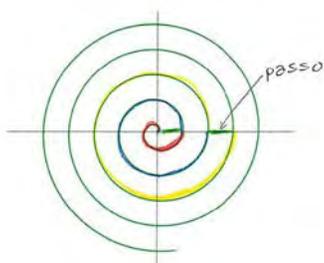


Figura 6.

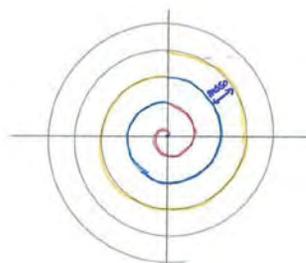


Figura 7.

3 - Attività 2. Esistono diversi tipi di spirali?

La seconda attività (allegato 2) porta gli studenti alla scoperta di diversi tipi di spirali piane. In particolare si mostrano la spirale archimedeica (Figura 8) (già esaminata nella prima scheda), la spirale logaritmica (Figura 9) e la spirale di Fermat (Figura 10). Tramite la compilazione della scheda di lavoro gli alunni sono stimolati a individuarne le caratteristiche comuni e le differenze. Inoltre, in questa fase gli studenti arrivano ad attribuire a ciascuna curva rappresentata il nome corrispondente a partire dalla descrizione che viene fornita nella scheda.

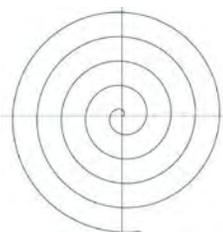


Figura 8: spirale 1
(spirale di Archimede).

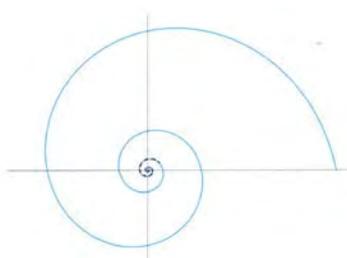


Figura 9: spirale 2 (spirale logaritmica).

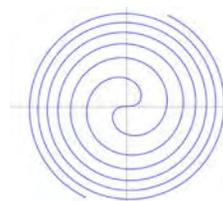


Figura 10: spirale 3
(spirale di Fermat).

3.1 - Osservazioni

La consegna della seconda scheda innesca un'immediata e vivace discussione di gruppo sull'interpretazione delle nuove immagini: la maggioranza degli studenti rimane colpita in particolare dal disegno della spirale di Fermat (Figura 10). Una delle osservazioni iniziali è "che forse la spirale 3 non ha il polo". L'intervento della guida invita gli studenti a risolvere il quesito sorto spontaneo, esortandoli a ragionare in gruppo sulla definizione di polo vista poco prima e a cercare di capire

se ci sia un punto che per quella curva soddisfi la definizione. Un'altra osservazione che emerge spesso è che la spirale di Fermat è una "spirale doppia" (Figura 11). Per fare in modo che tale osservazione risulti chiara a tutto il gruppo la guida consiglia ai ragazzi di lavorare sulla spirale utilizzando alcuni colori per distinguere le due curve da cui è composta. Di conseguenza risulta per loro più semplice anche l'individuazione corretta delle spire e del passo (Figura 12).

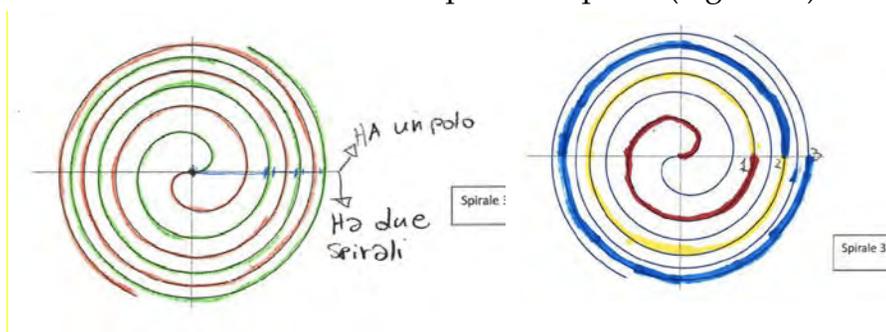


Figura 11.

Figura 12.

Solo alcuni ragazzi si accorgono che, nella spirale 2 (Figura 9), il polo non appartiene alla curva (i trattini visibili in Figura 9 sono stati segnati di proposito per lasciare la possibilità a questa non scontata osservazione di emergere). Tale considerazione porta alcuni alunni a comprendere che il polo non è necessariamente posizionato sulla curva.

Quasi tutti gli studenti riconoscono immediatamente che nelle spirali 2 e 3 la misura del passo varia con regolarità, man mano che ci si allontana dal o ci si avvicina al polo. La maggior parte dei gruppi conferma tale intuizione attraverso misurazioni e osservazioni più precise. Infine, la quasi totalità dei gruppi riesce ad associare correttamente le tre immagini di spirale al nome a loro attribuito nella scheda.

Tra le difficoltà riscontrate, forse la maggiore è stata quella di individuare la posizione del polo della spirale 3 poiché le immagini mentali fuorvianti che i ragazzi associano agli oggetti polo e passo sono molto forti. Si rileva in qualche caso una certa “fatica” ad accettare che l’origine delle due spirali semplici contenute nella spirale 3 coincida effettivamente con il polo, nonostante la definizione. Inoltre, emerge anche in questa fase la difficoltà nell’individuare il passo nel modo corretto (Figura 13 e Figura 14).

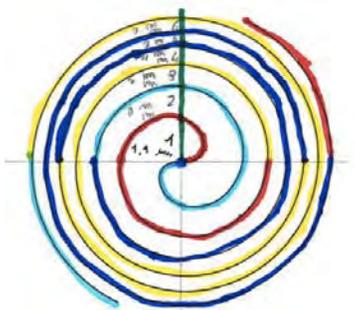


Figura 13.

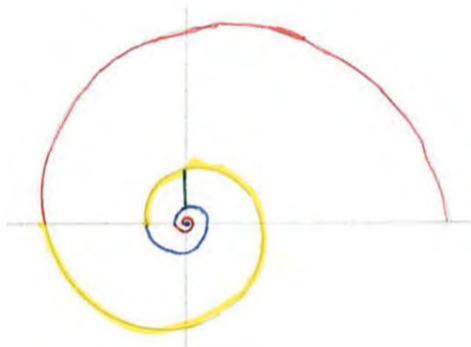


Figura 14.

Stimolando il gruppo alla discussione e facendo osservare con attenzione le immagini delle due spirali che non hanno passo costante, si è riusciti in un secondo momento a condurre gli studenti alla rappresentazione corretta (Figura 15). Questo intervento li porta a comprendere che un certo modo di segnare il passo tra due spire sia sbagliato ma anche che passare attraverso l’errore è a volte necessario e anzi può rappresentare uno strumento di conoscenza infatti «sbagliare non solo è lecito, ma è necessario» (Dedò & Di Sieno, 2013, p. 334).

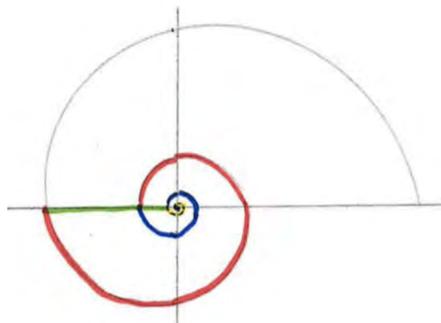


Figura 15: i segmenti in verde rappresentano i passi tra due spire consecutive.

4 - Fillotassi in cortile

Concluso il lavoro in classe con le schede attività, i ragazzi vengono portati nel cortile della scuola e, prima di iniziare la ricerca delle piante con foglie "a spirale", si mostra loro un modello concreto utile per illustrare il passaggio che si compie spostandosi dalla "visione" della spirale piana (prima in astratto e poi su carta) alla spirale nello spazio reale. Il modello di Figura 16 è stato costruito "sollevando" su un cono di cartoncino la spirale di Archimede (dopo avere disegnato alcune foglioline e averla poi ritagliata).

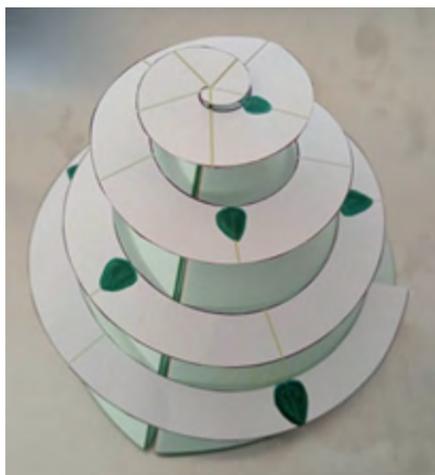


Figura 16.

A questo punto si chiede loro di individuare tra le diverse specie presenti nello strato erbaceo del giardino (Figura 17), un esemplare (o più di uno) che abbia le foglie disposte a spirale, o meglio "a elica". Si rammenta loro che in questo modo si è passati dalla rappresentazione di una curva sul piano, le spirali viste nelle attività in aula, all'osservazione di un fenomeno che avviene nello spazio. Lavorando su esempi concreti si arriva così a scoprire la filloassi, visibile su esemplari di piante in vivo, come in questo caso, o su modelli ideati ad hoc. Questa parte di attività pratica permette agli studenti di osservare in un modello reale in tre dimensioni (la pianta intera), un fatto che fino a pochi minuti prima avevano osservato solo su "carta" e in due dimensioni.



Figura 17.

5 - Conclusioni: il punto di vista della tirocinante

Al termine della sperimentazione, raccogliamo qui qualche riflessione personale della studentessa che ha partecipato come tirocinante al laboratorio (Chiara Brocchetto).

L'esperienza diretta con le classi è stata molto positiva e costruttiva, sia dal punto di vista personale, sia da un punto di vista "professionale", perché mi ha fornito un primo sguardo sull'ambiente di lavoro scolastico. Ho potuto raccogliere tante osservazioni utili, maturate spesso dagli studenti stessi in fase di laboratorio, molte delle quali abbiamo già riportato nel testo precedente.

E' stato stimolante e non scontato per me notare che sin dalle prime fasi di svolgimento dell'attività, in particolare in quelle trattate nella scheda 2, i ragazzi erano attivi, commentavano le immagini e risultavano incuriositi. L'aver osservato il lavoro dei gruppi, mi ha permesso di notare come l'emergere di alcune difficoltà, consenta adottare immediati accorgimenti e modifiche all'attività di laboratorio già in

corso d'opera, allo scopo di rendere le schede di lavoro più efficaci e le consegne più chiare.

Ascoltando le osservazioni dei ragazzi o leggendo le loro risposte sulle schede, ho potuto rilevare che non è affatto scontato che riescano a verbalizzare con facilità il contenuto delle loro considerazioni. Inoltre ho potuto rendermi conto del fatto che non è affatto banale per gli studenti sintetizzare ed esprimere le osservazioni emerse nel gruppo e riportarle sulla scheda.

Al termine della sperimentazione abbiamo dovuto registrare che il tempo a priori stabilito per il laboratorio (l'ora e mezza programmata) è insufficiente, considerando sia l'effetto "uscita su campo" che i molti stimoli scaturiti dalla discussione di gruppo. Tutte queste osservazioni serviranno per modificare le schede attività in vista di utilizzazioni future. Infine, altri studenti tirocinanti si occuperanno dell'analisi dei test che sono stati somministrati agli alunni e agli insegnanti: contiamo nel prossimo futuro di poter trarre ulteriori considerazioni che serviranno a "aggiustare il tiro" e ottimizzare l'efficacia del laboratorio.

Bibliografia

Angelucci, G. (2024). *Matematica in giardino. Quaderno di laboratorio per le classi della scuola secondaria di I grado*. Milano University Press. DOI: <https://doi.org/10.54103/milanoup.142>

Bell D., A. (1993). *La forma delle piante. Guida illustrata alla morfologia delle angiosperme* (F. Bracco, Trans.; 1st.ed.). Zanichelli. (Original work published 1991).

Dedò, M., & Di Sieno, S. (2013). The Mathematics Laboratory: An Outline of Contents and Methodologies. *La Matematica nella Società e*

nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, 6(2), 321-342.
<http://eudml.org/doc/293789>

Ellerani, P., & Pavan, D. (2004). L'apprendimento cooperativo: tratti di storia e di applicazione didattiche. In C. Vescini (Ed.), *Uno a casa, tre in viaggio. Il Cooperative Learning: riflessioni e pratiche educative*. I.R.R.E Emilia Romagna.

Longo, C. (1986). *Biologia vegetale, morfologia e fisiologia*. Utet.

Miur, (2012). Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione.
https://www.miur.gov.it/documents/20182/51310/DM+254_2012.pdf

Sitografia

EurLex (Raccomandazioni del parlamento europeo e del consiglio)

<https://eur-lex.europa.eu/eli/reco/2006/962/oj?locale=it>

Geogebra classico

<https://www.geogebra.org/classic?lang=it>

Geogebra geometria

<https://www.geogebra.org/geometry>

Allegato 1

Scheda 1

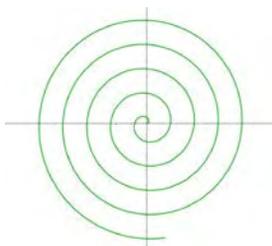
Sai che cosa sono le spirali?

Le spirali sono particolari curve piane che si avvolgono attorno a un punto infinite volte, avvicinandosi o allontanandosi progressivamente, a seconda di come si percorre la curva.

Osserviamole nel dettaglio!

Il punto attorno a cui si avvolge la curva si chiama polo. Un unico giro completo di 360° della curva attorno al polo si chiama spira. Infine la distanza tra due spire è detto passo della spirale (che possiamo vedere come distanza tra il punto in cui inizia una spira e il punto in cui inizia la successiva).

Osserviamo la figura sotto.



Nella figura sopra è presentato un esempio di spirale, di cui ancora non vi diciamo il nome!

Provate, lavorando in gruppo, a:

- _ indicare in figura il punto che rappresenta il polo segnandolo con il colore blu;
- _ evidenziare con il colore rosso, blu e giallo 3 diverse spire;
- _ segnare con un altro colore i segmenti che indicano il passo.

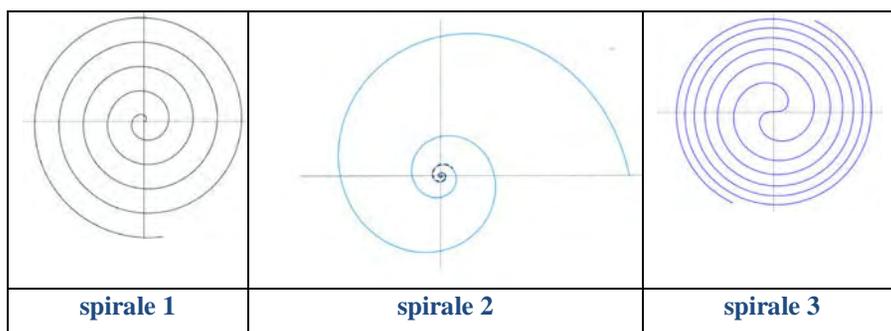
Allegato 2

Scheda 2

Esistono diversi tipi di spirali?

Ci sono diversi tipi di spirali, come viene mostrato dalle figure sotto.

Strumenti: un righello.



Osservate le spirali proposte e poi provate a dire se riuscite a trovare delle caratteristiche comuni.

Riuscite a trovare delle caratteristiche che permettano di distinguerle?

Ed ora provate a completare le seguenti frasi.

_ La spirale che ha i passi che si accorciano allontanandosi dal polo e che risulta simmetrica per rotazioni di 180° si chiama spirale di Fermat ed è la numero _____.

_ La spirale che ha il passo costante si chiama spirale di Archimede o archimedeo ed è la numero _____.

_ La spirale che ha i passi che si allungano allontanandosi dal polo e che risulta sempre somigliante a se stessa si chiama spirale logaritmica ed è la numero _____.

Oltre il modello euclideo

*Una sintesi del contributo interdisciplinare
alla comprensione del mondo fisico
dall'antichità al XXI secolo*

Ferdinando Casolaro*

*Presidente Associazione Napoletana Filosofia Scienze Umane "R.
Caccioppoli" (ANFSU) - presidente.anfsu@gmail.com



Sunto: *Si presentano, in ordine cronologico, alcuni momenti essenziali che hanno contribuito all'attuale visione del mondo fisico e si sottolinea la significativa funzione delle altre branche della cultura all'evoluzione della scienza. Tali concetti sono descritti nei lavori in bibliografia e sintetizzati in una serie di poster esposti nella sala dei lavori del IV° Convegno "Matematica, Natura e Scienza dell'Alta Costiera Amalfitana" tenutosi ad Agerola nei giorni 05-08 settembre 2024.*

Parole Chiave: *Geometria, Filosofia, Arte, Letteratura*

Abstract: *Some essential moments that have contributed to the current vision of the physical world are presented, in chronological order, and the significant function of other branches of culture in the evolution of science is underlined. These concepts are described in the works in the bibliography and summarized in a series of posters displayed in the conference room of the 4th Conference "Mathematics, Nature and Science of the Upper Amalfi Coast" held in Agerola on 05-08 September 2024.*

Keywords: *Geometry, Philosophy, Art, Literature*



A mio cugino Carlo Sorvino¹ da cui ricevetti la prima spiegazione per la risoluzione di un problema di Geometria.

1 - Introduzione

Il presente lavoro, che sintetizza anni di studio e di approfondimento delle proprietà del mondo fisico emerse negli ultimi 150 anni (Casolaro F., Sessa S., 2019), ripercorre intuizioni, modifiche di pensiero, assimilazione di concetti diversi da quelli da me percepiti da studente e applicazioni nel percorso di docente, prima nella Scuola secondaria poi nei corsi universitari.

La convinzione, ormai comune a tutti i più significativi pedagogisti di didattica della matematica e della fisica, è che il modello euclideo sia insufficiente per la rappresentazione del mondo fisico e dello spazio.

¹ Carlo Sorvino (Napoli, 1934-2022), il mio primo “Maestro di Matematica” che, nella frequenza della quarta classe elementare, mi ha spiegato per la prima volta un sintetico percorso logico per la risoluzione dei problemi di geometria. In carriera citiamo i cosiddetti “Grandi Maestri” che sicuramente ci hanno dato molto; purtroppo dimentichiamo coloro che con umiltà e semplicità ci hanno avviato ad amare la nostra disciplina e probabilmente sono stati determinanti sulle nostre scelte. La dedica di questo lavoro lascia un segno indelebile ad un rimorso per un affetto che non sono mai stato in grado di manifestargli come meritava.

A tale convinzione ha contribuito sicuramente lo sviluppo delle Geometrie non euclidee (Casolaro F., 2014) che ci permette di avere una percezione più completa del mondo che ci circonda in quanto, secondo la concezione classica, la geometria esprime un insieme di proprietà relative al *movimento dei corpi* ed alla *propagazione della luce*, che si ottengono facendo astrazione dal *tempo* e dalle *forze*.

Personalmente auspico un futuro in cui la geometria venga proposta con un'estensione alla cinematica - che è la teoria del movimento rispetto allo spazio/tempo - e successivamente alla dinamica con l'introduzione delle forze.

In tal modo si avranno approssimazioni che ci avvicinano man mano ad un grado più concreto della realtà fisica, che troverà poi un'ulteriore correzione con la teoria della Relatività Generale (Casolaro F., Pisano R., 2006).

Questa mia convinzione ha trovato spesso contrasto nei dibattiti con i 'puristi' della matematica che ritengono debba essere una scienza basata esclusivamente sulla logica. Sicuramente tale concezione è legittima ed ha una sua coerenza, ma spesso conduce ad un'astrazione che rende difficile la divulgazione della disciplina nell'insegnamento.

In un recente volume *La verità in matematica da Gödel a Euclide*, pubblicato dall'ing. Luca Nicotra per la collana "Il filo della conoscenza" edita da in riga edizioni di Bologna, ho trovato una elegante sintesi a questa mia convinzione che riporto testualmente (Nicotra, 2023, p. 25):

La matematica, pur rimanendo una scienza rigorosa, ha abdicato all'assolutismo della verità, in favore di verità "razionali rispetto allo scopo" e non "rispetto al valore" come puntualizza Max Weber. La verità in matematica

diventa soltanto consistenza dei costrutti matematici, cui si giunge percorrendo una dimostrazione secondo determinate ed accettate regole logiche, a partire da un fondamento assiomatico coerente ma non necessariamente intuitivo. Nel caso in cui gli assiomi non abbiano una corrispondenza con la realtà fisica anche i teoremi, che ne discendono, saranno proposizioni con significato probabilmente non corrispondente a uno stato di cose oggettivo.

Il punto di partenza di questo iter è stato la scoperta (o invenzione?) delle geometrie non euclidee, nate dalla negazione del 5° postulato degli 'Elementi' di Euclide.

Per un percorso completo dell'evoluzione della geometria nella Storia ci si riferisce ai riferimenti bibliografici, indicati in ordine cronologico nella stesura di questo lavoro (Morris Kline 1991).

2 - Due congetture relative alla nascita ed allo sviluppo della Geometria: a) Astronomia, b) Arte

a. *L'universo non è piatto, è curvo: dai Caldeo-Babilonesi (VIII-VII sec. a.C.) alla Teoria della relatività nel XX secolo (Casolaro F., Pisano R., 2011).*

b. *la luce si propaga in linea retta: da "l'Ottica degli Antichi", gruppo di artisti di cui faceva parte anche Euclide (Casolaro F., 2003) (Casolaro F., Rotunno A. 2015)*

Gli astronomi del popolo Caldeo-Babilonese, attratti dal fascino della 'volta celeste' - vista come spazio curvo - cercarono di approfondire le proprietà dello spazio. Il campo di studio su cui operavano era la sfera.

Dal VI al IV sec. a.C. - da Talete ad Euclide - si svilupparono le Scuole filosofiche, e furono redatti i primi teoremi e le proprietà della Geometria sullo spazio piatto (indicato dopo come 'piano e spazio euclideo') (Cundari C., 1997; Casolaro F., Rotunno A., 2019).

Il IV secolo a.C. è sicuramente il più importante della storia della matematica con gli "Elementi" di Euclide, trattato considerato ancora oggi punto di riferimento per l'educazione alla Logica ed alla formazione umana dei nostri studenti.

Ma già in quel periodo furono messe in discussioni alcune "verità matematiche":

1. lo stesso Euclide si rese conto che la sua geometria rappresentava un 'Modello statico' che non teneva conto dei Movimenti delle figure nello spazio per cui, contemporaneamente alla stesura degli 'Elementi', scrisse un trattato di Geometria Dinamica, "*I Fenomeni*", di cui siamo venuti a conoscenza nel 1915, anno in cui fu tradotto perché ritenuto utile per lo studio della Teoria della Relatività di Einstein (Casolaro F. 2002) (Casolaro F. 2020). Ne "*I Fenomeni*" riscontriamo per la prima volta un riferimento alle 'trasformazioni geometriche' con una definizione dinamica della sfera - *superficie dello spazio ottenuta dalla rotazione di una circonferenza intorno al proprio diametro* - diversa dalla classica definizione statica che riscontriamo negli 'Elementi' - *luogo geometrico dei punti dello spazio equidistanti da un punto fisso C, detto centro*.

2. I greci, studiosi della geometria piana, hanno lasciato tracce di geometria sferica: significative le opere

dell'astronomo Autolico di Pitane, contemporaneo di Euclide, "Sulle Sfere mobili" ed "Il sorgere ed il tramontare". Queste opere furono tradotte nel 1885 dopo i risultati di Levi-Civita e Ricci-Cubastro sull'algebra tensoriale, risultati che permisero ad Einstein lo sviluppo di alcune sue teorie. Nel libro "Sulle sfere mobili" le proposizioni sono disposte in ordine logico secondo lo stile usato da Euclide:

esposizione del teorema → ripetizione dei dati sulla figura → dimostrazione.

Precisamente, lo stile degli 'Elementi' non riguardava solo Euclide, ma una prassi espositiva di quel tempo (Casolaro F. 2018).

3. Gli artisti greci tentarono di risolvere alcuni problemi di rappresentazione e non è da escludere che in età classica esistesse un sistema di rappresentazione non molto dissimile da quello elaborato durante il Rinascimento (Casolaro, 2020).

È nel periodo greco, infatti, che ebbe origine un gruppo di ricerche i cui risultati costituiscono "l'Ottica degli Antichi", che nasceva dal desiderio di studiare fenomeni luminosi allo scopo di distinguere ciò che è "apparenza" da ciò che è "realtà".

Partendo dal postulato che "la luce si propaga in linea retta", vengono stabiliti molti teoremi (per lo più da Euclide che faceva parte del gruppo) che ancora oggi sono ritenuti tra i fondamenti della trattazione matematica della luce; altre proposizioni, invece, vengono ritenute inaccettabili essendo conseguenza del principio - sostenuto da Platone ma ripudiato come falso dalla fisica contemporanea - che la

visione avvenga per effetto di raggi emanati dall'occhio dell'osservatore e non dall'oggetto (Casolaro F., 2003).

3 - Dai postulati di Euclide ai principi della Geometria Sferica: insegnare Geometria come Laboratorio per la discussione degli errori

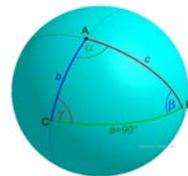
Nel seguente paragrafo si propongono riflessioni discordanti sulle verità matematiche. Alcune sono personali, altre sono evinte da dibattiti storici tra i matematici del passato.

Pertanto definizioni e proposte di teoremi hanno il solo scopo di creare una discussione laboratoriale, anche per far comprendere agli studenti il significato di alcuni errori che spesso sono conseguenza di ragionamenti logici non corretti ma interessanti nella valutazione del dialogo educativo.

3.1 - Un teorema di Geometria piana che non vale nella Geometria Sferica

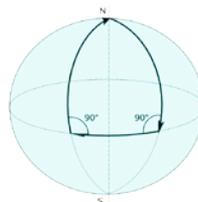
Teorema degli angoli interni:

La somma degli angoli interni di un triangolo è maggiore (o minore) di 180° .



Esempio:

Triangolo con due vertici sull'equatore e il terzo vertice al polo nord della superficie terrestre.



4 - Alcune osservazioni sul significato, spesso in positivo, degli errori. È corretto presentare gli enti primitivi come definizioni?

Cito, solo a titolo di discussione laboratoriale, alcune definizioni che, anche se confuse sotto l'aspetto logico, possono rappresentare oggetto di discussione per stabilire la distinzione tra osservazioni analitiche di carattere posizionale (figure congruenti) con gli aspetti legati alla metrica (isometria) (Casolaro F., Eugeni F., 1996).

Le parole "congruenza" e "isometria" sono universalmente considerate sinonimi; è giusto così perché le proprietà dell'una valgono come proprietà dell'altra e viceversa. Volendo però essere pignoli, una differenza alla base c'è: la congruenza si riferisce ai movimenti del piano e non presenta alcun elemento di misura. L'isometria, già per il suo significato grammaticale, si riferisce alla metrica (Casolaro. F. Cirillo L. 1996; Casolaro F., Cirillo L., Prospero R., 2015).

Pertanto, alcune definizioni che cito di seguito, si potrebbero considerare logicamente corrette anche se hanno creato forti discussioni nei matematici del XIX secolo.

Fissato un riferimento cartesiano $Oxyz$ nello spazio euclideo tridimensionale, si definisce :

1. Punto: una terna di numeri reali
2. Piano: luogo geometrico dei punti dello spazio equidistanti da due punti fissati
3. Retta: intersezione di due piani

Quali osservazioni sono emerse - nel mio percorso professionale - da Seminari con docenti e lezioni con studenti?

Innanzitutto, la distinzione tra attribuzione di nomi alle varie branche della geometria: nel punto 1, la definizione è 'aritmetica' riferita alla 'geometria analitica'; nel punto 2, la definizione è di 'geometria sintetica' associata alla 'metrica'; nel punto 3, si ritrovano il 'fusionismo' tra piano e spazio ed il riferimento ai sistemi di equazioni lineari.

4.1 - Dalla Geometria piana alla Geometria sferica

I limiti della Geometria euclidea sono emersi dalla non accettazione del V° postulato, per cui nelle Geometrie non euclidee sono universalmente accettati i primi quattro postulati (Casolaro F., Paladino L., 2012).

Vogliamo far vedere come in ambito non euclideo - ad esempio nello spazio sferico - i primi quattro postulati (citati con le definizioni classiche che si trovano in letteratura) si possono addirittura dimostrare utilizzando la loro definizione indicata negli "Elementi" (Casolaro F., 2018).

Primo postulato di Euclide nello spazio piatto:

Per un punto passano infinite rette.

Primo postulato-teorema nello spazio sferico:

Teorema 1. *Per un punto passano infinite geodetiche (equivalenti delle rette).*

Dim. - Poiché una retta (geodetica) dello spazio sferico è ottenuta dall'intersezione della superficie sferica con un piano per il suo centro (che indichiamo con C), osserviamo che fissato un punto A sulla sfera, la retta AC è centro di una stella di infiniti piani che individuano infinite geodetiche ottenute dall'intersezione di questi piani con la sfera.

Secondo postulato di Euclide nello spazio piatto:

Per due punti passa una sola retta.

Secondo postulato-teorema nello spazio sferico:

Teorema 2. *Per due punti passa una sola geodetica (retta).*

Dim. - Fissati due punti A e B sulla superficie sferica, esiste un solo piano per i tre punti A, B, C, che interseca la sfera in una sola geodetica.

Terzo postulato di Euclide nello spazio piatto:

Per tre punti passa un solo piano.

Terzo postulato-teorema nello spazio sferico:

Teorema 3. *Per tre punti passa una sola superficie sferica (equivalente del piano nello spazio piatto)*

Dim. - Dal terzo postulato di Euclide, dati tre punti A, B, P nel piano, esiste una sola circonferenza passante per i tre punti con centro nel punto C intersezione degli assi dei segmenti AB e BP. Di conseguenza esiste una sola sfera di centro C ottenuta dalla rotazione di tale circonferenza intorno al proprio diametro.

Quarto postulato di Euclide nello spazio piatto

Tutti gli angoli retti sono congruenti tra loro.

Quarto 'postulato-teorema' nello spazio sferico:

Teorema 4. Tutti gli angoli, intersezione di due cerchi massimi (geodetiche della sfera) che formano angoli retti, sono uguali.

Dim. - Le proprietà fondamentali dell'uguaglianza fra archi geodetici e angoli, corrispondono ai postulati della congruenza tra segmenti ed angoli.

Se abbiamo una geometria su una superficie sferica, essa sarà diversa da quella del piano, perché è impossibile rendere piana una porzione di sfera senza provocare contrazioni o dilatazioni. Però, è facile verificare che anche sulla sfera valgono, per figure uguali, proposizioni analoghe ai postulati della congruenza nel piano, in quanto la sfera può muoversi liberamente su se stessa come il piano; non valgono le proprietà affini e le proprietà del parallelismo che si avvalgono del V postulato (Casolaro, 2002).

Quella superficie che si può muovere liberamente su se stessa, come accade per la superficie piana, è caratterizzata da una grandezza costante in ogni suo punto: la curvatura K.

La definizione rigorosa di curvatura richiede conoscenze che esulano da un'esposizione elementare. Però, come per i concetti di retta e di piano in geometria euclidea, riteniamo che si possa lasciare all'intuito dello studente di immaginare quelle superfici a curvatura zero (il piano), a curvatura costante (la sfera), a curvatura variabile (ellissoide, o banale esempio dell'uovo) (Casolaro, Santarossa, p. 217).

5 - Le interazioni tra scienza e letteratura

Questo lavoro è dedicato - non a caso - ad una persona, Carlo Sorvino, che non era un matematico, ma comunicava le conoscenze che possedeva in modo semplice avendo intuito le potenzialità della disciplina. Del resto, Carlo era perito industriale, figura professionale che nei decenni del dopoguerra, in merito alle conoscenze matematiche, poteva competere sicuramente con un ingegnere.

Ho scritto 'dedicato non a caso' perché grandi esponenti della cultura italiana hanno dimostrato che, spesso, l'amore per una disciplina non viene necessariamente trasmesso dagli scienziati, ma dai cosiddetti 'mediocri', persone apparentemente lontane dalle doti di genialità dei grandi, ma che hanno una naturale attitudine a trasmettere conoscenze e competenze con umiltà e passione.

In Letteratura, tanti poeti e scrittori hanno richiamato nelle loro opere proprietà matematiche o riferimenti alla disciplina, sia di Aritmetica che di Geometria (Casolaro F., Della Vecchia G. 2020).

Cito due immense figure della nostra letteratura - Dante e Leopardi - che hanno manifestato pareri diversi sulla loro esperienza di apprendimento della matematica.

Nella Divina Commedia è possibile trovare tante significative citazioni alla disciplina con notevoli apprezzamenti per la geometria e la fisica, ma nel Convivio Dante esalta l'Aritmetica paragonandola addirittura al Sole come "SORGENTE DI VITA":

Così come il Sole illumina altri corpi celesti e di essi non è possibile sostenere la vista, così l'Aritmetica illumina e permea tutte le altre discipline scientifiche. Sull'infinità dei numeri l'occhio dell'intelletto non può fermarsi, però che il numero è in sé considerato infinito questo non potremo mai intendere.

Giacomo Leopardi, nella "Storia dell'Astronomia", scritta all'età di dodici anni, pone un problema ancora attuale:

la comunicazione della matematica in modo da renderla non difficile ed alla portata di tutti.

Nello Zibaldone il Leopardi esprime il desiderio di una maggiore conoscenza e padronanza della matematica e manifesta il rammarico di non aver avuto bravi maestri in grado di far apprendere una disciplina così "severa".

All'età di diciassette anni, il Leopardi si allontana dallo studio della matematica, pur essendo convinto della grossa funzione che essa ha nella formazione come si evince da "Lo Zibaldone":

"La pratica delle matematiche, del loro modo di procedere e di giungere alle conseguenze, del loro linguaggio... aiuta

infinitamente le facoltà intellettive e ragionatrici dell'uomo, compendia le operazioni del suo intelletto, lo rende più pronto a concepire, più veloce e spedito nell'arrivare alla conclusione dei suoi pensieri e dell'intero suo discorso; insomma, per una parte assuefà, per l'altra facilita all'uomo l'uso della ragione!"

La differenza dell'apprezzamento per la comunicazione della matematica tra i due grandi poeti trova un riscontro di carattere storico:

Dante è vissuto (oltre che nella grande Firenze) nel periodo dei maestri d'abaco (i maestri citati come "mediocri"), di quegli studiosi, cioè, che organizzavano e legavano, in un unico processo logico, i risultati degli altri.

Leopardi è vissuto nel XIX secolo (nella piccola Recanati), nel periodo dei grandi geni matematici (Gauss, Riemann, Lobachevskij, Weierstrass, Cauchy, Abel, Galois...) che, però, operavano solo nell'ambito della propria disciplina con l'obiettivo del risultato, ma non avevano alcun interesse a trasmettere le proprie conoscenze ai "non addetti ai lavori" (Casolaro F., Della Vecchia G. 2018).

6 - Conclusione

I grandi geni sono le fonti da cui attingere quei risultati che hanno portato allo sviluppo del mondo ed al miglioramento delle nostre condizioni sociali.

Le fonti da cui attingere l'amore per la Matematica e, in generale, per la scienza sono gli "umili" (nel significato più

nobile della parola), docenti i cui strumenti di trasmissione sono la passione, l'amore per gli studenti e la convinzione che sia la Cultura la principale arma per realizzare un mondo migliore.

Bibliografia

Cundari C. (1997). "Disegno e Matematica per una didattica finalizzata alle nuove tecnologie", *Atti del Progetto del M.P.I. e del Dipartimento di Progettazione e Rilievo dell'Università "La Sapienza" di Roma* (11-15 dicembre 1990; 6-10 maggio 1991; 8-12 dicembre 1991).

Loria G. (1921). *Storia della Geometria Descrittiva dalle Origini sino ai giorni nostri*, Milano: Ulrico Hoepli.

Kline Morris (1991). *Storia del pensiero matematico*, Torino: Einaudi Editore.

Casolaro F., Eugeni F. (1996). Trasformazioni geometriche che conservano la norma nelle algebre reali doppie, *Atti del Convegno "Aspetti multidisciplinari della didattica della matematica" - Teramo, 1-3 dicembre 1995. Ratio Matematica n. 1, 1996 - pag. 23-33.*

Casolaro F., Cirillo L. (1996). Le trasformazioni omologiche, *Atti Convegno Nazionale Mathesis "I fondamenti della matematica per la sua didattica" - Verona, 28-30 novembre 1996 - pag. 309-318.*

Casolaro F., Santarossa R. (1997). *Geometrie non euclidee e Geometria differenziale: note didattiche*. Congresso nazionale Mathesis "Attività algoritmiche e pensiero dialettico nell'insegnamento della matematica" - Caserta, ottobre 1997 - Pagine 217-223.

Casolaro F. (2002). Un percorso di geometria per la scuola del terzo millennio: dal piano cartesiano ad un modello analitico su uno spazio curvo, *Atti del Congresso Nazionale Mathesis "La*

Matematica fra tradizione e innovazione: un confronto europeo – 17-19 ottobre Bergamo 2002 – pag.185-198.

Casolaro F. (2003). Le trasformazioni omologiche nella Storia, nell'Arte, nella Didattica, *Atti del Convegno Internazionale "Matematica e Arte: un sorprendente binomio"* Vasto, 10-12 aprile 2003; pagg. 129-148.

Casolaro F., Pisano R. (2006). *"Riflessioni sulla geometria nella Teoria della relatività"*, Atti del XXVI Congresso Nazionale di "Storia della Fisica e dell'Astronomia" (SISFA 15-17 giugno 2006), tenutosi il giorno 15/05/2006 presso la Facoltà di Architettura "Valle Giulia" dell'Università di Roma "La Sapienza". pag. 221-231.

Casolaro F., Pisano R. (2011). *An Historical Inquiry on Geometry in Relativity: Reflections on Early Relationship Geometry-Physics (Part One)*, *History Research - Vol. 1, Number 1, December 2011* - pag. 47-60.

Casolaro F., Paladino L. (2012). Evolution of the geometry through the Arts, *11th International Conference APLIMAT 2012* - in the Faculty of Mechanical Engineering - Slovak University of Tecnology in Bratislava, 7-9 febbraio 2012, pag. 481-490.

Casolaro F. (2014). L'evoluzione della geometria negli ultimi 150 anni ha modificato la nostra cultura. Lo sa la Scuola?, *Atti del Convegno "Euclide...oltre Euclide"* (Castellammare di Stabia, 10-12 maggio 2013) - "Science & Philosophy Divulgation" - DiSciPhil - Fascicolo 1 (2014) - Fondazione "Panta Rei" Numero speciale di Ratio Matematica.

Casolaro F., Cirillo L., Prosperi R., (2015). Le Trasformazioni Geometriche nello Spazio: Isometrie, *Journal of Epistemology, Science e Philosophy* - Number 3 June 2015. Pagine 73-106

Casolaro F., Rotunno A. (2015). Mathematics and Art: from the pictorial art to the linear transformations, *University of Defence - Brno, Czech Republic, ottobre 2015.*

Casolaro F., Cirillo L., Prosperi R. (2016). Groups of Transformations with a Finite Number of Isometries: the Cases of Tetrahedron and Cube, *Ratio-Matematica, Journal of Mathematics, Statistics, and Applications Volume 31 – 2016, pagine 93-110.*

Casolaro F. Della Vecchia G., (2018). La Matematica nella civiltà greca: momenti significativi attuali oggi, *Science & Philosophy, Volume n.6, Issue n.1, 2018.*

Casolaro F. (2018). Quale Geometria per lo spazio fisico, *Quaderni dell'APAV n. 1 – 2018, pag. 57-68.*

Casolaro F., Della Vecchia G., (2018). Mathematics, Arts and Literature, *Science & Philosophy ISSN: 2282-7757 Vol. 6, 2018. Pag.177-186.*

Casolaro F., Rotunno A. (2019). L'ampliamento affine e proiettivo del modello euclideo, *Lavoro presentato al Dipartimento di Architettura dell'Università Federico II di Napoli il 15 novembre 2017 nell'ambito del Convegno "Matematica&Architettura-Fisica e Natura". Pubblicazione Aracne 2019, pagg. 106-122.*

Casolaro F., Sessa S. (2017). Matematica, Architettura, fisica e Natura. *Raccolta dei lavori svolti al convegno M.A.F.N., 17-19 novembre 2017 al Dipartimento di Architettura Università di Napoli "Federico II". Edizione Aracne, pagine 252.*

Casolaro F. (2020). Dalla Geometria euclidea alla Geometria proiettiva. *Periodico di Matematica n. 2 dicembre 2020, pagg. 41-74.*

Casolaro F., Santarossa R. (2020). Quale Geometria nella Scuola di oggi? Analisi storica e questioni didattiche, *Secondo Congresso della Federazione Italiana Mathesis. Formazione didattica e ricerca matematica per gli insegnanti del futuro Pescara 2-4 dicembre 2020, Pagine 217-223.*

Casolaro F. (2021). Quali conoscenze di geometria nella scuola di oggi? *Periodico di Matematica N. 3-4 dicembre 2021, pagg. 19-36.*

Casolaro F., Salzano U. (2022). Le geometrie non euclidee nel mondo reale, *Periodico di Matematica n. 1 marzo 2022*, pagg. 57-87.

Nicotra L. (2003). *La verità in matematica da Gödel a Euclide*. Bologna: in riga edizioni. ISBN 978-88-9364-443-3.

I numeri e le forme che leggono la Natura e ... la Matematica è vita

Amirante Anna*

*Dipartimento di Matematica, Università di Salerno, Italia;
aamirante@unisa.it



Sunto: *Galileo diceva che la matematica era l'alfabeto con cui Dio aveva scritto l'universo, e prima Pitagora affermava che tutto è numero. Esiste una formula, nota come Superformula, che rappresenta le forme della natura, una geometria dinamica che classifica tutti i tipi umani, ed un icosaedro è la forma ideale per descrivere la struttura di un virus. La Matematica interpreta la realtà e si trova ovunque e per questo si è deciso di dedicare ai numeri e alle forme alcuni laboratori per le classi IV e V dei Licei Matematici, un laboratorio PLS e qualche lezione del corso di Matematica Complementare I con la consapevolezza che tali attività didattiche siano necessarie per superare barriere e steccati tra le discipline, e stimolare la formazione del pensiero critico nell'allievo-studente.*

Parole Chiave: *i numeri, virus, volti, interdisciplinarietà.*

Abstract: *Galileo said that mathematics was the alphabet with which God had written the universe, and before Pythagoras stated that everything is number. There is a formula, known as the Superformula, which represents the shapes of nature, a dynamic geometry that classifies all human types, and an icosahedron is the ideal shape to describe the structure of a virus. Mathematics interprets reality and is found everywhere and for this reason it was decided to dedicate to numbers*

and shapes some laboratories for the IV and V classes of the Mathematical High Schools, a PLS laboratory and some lessons of the Complementary Mathematics I with the awareness that such teaching activities are necessary to overcome barriers between disciplines and stimulate the formation of critical thinking in the student.

Keywords: *numbers, viruses, faces, interdisciplinarity.*

1 - La Superformula

Il matematico ed ingegnere francese Gabriel Lamè (1795-1870) elaborò una formula, $(x/a)^m+(y/b)^m=1$, con m razionale, che rappresentava tutta una famiglia di curve al variare dei parametri. Grazie a qualche piccola modifica, il botanico belga Johan Gielis nel 2003 riuscì ad elaborare la Superformula, in quanto rappresentava tutte le forme della natura.

$$\frac{1}{r} = \sqrt[n_1]{\left| \frac{1}{a} \cos\left(\frac{m}{4}\theta\right) \right|^{n_2} + \left| \frac{1}{b} \sin\left(\frac{m}{4}\theta\right) \right|^{n_3}}$$

Come si può osservare, si tratta di un'equazione parametrica di una curva espressa con coordinate polari: r è il raggio e θ l'angolo. Al variare, invece, dei parametri a , b , m , n_1 , n_2 , n_3 , la curva si trasforma sia in forma geometriche, da un quadrato ad un'ellisse, sia in altre figure del mondo animale e vegetale.

La variabile m , invece, definisce zero-goni($m=0$), mono-goni($m=1$) e bi-goni($m=2$) come i triangoli, i quadrati ed i poligoni dal numero di simmetrie rotazionali maggiore, cioè il valore di m permette agli assi ortogonali di piegarsi all'interno e all'esterno come in un ventaglio.

I valori n_1 e n_2 determinano se la forma risulta iscritta o circoscritta da un cerchio unitario; infatti, se $n_2=n_3 < 2$ la forma è iscritta, se $n_2=n_3 > 2$ la forma è circoscritta.

Per esempio, se $n_1=n_2=n_3=2$ ed $m=4$ la formula genera un'ellisse; se $a=b$ si ottiene una circonferenza e se invece $a=b=10$, $m=5$, $n_1=2$ ed $n_2=n_3=7$ si ottiene una figura simile ad una stella di mare a cinque punte.

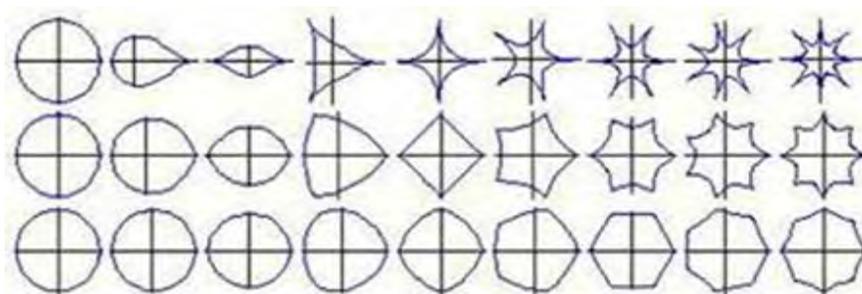


Figura 1: Gli esempi citati sopra

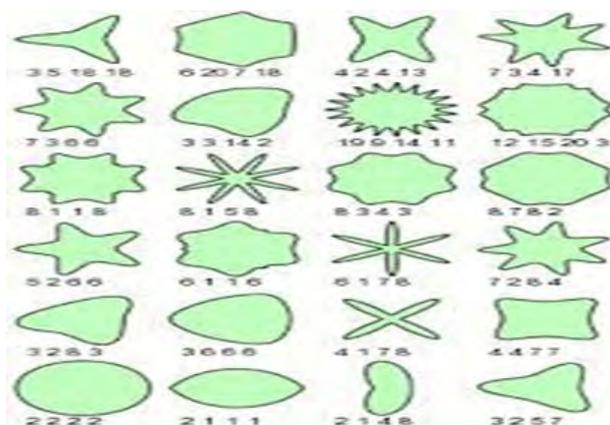


Figura 2: Dalla Nuphar luteum alla stella di mare, dall'alga unicellulare alla foglia di lupino



Figura 3: Superforme nella meccanica dei fluidi (riga superiore), fiori (riga centrale) e diatomee (riga inferiore)

Una formula che con solo 5 parametri permette di semplificare la complessità di alcune forme e di catturare la simmetria che è presente in Natura.



Figura 4: somiglianze fra le figure geometriche e la natura

E' interessante esplorare la straordinaria coincidenza fra le forme della Natura e quelle della Super-formula. Essa ha consentito di sviluppare programmi di grafica assai potenti e

veloci. Infatti, Gielis ha fondato una società di nome GENICAP che permette di sviluppare programmi di grafica potenti e veloci.

Pertanto, dal punto di vista laboratoriale, è stato interessante fornire delle schede-stimolo, dove, alle conoscenze di geometria analitica e di trigonometrie di tipo scolastico, si andava ad analizzare una formula che, grazie a dei particolari parametri, poteva unire e sviluppare entrambe le conoscenze.

2 - La matematica della vita: i virus

Non tutti sanno che i virus sono molto numerosi, ci superano numericamente in un rapporto che è di 1022 virus per ogni uomo, e si trovano in ogni tipo di ambiente; costituiscono la cosiddetta virosfera. Tutti i virus sono costituiti da un involucro di proteine di forma geometrica, detto capsida, che racchiude una molecola di DNA o di RNA: in pratica, un virus è una «scatola» che contiene un'informazione ereditaria. Virus appartenenti a famiglie differenti presentano capsidi e proteine del capsida con strutture tra loro simili, suggerendo che vi siano delle regole di costruzione comuni.

Le proteine che costituiscono il capsida si dispongono in modo **simmetrico**. Nei virus con capsida elicoidale, come il virus del mosaico del tabacco, le subunità proteiche formano un bastoncino elicoidale; mentre nei virus con capsida sferico la simmetria è quella icosaedrale.



Figura 5: virus con capsidale elicoidale

E' interessante scoprire che l'icosaedro, fra i solidi platonici è diventato nel tempo, una figura geometrica fondamentale della matematica pura: nel 1908 Hermite trovò, grazie ad esso, il modo di risolvere le equazioni di quinto grado.

Ma la sua importanza crebbe ancor di più quando nel XX secolo ci furono applicazioni dell'icosaedro nel mondo reale in quanto si osservò che poteva presentarsi in natura; infatti con la diffusione della microscopia elettronica, diventò una presenza costante negli studi dei virus rimanendo la forma ideale per descriverne la struttura.

La struttura icosaedrica non si limita a determinare la forma finale del virus, ma anche la disposizione delle unità proteiche, ovvero il capsidale. L'involucro icosaedrico di un virus è composto da serie triangolari di capsomeri, incastrati a formare le facce di un icosaedro. Ma se guardiamo più da vicino c'è dell'altro: le file di capsomeri possono essere distorte in modo che alcune, arrivate al bordo del triangolo, si piegano e proseguono nel triangolo successivo. La natura non ha difficoltà nel creare tali forme, ma in ambito matematico possiamo dire che si tratta di oggetti complessi. Il primo passo per comprendere tali strutture è decifrare il loro rango matematico ed individuare le caratteristiche comuni.

Ogni capsomero è in genere circondato dai sei altri capsomeri (esameri) o da cinque (pentameri). Questa condizione è il risultato di un vincolo di tipo geometrico: se rappresentiamo il capsidale del virus come un poliedro,

ponendo i vertici in un capsomero e unendo i capsomeri adiacenti come fossero lati, allora gli esameri diventano i vertici di una figura a 6 lati, e i pentameri vertici di una figura a 5 lati. Basta questo a imporre condizioni matematiche sul numero possibile di capsomeri.

Leonhard Euler aveva scoperto la formula che mette in relazione il numero di facce, di lati e di vertici di un solido, per qualsiasi poliedro topologicamente riconducibile ad una sfera: $F-L+V = 2$.

Caspar e Klug approfondirono questi indizi topologici esaminando prima i virus elicoidali e poi quelli icosaedrici.

Il problema da loro riscontrato era quello di riunire unità identiche in modo da creare una forma che si avvicinava ad una sfera, tenendo a mente che il rapporto tra ciascuna unità e quelle adiacenti sarà probabilmente limitato dai legami chimici disponibili.

Si scopre, allora, che il numero di unità in un virus a simmetria perfetta deve essere 12, 20 o 60. Eppure, nessun virus tra quelli noti a Caspar e Klug, presentava questi valori e così considerarono una famiglia non convenzionale di solidi, gli pseudo-icosaedri, solidi che somigliano agli icosaedri, ma sono meno regolari. Ma la teoria di Caspar e Klug non funzionava per tutti i virus.

All'inizio del secolo, la matematica di origini tedesche Reidun Twarock sviluppò una teoria più generale della geometria dei virus basata su principi di simmetria molto simili alla teoria dei gruppi dell'icosaedro, differenziandosi dalla geometria a 3 dimensioni in quanto si sviluppava su 4. L'introduzione della quarta dimensione fornisce, quindi, informazioni importantissime su come i virus assemblano le

loro unità proteiche. Ad esempio, la propensione dei virus a subire mutazioni genetiche per un nonnulla è ben descritta da questi spazi multidimensionali.

2.1 - La cupola geodetica

Tutto ciò fu di ispirazione per l'architetto Buckminster Fuller, il quale, in virtù del suo interesse per le forme geometriche, inventò la cupola geodetica. Secondo Fuller non era possibile costruire una cupola geodetica con triangoli equilateri e disposti per sei intorno a un vertice perché in tal caso avrebbero fornito una superficie piana. Egli comprese che i triangoli per essere incastrati in una sfera dovevano essere "quasi" equilateri, sebbene in questo modo la simmetria non fosse perfetta. Pertanto, l'icosaedro forniva una tassellazione di una superficie curva come la sfera.

Analizziamo il procedimento: prendiamo un icosaedro ed inscriviamolo all'interno di una sfera da tassellare; proiettiamo dal centro della sfera i vertici ed i punti medi degli spigoli dell'icosaedro sulla superficie della sfera stessa; colleghiamo i punti ottenuti con segmenti: abbiamo ottenuto la struttura geodetica. Osserviamo che il numero dei vertici della geodetica dipende dal numero di parti in cui dividiamo gli spigoli dell'icosaedro che abbiamo inscritto nella sfera prima che lo proiettiamo su di essa.

Tale struttura è una delle più efficaci, dal punto di vista costruttivo, in quanto permette la copertura di superfici molto estese utilizzando unità modulari piccole con un grande efficacia statica ed una bellissima simmetria presente in tutte le direzioni in cui si estende. Ciò dà grande distribuzione dei carichi che ci permette di immaginare anche un percorso di

acqua che scorre e si dirama e converge in modo simmetrico in tutte le porzioni e direzioni.

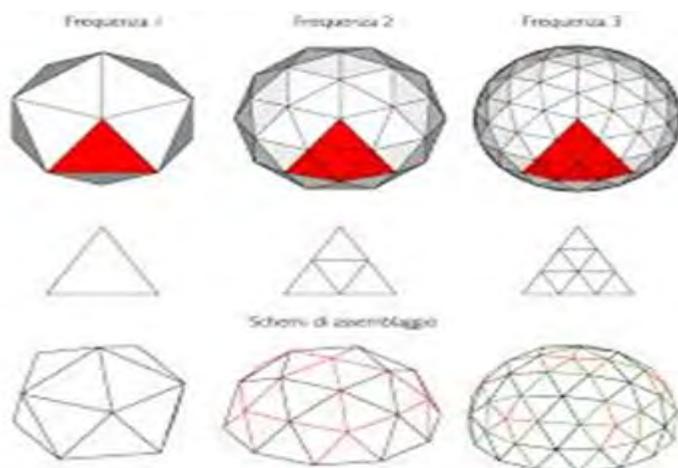


Figura 6: schema di assemblaggio di una cupola geodetica

Non a caso, anche Salvator Dalì aveva scelto questa forma per rappresentare la sua Ultima Cena, simbolo iconologico tra fede ed inconscio, perfezione geometrica di proporzioni, dove, ancora una volta, un solido platonico, il dodecaedro, questa volta, viene inscritto in una sfera, che rappresenta la perfezione cosmica, l'armonia dei cieli; il Cristo trasfigurato con le braccia aperte salva l'umanità rigenerata a vita nuova.



Figura 7: Ultima Cena di Salvator Dalí

Anche in questo caso le attività laboratoriali hanno avuto degli agganci con biologia, matematica ed arte con delle schede-stimolo fatte di immagini con un lavoro prima personale, poi con un pari seguito da una revisione, poi a gruppi con un'autovalutazione finale.

3 - La matematica dei volti

Dalla prospettiva allo studio dei corpi umani ed in particolare dei volti il passo è breve. Infatti, per Albrecht Dürer la passione forte per gli studi geometrici mentre studiava a Bologna, in particolare l'opera di Vitruvio, lo porterà alla realizzazione della famosa *Melanconia*, vero trionfo dei suoi interessi matematici che si intrecciano con interpretazioni alchemiche, rappresentati dal poliedro tronco e dal quadrato magico. Egli affermava che *l'arte senza conoscenze è un miscuglio casuale di imitazione sconosciuta, fantasia irrazionale e pratica ciecamente accettata*. Dopo Leonardo da Vinci o Leon Battista Alberti, celebre per il suo personale modo di misurare le forme umane per elevarle alla

perfezione(*exempeda*), nessuno si era spinto così tanto come Dürer. Egli era convinto di aver trovato una classificazione dei tipi umani attraverso una geometria dinamica. Con un reticolo quadrettato sottopose il foglio a “distorsioni” trasformando le fattezze dei volti e descrivendole matematicamente. Non a caso, il suo trattato, *Unterweisung der Messung*, verrà citato sia da Galileo Galilei che da Giovanni Keplero. Quest’idea verrà ripresa dal naturalista scozzese D’Arcy Wentworth Thompson che studiò animali, mascelle, scheletri di pesci riportandole su fogli quadrettati ed ipotizzando che ogni immagine si potesse ottenere da un’altra grazie a trasformazioni geometriche, senza preoccuparsi della loro concreta esistenza: alcuni esistono, altri sono esistiti o estinti, altri sono solo esseri ipotetici: la Natura li può produrre oppure no!!! Magari la Natura li deve ancora produrre: la geometria ha più fantasia!



Figura 8: Melanconia di Albrecht Dürer

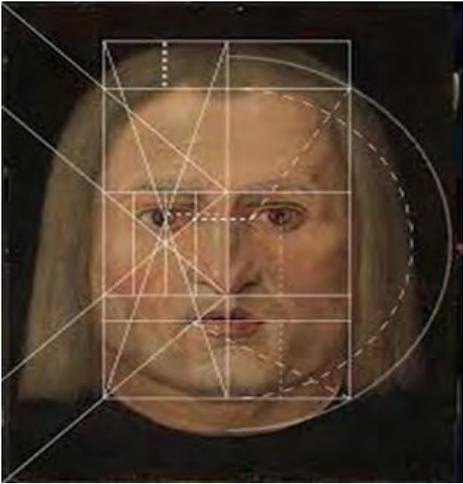


Figura 9: la costruzione delle teste di Albrecht Dürer

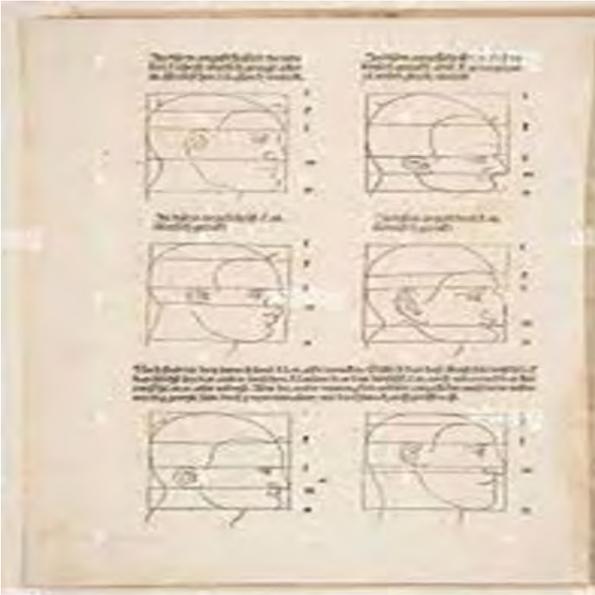


Figura 10: schizzi sui profili di Albrecht Dürer

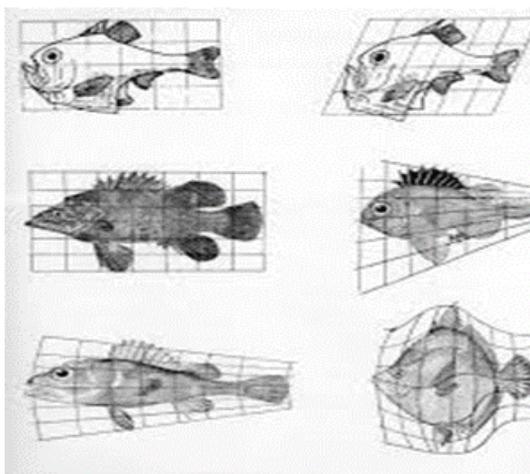


Figura 11: immagini di trasformazioni di pesci D'Arcy Thomson

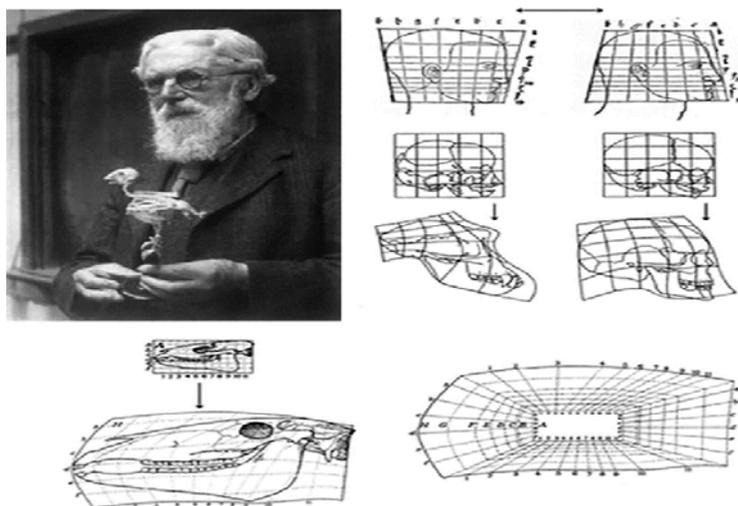


Figura 12: D'Arcy Wentworth Thomson e la sua teoria geometrica

4- Conclusioni

Il modello didattico utilizzato si basa sul costruttivismo (Vygotsky, L. S., 1962) e sulle teorie di Habermas, intesi come strumenti in grado di favorire gli approcci ad una realtà sempre più complessa ed in costante trasformazione.

E', infatti, indubbio, che l'acquisizione di nuove informazioni devono essere il risultato di esperienze di interazione degli studenti con docenti e ricercatori, i quali svolgono il ruolo di mediatori semiotici ed insegnano i metodi che permettano di cogliere le mutue relazioni e le influenze reciproche tra le parti e il tutto in un mondo, appunto, complesso. E ciò in quanto, come sostiene B. D'Amore:

“occorre sviluppare nello studente, come fine ultimo dell'educazione, il gusto a far uso delle proprie competenze, ad implicarsi nel processo di costruzione della propria conoscenza, del proprio sapere, della propria educazione, ad accettare la devoluzione” (D'Amore e al., 2003).

E per competenza si deve intendere proprio ciò che suggerisce l'etimologia del termine:

CUM-PÈTERE: UNIR/E/SI PER RAGGIUNGERE UNA META, dove

CUM: Insieme, unione di..., tendenza a metter/e/si assieme, ecc.

PÈTERE: andare, diriger/e/si verso... uno scopo, un fine, un progetto, un intento, domande, problemi.

Inoltre, risulta essere necessario stimolare la formazione del pensiero critico nell'allievo-studente. Non a caso, si tratta di una finalità largamente perseguita nei percorsi del progetto Liceo Matematico con la ricerca di tematiche interdisciplinari

in cui la matematica svolge il ruolo di “ponte” tra le due culture. Infatti, la sperimentazione del Liceo Matematico prevede nuove metodologie didattiche che tendono a far emergere la dimensione umanistica (Rogora E., Tortoriello F.S., 2018) della matematica e della geometria.

La matematica è una scienza esatta ed è proprio per questo che siamo sempre sicuri di sbagliare. Mi piace credere alle attitudini matematiche di tanti animali, come per le api esploratrici che comunicano alle bottinatrici la direzione e la distanza tra l'alveare e un giacimento di polline (dimostrato dal premio Nobel Karl von Frish) e che quelle operaie costruiscono alveari a celle esagonali perché è il modo ottimale per tassellare un piano. E quanta matematica nelle piastrelle, litografie, disegni di Maurits Cornelius Escher dalla falsa prospettiva, all'infinito, alle simmetrie, alle geometrie non euclidee: è la crisi dei fondamenti di cui parla Frege o è quella fantasia della Natura matematica?

Bibliografia

Capone,R., Rogora,E., Tortoriello,F.S., (2017), La matematica come collante culturale nell'insegnamento. *Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana* 2(3), pp. 293-304.

Castelnuovo,E., (1963), *Didattica della matematica*, La Nuova Italia Editrice.

D'Amore, B. (2000). Oscar Reutersvärd. In A. Bonfiglioli & C. Valentini (Eds.), *Matematica, arte e tecnologia: da Escher alla computer graphics* (pp. xix-xxi). Bologna: Aspasia.

D'Amore, B., (2015), *Arte e matematica: Metafore, analogie, rappresentazioni, identità tra due mondi possibili*. Bari: Edizioni Dedalo.

D'Amore, B., (2023), *Matematica dappertutto. Percorsi matematici inusuali e curiosi*. Bonomo editore.

D'Arcy Thomson, W., (1969), *Crescita e forma*. Torino, Boringhieri.

Emmer, M., (1998, 1999, 2000). *Matematica e cultura*. Springer Italia, Milano.

Ernst, B. (2007). *Lo specchio magico di M.C. Escher*. Edizione Taschen.

Habermas, J. (2001). *Verità e giustificazione*. Editore Laterza.

Morin, E. (2017). *La sfida della complessità*. Le Lettere.

Panofsky, E. (1967). *La vita e le opere di Albrecht Durer*. Milano, Feltrinelli.

Rogora, E., Tortoriello, F.S., "Interdisciplinarity for learning and teaching mathematics". *Bolema*, 35 (70), 2021, 1086-1106.

Rogora, E., Tortoriello, F.S., "Matematica e cultura umanistica", *Archimede* 2018 (2), 82-88.

Vygotsky, L. S. (1962). *Thought and language*. Cambridge, MA: MIT Press.

Il problema della Brachistocrona in un percorso interdisciplinare tra latino e matematica

Francesca Coppa *Piera Filippi**

*Dipartimento di Matematica, Sapienza Università di Roma, Italia

** Liceo Scientifico Plinio Seniore - Roma, Italia



Sunto:*In questo lavoro presentiamo una proposta didattica riguardante percorsi comuni tra Matematica e Latino per i Licei classici e scientifici. Attraverso lo studio di alcuni testi in lingua latina, che testimoniano il passaggio al calcolo infinitesimale tra Seicento e Settecento, viene analizzato il problema della brachistocrona, dal tentativo di risoluzione da parte di Galilei, nei Discorsi, all'analisi delle risoluzioni, avanzate dai fratelli Bernoulli negli Acta Eruditorum del 1697. Riportiamo le osservazioni, a valle della sperimentazione, condotta nell'a.s. 2023/24 in una classe Quinta del Liceo Scientifico, in un modulo di 22 ore.*

Parole Chiave: *Brachistocrona, Latino, Galilei, Bernoulli, Storia della Matematica*

Abstract: *We present an educational proposal aimed at introducing an activity exploiting synergistically Mathematics and Latin in the Liceo Classico and Liceo Scientifico, where both subjects are curricular. Through the study of the original texts in Latin, which testify the transitioning towards infinitesimal*

calculus between the Seventeenth and Eighteenth centuries, we analyze the problem of the brachistochrone, from the first attempt of a resolution by Galileo, published in the "Discourses", to the solutions proposed by the Bernoulli brothers, published in the Acta Eruditorum of 1697. We also report on the outcomes of the related classroom activity, conducted in a Fifth Class (13th year) in a 22 hours module.

Keywords: *Brachistochrone, Latin, Galilei, Bernoulli, History of Mathematics.*

1 - Introduzione

In questo lavoro presentiamo una proposta didattica riguardante percorsi interdisciplinari tra latino e matematica. La cornice di riferimento di questo lavoro è la ricostruzione del pensiero scientifico e matematico attraverso l'analisi dei testi originali scritti in latino, e del latino stesso, come lingua della scienza, nella sua evoluzione temporale. Sul piano matematico si tratta di esplorare lo sviluppo di concetti matematici anche attraverso l'evoluzione del lessico specialistico. Il latino con il quale vengono scritti i testi scientifici diventa nel tempo più semplificato, come del resto accade oggi con l'inglese scientifico, proprio per permettere una trasmissione dei contenuti più ampia e meno ambigua. Questa semplificazione porta vantaggi anche allo sviluppo e alla comunicazione della matematica, che a sua volta deve adeguare al nuovo linguaggio la descrizione degli oggetti di cui tratta.

Il nostro scopo è quello di presentare agli studenti, nella sua evoluzione storica ed in modo interdisciplinare, uno dei problemi classici della matematica, la Brachistocrona, ripercorrendo la Rivoluzione Scientifica del 1600-1700 ed assaporandola dai testi originali, attraverso l'analisi di alcuni

passi tratti dai Discorsi e dimostrazioni di Galilei del 1638 e delle dimostrazioni proposte dai fratelli Bernoulli negli *Acta Eruditorum* nel 1697. Quello del concetto di limite è un problema che porta al suo interno ostacoli di natura epistemologica sia legati alla storia della sua evoluzione sia al linguaggio con il quale è stato affrontato (Brousseau 1976, D'Amore 2023).

Il percorso realizzato permette di evidenziare i limiti essenziali della matematica, che dall'antichità era arrivata fino a Galilei, nell'affrontare problemi di fisica, i quali solo con l'invenzione da parte di Newton e Leibnitz del calcolo differenziale hanno trovato una soluzione. I fratelli Bernoulli fanno parte di quel gruppo di matematici del 1700, che in pochi decenni rivoluzionano e costruiscono la nuova matematica.

Quello della Brachistocrona è un sofisticato, pur se all'apparenza molto naturale, problema di minimo, la cui soluzione è una curva, non un valore numerico. Vive dunque in un contesto matematico affatto nuovo, che ha bisogno di un nuovo calcolo. La proprietà di minimo della curva si esprime infatti tramite un'equazione differenziale che descrive le relazioni tra gli elementi infinitesimali della curva.

L'uso delle fonti originali, ed in più in Latino, in un contesto didattico, costituisce un'impresa particolarmente ambiziosa, ma al contempo gratificante e che approfondisce sostanzialmente la comprensione matematica. "La lettura delle fonti primarie può aiutare a chiarire ed estendere ciò che si trova nella letteratura secondaria, discernere le tendenze generali nella storia di un argomento mettere in prospettiva alcune delle interpretazioni, giudizi di valore o

anchetravisamenti riscontrati in letteratura” (Jahnke, 2002). La lettura di testi storici è capace di generare uno shock culturale, mediante il quale è possibile sperimentare la *sostituzione*, il *riorientamento* e *l’orientamento culturale*, come si usa dire nel descrivere gli effetti dell’uso delle fonti storiche nella didattica. La lettura però non deve essere teleologica, cioè il testo non deve essere analizzato solo dal nostro punto di vista e con le nostre conoscenze attuali. I testi vanno contestualizzati nel loro tempo. E’ chiaro che i concetti matematici hanno una genesi ed una evoluzione, la storia ci aiuta a collocare lo sviluppo della matematica nel contesto scientifico, tecnologico e sociale di un tempo e uno spazio particolari. (Jahnke, 2000).

Il percorso si completa con la produzione di un dibattito scientifico sul problema della brachistocrona da parte degli studenti, venendosi così a creare una situazione didattica nella quale lo studente affronta personalmente il problema, rielaborandone la risoluzione nella sua evoluzione storica in modo da raggiungerne la devoluzione (Brousseau 1990) cioè l’acquisizione di competenza attraverso l’elaborazione personale dello studente.

2-Aderenza alle Indicazioni Ministeriali

Coerentemente con le Indicazioni Nazionali (Linee Generali e Competenze per l’insegnamento della Matematica) si vuole fornire allo studente una visione storico-critica dei rapporti tra le tematiche principali del pensiero matematico e il contesto filosofico- letterario, scientifico e tecnologico. In particolare, la risoluzione di problemi di minimo e massimo fa parte della

rivoluzione scientifica del Seicento che ha portato alla matematizzazione del mondo fisico e che ha condotto alla formulazione della matematica moderna e a un nuovo processo di matematizzazione che investe nuovi campi, cambiando così il volto della conoscenza scientifica. In entrambi gli indirizzi liceali, sia classico sia scientifico, uno degli obiettivi specifici di apprendimento del quinto anno è quello di comprendere il ruolo del calcolo infinitesimale in quanto strumento concettuale fondamentale nella descrizione e nella modellizzazione di fenomeni fisici o di altra natura. La prospettiva storica, unita all'analisi lessicale, aiuta a enucleare e far emergere i nodi concettuali ed epistemologici che il passaggio alle tecniche infinitesimali contiene.

3-Il progetto didattico e la metodologia

Il percorso è rivolto ad una classe quinta di liceo scientifico o di liceo classico. Nella tabella di seguito riportiamo lo schema didattico.

Progettazione del percorso didattico	
Durata	22 ore
Finalità	<ul style="list-style-type: none"> • Accostarsi ai problemi matematici e fisici di che hanno condotto alla formulazione del Calcolo Infinitesimale alla fine del Seicento. • Approfondire lo studio della lingua latina cogliendone il valore di veicolo della cultura scientifica, attraverso l'esame di alcuni testi fondamentali.

	<ul style="list-style-type: none"> • Riconoscere l'evoluzione e la costruzione del linguaggio matematico attraverso il Latino. • Apprezzare la dimensione storica e culturale delle scoperte scientifiche nello sviluppo della cultura Europea moderna.
Obiettivi didattici	<ul style="list-style-type: none"> • Comprensione della necessità di nuovi strumenti di calcolo infinitesimale per la risoluzione dei problemi matematici e fisici. • Riconoscimento dei neologismi legati all'introduzione dei nuovi concetti matematici.
Prerequisiti	<p>Latino: strutture morfosintattiche della lingua latina; caratteristiche stilistico- retoriche dei generi letterari nella loro evoluzione storica.</p> <p>Matematica: similitudine, retta e curva nel piano cartesiano, elementi di trigonometria e di ottica geometrica. Utilizzo base di GeoGebra.</p>
Moduli didattici	<ul style="list-style-type: none"> • Modulo 1 (10 ore): Introduzione del problema e proposta di risoluzione da parte di Galilei “[...] <i>non per brevissimam lineam, nem pe per rectam, sed per circuliportionem [...]</i>”. • Modulo 2 (6 ore): Sfida lanciata da Johann Bernoulli “<i>Problema novum ad cujus solutionem Mathematici invitantur[...]</i>,” per la determinazione della curva di <i>discesa minima</i> nel caso in cui un punto materiale si muova senza attrito su una linea piana e sotto l'azione del solo peso: due proposte di risoluzione • Modulo 3 (6 ore): <i>Novissima dissertatio discipulorum.</i>
Strumenti	<ul style="list-style-type: none"> • Software di geometria dinamica GeoGebra;

- | | |
|--|--------------------------------------|
| | • Uso delle fonti dirette in Latino. |
|--|--------------------------------------|

3.1 - La metodologia

La didattica laboratoriale potrà svolgersi in ore di compresenza del docente di latino e del docente di matematica, che seguono gli studenti in un percorso di traduzione filologica di alcuni brani del testo considerato e che li conducono ad individuare il linguaggio specifico che non è di provenienza classica. Viene evidenziata la plasticità della lingua latina per la definizione di concetti matematici nuovi. Nel libro GeoGebra¹(codice HKWK UQQS) predisposto che unisce la parte testuale e quella di geometria dinamica, sono riportate tutte le attività relative a ciascun modulo, ed è uno strumento che guida lo studente nelle sue esplorazioni.

Le lenti di osservazione sono le seguenti:

- individuazione e analisi di termini “nuovi”, derivati dalla lingua latina, e loro trasposizione in italiano.
- confronto tra la lingua latina del 1600/1700 e la lingua latina classica, limitatamente all’uso di alcune forme lessicali e sintattiche.
- individuazione di termini in uso nel linguaggio scientifico attuale.
- analisi di processi dimostrativi del tempo e trasposizione all’attuale.

¹<https://www.geogebra.org/classroom/hkwkuqqs>

4–Il percorso didattico

4.1 – Modulo 1. Introduzione del problema e proposta di risoluzione da parte di Galilei

Inizialmente, si analizza la curva cicloide ordinaria che sarà la soluzione del problema, al fine di fornire agli studenti gli strumenti che saranno loro necessari nella costruzione del percorso. Si prendono poi in esame alcuni passi scelti della Giornata Terza del “Discorsi e Dimostrazioni” laddove viene per la prima volta posto il problema della brachistocrona nel contesto della soluzione del moto accelerato.

Il modulo è strutturato nelle seguenti quattro attività:

- Attività 1 (2h): Introduzione del problema.
- Attività 2 (2h): Presentazione dell’idea risolutiva di Galilei e lettura del paragrafo introduttivo *De motu naturaliter accelerato*
- Attività 3 (4h): Analisi dei Teoremi I, II, III, IV e VI del *De motu naturaliter accelerato*
- Attività 4 (2h): Analisi del Teorema XXII e *Scolium*, del *De motu naturaliter accelerato*

4.1.1 – Attività 1. Introduzione del problema

Viene presentata agli studenti la cicloide come curva luogo, e anche con l’ausilio di GeoGebra ne vengono osservate e verificate le proprietà principali.

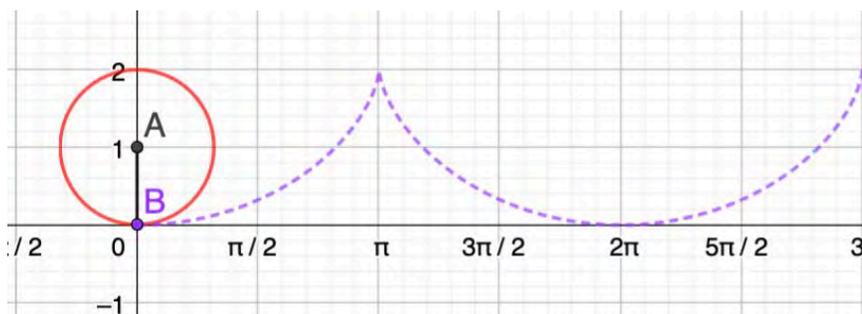


Fig. 1- la cicloide ordinaria

E' l'occasione per condurre un approfondimento sulle forme di rappresentazione parametriche e polari delle curve, accanto a quelle cartesiane implicite, più note agli studenti.

4.1.2 – Attività 2. Presentazione dell'idea risolutiva di Galilei lettura del paragrafo introduttivo *De motu naturaliter accelerato*

Si comincia con la trattazione del problema in chiave storica. Nel 1638 Galilei nei "Discorsi e Dimostrazioni" formula ed affronta il problema della brachistocrona, fornendo come soluzione, brillante ma non corretta, l'arco di circonferenza. Intuisce infatti correttamente che la brachistocrona deve essere una curva e non può coincidere con il piano inclinato che collega i punti iniziale e finale. Non può tuttavia ricavare la cicloide in assenza degli strumenti matematici appropriati, cioè il calcolo infinitesimale che permette di esprimere una curva non come luogo ma tramite le proprietà differenziali di curvatura.

La chiave risolutiva per Galilei è nel teorema XXII nel quale egli afferma che per andare dal punto D al punto C è più

breve percorrere prima il piano maggiormente inclinato DB e poi quello meno inclinato BC (Fig. 2, sinistra).

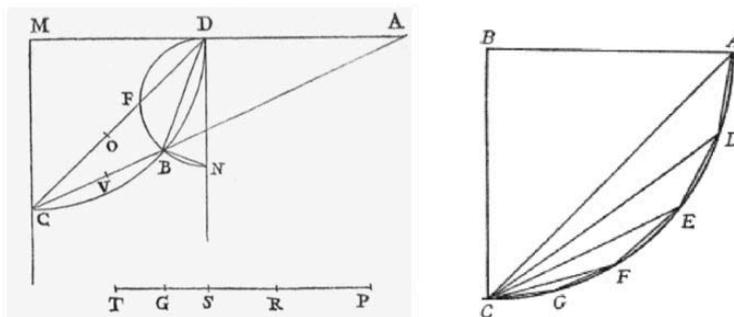


Fig. 2- Teorema XXII(sinistra) e *Scholium* (destra), da Galilei G., *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, in Leida, 1638

Nello *scholium* del teorema 22 (Fig. 2, destra), ragionando in maniera iterativa afferma quindi che,aggiungendo un numero arbitrario di altri punti intermedi, il tempo di percorrenza della curva diminuisce. Deduce così che il “movimento più veloce” (*citiussitmotus*) per andare da A a C avviene lungo un arco di circonferenza, che rappresenta il limite della poligonale generata dal procedimento iterativo sopra descritto. L'ingegnosità e la novità di questo procedimento di risoluzione del moto viene discussa con gli studenti evidenziando gli elementi di rivoluzione del pensiero matematico e di analisi fisica.

Si procede poi con la lettura del paragrafo introduttivo *De motu naturaliter accelerato*, con lo scopo di riconoscere gli elementi precipui del nuovo linguaggio scientifico.

Ad esempio, si fa notare l'utilizzo dell'espressione *gradus velocitatis*, di provenienza medievale,in alternativa a

momentum velocitatis per indicare la velocità istantanea. Si evidenzia, inoltre, l'uso/l'introduzione dei due termini *naturaliter* (dall'osservazione della natura) e *uniformiter* (legato alla suddivisione dei tempi in modo uniforme). Al fine di comprendere meglio il seguito si affronta anche la definizione del moto equabile ed il teorema IV, entrambi nel *De motu locali*, giornata terza.

4.1.3 – Attività 3. Analisi dei Teoremi I, II, III, IV e VI del *De motu naturaliter accelerato*

Si prosegue il percorso guidando gli studenti nell'interpretazione e trasposizione in linguaggio attuale di alcuni teoremi dal testo originale. È un'occasione per gli studenti di cimentarsi nella produzione di dimostrazioni di tali teoremi utilizzando le loro competenze scolastiche, avendo così modo di incontrare i nodi concettuali alla base dello studio del moto e della sua rappresentazione matematica.

Particolare attenzione si pone sul teorema III, nella quale la dimostrazione è presente un tentativo nascosto di ricorrere a concetti differenziali. In questa dimostrazione viene usato inoltre l'assioma che Galilei, in mancanza dei principi della dinamica che Newton successivamente individuerà e svilupperà, deve porre a fondamento della sua teoria, puramente cinematica, del moto accelerato e cioè l'uguaglianza delle velocità istantanee a parità di quota su piani diversamente inclinati². Un artificio di cui Galilei discute e di cui riconosce la validità nella consistenza delle sue

²Vedasi anche Galilei, a cura di Enrico Giusti

conseguenze con le osservazioni. Un procedimento di confronto fra assunti e risultati sperimentali che è parte della Fisica moderna.

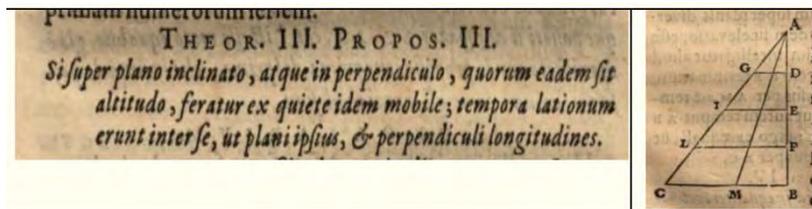


Fig. 3- Teorema III, da Galilei G., Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze, in Leida, 1638

Con questo teorema Galilei dimostrò che i tempi di percorrenza lungo un piano inclinato, AC, e della caduta verticale, AB, sono proporzionali alle loro lunghezze. Il tentativo di passaggio al limite emerge quando suppone (*intelligentur enim quod libet lienae*) di condurre le parallele da tutti i punti di AB verso AC "expunctis omnibus lineae AB usque ad lineam AC", realizzando così una divisione in infinitesimi di un segmento. I momenti/gradi di velocità nei punti corrispondenti alla stessa altezza saranno sempre uguali tra loro per l'assioma di cui sopra. Pertanto, anche i due spazi AC e AB vengono percorsi con gradi di velocità uguali. Avendo dimostrato nel Teorema I³ del *De motu aequabilis*, se due spazi vengono percorsi da un mobile che si muova con i medesimi gradi di velocità qual è la proporzione tra gli spazi, tale è quella tra i tempi, espande il calcolo ad un segmento finito, che corrisponde al nostro differenziale, e su cui applica le proporzioni proprie del moto uniforme, considerandovi

³Teorema I, giornata terza, *De motu aequabili*, p 151 dell'opera

quindi la velocità come costante. Arriva dunque alla conclusione esatta senza poterne dare una dimostrazione matematica formalmente rigorosa.⁴

Interpretando col linguaggio attuale, se indichiamo gli infiniti punti interni x_i su AC e y_i su AB, avremo, per le velocità, che $v_{x_i} = v_{y_i}$. Da cui si ha, per i tempi, che $t_{AC}:t_{AB} = AC:AB$ da cui segue $\frac{AC}{AB} = \frac{dx_i}{dy_i} = \frac{dt_{x_i}}{dt_{y_i}}$ e quindi $dt_{x_i} = \frac{dx_i}{dy_i} dt_{y_i}$. Dall'integrazione di questa equazione differenziale si determinerebbe il rapporto tra gli intervalli di percorrenza $\Delta t_{x_i} = \frac{AC}{AB} \Delta t_{y_i} = \frac{1}{\sin \alpha} \Delta t_{y_i}$, con $\alpha = \widehat{ACB}$.

4.1.4 – Attività 4. Analisi del Teorema XXII e *Scolium* del *De motu naturaliter accelerato*

Avendo nelle attività precedenti acquisito i metodi propri di Galilei, si affronta in dettaglio la dimostrazione proposta da Galilei del teorema XXII, che individua nel sistema dei due piani a diverse inclinazioni, il percorso migliore rispetto al singolo piano. La dimostrazione non è di agevole lettura anche a causa del formalismo adottato per indicare i tempi, con segmenti che non hanno un riferimento esplicito alla denominazione dei segmenti percorsi. Con la guida del docente, si traspone quindi la dimostrazione in un linguaggio più familiare.

⁴ Vedasi anche Galilei, a cura di Enrico Giusti

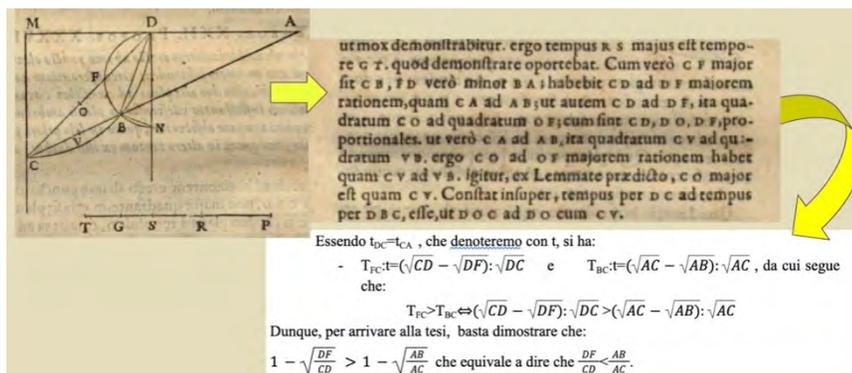


Fig. 4- Trasposizione del teorema XXII

L'attività si completa con l'analisi dello *scholium* dove si ritrova l'idea implicita di passaggio al limite che può evocare il metodo di esaustione.

Si evidenzia quindi come il ragionamento di Galilei non sia rigoroso. L'iterazione che propone (da $t_{AC} > t_{AD} + t_{DC}$ a $t_{DC} > t_{DE} + t_{EC}$, *cf.* fig. 4) non è corretta in quanto non tiene conto che nel secondo punto D (a differenza che in A) il mobile giunge con velocità iniziale diversa da zero, e dunque in una condizione diversa dalla prima iterazione.

Si evidenzia infine come la sua dimostrazione individua, correttamente che la circonferenza è una curva migliore rispetto al piano inclinato relativamente a tale problema, ma non dimostra che sia la migliore tra le infinite possibili.

4.2 - Modulo 2. La sfida lanciata da Johann Bernoulli "Problema novum ad cujussolutionem Mathematici invitantur"

I testi di riferimento per lo svolgimento di tale modulo sono estratti dagli *Acta Eruditorum* del 1696 e 1797.

Il modulo prevede lo svolgimento delle seguenti attività.

- Attività 1 (3 h): La sfida di Johann e la sua proposta di risoluzione.
- Attività 2 (3 h): La proposta di risoluzione del fratello Jakob.

4.2.1 – Attività 1. La sfida di Johann e la sua proposta di risoluzione

Prima di entrare nel cuore del problema, ci si sofferma sull'importanza degli *Acta Eruditorum*, periodico mensile fondato da Otto Mencke e Gottfried Leibniz pubblicato per un secolo intero, dal 1682 al 1782, in Germania. E' una delle prime riviste scientifiche di area germanica e nasce con la finalità di diffondere le ultime scoperte scientifiche di tutta Europa. E la decisione della lingua da usare cade per questo sul Latino. Si nota qui di passaggio come dal 1943 al 1945, una importante rivista scientifica italiana, le Memorie della Società Astronomica Italiana, decisero, vedendo cadere l'egemonia della lingua tedesca in campo scientifico, di pubblicare i loro abstract in Latino. Negli *Acta* apparvero studi importantissimi per lo sviluppo del pensiero scientifico, come quello di Leibniz sui fondamenti del calcolo infinitesimale⁵. Si tratta dunque di una collezione unica di testi scientifici latini di epoca moderna che bene si prestano alla analisi e allo studio interdisciplinare.

Una volta analizzato dunque il testo della sfida lanciata da Johann negli *Acta Eruditorum del 1696* si procede nell'analisi della dimostrazione proposita dallo stesso negli *Acta del 1697*.

⁵ Cfr. Wikipedia

Considera il mezzo FGD delimitato dalla retta orizzontale FG, sulla quale giace il punto radiante A. La retta HO (man mano che scorre) divide i due strati (ad es. sopra mezzo meno denso e sotto mezzo più denso). Il punto A sta nella parte meno densa e B sta nella parte più densa.

Egli considera la curva AHE, di asse AD, come curva data nella quale ogni applicata (ordinata) CH (con C e H variabile) di AC indica la densità media all'altezza AC che avrebbe un mezzo ottico, oppure le velocità del raggio, o della palla, in M (sulla curva AMB che risolve il problema).

Pone dunque, $CH = t$, $GO = AC = x$; $CM = y$ (cioè x e y sono rispettivamente l'ordinata e l'ascissa del punto M). Vale la pena di evidenziare che l'uso dei nomi delle coordinate è invertito rispetto a quello al quale siamo abituati.

Introduce poi i differenziali $Cc = Mn = dx$; $nm = dy$; $Mm = ds$; e a una costante arbitraria, poi stabilita essere il diametro di GLK, ottenendo che $\sin\theta_2 = \frac{nm}{Mn} = \frac{dy}{ds}$. Tale rapporto, però, per la legge di Snell, deve essere proporzionale alla velocità del raggio nel punto C, perciò ne deduce che $dy: ds = t: a$ e quindi $dy: t = ds: a$ da cui segue l'equazione $a \cdot dy = t \cdot ds$ e quindi

$aa \cdot dy^2 = tt \cdot ds^2 = tt \cdot dx^2 + tt \cdot dy^2$, la quale si riduce all'equazione differenziale

$$dy = \frac{t \cdot dx}{\sqrt{aa - tt}} \text{ che è il risultato finale!}$$

Il tempo sarà determinato, una volta stabilita la velocità della particella in ogni punto lungo il suo percorso, secondo la legge di Galileo. A questo punto Johann afferma che "In un sol colpo ho risolto due problemi fondamentali, uno ottico e l'altro meccanico, realizzando più di quello che ho chiesto agli altri, ho mostrato che due problemi che provengono da campi

diversi della matematica, ciò nonostante, sono della stessa natura”.

Quindi si sofferma sul caso particolare, e trattandosi di un grave, Johann usa la legge di caduta di Galileo “*velocitates gravium cadentium sint in ratione sub duplicata altitudinum emensarum*”, da cui deduce che $t^2=ax$ (e così la curva AHE risulta essere una parabola). Sostituendo nell’equazione generale ottiene l’equazione differenziale $dy = dx \sqrt{\frac{x}{a-x}}$ della curva AMB⁶.

Da qui conclude riconoscendo che la curva Brachistocrona è un ramo di Cicloide ordinaria.

L’integrazione dell’equazione e la dimostrazione dell’unicità della soluzione dati i due punti A e B non viene affrontata in classe in quanto esula dagli obiettivi didattici ma tuttavia è questo lo spunto per riflettere con gli studenti sul concetto nuovo di equazione differenziale contrapposto a quello a loro familiare di equazione algebrica, e sulle soluzioni che ammette una tale equazione.

4.2.2 – Attività 2. La proposta di risoluzione del fratello Jakob

In questa attività viene esaminata la soluzione presentata da Jakob. E’ di tipo geometrico e si basa su un lemma (precedentemente da egli stesso dimostrato) che afferma che, se per una curva assegnata la proprietà di essere suscettibile a massimizzazione o minimizzazione vale globalmente, allora questa proprietà vale pure localmente, cioè per un arco

⁶Vedasi anche Freguglia e Giaquinta 2020, Goldstine 1980

elementi siano direttamente proporzionali agli elementi di ascissa e inversamente proporzionali alle radici dell'ordinata. Questa proprietà appartiene all'isocrona di Huygens, che è quindi anche l'oligocrona cioè la cicloide ben nota ai Geometri".

Ancora una volta il ragionamento infinitesimale appare naturalmente posto all'attenzione degli studenti in un caso concreto e geometricamente ben rappresentabile.

Per mostrare agli studenti in modo esplicito che si tratta sempre dell'equazione differenziale della cicloide, si può esprimere l'ultima proporzione nel seguente modo:⁷

$$CG = GD \cdot \frac{EG}{\sqrt{HC}} \cdot \frac{\sqrt{HE}}{GI}$$

Ponendo $CG=ds, HC=x$ ed $EG=dy$, $EC=dx, k=\frac{DG}{GI} \cdot \sqrt{HE}$ si ha: $ds = \frac{k \cdot dy}{dx}$. Risolvendo i calcoli si arriva alla forma differenziale $dy = dx \sqrt{\frac{x}{a-x}}$, con $a=k^2$.

4.3 - Modulo 3. *Novissima dissertatio discipulorum*

Il percorso si completa con la produzione di un dibattito scientifico sul problema della brachistocrona. Gli studenti, dopo essersi confrontati coi testi originali in latino ed aver approfondito i temi matematici nei due precedenti moduli, al fine di sostenere un dibattito argomentativo, vengono divisi in gruppi, ognuno dei quali rappresentante rispettivamente Galilei ed i fratelli Bernoulli e, di conseguenza, la loro posizione nel dibattito culturale dell'epoca. Questo passaggio

⁷ Vedasi anche Freguglia e Giaquinta 2020

stimola la comprensione critica di quanto appreso, ponendoli in una situazione nella quale per difendere la loro tesi devono elaborare un percorso personale di comprensione dell'oggetto della loro dissertazione.

5-La sperimentazione

Il percorso è stato sperimentato in una classe quinta di Liceo Matematico. La didattica laboratoriale è stata svolta nelle ore delle singole discipline, matematica e latino, e in alcune ore di compresenza del docente di latino e del docente di matematica, in modo che potessero seguire gli studenti in un percorso di traduzione filologica di alcuni brani del testo considerato, al fine di condurli ad individuare il linguaggio specifico che, dalla matrice classica, si è distanziato, modificato verso la semplificazione e la duttilità. La classe GeoGebra, nella quale sono riportate tutte le attività relative a ciascun modulo, è uno strumento che ha contribuito a guidare lo studente nelle sue esplorazioni. La *dissertatio* ha dato modo agli studenti di acquisire consapevolezza critica relativamente al contenuto matematico e al contesto linguistico: immergersi nei personaggi dell'epoca e sostenere le loro tesi ha permesso in maniera naturale a ciascuno degli studenti di entrare in profondità nel problema proposto. In questo contesto, alcuni di loro hanno anche realizzato uno studio per la fattibilità di un modellino (fig. 7) rappresentante il teorema XXII, riuscendo a fornire indicazioni in relazione all'altezza e alla lunghezza dei piani da considerare, in modo da apprezzare ad occhio nudo la differenza dei tempi.

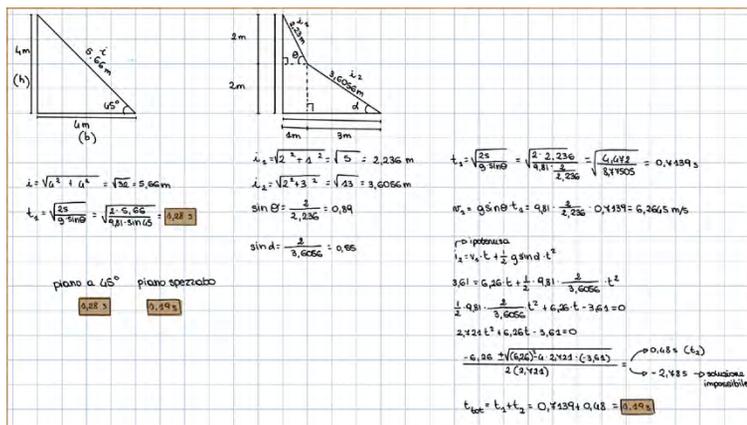


Fig. 7- Il progetto degli studenti

Abbiamo poi somministrato un questionario di gradimento, dal quale sono emersi l'entusiasmo verso l'attività proposta e molti spunti di riflessione. Gli studenti hanno compreso quanto il ragionamento matematico, il calcolo differenziale siano intimamente uniti al ragionamento sulla scelta del linguaggio, con cui sono esposti i testi analizzati, ambito più o meno curato della lingua latina, divenuta così strumento di analisi scientifica anch'essa.

6 -Conclusioni e scenari futuri

Siamo convinte, anche supportate dai risultati della sperimentazione, della valenza didattica di situazioni didattiche che sfruttino la naturale interdisciplinarietà tra latino, matematica e fisica, e dell'uso della storia della matematica e delle scienze in generale. Inoltre, proprio l'uso del Latino in esperienze interdisciplinari di didattica della Matematica basate sulla storia, come quella che abbiamo qui

descritta, può consentire di esportarla in contesti scolastici europei, laddove sono attivati programmi di studio della lingua latina.

Bibliografia

Bernoulli Jo. (1697), *Curvatura radii*[...], *Propositi, de* [...], *Acta Eruditorum*, (pp 206-211)

Bernoulli Ja. (1697), *Soluti problematum fratrum*[...], *Acta eruditorum*, (pp 211-217)

Brousseau, G., (1990) *Le contrat didactique : le milieu. Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9 (9.3), (pp.309 – 336)

Brousseau, G., (1976) *Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques*. W. Vanhamme et J. Vanhamme. *La problématique et l'enseignement de la mathématique. Comptes rendus de la XXVIIIe rencontre organisée par la Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques*, Louvain-la-neuve, pp.101-117

D'Amore B. (2023), *Elementi di Didattica della Matematica*, Bonomo Editore.

Freguglia P., Giaquinta M. (2020), *Intorno all'idea di curva matematica*, Pitagora Editrice Bologna.

Freguglia P., Giaquinta M. (2016), *The early period of calculus of variations*, Birkhauser.

Galilei G. (1638), *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, in Leida.

Galilei G., a cura di Giusti E. (1990), *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, Einaudi.

Galilei G., a cura di Carugo A., Geymonat L. (1958), *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, Boringhieri.

Goldistine, H. H., (1980) *A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century*, Springer Verlag.

Jahnke, H. N., Arcavi, A., Barbin, E., Bekken, O., Furinghetti, F., El Idrissi, A., Silva da Silva, C. M., & Weeks, C. (2002). The use of original sources in the mathematics classroom. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI study* (pp.291–328). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47220-1_9

Sui corsi di matematica per i quali occorre una didattica breve

Franco Eugeni*

*Presidente AFSU, già professore ordinario di Discipline matematiche e filosofia della Scienza; eugenif3@gmail.com



Sunto: *Viene data una panoramica personale su una serie di esperienze didattiche da potersi considerare brevi o semplificative.*

Parole Chiave: *Disequazioni – calcoli semplificati – fondamenti di geometria – Fisica teorica*

Abstract: *A personal overview is given of a series of educational experiences that can be considered brief or simplifying*

Keywords: *Inequalities – simplified calculations – fundamentals of geometry – Theoretical physics.*

1 -Le mie prime esperienze didattiche

La presente nota costituisce un insieme di divagazioni personali sulla didattica e sugli equilibrismi didattici che siamo spesso costretti ad elaborare in quelle che il mio

compianto amico Giovanni Melzi¹ soleva chiamare le nostre “farneticazioni matematiche”.

Io dico poche cose, tutte esperienze personali, nel contempo segnalo una serie di lavori, tutti scaricabili on line, in gran parte su sito afsu.it, che è il sito dal quale potete leggere, scaricare tutti i lavori del Periodico di Matematica² da 1886 al 1918 nella sezione “Archivio” e dal 2019 al 2024 dalla sezione Riviste³.

Si tratta di un bel patrimonio culturale che l’AFSU mette a vostra disposizione.

Negli ultimi due anni di Liceo io e due miei compagni di scuola eravamo divenuti i preferiti del prof. Antonio Pompetti, che aveva – si può dire - “industrializzato” le lezioni private. Noi andavamo ad aiutare il professore, che si faceva chiamare “Don Antonio”, e fin da allora quando davano spiegazioni ai ragazzi più giovani di noi, ci spiegava che il medesimo argomento poteva essere spiegato in maniera differente. Capimmo bene che non esisteva un modo per spiegare un argomento, che un argomento chi lo spiegava in un modo, chi in un altro e che alcune vie erano comprensibili per alcuni e non per altri. Poi era innegabile che a volte “Don Antonio” diceva:

¹Negli anni '60 ero nel gruppo di ricerca di Geometria Differenziale diretto da Melzi nel quale erano i Big Mario Villa e Carlo Felice Manara ed anche il mio professore Guidi Vaona e Francesco Speranza non ancora Ordinario, lo divenne se ben ricordo nel 1967.

²Da non confondere con il Periodico di Matematiche che è la Rivista della “Mathesi nazionale”.

³Dal 2019 la proprietà di questa Rivista e dell’AFSU.

“Guarda Franco.... a questa ragazza spiega la cosa in questo altro modo, altrimenti il suo professore non lo capisce e dice che ha sbagliato.

Esempio. Non spiegare che in quella equazione le radici si vedono ad occhio, il suo professore vuole che loro applichino la formula. Oppure: non stare a spiegare che per fare $92 + 15$ devi pensare a $90 + 10$ e poi a $2 + 5$ per avere 107, questi ragionamenti dalle sue parti non sono graditi.

Il compenso che “Don Antonio” ci dava era altamente culturale, spesso ci dedicava delle ore a spiegarci questioni di matematica che esulavano dagli studi scolastici. Uno dei suoi interessi era la geometria sintetica che era molto in voga negli anni della sua formazione di fine Ottocento. Personalmente io ero molto attratto sia dall’indirizzo analitico⁴, che aveva preso sempre maggior spazio che dalla critica dei fondamenti.

A titolo di esempio ci aveva spiegato lo studio delle funzioni in coordinate polari, e diversi anticipi di studi quali i sistemi lineari, alcuni tipi di integrali relativi alle funzioni razionali fratte. Per noi era tutto oro. Mi convinse a portare, come approfondimento personale all’esame di maturità del 1959, la dimostrazione, per induzione, della classica formula del binomio di Newton.

Don Antonio da studente aveva frequentato la ormai dimenticata sezione fisico-matematica degli Istituti Tecnici, antenata del Liceo Scientifico. L’Istituto tecnico⁵ come struttura fu introdotto dalla legge Casati del 1859 che istituì da

⁴ Una bella dissertazione sui legami tra algebra e geometria appare in Speranza F.

⁵ Sugli Istituti Tecnici e sulla Sezione Fisico matematica di detti istituti si veda l’interessante articolo di Sandro Graffi (2017).

zero e in modo organico un intero sistema d'istruzione pubblica nel Regno di Sardegna. Tale sistema fu successivamente esteso a tutte le regioni italiane nell'ambito dell'unificazione italiana del 1860 e rimase attivo fino alla Riforma Gentile del 1923. L'istruzione secondaria dopo le elementari si apriva in due direzioni. La *via classica* (5 anni di ginnasio e 3 di liceo) e la *via tecnica* (3 anni di scuola tecnica e 4 o 5 anni negli Istituti Tecnici secondo gli indirizzi). In questi Istituti fu pilastro interessante e fondamentale per lo sviluppo della matematica in Italia la suddetta sezione fisico-matematica degli Istituti tecnici. Tale sezione fu poi abolita dalla riforma Gentile⁶ del 1923, che istituì in sua vece il Liceo scientifico, nella versione ancora attuale.

Naturalmente la frequentazione con Don Antonio diede i suoi frutti. Da studente universitario davo, con successo, lezioni private, specie agli studenti di Ingegneria. Fu una bella palestra il comprendere che non a tutti si poteva spiegare alla stessa maniera e che spesso, quasi sempre, il problema era la scarsa conoscenza dell'algebra elementare.

Esempio. Quasi sempre occorreva ripartire dalle equazioni di 2° grado, anche se per casi sia pure rari il "ponsasinorum" non superabile rimaneva "l'equazione di 1° grado". Per non parlare delle disequazioni. Era ben raro che io potessi presentare una disequazione del tipo:

$$\frac{(x - 2)(x - 3)(3x^2 + 5)}{(x - 4)(x^2 + 1)} \geq 0$$

⁶ E' utile per una ampia comprensione degli obiettivi esistenti al tempo della riforma Gentile leggere la sintesi del progetto culturale di Enriques in Speranza F. (1992).

per convincere gli allievi di colpo che la disequazione in esame, era banalmente equivalente a:

$$f(x) = (x - 2)(x - 3)(x - 4) \geq 0, \text{ con } x \neq 4,$$

e che si poteva scrivere, senza troppo pensare:

$$\begin{array}{ccccccc} & - & & + & & - & & + & & & \\ \text{-----} & & 2 & \text{-----} & & 3 & \text{-----} & & 4 & \text{-----} & \end{array}$$

quindi indicare le soluzioni: $2 \leq x \leq 3$, $x > 4$, in quanto per $x > 4$ il tutto è banalmente positivo e che passando per un annullamento, il segno di $f(x)$ cambia per ovvie questioni di continuità.

2 -Inizia il mio insegnamento all'Università

Ho iniziato ad insegnare nell'Università di Modena nel Dicembre 1963, sulla cattedra di Geometria. Mi inserii subito nella dualità della didattica: in una lezione universitaria tutto doveva essere giusto e perfetto, i teoremi si dimostravano quasi tutti, si seguiva una linea logica⁷, si disprezzano le vie abbreviate, si faceva tutto per bene. Almeno questa era la logica del mio capo di allora, il prof Guido Vaona, un didatta splendido, logico, molto chiaro. Una delle prime cose che ho imparato da lui, fu un aspetto fondamentale della Critica dei

⁷Si veda più avanti in questo testo quanto asserisce de Finetti a riguardo.

fondamenti. Se qualche studente confondeva una definizione, con una asserzione equivalente, specie poi se matematico, occorre intervenire.

Esempio. Noi nel corso definivamo degenerare una conica a coefficienti reali, se la sua equazione si spezzava nel prodotto di due equazioni di 1° eventualmente a coefficienti complessi e dimostravamo che una conica era degenerare, se e solo se, la matrice ad essa associata aveva determinante nullo. (Si noti ogni parola al suo posto!)

Capitava che lo studente asseriva che “una conica si dice degenerare se il suo determinante è nullo”. Allora il professore non contestava l’imprecisione verbale, ma quella logica chiedendo “Bene se questa è la sua definizione, che io accetto, allora lei mi deve dimostrare che questo avviene se e solo se la sua equazione si spezza nel prodotto di due equazioni di 1° eventualmente a coefficienti complessi! Non sempre il senso logico dell’inversione tra definizione e condizione necessaria e sufficiente era compreso dallo studente, e nemmeno ad alcuni docenti che ho avuto modo di esaminare negli innumerevoli concorsi che negli anni ho avuto occasione di presiedere.

Nel 1965, sempre nell’Università di Modena, vinsi il Concorso per Assistente Ordinario e presi la titolarità dell’insegnamento di Istituzioni di Matematiche per due anni, poi di Geometria 2 per matematici e infine nel 1968 quella di Geometria 1 per la neonata Facoltà di Ingegneria, sempre a Modena. Debbo dire che l’insegnamento del mio capo il prof. Vaona aveva dato i suoi frutti.

Esempio. Mi fu molto chiaro che il passare dalla geometria del piano, anche per lo studio delle curve algebriche era cosa ben più facile che non far lavorare gli studenti nello spazio.

Comprendere che la geometria del piano che, come oggetti, non esiste, ma si vede con il disegno, è facile, mentre quella dello spazio non lo è affatto. Infatti la geometria dello spazio lavora con oggetti che esistono, ma che non vedo come nel disegno piano, e che devo trattare attraverso una rappresentazione matematica è meno facile. Curiosamente in geometria analitica passare dal piano allo spazio è un passaggio da un astratto ad un astratto di livello maggiore. Ma questo è il “ponsasinorum” per comprendere gli spazi a più dimensioni.

Non vi è dubbio che un aiuto può venire dalla storia della fisica. Il primo passo fu quello di Albert Einstein (1879-1955) che mediante la teoria relatività ristretta e l'utilizzo delle trasformazioni di Lorenz ha provato che, se un Riferimento $R(x,y,z,t)$ si muove rispetto ad un riferimento $R'(x',t',z',t')$ allora il tempo muta secondo le relazioni , nelle quali :

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} , y' = y , z' = z , t' = \frac{t - (v^2/c^2)x}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$$

dove v è la velocità con cui R' si muove rispetto ad R e la costante c , approssimativamente pari a 300 mila Km/sec indica la velocità massima raggiungibile dalla luce. Naturalmente se v è molto piccola rispetto a c , allora risulta nei fatti $t' = t$, ritrovando come caso limite la consolidata teoria di Newton. Questo fenomeno del ritrovamento di una vecchia Teoria nella nuova è quel fenomeno che noi siamo soliti indicare come “il salto epistemologico” di una teoria.

Gioca anche ricordare che il *salto epistemologico* successivo fu la costruzione dello spazio a 5 dimensioni di Kaluza-Klein⁸ che introdussero una 5° dimensione denotata con k , detta anche “*dimensione invisibile*” perché si trattava di una dimensione infinitesima. Tale dimensione rendeva conto di alcuni fenomeni gravitazionali ed elettromagnetici che sfuggivano parzialmente alla teoria relativistica.

Nelle più moderne versioni della Fisica, nella cosiddetta *Teoria delle stringhe*, della quale il fisico italiano Gabriele Veneziano (n.1942) è uno dei padri fondatori, si parla di uno spazio ad 11 dimensioni delle quali ben 7 invisibili. E' naturale che nulla è visibile oltre la terza dimensione, ma questa Teoria sembra essere la struttura più adatta ai fini di una visione unificata delle forze della natura. Veneziano ha anche sviluppato un “*modello dtpre-Big Bang*” introducendo un nuovo modello cosmologico⁹ ottenuto dalla teoria delle stringhe.

Del resto ogni Teoria, come ci spiega bene l'epistemologo Karl Popper (1902-1994), conserva la sua validità fino a che non interviene un nuovo fenomeno che la teoria non è in grado di spiegare. Naturalmente una nuova Teoria che spieghi il fenomeno sfuggito alla vecchia, e che la conservi come caso particolare della nuova, rappresenta quel *salto epistemologico* che è il vero indice del progresso scientifico.

⁸ Theodor Kaluza (18885-1954) fisico tedesco e Oskar Klein (1894-1977) fisico svedese.

⁹G. Veneziano (1991).

3 – Il trasferimento all'Università dell'Aquila e la didattica semplificata

Negli anni '69- '70, mi trasferii a L'Aquila, dove ebbi la titolarità dei corsi di Geometria 1 per Ingegneria e di Matematiche Complementari per Matematici. Il Prof. Antonio Maturo ed io ci eravamo fortemente innamorati del progetto bourbakista. Io per le Matematiche complementari nelle quali ero allora stabilizzato e il prof. Maturo per la disciplina di Analisi Matematica e Geometria Analitica – come allora si chiamavano le Istituzioni di Matematica, nelle Facoltà di Architettura – abbiamo scritto dei pesanti volumoni ad indirizzo bourbakistico¹⁰, che sono stati utili molto a noi, molto ad alcuni allievi, che finiti i loro studi universitari hanno vinto facilmente i concorsi a cattedra degli anni '70 ed '80. Forse i nostri antichi volumoni sono stati di minore interesse per le masse.

L'insegnamento stava mutando, la corrente rigoristica sembrava sempre più destinata ad uscire dai corsi di servizio, non specificatamente indirizzati allo studio e alla ricerca in Matematica. Gli stessi argomenti per i concorsi per le cattedre nelle scuole si andavano semplificando. Sulla fine degli anni '70 entrai nella Mathesis e cominciai a frequentare a Roma, il gruppo di Bruno de Finetti, collaborando con quello che divenne uno dei miei più cari amici Bruno Rizzi.

¹⁰ Per comprendere tali aspetti ed anche una visione revisionistica di tale teorie molto generali si veda Eugeni F. (1992) ove si parla del passaggio dalla rivoluzione bourbakista a quella informatica. Vedasi anche Melzi G. (1991).

Lo stesso de Finetti, autore di quel magnifico testo¹¹ dal titolo “Matematica Logico-intuitiva” ci spiegava che per capire bene le serie, ad esempio, occorre capire la serie geometrica. Le generalizzazioni e i casi patologici possono pure venire dopo.

Scrive de Finetti nell’Introduzione alla sua opera:

A questo stesso fine giova ed occorre che l’intonazione generale sia quanto più elevata possibile. Non nel senso di adoperare un cannone per colpire un passerotto: è anzi proprio il possesso di nozioni frammentarie e imparaticce che induce certa gente in tale tendenza per farne compassionevole sfoggio, e preferirei non avere mai intrapreso l’insegnamento piuttosto che vedere anche un solo dei miei allievi imbrancarsi in tale andazzo. Intonazione elevata è all’opposto quella che insegna a seguir sempre la via naturale, quella che insegna a trarre il massimo frutto da ogni sforzo assurgendo da ogni risultato particolare a riconoscere le 12 conclusioni d’ordine generale che in esso sono implicite e con esso si sono raggiunte. Sono esse, ed esse sole, che valgono del resto a porre il risultato stesso nella sua vera luce, nella sua più semplice intuizione, in modo da renderlo indelebilmente ovvio alla mente senza barbari sforzi mnemonici, e che d’altra parte costituiscono un arricchimento più sostanziale che non il risultato cercato di per sé. Così ad es. si troveranno sistematicamente illustrate e poste in risalto delle questioni d’indole generale, come il significato e il valore del ragionamento per induzione, dell’uso di grandezze con segno, delle convenzioni sull’«infinito», della critica dei principi in geometria e in altri campi, ecc. (anche per la preoccupazione e con il vantaggio di prevenire dubbi facili a sorgere), e in genere – anche se incidentalmente, e quando opportuno per non appesantire il testo magari con note in calce – si vedrà la

¹¹ de Finetti (1943).

tendenza ad accennare agli sviluppi che dopo certe considerazioni risultano implicitamente conseguiti.

A conclusione di questo passo del grande de Finetti è bene citare un testo attuale dell'Ing. Luca Nicotra, su quella che oggi è considerata la verità in matematica¹². Il testo si avvale di una mia introduzione che consiglio pure di leggere.

Per tornare al nostro tema il primo episodio di semplificazione, delle nostre discipline, che mi è capitato, risale ai primi anni '80, quando all'Università dell'Aquila a seguito di contratti per tenere insegnamenti in Corsi ad indirizzo speciale, presso le aziende del luogo (i Corsi furono ben 5) dovetti preparare un minicorso di geometria, nel quale dovevo trattare le coniche, per quella via che spesso mi è piaciuto chiamare "*la via elementare*" cioè senza ricorrere alla geometria proiettiva, ma trattando la teoria in modo più ampio di quando non si faccia, ad esempio, nel Liceo Scientifico. La cosa viene bene specie se distinguiamo la parabola dalle altre coniche, asserendo che la parabola si riconosce facilmente, poiché presenta i termini di 2° grado nella forma di un quadrato perfetto.

Quello che allora non ho fatto, fu la costruzione di una teoria della polarità "*ad hoc*", così che per la *ricerca dell'asse* davo una formula (corretta, ma non dimostrata). La teoria della polarità in questo contesto è anche facile da sistemare, ma in quei corsi non vi era tempo. Riporto un solo esempio per comprendere lo spirito del lavoro.

Nel caso delle coniche, la forma quadratica è in x ed y . Il caso della parabola emerge con la condizione che il complesso

¹² Nicotra L. (2024).

dei termini di 2° grado sia un quadrato perfetto! Questo è il punto di partenza per le semplificazioni di studio delle parabole con asse obliquo. Naturalmente se la parte al quadrato è del tipo $(ax+by)^2$ la retta $ax+by = 0$ individua una direzione privilegiata, in quanto tale retta e tutte le sue parallele sono 1-secanti la conica ed una solo di esse è asse di simmetria. Per individuarla si può ricorrere ad una teoria della polarità adattata al caso euclideo!

Nel caso delle quadriche, la forma quadratica è in x, y e z . Il caso del paraboloido emerge con la condizione che il complesso dei termini di 2° grado sia riducibile nel prodotto di due equazioni di 1° grado in x, y, z (eventualmente a coefficienti complessi) e questo è il punto di partenza per le semplificazioni di studio di un paraboloido. Da notare che tutte le rette parallele alla retta individuata dai due piani della scomposizioni sono 1-secanti il paraboloido ma, rispetto alle coniche, la teoria della polarità diventa molto più complessa e non è ora il caso di andare nei dettagli.

Sia data una qualunque *conica* o *quadrica*, che non sia degenere, specializzata, non parabola e non paraboloido, assegnando: *una forma quadratica completa + termini di 1° grado termine noto = 0*, è sempre possibile con una traslazione far sparire i termini di 1° grado, così che la conica o quadrica si esprima con *“una forma quadratica completa + termine noto = 0”*. Tale oggetto ha il centro nell’origine.

4 – Nelle Università di Chieti, Roma tre e Teramo

Sulla fine degli anni '70 ero divenuto dapprima stabilizzato (in totale equiparazione con i Liberi Docenti) e poi professore associato di Algebra e Geometria.

Fu decisivo per il seguito l'incontro con il prof. Giuseppe Tallini. Io stesso, Luigia Berardi ed Albrecht Beutelspacher e il più giovane Stefano Innamorati, ci immergemmo nella matematica discreta e nelle geometrie finite. Per diversi anni producemmo in quel settore e partecipammo alla grande capacità gestionale di quel grande Maestro che è stato Giuseppe Tallini, prodigo di indicazioni, puntuale nei seminari locali nostri e in quelli nazionali. L'appoggio di altri Maestri quali Luigi Antonio Rosati, Mario Gionfriddo e Giancarlo Rota furono anche decisivi. Con il concorso del 1984 divenni professore straordinario di Analisi Matematica e Geometria Analitica (alias Istituzioni di Matematiche), per prendere servizio nel 1987 presso l'Università di Chieti ad Architettura. Nel 1990, oramai Ordinario, fui chiamato come Ordinario di Geometria nell'Università di Roma tre. La prematura scomparsa del prof. Giuseppe Tallini mi allontanò da quel mondo che io identificavo in lui. Tornai a lavorare a Roma con vecchi amici di altri tempi.

Un successivo episodio mi è capitato in quel periodo, ai bei tempi nei quali lavoravo con quel mio indimenticabile amico che era Bruno Rizzi. Una Preside di nostra conoscenza organizzò uno dei primi corsi post-diploma, assieme a delle Aziende, una delle quali meccanica. L'ingegnere dell'Azienda mi fece due richieste precise:

a) trattare le parabole con asse obliquo – delle quali aveva necessità per poterle calcolare in un computer e per progettare

delle alette non ricordo di cosa, che erano tronchi di parabole appoggiate ad un cerchio.

b) la trasformata di Laplace fatta in modo abbastanza divulgativo secondo le regole del “*si fa così*” e “*serve a questo*” in modo molto collaborativo e di soddisfazione del prof. di Elettrotecnica, oggi brillante Dirigente Scolastico.

Il corso andò molto bene e lo spirito di adattamento e parimenti nobilitativo di questi argomenti che da matematico, sia pur pentito, io almeno giudicavo ignobilmente decapitati.

Fin dal 1969 avevo sempre tenuto per incarico un corso nell’Università di Teramo diciamo di Analisi 1 per Scienze statistiche, divenuto poi biomatematica per Veterinaria. Nel 1996 mi trasferii a Teramo su una cattedra che si chiamava di Matematiche Complementari, creata dagli storici locali, ma che in realtà era un insegnamento di 30 ore per fare la Matematica in un Diploma di Economia (integrato da 30 ore di statistica che faceva un altro collega). La mia attività didattica si completava con un insegnamento di 40 ore a Veterinaria (integrato con la fisica). In realtà i miei compiti furono altri: prorettore per la didattica e Direttore di un Dipartimento e membro del Senato Accademico.

Sui corsi brevi feci l’esperimento di far lavorare gli studenti sulle funzioni utilizzando le derivate ma non facendo i limiti. Le derivate erano presentate come una legge D che ad una funzione $f(x)$ associava una funzione $f'(x)$ e che obbediva ad una serie di assiomi che erano poi le regole di derivazioni.

Le funzioni erano poi studiate per categorie

- a) polinomi (al max di 4° grado, ma non generali)
- b) razionali fratte al più secondo grado su secondo grado
- c) le funzioni radici delle precedenti

- d) le funzioni esponenziali delle precedenti
- (e per coloro che di ore ne seguivano 40):
- e) le funzioni logaritmiche delle a) e b).

Non era lo studio generale di funzione, perché in realtà non andavano a vedere cosa succedeva delle funzioni al tendere di x all'infinito, si lavorava, in un intervallo, ampio ma pur sempre limitato. Tuttavia, questo modo dava abbastanza soddisfazione, tanto che dopo il primo anno in collaborazione con i miei assistenti di allora e cioè il prof. Vincenzo Di Marcello e la dott.ssa Daniela Tondini pubblicammo un volumetto che credo sia ancora in adozione a Teramo.

Le vicende furono diverse, il Rettore di allora, Luciano Russi, mi diede la delega anche per la didattica di Ateneo, il lavoro era tanto, bisognava partecipare alle riunioni nazionali del 3+2 e trasferirlo in loco, presiedendo una commissione di Presidi di Facoltà, per la maggior parte collaborativi, ma anche con qualche elemento che non credendo nella riforma, forse anche a ragione, boicottava pesantemente il lavoro degli altri. Non vi era spazio per la matematica, ma ve ne era per l'Informatica. Io passai su una disciplina professionalizzante per Scienze della Comunicazione, precisamente su Epistemologia dell'Informatica, che ho insegnato dal 1997 al 2009 passando come Ordinario sulla Cattedra di Logica e Filosofia della Scienza. Il gruppo si ingrandì abbastanza con Luca Tallini, Ordinario, Raffaele Mascella, associato, e dopo il mio pensionamento con Danilo, Ordinario. Oggi sono loro a portare avanti le cose. Al tempo che io ero prorettore per la didattica e riuscii a creare master e dottorati e l'attività dei Master si estese per oltre 10 anni, all'intero territorio nazionale. Con i proventi realizzammo sia posti di ricercatore

a termine che borse di dottorato. Altre borse le ottenemmo con la collaborazione con il locale Osservatorio di Colleuranìa.

Nella conclusione va osservato che oggi si pensa sempre più ad un insegnamento della matematica per problemi¹³, ma anche a comprendere le linee della Matematica discreta sempre più vicina al mondo dell'Informatica.

Bibliografia

De Finetti Bruno (1943). *Matematica Logico Intuitiva*, Roma: Ed. Cremonese. (Ristampa 2005).

De Finetti Bruno (1966). Sull'insegnamento della Matematica, in *"Homo Faber"*, anno XVII, n.164. p. 103-61

Eugeni Franco (1992). Le due rivoluzioni del secolo: da Bourbaki alla Matematica del discreto in *Per. di Matematiche (Mathesis – Presidenza Rizzi) Serie VI Vol. 68, N1. Dedicato al Prof. Carlo Eugeni per il suo 80.mo compleanno. ((in Afsu.it/ discipline/Matematica/Lo sviluppo della didattica matematica in Italia)*

Eugeni Franco (1995). La matematica discreta attraverso i problemi, pp. 84-102. *Convegno Nazionale Mathesis centenario 1895-1995 "Cento anni di Matematica" Ed. Palombi, Roma. (in Afsu.it/discipline/Matematica/Lo sviluppo della didattica matematica in Italia)*

Graffi Sandro (2017). La sezione fisico-matematica degli Istituti Tecnici, in: <https://blog.petiteplaisance.it/wp-content/uploads/2017/05/06>

¹³ Vedasi a riguardo Eugeni F. (1995).

Melzi Giovanni (1991). Matematica moderna e insegnamento, *Atti del Convegno Nazionale Mathesis "MATEMATICA MODERNA....."*, Cattolica 22/26 aprile, pp.500-504, Ed. Luciani, Roma. (in [Afsu.it/discipline/Matematica/Lo sviluppo della didattica matematica in Italia](http://Afsu.it/discipline/Matematica/Lo_sviluppo_della_didattica_matematica_in_Italia))

Nicotra Luca (2024). La verità in matematica da Godel ad Euclide, in *Collana "il filo della conoscenza"* pp.1-165 con *Introduzione di Franco Eugeni*.

Speranza Francesco (1991). Interazioni tra algebra e geometria, *Atti del Convegno Nazionale Mathesis "MATEMATICA MODERNA....."*, Cattolica 22/26 aprile, pp.27-31, Ed. Luciani, Roma. (in [Afsu.it/discipline/Matematica/Lo sviluppo della didattica matematica in Italia](http://Afsu.it/discipline/Matematica/Lo_sviluppo_della_didattica_matematica_in_Italia))

Speranza Francesco (1992). Il progetto culturale di Federigo Enriques, in *Atti del Convegno per i sessant'anni di Francesco Speranza*, Bologna Dip. di Matematica, attualmente ristampato in: *Periodico di Matematica (IV) Vol. II (1)*, 83-108. (in [Afsu.it/discipline/Matematica/Lo sviluppo della didattica matematica in Italia](http://Afsu.it/discipline/Matematica/Lo_sviluppo_della_didattica_matematica_in_Italia))

Veneziano Gabriele (1991). Scale factor duality for classical and quantum strings, in *Physics Letters B*, vol. 265, 3-4, pp. 287-294, G3-4, 1991, pp. 287-294, Bibcode:1991PhLB..265..287V, DOI:10.1016/0370-2693(91)90055-.

Da Newton a Einstein

Percorso didattico per introdurre la Relatività Generale

Roberto Copetti*

*I.S.I.S. Paschini-Linussio, Tolmezzo (UD).
roberto.copetti@paschinilinusio.edu.it



Sunto: il seguente lavoro si propone di fornire una possibile introduzione alla Teoria della Relatività nella scuola secondaria di II grado, partendo dalla teoria classica di Newton. Analizzando problemi legati alla didattica dei temi trattati, si presenta un percorso adatto alle classi dei Licei che punti a fornire sia le conoscenze e competenze minime necessarie per comprendere la gravità classica e i concetti di campo utili per l'elettromagnetismo, sia stuzzicare la curiosità con tematiche più moderne come la Relatività Generale. La proposta si conclude con l'analisi scientifica del film *Interstellar* da parte degli studenti, ai quali sarà permesso osservare effetti relativistici non sperimentabili e testare quanto appreso nel percorso concluso.

Parole Chiave: Percorso didattico, Gravitazione classica, Teoria della Relatività, *Interstellar*.

Abstract: the aim of this paper is to give a possible introduction to the Theory of Relativity in High School, starting from the Classical Gravitation by Newton. By analyzing the main problems related to the teaching of the classical theory, we discuss a suitable pathway specific for Licei, to provide the theoretical minimum in order to understand the gravity proposed by Newton first, the basis of the field theory to have a good comprehension of electromagnetism and, last, cover the main

breakthroughs of General Relativity by Einstein. The last part of the proposal is devoted to developing main skills, useful to analyze the main relativistic effects in order to describe the Physics behind the film Interstellar by Christopher Nolan.

Keywords: *Pedagogical pathway, Classical Gravitation, Theory of Relativity, Interstellar*

1 - Introduzione

L'insegnamento della Fisica, così come della Matematica e di altre Scienze, è un importante strumento che i docenti hanno per stimolare riflessioni negli studenti, sfruttando il metodo scientifico. Tra i tanti argomenti, la gravità classica, e a seguire pure la relatività, permette di approfondire temi che sono già stati trattati precedentemente, svolgendo il ruolo di comun denominatore.

L'importanza che la teoria di Newton riveste nella scuola va ben oltre la descrizione di come la forza agisca tra due corpi: non più attraverso un contatto, bensì tramite l'interazione di campi e quindi permette un primo passo verso la teoria classica che li descrive. Le problematiche che portano ad abbandonare la visione seicentesca per entrare nell'era della Relatività è utile agli studenti perché li sprona a dubitare delle proprie certezze scientifiche quando queste vacillano, cercando delle spiegazioni migliori.

1.1 - Struttura del percorso

Il percorso proposto è stato inizialmente pensato per il Liceo Linguistico, pertanto molte scelte di impostazione delle lezioni, di tematiche trattate e di obiettivi sono stati tarati per

le competenze richieste in questo corso di studi. Bisogna tenere in considerazione che in questo indirizzo Fisica si studia a partire dalla classe terza: anche questo è un aspetto importante da tenere in considerazione nella progettazione delle attività e nel fissare gli obiettivi finali.

Con l'intenzione di trattare argomenti previsti nelle Indicazioni Nazionali (MIUR, 2010) e di fornire spunti di lettura in chiave moderna, è stata valutata la possibilità di dividere il progetto su due anni, per evitare un appesantimento delle tematiche trattate, oltre che ad un disallineamento dalle competenze da sviluppare durante la didattica curricolare.

Sinteticamente, la prima parte vede un'introduzione storica ai modelli di universo attraverso i secoli fino a giungere alla descrizione della forza gravitazionale secondo Newton. Dopo alcune considerazioni sulla teoria, la fotografia scattata da Eddington serve per mostrare come lo studio di Newton non possa ritenersi completo, ma sia necessaria una visione diversa. Con l'aiuto del telo elastico e di alcune attività svolte, introduciamo la Relatività Generale, sebbene al momento solamente la parte legata alla deformazione dello spazio causata dalle masse, necessaria per spiegare l'immagine iniziale. La prima parte si conclude con il fallimento dell'assolutezza dello spazio e un dubbio sulla considerazione assoluta del tempo.

La seconda parte inizia sempre in chiave storica descrivendo gli studi sulla velocità della luce e su come le sue misure siano migliorate nel tempo. Procediamo poi come di consuetudine nell'introduzione degli effetti della relatività speciale con alcuni esempi che definiscano il fattore di

Lorentz, creando poi un collegamento tra la Relatività Speciale e quanto già studiato di quella Generale. Il percorso previsto in questo secondo anno si conclude con l'analisi del film *Interstellar* (Nolan, 2015), basandosi sul libro di Kip Thorne (Thorne, 2018).

1.2 - Obiettivi del percorso

Come anticipato gli obiettivi devono tenere conto dell'indirizzo in cui lo si vuole proporre, ovvero un liceo linguistico nel caso specifico, ma più in generale un liceo non scientifico. Gli obiettivi stabiliti sono stati i seguenti:

- comprendere come le teorie scientifiche non siano assolute, ma possano mutare nel tempo, senza che l'impalcatura più ampia ne risenta;
- costruire un'idea corretta di gravitazione con i vari concetti ad essa legati;
- essere in grado di descrivere dei fenomeni usando una teoria piuttosto che un'altra;
- rendere interessante la Fisica agli studenti, trattando tematiche più moderne, o che comunque possano suscitare delle emozioni.

2 -Introduzione alla gravitazione

In questa sezione andremo ad analizzare quanto viene fatto nella prima parte, ovvero nella classe quarta. Daremo maggiori dettagli sul percorso (Sez. 2.1), su quanto emerso dagli studenti (Sez. 2.2) e sulle modalità di valutazione usate per stabilire se gli obiettivi siano stati raggiunti (Sez. 2.3).

2.1 - Punti salienti del percorso

Il percorso ha inizio con una revisione dei principali modelli astronomici della storia: in questo modo, oltre alla trasversalità degli argomenti, abbiamo discusso l'evoluzione delle teorie scientifiche e di come queste possano cambiare e migliorare nel corso del tempo in base alle osservazioni e agli studi. Oltre ai classici modelli eliocentrici e geocentrici, è stato dato particolare risalto al modello sviluppato da Tycho Brahe, in quanto è una variante ibrida degli altri, che impone un'attenta riflessione sul punto di osservazione scelto per descrivere i moti dei pianeti.

Dopo una breve introduzione abbiamo discusso quanto proposto da Newton, il suo modello di universo infinito e le sue caratteristiche principali. Una rapida revisione dei concetti più importanti della dinamica e del moto circolare ci è servita poi per iniziare a svolgere alcune attività al simulatore. In rete se ne trovano parecchi, in questo caso abbiamo scelto Gravity Simulator sviluppato da TestTubesGames (TestTubeGames, s.d.). Lo strumento offre varie possibilità di inserire stelle, pianeti, asteroidi, modificandone direttamente le principali caratteristiche fisiche.

Le attività svolte sono semplici e servono ad esplorare la natura della gravità, la direzione lungo cui agisce e le grandezze fisiche da cui dipende. In breve tempo siamo stati in grado di stabilire che la gravità dipende in maniera diretta dalle masse dei due oggetti, ma indirettamente dalla distanza. Ciò che non è stato facile fare con queste attività è determinare la potenza con cui dipende la distanza. Ci è stato sufficiente per capire che la legge di gravitazione è della forma

$$F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^n}$$

con n un naturale positivo; la forma corretta della legge è stata fornita agli studenti successivamente. Con questa abbiamo iniziato a prendere dimestichezza con alcuni esempi di calcolo di forza di attrazione gravitazionale tra vari corpi, non solo pianeti, ma anche oggetti comuni. In questo modo abbiamo potuto prendere dimestichezza con gli ordini di grandezza della forza in gioco tra oggetti scelti a caso dagli studenti.

Una serie di esempi dell'attrazione gravitazionale prodotta tra la Terra ed un oggetto ci hanno permesso di stabilire come la risultante sia circa dieci volte la massa dell'oggetto, portandoci verso l'idea che il termine

$$g = G \frac{m_T}{r^2}$$

sia di fatto la gravità, grandezza già ampiamente usata in passato. Questa osservazione ci ha permesso, tra le altre cose, di iniziare a parlare di campo gravitazionale, argomento che sarà molto utile negli anni successivi quando si tratterà il campo elettrico e magnetico. Rimandiamo le attività specifiche che sono state svolte alla prossima sezione e procediamo con il percorso.

Per questioni legate alla progettazione non è stato approfondito il concetto di energia potenziale gravitazionale e di potenziale gravitazionale, volendo però potrebbero essere almeno introdotti.

Abbiamo proseguito con un'analisi di alcune applicazioni della teoria, ad esempio la scoperta del pianeta Nettuno dopo che erano state osservate dagli astronomi del XIX secolo delle anomalie nell'orbita di Urano. Questo è stato il momento in cui sono stati messi in evidenza i tre problemi per

autonomasia legati alla teoria: l'azione a distanza della forza, la propagazione istantanea e l'anomalia dell'orbita di Mercurio. Questi si sono rivelati tre nodi concettuali importanti con cui la gravità classica si scontra e che non può spiegare. Seguendo lo spirito del percorso, ovvero promuovere l'elasticità mentale necessaria a modificare i propri punti di vista, abbiamo osservato la foto scattata da Arthur Eddington all'eclisse totale di Sole del 1919. Come è ben noto, questa fu la prima prova diretta a confermare la Relatività Generale: le stelle avevano delle posizioni diverse da quelle che ci si sarebbe dovuti aspettare e la spiegazione risiedeva nella deformazione dello spazio dovuta alla presenza della nostra Stella.

Con l'aiuto di un telo elastico appoggiato su un piano orizzontale, e con l'uso di alcune palline di massa e misure diverse, abbiamo verificato come sia impossibile *vedere* una stella che giaccia dietro al Sole. È bastato però alzare il telo affinché questo si incurvasse, permettendo così alle piccole biglie, che rappresentavano i fotoni, di raggiungerci, permettendoci quindi di *vedere* anche stelle dietro ad altri corpi celesti.

Sebbene questo passaggio possa sembrare banale, è stato un punto chiave del progetto e quindi si è rivelato importante sottolineare che ciò che è stato fattoriguardava un cambio di paradigma della Fisica che studia la gravità. Non si tratta solamente di lanciare delle palline su un telo, ma si afferma che la natura della gravità dipende dalle masse degli oggetti, e che questi generano una deformazione geometrica dello stesso. Queste affermazioni e questi passaggi devono essere resi in modo chiaro e preciso, altrimenti ciò che gli alunni

vedranno sarà solamente un giochetto carino, ma fine a sé stesso.

Nell'ultima parte del percorso abbiamo rivisto i concetti fondamentali già trattati, usando il telo elastico anziché il simulatore, per osservare come tutto venga confermato: la sola cosa che è cambiata è stata la visione della gravità, non tramite una forza, bensì attraverso la deformazione dello spazio-tempo.

Molte attività proposte, assieme alle spiegazioni, sono disponibili su un breve manuale scritto da due docenti dell'Università di Roma Tre (Postiglione & De Angelis, 2020). Queste proposte permettono di sperimentare direttamente il nuovo modello, comprendendo come questa nuova visione possa spiegare i fenomeni già conosciuti.

Oltre al telo, abbiamo osservato alcune immagini, le quali hanno fornito spunti di analisi e riflessione inerenti la deformazione dello spazio. Ne sono un esempio gli effetti di lensing gravitazionale, la Croce di Einstein, ma anche l'immagine del buco nero Gargantua, protagonista del film *Interstellar*, colonna portante della prossima parte del percorso.

2.2 - Osservazioni emerse

Soffermiamoci, come anticipato precedentemente, sulla visualizzazione del campo gravitazionale. Infatti, questo punto è interessante da sviluppare poiché sembra, da osservazioni fatte in diverse classi negli anni, che l'idea di campo possa essere una proprietà che alcuni degli studenti possiedono già. Nello specifico, senza dare grosse descrizioni matematiche, è stato chiesto loro di disegnare come rappresenterebbero il campo gravitazionale, da tutti inteso



Figura 1 Rappresentazioni tipo del campo gravitazionale

come *qualcosa che attira gli oggetti verso la Terra*. I disegni sono vari, ma hanno delle caratteristiche comuni: vedono la presenza di un alone, una specie di aura sfumata verso l'esterno che descrive la gravità decrescente, oppure dei segmenti o frecce che indicano il verso dell'attrazione (Figura 1). Raramente hanno disegnato delle strutture concentriche (che tecnicamente richiamerebbero le curve di livello) o dei vettori con modulo decrescente. I disegni, seppur imprecisi, hanno mostrato delle peculiarità interessanti e corrette dei campi vettoriali.

Dopo aver discusso le rappresentazioni fatte dagli studenti, ed eventualmente mostrati alcuni errori tecnici, abbiamo osservato la rappresentazione 3D di un campo vettoriale centrale in cui sono presenti i vettori con modulo decrescente. Il passo successivo è stato indagare come percepiscono un insieme di campi gravitazionali, ad esempio dentro ad una stanza con alcuni oggetti. In questo caso i disegni mostrano non un unico campo, ma una pluralità di campi che si sovrappongono, ma senza sommarsi. In rarissimi casi sono state rappresentate le forze anziché i campi (Figura 2). Anche in questo caso la discussione guidata con la classe ha fatto emergere abbastanza facilmente gli errori e la necessità di

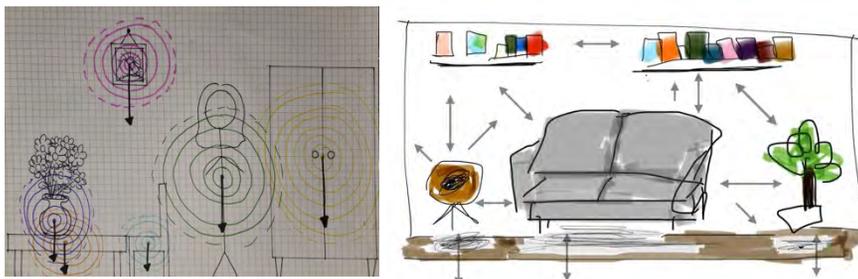


Figura 2 Rappresentazioni di più campi gravitazionali

sommare vettorialmente i campi per averne un unico presente, ma che tiene conto di tutti. Questi concetti sonorizzati semplici da trattare e aiuteranno a visualizzare meglio i campi elettrici e magnetici¹.

Un altro aspetto interessante che è stato trattato durante il progetto è l'uso del telo elastico. Come spesso accade nei musei con degli exhibit, il telo elastico rappresenta sempre un punto di grande interesse in quanto permette di visualizzare bene il moto dei pianeti che appoggiano su un tessuto bielastizzato. È proprio questo un punto delicato da trattare con la massima trasparenza. Nel modello creato in aula, la deformazione del tessuto, e conseguentemente delle traiettorie, è causata dalla gravità terrestre, ma a sua volta usiamo la curvatura del telo per spiegare quale sia la natura della gravità. Si genera pertanto una sorta di circolo vizioso, dove per spiegare un fenomeno usiamo lo stesso fenomeno. Anche in questo caso è importante motivare l'obiettivo che ha il telo, cioè quello di

¹Ad oggi, aprile 2024, non è stato possibile verificare se la visualizzazione del campo elettrico sia resa semplice dai paragoni legati a questi temi trattati.

aiutare a crearsi un modello mentale di spazio deformato dalla massa dell'oggetto.

2.3 - Metodi per la valutazione

La valutazione del percorso ha dovuto tenere conto sia dei pochi esercizi che volutamente sono stati svolti, sia degli argomenti concettuali su cui si sono concentrati gli interventi. Per capire quale sia stato l'impatto del progetto, è stato predisposto un test iniziale con risposte sia chiuse che aperte, il cui scopo è sondare le conoscenze pregresse, stabilendo se vi siano delle errate interpretazioni di alcuni fenomeni che sono stati descritti in seguito. Un esempio è la classica domanda in cui si chiede se un astronauta all'interno della ISS si trovi in assenza di gravità. Altri temi cruciali che sono stati investigati nel test si basano sulla descrizione delle forze, di come queste siano applicate a corpi in cui non vi è contatto e a quale ruolo possano avere le geometrie non euclidee. Ad esempio, è stato chiesto allo studente se sia accettabile che fenomeni naturali violino la geometria euclidea, richiedendo altri tipi di geometrie. Spesso, infatti, la geometria non euclidea viene considerata qualcosa di teorico e astratto che mal si adatta al mondo reale. Altri aspetti che sono stati oggetto di domande sono la concezione di *andare dritti*, che classicamente significa procedere lungo una retta, mentre in superfici curve viene usato il concetto di geodetica.

Alcune di queste domande, le più significative, sono state riproposte nel test finale, analogo al primo, in cui sono state valutate le differenze tra le risposte in entrata e uscita. Sono state inoltre aggiunte anche delle domande aperte in cui è stato possibile capire se quanto trattato durante il percorso

risultati assimilato, o se si sia trattato solamente di una mera trasposizione di conoscenze sentite, ma non propriamente apprese.

Subito dopo che è stata completata la parte sulla gravità newtoniana, prima di proporre l'immagine di Eddington, è stato assegnato il Newtonian Gravity Concept Inventory (Williamson, Willoughby, & Prather, 2013), test basato su 26 domande a risposta chiusa. Questo è stato utile per capire se permanessero delle difficoltà a interpretare gli effetti della gravità e se vi fossero delle difficoltà nell'applicazione della formula per comprendere casi semplificati.

L'analisi delle risposte in questi tre test separati, l'osservazione dei miglioramenti nella comprensione degli effetti della deformazione e nella spiegazione delle sue cause, è servita a valutare da un lato il percorso degli studenti, dall'altro l'impatto del percorso e delle metodologie, diverse dagli standard, usate per questo progetto.

3 - Teoria della Relatività

Nella terza sezione ci occupiamo del percorso sviluppato al quinto anno, che conclude quanto iniziato precedentemente. Come già fatto, forniremo maggiori dettagli sul percorso (Sez. 3.1), sulle osservazioni emerse (Sez. 3.2) e sulle modalità di valutazione usate (Sez. 3.3).

3.1 - Punti salienti del percorso

Nell'ottica di introdurre i postulati di Einstein per la Relatività Speciale, la seconda parte ha avuto inizio con un

conciso excursus sulla storia della velocità della luce. Con questo espediente, da un'idea di propagazione della luce istantanea siamo passati ad una serie di studi per misurarne la sua velocità, motivando pertanto almeno uno dei due punti cardine fissati da Einstein. Successivamente abbiamo introdotto la Relatività Speciale, con gli stessi esperimenti mentali proposti dal fisico, i quali, con semplici calcoli, hanno permesso di ricavare il Fattore di Lorentz. È in questo momento che abbiamo posto le basi per gli effetti relativistici che verranno maggiormente discussi, ed è questo pertanto il momento più delicato: rimanere vaghi, o fornire solamente le formule per la contrazione delle lunghezze e la dilatazione dei tempi, rischierebbe di compromettere il lavoro fino ad ora fatto, trasmettendo solamente una serie di formule, più che concetti chiave.

Le trasformazioni di Lorentz non sono state ricavate, ma ad ogni modo le abbiamo paragonate a quelle di Galileo. Questo è stato utile per comprendere come la novità riguardi principalmente la misura del tempo, ma anche di come le coordinate di spazio e tempo siano intrecciate tra loro, confermando l'idea della necessità di uno spazio-tempo. Alcuni semplici esempi, riguardanti auto che si superano a velocità quasi luminari e che accendono i fari, ci hanno aiutato a capire come applicare le trasformazioni e a toccare con mano gli effetti relativistici solo introdotti teoricamente.

Siamo giunti al secondo momento delicato di quest'anno, ovvero quello in cui abbiamo dovuto estendere la Relatività a sistemi di riferimento non inerziali, per collegare quanto appena visto con quanto già discusso sul telo elastico l'anno precedente. Anche in questo caso ci è stato di aiuto un

esperimento mentale proposto da Einstein, quello in cui confronta un razzo accelerato e una persona in un campo gravitazionale. A queste due situazioni abbiamo aggiunto il caso di un astronauta su una giostra spaziale, simile ad una centrifuga. Questo ulteriore esempio è stato particolarmente utile in quanto ci ha permesso di trattare in modo più chiaro i sistemi di riferimento accelerati non linearmente. Dobbiamo infatti ricordare come un sistema di riferimento solidale alla Terra sia stato, fino a poche lezioni prima, un esempio eclatante di sistema inerziale, certezza che è venuta a mancare con l'esperimento di Einstein. Non secondario, la giostra permette di spiegare come gli effetti relativistici si osservino solamente lungo la direzione tangente al moto, mentre questi siano assenti per direzioni perpendicolari.

Nell'ottica di fornire un supporto pratico alle affermazioni che sono state date, abbiamo citato alcuni famosi esperimenti che sono stati delle vere e proprie pietre miliari nella conferma della Teoria della Relatività, riportandone i tratti salienti. In particolare sono stati descritti gli esperimenti di Hafele e Keating (Hafele & Keating, 1972), quello di Briatore e Leschiutta (Briatore & Leschiutta, 1977) o quello meno noto ma precedente svolto da Pound e Rebka (Pound & Rebka Jr., 1959). Seppur datati, questi esperimenti sono risultati comprensibili da un punto di vista concettuale in quanto le metodologie usate per compiere le misure, richiama direttamente i principali effetti relativistici. Questi esperimenti e la loro presentazione hanno concluso la parte teorica, il cui obiettivo è stato fornire una base comune per analizzare il film *Interstellar*.

La seconda parte è iniziata con la visione del film *Interstellar*, uscito nel 2015 a firma del prestigioso regista Christopher Nolan, e con la scelta di alcune delle scene più interessanti, da un punto di vista scientifico, da parte degli studenti. Seguendo un po' la suddivisione dei capitoli presentata da Thorne, gli studenti hanno dovuto classificare, seguendo la propria opinione, le scene in tre categorie:

- verosimili: qui la scienza è stata usata nelle scene in maniera corretta;
- ipotesi fondate: in queste scene si sono usate delle ipotesi non ancora confermate, ma che si ritengono possano avere delle forti basi teoriche;
- congetture: qui troviamo le scene che usano teorie non confermate, per le quali vi sono molte controversie.

Questa classificazione è stata utilizzata dagli studenti senza particolari studi, solamente su quanto discusso durante le lezioni precedenti o su conoscenze personali. In classe, infatti, abbiamo poi proceduto all'analisi delle scene per capire se siano state inserite nella categoria corretta e come mai si sia scelta, eventualmente, una errata.

La parte conclusiva di tutto il percorso si è pertanto concentrata sull'indagine di spezzoni di film che hanno maggiormente interessato gli studenti tra tutte quelle che loro stessi hanno proposto. Particolarmente gettonate sono stati quelli legate al wormhole e a Gargantua, il buco nero presente in alcune scene salienti e già fonte di ispirazione l'anno precedente. È stata un'occasione per discutere su quali siano le credenze più comuni sulla natura di un buco nero e cosa

aspettarsi che accada nelle vicinanze, ma soprattutto quale possa essere una sua rappresentazione realistica. In questo caso, oltre che al film e alla discussione, abbiamo potuto sfruttare l'articolo pubblicato sulla visualizzazione del buco nero (Oliver, von Tunzelmann, Franklin, & Thorne, 2015) per discutere cosa significhi pubblicare su una rivista scientifica, oltre che osservare la struttura di un articolo scientifico.

Le scene, le osservazioni e i dettagli che abbiamo colto nel film, o che ci sono sfuggiti, sono state un utile resoconto di quanto dibattuto in due anni, permettendoci di stabilire quando è usata una teoria piuttosto che un'altra o quali siano le cause di alcuni fenomeni osservati, ad esempio l'invecchiamento della figlia del protagonista che a fine della pellicola ha più anni di lui.

3.2 - Osservazioni emerse

La parte che merita maggiore attenzione, a causa della complessità e delle difficoltà emerse, è senza dubbio la discussione sui fenomeni relativistici. Gli stessi problemi, infatti, generarono parecchi grattacapi quando Einstein espose la teoria nei primi del '900, sebbene alcuni strumenti matematici fossero già noti.

In particolare, gli studenti hanno mal digerito la dilatazione del tempo, nonostante siano stati d'accordo nel postulare la non superabilità della velocità della luce e l'invarianza delle leggi fisiche in base alle direzioni. A poco sono valsi esempi concreti come la vita media del muone, soprattutto perché conoscere cosa sia un muone non è immediato, oppure la descrizione dell'esperimento di Michelson e Morley o ancora l'applicazione delle trasformazioni di Lorentz per due auto

che si muovono quasi a velocità luminare. Allontanarsi dall'idea di tempo assoluto non è stato, come prevedibile, lavoro da poco; nella maggior parte dei casi è stato accettato come fatto dogmatico e non come conseguenza della finitezza della velocità della luce. La discussione che ne è seguita, in cui si è arrivati a mimare il ticchettio di orologi che si muovono a velocità diverse, è servita a chiarire la differenza tra tempo proprio e tempo dilatato, più che a convincere sulla natura relativa del tempo in sé. Le stesse scene del film hanno lasciato qualche studente perplesso, ancora incredulo sulla realtà dei fatti, ma hanno avuto il pregio di rendere visibile e tangibile gli effetti che fino a prima erano formule, ipotesi, esperimenti mentali, ticchettii di un professore in aula.

Se gli aspetti delicati hanno riguardato il tempo, l'analisi delle scene del film ha mostrato l'importanza che per gli studenti hanno ancora le immagini concrete, più che le formule o gli esempi lontani dalla realtà. Il film, sebbene tratti scene che poco hanno a che fare con la quotidianità, è riuscito a fare ciò che ai docenti a volte riesce con sforzi sovrumani, o in certi casi non riuscirà mai: interessare la classe in temi complessi. La compilazione della tabella e la successiva analisi ha mostrato interesse nel comprendere se la scena scelta fosse stata inserita nella colonna corretta ed eventualmente come mai non lo fosse. C'è stata la possibilità per alcuni di intervenire per motivare ai compagni il perché la loro scelta fosse errata, mostrando quindi di aver compreso quanto discusso precedentemente, oltre che migliorare le proprie capacità espressive e tecniche.

3.3 – Metodi per la valutazione

Per questa seconda parte, la valutazione su quanto appreso dagli studenti e sul raggiungimento degli obiettivi posti è stata fatta in maniera meno strutturata. Di fondamentale importanza sono state le osservazioni fatte durante gli interventi in classe degli studenti. Le perplessità che manifestavano, e le conseguenti domande che venivano fatte durante le ore di lezione, erano pertanto utili a capire se i concetti esposti fossero stati compresi nel modo corretto. In questo modo molti dei problemi che stavano emergendo durante la trattazione degli argomenti sono stati risolti immediatamente. La stessa analisi delle scene del film è servita per capire se gli studenti avessero compreso a fondo i concetti visti durante il percorso. Eventuali incomprensioni, infatti, si sarebbero manifestate nelle spiegazioni richieste agli studenti sul perché avessero inserito quelle scene in quella colonna specifica.

Alla fine del percorso si è proceduto a svolgere una verifica con domande aperte sui temi principali che sono stati trattati durante il percorso e su alcune scene del film analizzato. È stata un'occasione anche per valutare le capacità espressive e l'uso della terminologia tecnica specifica della materia degli studenti.

Dalle risposte è emerso che, nonostante permangano delle difficoltà nella spiegazione tecnica di alcuni argomenti, generalmente gli studenti hanno compreso i punti salienti della teoria della relatività. Sono pertanto in grado di spiegare le cause dei principali effetti relativistici e sono in grado di applicare tali osservazioni per motivare la veridicità di alcune scene tratte dal film.

4 – Varianti al progetto

Sebbene la versione originale di questo progetto sia stata pensata per un Liceo Linguistico, non c'è dubbio che alcune parti possano essere modificate per essere trattate anche in un Liceo Scientifico. In particolare, ciò che è stato fatto con una classe è sfruttare un software numerico, nel nostro caso Wolfram Mathematica, per analizzare la veridicità delle leggi di Keplero, partendo dai dati raccolti dal simulatore di

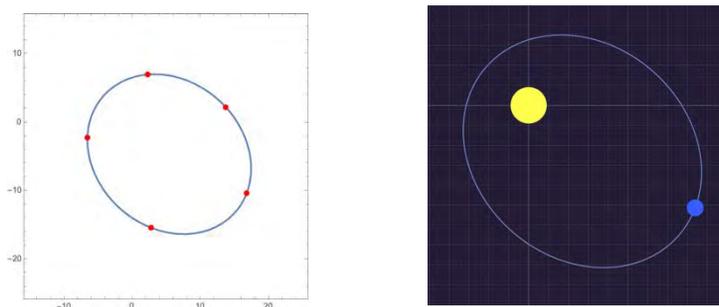


Figura 3- Simulazione dell'orbita e calcolo dell'ellisse

gravità. Questa è stata inoltre un'occasione per sperimentare tecniche matematiche, in particolare nel calcolo dell'equazione delle coniche, applicate a situazioni quasi-reali, dove i problemi principali sono dovuti all'incertezza del risultato da ottenere. Portiamo, a semplice titolo esemplificativo, la verifica della prima legge di Keplero, ovvero delle orbite ellittiche. Usando Gravity Simulator abbiamo lanciato un pianeta attorno ad una stella fissa e raccolto alcuni dati sulla posizione dello stesso. Partendo dall'equazione generica delle coniche, abbiamo risolto il sistema lineare con cinque incognite che ha fornito l'equazione della conica che rappresenta l'orbita del pianeta attorno alla stella.

Un codice più complesso può essere scritto per verificare la seconda legge di Keplero, suddividendo ad esempio il settore ellittico in piccoli triangoli e sommandone poi le aree. Anche la terza legge può essere sondata con la raccolta dati del simulatore, ma in questo caso determinare il semiasse maggiore dell'orbita ellittica richiede alcuni passaggi delicati, che sono stati solamente discussi in classe, ma non sviluppati con il codice.

5 - Conclusioni

Rispetto agli obiettivi fissati all'inizio, possiamo dire che questi sono stati parzialmente raggiunti e quindi il percorso ha avuto un parziale successo. Sicuramente gli studenti hanno mostrato grande interesse, soprattutto quando vi erano delle immaginiscattate dai telescopi spaziali. L'incredulità di alcuni effetti relativistici e l'analisi del film *Interstellar* con un occhio scientifico, hanno sicuramente incentivato maggiore interesse e partecipazione da parte di tutti gli studenti. Permangono difficoltà nell'uso del linguaggio tecnico e nell'esposizione più puntuale degli argomenti trattati, oltre che ad una conoscenza più precisa e approfondita.

Potremmo immaginare uno sviluppo futuro del percorso sulla gravità, dove sicuramente dovremmo organizzare in maniera più precisa la parte di valutazione nel secondo anno di attuazione del progetto. Allo stesso modo, migliorare il test iniziale e finale dato nella trattazione della gravità classica, può servire a migliorare l'analisi dei risultati degli studenti e a comprendere quali sia l'impatto delle tecniche e attività usate.

Infine, sarebbe sicuramente interessante poter scrivere un progetto di ricerca per capire se effettivamente l'idea di campo gravitazionale sia qualcosa di già formato nella mente degli studenti, eventualmente già alla scuola secondaria di I grado, e di come sfruttare questa eventuale possibilità nella didattica quotidiana.

Bibliografia

MIUR. (2010, Ottobre 7). Indicazioni Nazionali per i Licei. *Gazzetta Ufficiale, GU Serie Generale n.291 Suppl. Ordinario n.275*.

Briatore, L., & Leschiutta, S. (1977). Evidence for the earth gravitational shift by direct atomic-time-scale comparison. *Il Nuovo Cimento B*, 37 (2), p. 219-231.

Hafele, J., & Keating, R. (1972, July). Around-the-World Atomic Clocks: Observed Relativistic Time Gains. *Science* (4044), p. 168-170.

MIUR. (2010, Ottobre 7). Indicazioni Nazionali per i Licei. *Gazzetta Ufficiale, GU Serie Generale n.291 Suppl. Ordinario n.275*.

Nolan, C. (Regia). (2015). *Interstellar* [Film].

Oliver, J., von Tunzelmann, E., Franklin, P., & Thorne, K. S. (2015). Gravitational lensing by spinning black holes in astrophysics, and in the movie *Interstellar*. *Classical and Quantum Gravity*, 32 (6), 065001.

Postiglione, A., & De Angelis, I. (2020). *Sperimentare la gravità con il telo elastico: linee guida e trucchi*. Efestò.

Pound, R., & Rebka Jr., G. (1959). Gravitational Red-Shift in Nuclear Resonance. *Physical Review Letters*, 3 (9), p. 439-441.

TestTubeGames. (s.d.). *Gravity Simulator*. Tratto da <https://www.testtubegames.com/gravity.html>

Thorne, K. (2018). *La Scienza di Interstellar. Viaggiare nello Spaziotempo*. Firenze: Bompiani.

Williamson, K., Willoughby, S., & Prather, E. (2013, 12). Development of the Newtonian Gravity Concept Inventory. *Astronomy Education Review* (1).

La tassellazione dello spazio con poliedri regolari: storia di un problema da Aristotele a Maurolico

Luca Dragone * Antonella Palma **

*Università di Roma Tor Vergata; luca.dragone71@gmail.com

** Sapienza Università di Roma; antonella.palma@gmail.com



Sunto: Nel *Libellus de impletione loci* (1529) il matematico messinese Francesco Maurolico (1494-1575) riuscì a risolvere l'antico problema della tassellazione dello spazio mediante poliedri regolari. Infatti, fin dai tempi di Aristotele (IV sec a.C.), era opinione comune che lo spazio tridimensionale si potesse tassellare con soli cubi o con soli tetraedri regolari.

Maurolico dimostrò definitivamente l'impossibilità di tassellare lo spazio con soli tetraedri e propose una tassellazione con una combinazione di tetraedri ed ottaedri.

In questo lavoro viene proposta una trasposizione didattica di questo percorso storico-epistemologico realizzata con artefatti sia concreti che tecnologici (GeoGebra).

Parole Chiave: Maurolico, Tassellazione, Poliedri, Geogebra.

Abstract: In the *Libellus de impletione loci* (1529) Francesco Maurolico (1494-1575), mathematician from Messina, managed to solve the ancient problem of the tessellation of space using regular polyhedra. In fact, since the time of Aristotle (4th century BC), it was a common opinion that three-dimensional space could be tessellated with only cubes or with only regular tetrahedra.

Maurolico definitively demonstrated the impossibility of tessellation of space with only tetrahedra and proposed a tessellation with a combination of tetrahedra and octahedra.

This work proposes a teaching transposition of this historical-epistemological path created with both concrete and technological artefacts (GeoGebra).

Keywords: *Maurolico, Tassellation, Polyhedra, Geogebra.*

1 -Introduzione

La tassellazione del piano è ben nota fin dall'antichità. Mosaici e arabeschi testimoniano il forte legame tra matematica e arte, un connubio che si è evoluto nel tempo fino ad arrivare alle complesse strutture di Penrose ed Escher.



Fig. 1 - Tassellazioni del piano di Penrose ed Escher.

Molti percorsi didattici sono stati sviluppati intorno a questo argomento, poiché esso è molto versatile e può essere affrontato a diversi livelli: si può partire dall'analisi delle proprietà fondamentali delle figure piane (forme, angoli) ed arrivare alle trasformazioni geometriche (isometrie, omotetie), ma ci si può spingere oltre, andando a toccare concetti più

complessi come le proprietà topologiche e le dimensioni frattali.

Il caso più semplice di tassellazione periodica del piano ha come tassello un unico poligono regolare. Tale configurazione è possibile soltanto con quei poligoni che abbiano come ampiezza degli angoli interni un divisore di 360° , e ciò seleziona, tra le infinite possibilità, solo i triangoli, i quadrati e gli esagoni. Ciò è facilmente verificabile con materiale concreto e con l'uso di strumenti informatici quali il software di geometria dinamica GeoGebra 2D.

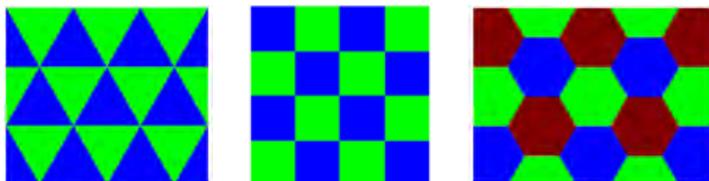


Fig. 2 - Tassellazioni del piano con un singolo poligono regolare.

Con due o più poligoni regolari si può ottenere un numero maggiore di configurazioni, come mostrato in figura 3.

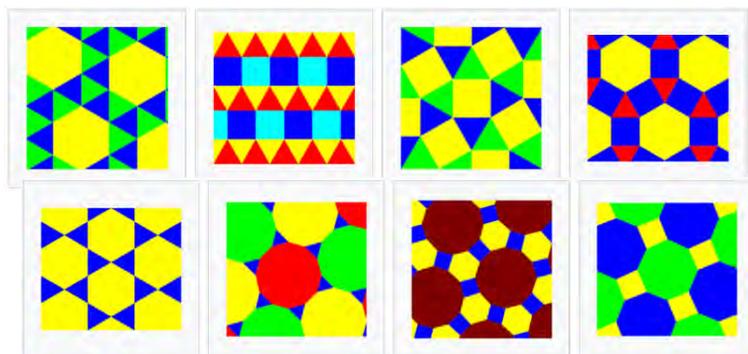


Fig. 3 - Esempi di tassellazioni del piano con due o più poligoni regolari.

Meno indagata in ambito didattico rispetto alla tassellazione del piano è quella dello spazio, anche nella situazione più semplice di avere come tasselli solo poliedri regolari. Eppure, questo argomento potrebbe costituire una via alternativa per introdurre la geometria solida, tematica presente nelle Indicazioni Nazionali.

Poiché il triangolo equilatero, il quadrato e l'esagono regolare coprono perfettamente una superficie piana, è logico pensare che almeno i poliedri regolari che costituiscono la loro naturale estensione in tre dimensioni, ossia il tetraedro e il cubo (poiché non esiste un poliedro regolare con facce esagonali), siano in grado di riempire esattamente lo spazio. Questa idea, che compare anche nel *De Coelo* di Aristotele, per secoli è stata alla base di studi, argomentazioni e tentativi di dimostrazione più o meno elaborati.

Il problema della tassellazione dello spazio si è perfezionato nel suo aspetto filosofico e matematico solo in tempi recenti, innanzitutto per la complessità dell'argomento, e poi perché i testi antichi che affrontano la questione probabilmente sono andati perduti, lasciando come unico riferimento il pensiero di Aristotele. L'atteggiamento reverenziale verso le teorie aristoteliche ha fatto sì che le sue affermazioni non fossero considerate come ipotesi da verificare o confutare, bensì come verità da dimostrare, e questo ha portato ad un rallentamento nella ricerca di un approccio corretto alla risoluzione della questione. La lunga e travagliata storia del problema della tassellazione dello spazio con i poliedri regolari fornisce un espediente narrativo di notevole valore pedagogico, poiché mette in luce un concetto

importante da trasmettere alle giovani generazioni: le conquiste dell'intelletto non sono doni che cadono dall'alto, bensì il frutto della fatica di numerosi pensatori che, in base agli strumenti della loro epoca e al clima culturale in cui hanno vissuto, sono riusciti a dare il loro contributo, più o meno determinante, alla risoluzione anche di una singola questione di carattere scientifico. Affrontare a scuola la tassellazione dello spazio con approccio storico consente di svolgere un lavoro interdisciplinare, in cui gli aspetti filosofici ed etici si legano agli aspetti più tecnici, come la necessità di usare enti matematici nuovi (l'angolo diedro per esempio), spesso trascurati nei percorsi didattici.

2 -Proposte metodologiche per facilitare la rappresentazione in 3 dimensioni.

Cottino e Sbaragli sostengono che: « risultano più “naturali” per i bambini di scuola dell'infanzia e primaria, modelli ed attività che rientrano nella geometria 3D, piuttosto che in quella 2D [...]. Il discorso può essere esteso alla scuola media e alle superiori perché, in quegli ordini scolastici si dovrebbe affinare soprattutto la capacità dell'allievo a costruire modelli matematici di situazioni reali. Ora, la realtà, come ben sappiamo, è del tipo 3D, quindi la sola geometria 2D non permetterebbe di svolgere in modo adeguato questo compito».

Nella scuola molti problemi geometrici in tre dimensioni vengono analizzati in due, perché è più facile operare sul piano in quanto i ragazzi sono abituati al disegno su carta, eppure la rappresentazione 2D può far incorrere in errori

prospettici e richiede al cervello lo sforzo di traduzione in 3D. Per superare questo problema si possono usare oggetti materiali che, oltre alla vista, coinvolgono anche il senso del tatto, oppure si può ricorrere ad un software di geometria dinamica come GeoGebra 3D che, pur producendo immagini bidimensionali, permette di ottenere l'effetto della tridimensionalità mediante il movimento e la conseguente variazione del punto di vista, senza ricorrere alla realtà virtuale.

La tassellazione dello spazio, rispetto a quella del piano, presenta un'ulteriore difficoltà: dover collocare tasselli 3D che nascondono alla vista quelli precedentemente assemblati. Il problema è spinoso se affrontato con un disegno su carta, ma la combinazione di materiale concreto e strumenti tecnologici da noi proposta può rappresentare una possibile strategia per facilitare la rappresentazione mentale.

3 -Storia di un problema

Come noto, Platone (428-348 a.C.) nel *Timeos* sostiene che gli elementi si possano associare ai poliedri regolari: il fuoco al tetraedro, la terra al cubo, l'aria all'ottaedro, l'acqua all'icosaedro e l'etere al dodecaedro. Nel *De Coelo* Aristotele (384-322 a.C.) mette in dubbio questa convinzione: «In generale poi, cercar d'assegnare ai corpi semplici una figura geometrica è cosa del tutto contraria a ragione, in primo luogo perché ci si troverà a non poter mai riempire del tutto lo spazio. Fra le superfici, infatti, tre sono le figure che si considerano capaci di riempire lo spazio, triangolo, quadrato ed esagono; fra i solidi invece sono due soltanto, la piramide

[tetraedro regolare] e il cubo ...». Questa affermazione è rimasta indiscussa per secoli, finché nel Medioevo il problema è stato ripreso da diversi uomini di scienza, sia nei commentari al *De Caelo*, sia in opere indipendenti. L'iberico Abū al-Walīd Muḥammad ibn Aḥmad ibn Ruṣḍī (1126-1198) di origine araba, il cui nome latinizzato è Averroè, si è impegnato nel tentativo di dimostrare le asserzioni di Aristotele affermando che: «otto angoli solidi, ognuno dei quali è formato da tre retti, è l'angolo del cubo; quando si uniscono otto di questi angoli, ossia del cubo o uguali a questi, riempiono necessariamente lo spazio. [...] E accade lo stesso quando c'è un punto comune a dodici piramidi[tetraedri regolari]. Infatti, sei angoli di piramidi sono uguali a quattro angoli di un cubo, poiché l'angolo solido della piramide è [formato] da due angoli retti e l'angolo del cubo da tre». Questa affermazione, non facile da interpretare, considera un'errata definizione di angolo solido come somma degli angoli piani che hanno un vertice in comune, e conduce al calcolo dell'angolo solido del cubo $3 \cdot 90^\circ = 270^\circ$, che moltiplicato per gli otto cubi disposti intorno a un unico vertice, fornisce il valore di $8 \cdot 270^\circ = 2160^\circ$. Lo stesso numero si può ottenere immaginando di poter disporre attorno ad un vertice 12 tetraedri ($3 \cdot 60^\circ = 180^\circ$ e ancora $12 \cdot 180^\circ = 2160^\circ$). Per alcuni anni il problema rimane aperto finché sorgono alcune perplessità.

Il britannico Roger Bacon (1214-1292) afferma che, con la stessa logica, anche nove ottaedri dovrebbero tassellare lo spazio, in base ai calcoli: $4 \cdot 60^\circ = 240^\circ$ e ancora $9 \cdot 240^\circ = 2160^\circ$.

Questi risultati, che nascono da una errata definizione dell'angolo solido, non hanno alcun significato geometrico. Successivamente il britannico Thomas Bradwardine (1290-1349) nota che disporre 12 tetraedri intorno ad un unico centro, come suggerito da Averroé, genererebbe un poliedro platonico che non può esistere: un dodecaedro regolare con facce triangolari. Considerando invece l'esistenza dell'icosaedro, Bradwardine propone di usare per la tassellazione non 12 bensì 20 tetraedri.

Anche quest'ultima ipotesi, come le precedenti, non ha fondamento. Infatti, la distanza dei vertici di un icosaedro dal suo centro è diversa dalla lunghezza dello spigolo del poliedro, e quindi per costruire un icosaedro bisogna assemblare attorno ad un unico centro 20 piramidi a base triangolare non regolari, e non 20 tetraedri regolari come ipotizzato da Bradwardine.

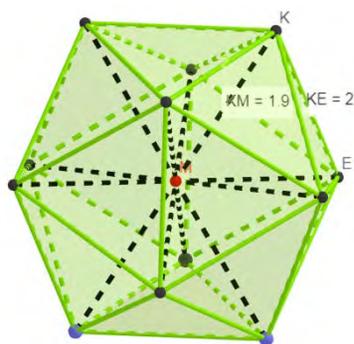


Fig. 4 - Verifica con GeoGebra 3D del fatto che in un icosaedro la misura della distanza dei vertici dal centro è diversa dalla misura dello spigolo.

Bisogna aspettare ancora due secoli perché il problema venga ripreso e affrontato dal punto di vista matematico, e non solo filologico, dall'abate messinese Francesco Maurolico

(1494-1575). La sua tesi, esposta nel *Libellus de impletione loci*, sostiene che soltanto il cubo, ripetuto otto volte, riempie lo spazio intorno a un dato punto, mentre il tetraedro regolare da solo non può svolgere la stessa funzione. Maurolico sostiene: «Magari fosse tanto veloce la via per misurare gli angoli solidi: invece è così nascosta e impervia da non essere mai stata tentata da nessuno, per quanto intelligente ed esperto matematico», affrontando così il riempimento dello spazio intorno a uno spigolo (angulariter), anziché intorno a un vertice (verticaliter) come avevano fatto i suoi predecessori.

Attraverso considerazioni geometriche il matematico messinese giunge alla misura dell'angolo diedro, rispettivamente del tetraedro e dell'ottaedro, ottenendo valori incompatibili con la tassellazione angulariter dello spazio con soli tetraedri o soli ottaedri. Ciò esaurisce definitivamente la disputa sollevata da Aristotele nel *De Coelo* sulla possibilità del riempimento dello spazio con soli tetraedri regolari che era rimasta aperta per secoli.

Maurolico introduce anche una nuova affascinante questione: la tassellazione locale e totale dello spazio con la combinazione di tetraedri ed ottaedri. Per giungere a questo risultato egli si avvale anche di modellini cartacei tridimensionali, di cui nel *Libellus* si trovano i disegni degli sviluppi piani muniti di apposite "alette" da incollare.

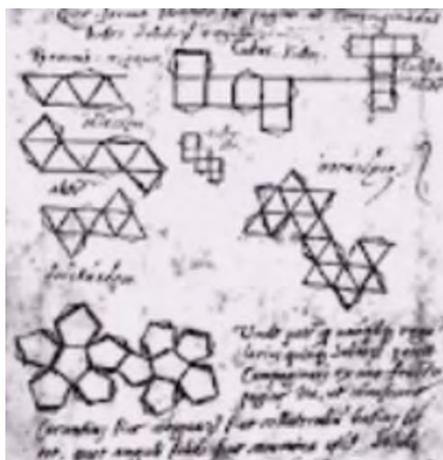


Fig. 5 - Frammento del 1536 in cui Maurolico spiega come costruire un modello di cartadi un poliedro regolare partendo da un suo sviluppo piano.

Questo nuovo approccio rigoroso alla tassellazione dello spazio apre la via ad una nuova branca della geometria che presenta problemi tuttora aperti.

4 - Percorso didattico

Il percorso parte dalla tassellazione del piano con i poligoni regolari; si investigano i vincoli legati all'ampiezza degli angoli interni e si verificano le ipotesi con l'uso di materiale concreto e del software di geometria dinamica GeoGebra 2D. Alla fase di sperimentazione empirica segue la trattazione matematica rigorosa, che permette di formalizzare i criteri della tassellazione piana e fornisce gli spunti per l'estensione alla terza dimensione.

Prima di passare alla tassellazione dello spazio con i poliedri regolari, si introduce il software GeoGebra 3D, che consente di costruire e di visualizzare in forma dinamica gli

angoli solidi (diedri e angoloidi), da assemblare opportunamente per tentare di riempire lo spazio. Le ipotesi formulate con lo strumento virtuale vengono poi verificate o confutate con modellini concreti, in forma di scheletri, realizzati con barrette magnetiche, oppure di solidi pieni, realizzati in legno o carta.

L'uso delle Classi GeoGebra permette di costruire l'intero percorso didattico in forma di *Libro GeoGebra* (MH2HBJWR). Ogni capitolo è costituito da una narrazione di carattere storico e da una serie di attività con domande-guida formulate per accompagnare l'alunno in un cammino di scoperta che lo vede protagonista attivo del processo di apprendimento.

Nel primo capitolo si presenta il problema della tassellazione dello spazio con l'ipotesi di Aristotele e l'interpretazione aritmetica ingenua introdotta da Averroé e da Bacon. Le attività permettono di verificare la possibilità di assemblare 8 cubi, e l'impossibilità di assemblare 12 tetraedri oppure 9 ottaedri intorno ad un vertice comune. Questo processo di confutazione avviene mediante l'uso di artefatti concreti, come solidi in cartoncino e barrette magnetiche, e di artefatti virtuali, come il software GeoGebra 3D. Al termine di ogni attività si chiede all'alunno di segnalare quale degli artefatti lo abbia aiutato di più ad immaginare la tassellazione dello spazio, e di descrivere brevemente quali siano, a suo parere, i vantaggi (punti di forza) e gli svantaggi (punti di debolezza) di ciascuno di essi.

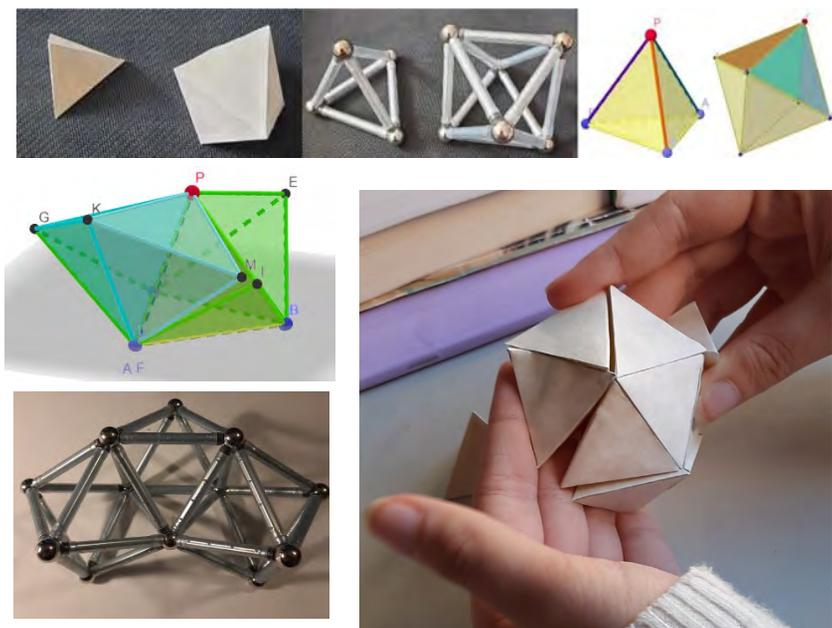


Fig. 6 - Esempi di artefatti usati nel percorso didattico.

Con domande mirate i ragazzi vengono sollecitati a mettere in dubbio i calcoli proposti da Averroé e da Bacon eseguiti con le ampiezze di angoli piani che nulla hanno a che fare con la soluzione di un problema di geometria solida come la tassellazione dello spazio.

Una discussione aperta sui risultati della sperimentazione fa nascere l'esigenza di definire un nuovo ente geometrico che, nel secondo capitolo del *Libro GeoGebra*, viene formalizzato come angolo diedro, di cui si studiano le proprietà anche in relazione alle procedure di misura. Seguendo l'intuizione di Maurolico, si formulano congetture sull'ampiezza dell'angolo diedro del tetraedro e dell'ottaedro, che vengono poi dimostrate in modo rigoroso in un percorso di scoperta.

4.1 - Studio dell'angolo diedro del tetraedro

In figura, BEC indica l'angolo diedro del tetraedro. Maurolico dimostra che $\angle BEC < 90^\circ$.

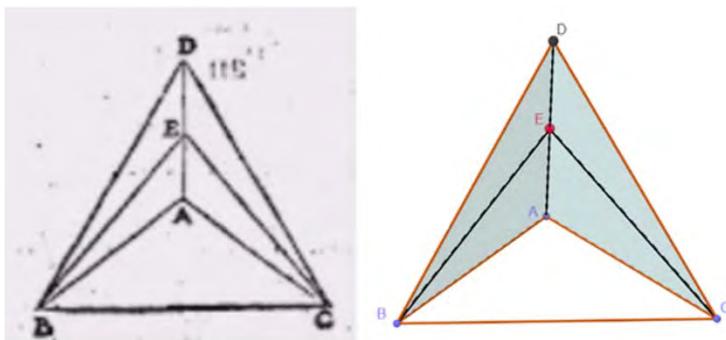


Fig. 7 - Angolo diedro del tetraedro nel disegno statico di Maurolico e dinamico con GeoGebra 3D.

Il segmento BE è l'altezza del triangolo equilatero ABD (faccia del tetraedro).

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo ABE (rettangolo in E) si ottiene: $BE^2 = AB^2 - AE^2$

ma $AE = \frac{AB}{2}$ quindi: $BE^2 = AB^2 - \frac{AB^2}{4}$

che si può scrivere anche come: $BE^2 : AB^2 = 3 : 4$

ma poiché ABCD è un tetraedro regolare $AB = BC$, quindi:

$$BE^2 : BC^2 = 3 : 4 \text{ o anche } BC^2 = \frac{4}{3} BE^2$$

e quindi vale la disuguaglianza: $BC^2 < 2BE^2$ ed essendo:

$$BE = CE \Rightarrow 2BE^2 = BE^2 + BE^2 = BE^2 + CE^2$$

si può scrivere: $BC^2 < BE^2 + CE^2$

che equivale a dire che il triangolo BEC è acutangolo in E.

Inoltre, si può facilmente dimostrare che l'angolo $\angle BEC > 60^\circ$, poiché se fosse $\angle BEC = 60^\circ$ allora il triangolo BEC sarebbe

equilatero, ed il rapporto $\frac{BC^2}{BE^2}$ sarebbe uguale ad 1 e non a $\frac{4}{3}$ come ricavato sopra.

Quindi, per l'angolo diedro BEC del tetraedro, Maurolico dimostra le disuguaglianze strette $60^\circ < BEC < 90^\circ$ che escludono le ampiezze di 60° e 90° .

L'angolo di 90° avrebbe permesso di disporre 4 angoli diedri intorno ad uno spigolo comune senza lasciare spazi vuoti

($4 \cdot 90^\circ = 360^\circ$), che poi è il caso dell'angolo diedro del cubo.

L'angolo di 60° avrebbe permesso di disporre 6 angoli diedri intorno ad uno spigolo comune senza lasciare spazi vuoti

($6 \cdot 60^\circ = 360^\circ$).

Rimane solo la possibilità di disporre 5 angoli diedri intorno ad uno spigolo comune. Per realizzare una simile disposizione (senza lasciare spazi vuoti) gli angoli diedri dovrebbero avere 72° di ampiezza.

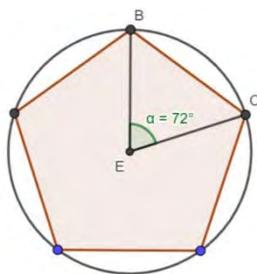


Fig. 8 - Angolo al centro di un pentagono regolare.

Se l'angolo diedro BEC del tetraedro avesse ampiezza 72° , il rapporto sarebbe lo stesso che si trova tra il quadrato del lato di un pentagono regolare ed il quadrato del raggio della circonferenza circoscritta ad esso. Si dimostra (i dettagli della

dimostrazione sono proposti ai ragazzi come attività di approfondimento) che tale rapporto vale:

$$\frac{BC^2}{BE^2} = 3 - \phi = 1,382 \dots \text{dove } \phi \text{ è il numero aureo.}$$

Per l'angolo diedro BEC del tetraedro abbiamo precedentemente ricavato che: $\frac{BC^2}{BE^2} = \frac{4}{3} = 1,333 \dots < 1,382 \dots$

Ciò dimostra che l'angolo diedro del tetraedro $BEC < 72^\circ$, ed esclude anche l'ultima possibile ipotesi per la tassellazione "angulariter".

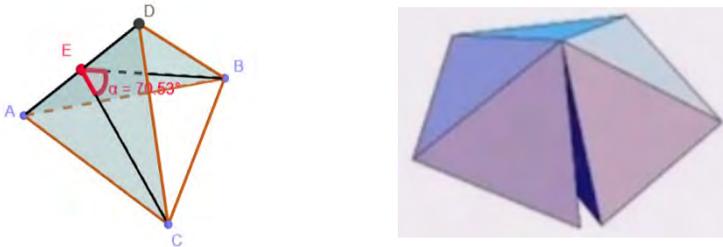


Fig. 9 - Angolo diedro del tetraedro con GeoGebra, e disposizione di 5 diedri attorno ad uno spigolo comune.

GeoGebra 3D consente di misurare l'ampiezza dell'angolo diedro del tetraedro senza ricorrere a calcoli complessi. Il risultato che si ottiene è $BEC = 70,53^\circ$.

4.2 - Studio dell'angolo diedro dell'ottaedro

In figura, BEC è l'angolo diedro dell'ottaedro. Si dimostra che $BEC > 90^\circ$.

Il segmento BE è l'altezza del triangolo equilatero ABD (faccia dell'ottaedro). Applicando il teorema di Pitagora al triangolo ABE (rettangolo in E) si ottiene: $BE^2 = AB^2 - AE^2$

$$\text{ma } AE = \frac{AB}{2} \text{ quindi: } BE^2 = AB^2 - \frac{AB^2}{4}$$

che si può scrivere anche come: $BE^2 : AB^2 = 3 : 4$

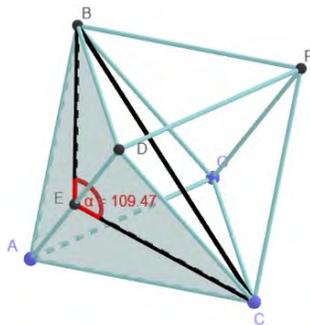


Fig. 10 - Angolo diedro dell'ottaedro con GeoGebra.

Inoltre, BC è la diagonale del quadrato $ABFC$ e quindi:
 $BC^2 : AB^2 = 2 : 1$ da cui si ottiene: $BE^2 : BC^2 = 3 : 8$
 o anche: $BC^2 = \frac{8}{3}BE^2$ e quindi $BC^2 > 2BE^2$
 ed essendo $BE = CE \Rightarrow 2BE^2 = BE^2 + BE^2 = BE^2 + CE^2$
 allora: $BC^2 > BE^2 + CE^2$

che equivale a dire che il triangolo BEC è ottusangolo in E .

Quindi, l'angolo diedro dell'ottaedro $BEC > 90^\circ$, ma si dimostra anche che $BEC < 120^\circ$, operando un confronto con l'angolo interno di un esagono regolare.

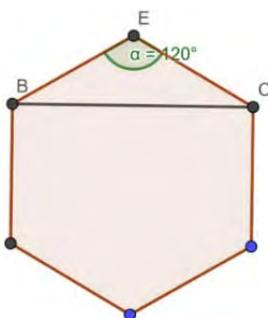


Fig. 11 - Angolo interno di un esagono regolare.

Nell'esagono regolare si dimostra facilmente che:
 $BE^2 : BC^2 = 1 : 3$ o anche: $BC^2 = 3BE^2$

Mentre, nell'ottaedro si è trovato che: $BC^2 = \frac{8}{3}BE^2 < 3BE^2$,
e quindi $BEC < 120^\circ$.

Dunque, per l'angolo diedro BEC dell'ottaedro regolare, valgono le disuguaglianze strette $90^\circ < BEC < 120^\circ$ che escludono le ampiezze di 90° e di 120° .

L'angolo di 90° avrebbe permesso di disporre quattro angoli diedri intorno ad uno spigolo comune senza lasciare spazi vuoti ($4 \cdot 90^\circ = 360^\circ$), mentre l'angolo di 120° avrebbe permesso di disporne tre ($3 \cdot 120^\circ = 360^\circ$). Non ci sono altre casistiche nell'intervallo considerato, e ciò esclude la possibilità di tassellare lo spazio "angulariter" con soli ottaedri regolari.

GeoGebra 3D consente di misurare l'ampiezza dell'angolo diedro dell'ottaedro senza ricorrere a calcoli complessi. Il risultato che si ottiene è $BEC = 109,47^\circ$.

Considerando anche i casi noti del dodecaedro e dell'icosaedro, si conclude che l'ampiezza degli angoli diedri dei poliedri platonici, ad eccezione del cubo, non è mai un divisore dell'angolo giro, e quindi non permette di riempire lo spazio attorno ad uno spigolo comune (angulariter) senza lasciare porzioni vuote.

Ne consegue l'impossibilità di tassellare lo spazio con i poliedri regolari, ad eccezione del cubo ovviamente.

4.3 - Tassellazione dello spazio con tetraedri e ottaedri

Dopo aver concluso le attività precedenti si scopre che la somma delle ampiezze degli angoli diedri del tetraedro e dell'ottaedro fornisce un valore che è esattamente uguale a 180° , e ciò apre la via alla possibilità di assemblare tetraedri e ottaedri per tassellare lo spazio.

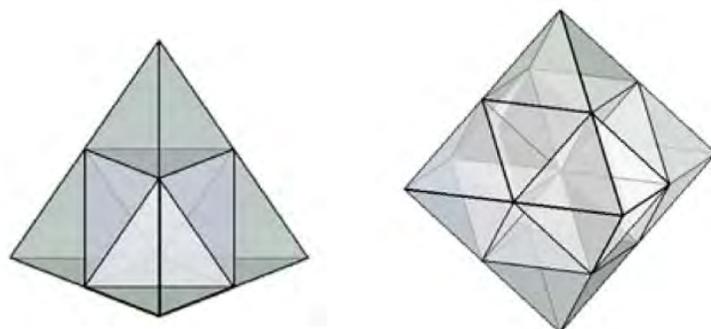
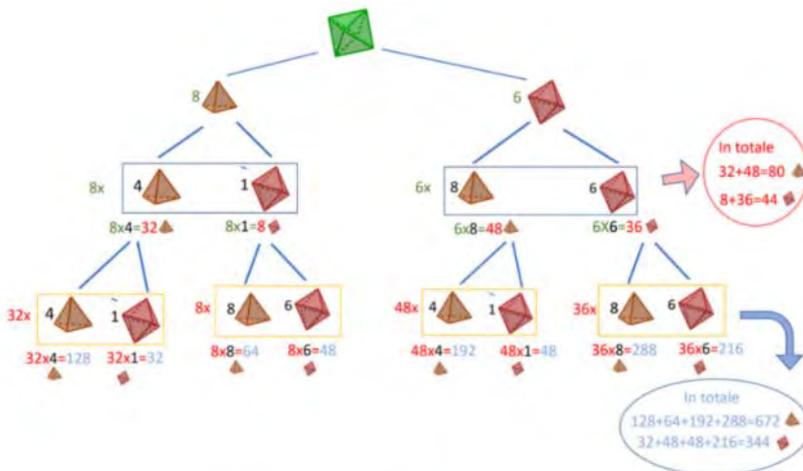
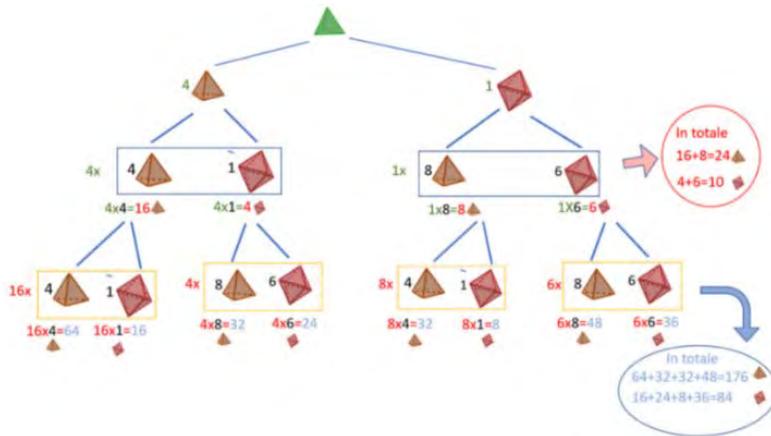


Fig. 12 – Scomposizione del tetraedro e dell’ottaedro di spigolo s in ottaedri e tetraedri di spigolo $s/2$.

Nell’ultimo capitolo del *Libro GeoGebrasi* distingue tra tassellazione locale e totale. Per realizzare ciò che Maurolico chiama tassellazione locale viene chiesto ai ragazzi di combinare un ottaedro e quattro tetraedri oppure otto tetraedri e sei ottaedri per formare rispettivamente un tetraedro o un ottaedro di spigolo doppio. Questo processo è realizzato con materiali concreti (modelli in carta e barrette magnetiche). L’utilizzo di GeoGebra 3D permette di ottenere lo stesso risultato anche in senso inverso, ossia scomponendo il tetraedro o l’ottaedro con il dimezzamento degli spigoli. La proposta in parallelo di questi due processi consente di apprezzarne l’equivalenza.

Questo riempimento locale dello spazio può essere iterato per ottenere la tassellazione totale, e anche in questo caso si può raddoppiare lo spigolo dei poliedri di partenza, oppure dimezzarlo fino ad ottenere una sorta di “polvere di poliedri”. Maurolico sceglie quest’ultima via, che viene proposta ai ragazzi in forma di quesito aritmetico e geometrico. Nell’attività viene presentata come esempio la scomposizione

del tetraedro fino a 1/16 dello spigolo iniziale, mentre per l'ottaedro viene richiesto ai ragazzi di completare autonomamente la sequenza numerica di conteggio dei frammenti tetraedrici ed ottaedrici.



L'analisi dei dati con il foglio di calcolo (figure 14 e 15) permette di scoprire che, procedendo nella frammentazione, si ottiene una quantità di tetraedri che tende a diventare doppia rispetto a quella degli ottaedri, e considerando che il volume

di un ottaedro è quattro volte quello di un tetraedro a parità di spigolo, ciò corrisponde a dire che il volume occupato dagli ottaedri tende a diventare il doppio di quello occupato dai tetraedri.

	A	B	C	D	E	F
1	spigolo	n° tetraedri	n° ottaedri	n° totale poliedri	% di tetraedri	% di ottaedri
2	s/2	4	1	5	80	20
3	s/4	24	10	34	70.59	29.41
4	s/8	176	84	260	67.69	32.31
5	s/16	1376	680	2056	66.93	33.07
6	s/32	10944	5456	16400	66.73	33.27
7	s/64	87424	43680	131104	66.68	33.32
8	s/128	699136	349504	1048640	66.67	33.33
9	s/256	5592576	2796160	8388736	66.67	33.33
10	s/512	44739584	22369536	67109120	66.67	33.33
11	s/1024	357914624	178956800	536871424	66.67	33.33
12	s/2048	2863312896	1431655424	4294968320	66.67	33.33
13	s/4096	22906494976	11453245440	34359740416	66.67	33.33
14						

Fig. 14 – Numero di frammenti ottaedrici e tetraedrici dal processo di scomposizione del tetraedro.

	A	B	C	D	E	F
1	spigolo	n° tetraedri	n° ottaedri	n° totale poliedri	% di tetraedri	% di ottaedri
2	s/2	8	6	14	57.14	42.86
3	s/4	80	44	124	64.52	35.48
4	s/8	672	344	1016	66.14	33.86
5	s/16	5440	2736	8176	66.54	33.46
6	s/32	43648	21856	65504	66.63	33.37
7	s/64	349440	174784	524224	66.66	33.34
8	s/128	2796032	1398144	4194176	66.66	33.34
9	s/256	22369280	11184896	33554176	66.67	33.33
10	s/512	178956288	89478656	268434944	66.67	33.33
11	s/1024	1431654400	715828224	2147482624	66.67	33.33
12	s/2048	11453243392	5726623744	17179867136	66.67	33.33
13	s/4096	91625963520	45812985856	137438949376	66.67	33.33

Fig. 15 – Numero di frammenti ottaedrici e tetraedrici dal processo di scomposizione dell’ottaedro.

5 -Conclusioni

L’argomento della tassellazione dello spazio ha permesso di realizzare un percorso didattico su alcune caratteristiche meno note dei poliedri, come l’angolo diedro, e di sviluppare un approccio sintetico alle dimostrazioni di geometria prima che il pensiero analitico prenda definitivamente il sopravvento, come spesso accade negli ultimi anni della Scuola Secondaria di secondo grado.

La scelta di far rivivere un problema antico ha conferito un valore aggiunto al percorso di scoperta dei ragazzi, che hanno potuto confrontarsi alla pari con lo sforzo intellettuale di intere generazioni di studiosi, acquisendo quella fiducia in se stessi che permette di sviluppare la capacità critica e l’autonomia di pensiero.

Bibliografia

Addabbo C., (2015). Il Libellus de impletione loci di Francesco Maurolico e la tassellazione dello spazio. *Tesi di Dottorato, Università di Pisa*.

Aristotele, A cura di Jori A., (2018). *Il Cielo*, Bompiani.

Aristotele, (1962). *Aristotelis opera cumAverroiscommentariis*, vol. V, rist. Minerva GmbH.

Cottino L., Sbaragli S., (2004). *Le diverse "facce" del cubo*, Carocci.

Dragone L., (2023). Maurolico e la polvere poliedrica, *Archimede*, n.1, Le Monnier, pp. 14-21.

Platone, A cura di RealeG., (2017). *Timeo*, Bompiani.

L'aritmetica modulare

Una proposta laboratoriale ispirata al Liber Abbaci di Fibonacci

Silvia Cerasaro*

*Scuola di Dottorato, Università Tor Vergata di Roma;
cerasaro@axp.mat.uniroma2.it



Sunto: *Nell'articolo si illustra come presentare delle attività didattiche sull'aritmetica modulare attraverso l'uso di una fonte storica diretta, il Liber Abbaci di Leonardo Pisano detto Fibonacci, trattato di aritmetica del 1202. Attraverso le attività proposte agli studenti si mostra come il dialogo tra insegnante e studenti, da una parte, e tra soli studenti dall'altra, sia una risorsa a favore del raggiungimento della conoscenza matematica, ovvero dell'acquisizione del significato matematico unito al contesto culturale in cui è inserito. Ciò che si evince è anche la convivenza tra il "vecchio" e il "nuovo", ovvero la considerazione delle idee presenti su un testo storico, facilmente traducibili in algoritmi per programmare un opportuno software con il linguaggio matematico odierno.*

Parole Chiave: *aritmetica modulare; storia della matematica, Liber Abbaci.*

Abstract: *The article illustrates how to present teaching activities on modular arithmetic through the use of a direct historical source, Leonardo Pisano's Liber Abbaci, known as Fibonacci, an arithmetic treatise from 1202. Through the activities presented to students, it is shown how dialogue between teacher and students, on the one hand, and between students on the other, is a resource for the achievement of mathematical knowledge, or the acquisition of mathematical meaning combined with the cultural context in which it is inserted. What is also evident is the coexistence between the "old" and the "new", or rather the*

consideration of the ideas present in a historical text, easily translatable into algorithms for programming appropriate software with today's mathematical language.

Keywords: *modular arithmetic; history of mathematics, Liber Abbaci.*

1 - Introduzione

Diversi anni fa, dopo essere entrata in classe, alcuni studenti mi chiesero cosa fosse la crittografia, avendo letto su un famoso social network di largo uso questa parola. Dare semplicemente la definizione di crittografia mi sembrava troppo restrittivo poiché ero consapevole che gli studenti avessero potuto comprendere il funzionamento della procedura utilizzata, facendoli operare come quando da piccoli smontavano i giochi per vedere cosa ci fosse dentro. Per tale motivo ho pensato di introdurre l'aritmetica modulare presentandola attraverso la storia della matematica già a partire dalla scuola secondaria di primo grado. Solitamente, quando si parla dell'aritmetica modulare definendo le classi di resto e le congruenze, si fanno i nomi di tre grandi matematici che se ne sono occupati: Fermat, Eulero e Gauss. Il primo, attraverso una corrispondenza con un suo confidente, nel 1640 parlò di quello che è conosciuto come Piccolo Teorema di Fermat, ripreso dal secondo studioso, Eulero, nel 1736. Fermat aveva teorizzato che, dato un numero primo p , si ha che $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ mentre Eulero, dopo aver introdotto la funzione $\phi(n)$ che porta il suo nome, che indica il numero dei numeri coprimi con n , affermò che $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$. Colui che formalizzò tutta la teoria delle congruenze lineari fu Gauss, nel 1800, nelle *Disquisitiones Arithmeticae*. L'aritmetica modulare

era, però, presente già nei testi ispirati ai trattati d'abaco nei periodi precedenti quelli dei grandi studiosi appena citati: ad esempio, nel *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*, di Luca Pacioli [1494] veniva utilizzata per verificare la correttezza dei conti, mediante quelle che sono denominate come "prova del 9" o del 7.

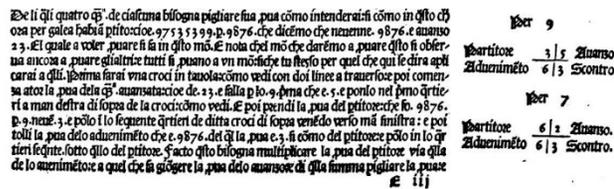


Figura 1: le prove del 9 e del 7 nel margine del *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*, di Luca Pacioli (1494)

Il trattato d'abaco che ispirò molti testi della tradizione nella penisola italiana fu, senza dubbio, il Liber Abbaci di Leonardo Pisano, detto Fibonacci, trattato d'aritmetica con prima edizione nel 1202, e seconda edizione del 1228. Nella spiegazione dell'aritmetica che prevede l'uso delle nuove figure indo-arabiche, Leonardo mostra come poter verificare la correttezza delle operazioni facendo uso della prova del 9, alternandola a quella del 7 e del 13. Per mostrarne l'uso, il matematico pisano propone tanti esempi, a partire dal secondo capitolo.

II.9

Modo uideamus si hec multiplicatio recta est: iungantur figure de superiori 98, scilicet 9 cum 8, et dematur 9, remanebunt 8. Iterum illud idem fiat de inferioribus 98, remanebunt similiter 8; et multiplicentur 8 per 8, erunt 64, de quibus extrahantur omnes nouene que sunt in eisdem 64, remanebit pro pensa 1, uel aliter: iungantur figure que sunt in predictis 64, scilicet 6 cum 4, erunt 10, de quibus demantur 9, remanebit similiter 1, postea colligantur figure, que sunt in summa multiplicationis, scilicet 9 et 6 et 0 et 4 tamen non est necesse ut figura nouenarii colligatur in aliqua persimili probatione, cum nouenarius semper erit, ut extrahi precipiatur unde colligantur 6 et 0 et 4, erunt 10, de quibus demantur 9, remanebit 1 pro pensa, sicuti remanere oportebat.

Figura 2: esempio di spiegazione della prova del 9 per la moltiplicazione 98×98, Fibonacci in Boncompagni, 1857, p. 9

Un'altra applicazione dell'aritmetica modulare si può trovare a partire dal capitolo XII, in cui è usata nella risoluzione di problemi sulle "Divinazioni", nei quali si fa uso di concetti matematici elevati che sembrano donare alla matematica un potere "magico". Nei trattati matematici del mondo latino, contemporanei a Leonardo Pisano, non comparivano applicazioni dell'aritmetica modulare: non compariva neanche tutta quella matematica che egli ci raccontò attraverso le sue opere e con cui venne a contatto frequentando diversi luoghi del Mediterraneo, punti d'incontro con studiosi e commercianti provenienti dal mondo arabo.

La prova del nove è stato uno strumento di verifica della correttezza dei conti utilizzato a scuola fino a pochi decenni fa, gradualmente sostituita da altri metodi, come l'uso dell'operazione inversa o della proprietà commutativa per l'addizione e la moltiplicazione, poiché ritenuta "non attendibile". Il suo utilizzo può, invece, essere motivo di riflessione per gli studenti sui concetti che intervengono nell'operazione di divisione, in particolare per il resto, oltre ad indirizzare ad una forma di ragionamento logico-matematico,

laddove si discute sul motivo della non attendibilità della prova stessa (condizione necessaria ma non sufficiente).

Alcune delle attività ideate sono state realizzate in una classe prima della scuola secondaria di primo grado dell'IC 2 di Anagni (FR) e sono state un mezzo per poter dare una diversa spiegazione ai criteri di divisibilità, oltre ad essere finalizzate alla messa in discussione di concetti già appresi in passato. Altre, invece, sono delle proposte da presentare in una classe prima e successive della scuola secondaria di secondo grado, con i soli prerequisiti di conoscenza delle operazioni aritmetiche dei numeri naturali, per la classe prima, del concetto di risoluzione di un sistema di equazioni, per le classi successive. La lettura del testo storico-matematico preso in considerazione non è effettuata esclusivamente in chiave storica o matematica, ma educativa. Si riconosce la valenza educativa del dialogo "etico" su tale argomento: dialogare sulla diversità dell'aspetto matematico accompagna lo studente nella costruzione del significato da attribuire all'esperienza nella sua totalità (Guillemette, Radford, 2022). Inoltre, con l'utilizzo del Liber Abbaci come fonte storica si tiene in considerazione l'aspetto culturale ed epistemologico di cui la storia stessa è portatrice; si riflette sulla lingua usata, sull'evoluzione del linguaggio specifico mentre si costruisce la conoscenza matematica (Barbin, 2022). La storia della matematica, quindi, nel contesto descritto facilita l'"apprendimento discorsivo", ovvero la capacità delle persone di apportare cambiamenti storico-sociali mediante la costruzione della conoscenza (Sfard, 2015).

2 -L'aritmetica modulare nel Liber Abbaci

Nel Capitolo II del Liber Abbaci, Leonardo Pisano parla della moltiplicazione fra numeri interi; in particolare, nei paragrafi II.5-9 descrive il procedimento per verificare la correttezza della moltiplicazione con la prova del nove: le prove usate all'interno del Liber Abbaci sono non solo relative al numero 9 ma anche ai numeri 7 e 13. Nei paragrafi III.9-11, Fibonacci vuole descrivere la teoria legata alla prova del nove servendosi dei segmenti come se fossero numeri, come erano soliti fare i matematici dell'antica Grecia e tutti coloro che, come Fibonacci, si ispirarono ad essa. Questo aspetto può indurre una riflessione negli studenti in merito al concetto di dimostrazione, per trovare analogie e differenze con la matematica contemporanea. Si può far notare che la modalità di arrivare ad una teoria attraverso l'elencazione di molti esempi era una procedura utilizzata per mostrare la validità della teoria stessa, una sorta di dimostrazione che oggi potremmo definire "universale" e che noi insegnanti solitamente vietiamo nelle nostre classi. Questo può generare un momento di riflessione per mostrare l'evoluzione del concetto di dimostrazione, che renderà consapevoli gli studenti che il loro modo di procedere utilizzando prima gli esempi è il punto di partenza per arrivare alla dimostrazione generale.

L'aritmetica modulare è uno strumento che viene utilizzato anche per la risoluzione di quei problemi che Fibonacci discute nel paragrafo XII.8, in cui si parla *de quibusdam divinationibus*, ovvero di "alcune divinazioni", problemi che permettono ad un uomo, a cui possono essere attribuiti dei poteri magici, di indovinare un numero pensato da un altro

uomo a partire dai resti di divisioni per alcuni numeri fissati, sfruttando invece solo teoremi matematici che, come spiega Fibonacci stesso, sono alla base di una primitiva forma di decriptazione. I problemi sulle divinazioni descrivono dei chiari algoritmi che possono essere programmati su python, oltre ad essere spiegati dal punto di vista matematico per gli studenti della scuola secondaria di secondo grado.

2.1 - La prova del nove

Affrontare lo studio della prova del nove permette di riflettere sul significato dell'operazione di divisione e pone attenzione sul controllo dell'esattezza dei conti, coerentemente con le Indicazioni Nazionali per il Curricolo per la scuola secondaria di primo grado in quanto è presente l'obiettivo *dare stime approssimate del risultato di una operazione e controllare la plausibilità di un calcolo*. Dalla lettura degli esempi significativi presenti nel Liber Abbaci, consultando la traduzione presente sul sito www.progettofibonacci.it, lo studente ha la possibilità di tradurre il linguaggio naturale in linguaggio matematico per poter poi riflettere sui significati trattati attraverso il dialogo tra pari e con il docente. A tale scopo è stato presentato il seguente testo, tratto dal paragrafo II.9, a cui è stato già fatto riferimento:

(II.9; G:II.22) Adesso vediamo se $\frac{PnA}{9}$ questa moltiplicazione è corretta: si sommino le figure del 98 superiore, cioè 9 con 8, e si tolga il 9, rimarrà 8. Si faccia di nuovo lo stesso col 98 inferiore, rimarrà ugualmente 8; e si moltiplichino 8 per 8, farà 64, dal quale si tolgano tutti i gruppi di 9 che sono nello stesso 64, rimarrà come resto 1, oppure in altro modo: si sommino le figure che sono nel 64 detto sopra, cioè 6 con 4, farà 10, dal quale si tolga 9, rimarrà similmente 1, dopo si addizionino le figure che sono in cima alla moltiplicazione, cioè 9 e 6 e 0 e 4, tuttavia non è necessario che la figura delle 9 unità sia aggiunta in qualche simile prova, poiché il nove sempre è previsto che venga tolto o estratto prima si cominci sempre con il togliere o l'estrarre le 9 unità, dunque si sommino 6 e 0 e 4, farà 10, dal quale si tolga 9, rimarrà 1 per il resto, come doveva rimanere.

Figura 3: traduzione di p. 9 di Boncompagni, 1857, della Figura 2

Dopo aver inventato diversi esempi, per la verifica della comprensione di quanto svolto da Fibonacci, sono state svolte diverse attività pratiche partendo dallo scrivere la divisione di un numero a per 9 nella forma $a=9\times q+r$, per ogni $a\leq 90$. In particolare, gli studenti hanno riflettuto sul valore del resto (da 0 a 8) e hanno classificato i numeri a in una tabella proprio in base a tale resto, attribuendo il nome “*classe di resto n*”, per n che va da 0 a 8. I ragazzi hanno fatto delle osservazioni su questi numeri partendo su quanto avevano appreso dagli esempi presentati nel Liber Abbaci: hanno continuato a classificare numeri più grandi in base al resto (ad esempio, poiché il numero $335 = 9\times 37+2$, hanno dedotto e scritto che $335 \equiv 2 \text{ modulo } 9$). Inoltre, gli studenti erano curiosi di capire quanto affermava Fibonacci nel dire che anche la somma delle cifre portava allo stesso risultato. Così è stato scritto in forma “polinomiale” il numero considerato, ad esempio $335 = 300 + 30 + 5 = (9 \times 33 + 3) + (9 \times 3 + 3) + (9 \times 0 + 5)$: poiché il nove sempre è previsto che venga tolto o estratto prima, come scrive Leonardo, altro non resta se non la somma delle cifre, $3+3+5=11\equiv 2 \text{ modulo } 9$. Gli studenti più svegli hanno associato quanto appena svolto alla giustificazione dei criteri di divisibilità già studiati. Quanto descritto ha reso possibile lo svolgimento delle operazioni di addizione e sottrazione tra classi di resto, finalizzate alla costruzione delle relative tabelle di somma e prodotto *modulo* 9. Con tale scopo, è stato richiesto di compilare delle tavole di addizione e moltiplicazione per le classi di resto *modulo* 9, 7 e 13 usate da Fibonacci, cioè, per quelli che noi matematici chiamiamo $\mathbb{Z}_9, \mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_{13}$. È stato richiesto anche di costruirle per \mathbb{Z}_{10} con lo scopo di avere un

caso in più da esaminare per decidere in merito all'esistenza degli elementi opposto per la somma ed inverso per il prodotto delle classi di resto presenti. Con un metodo euristico, gli studenti hanno compreso che l'opposto esiste per ogni classe di resto, mentre l'inverso esiste sempre solo nel caso in cui n sia un numero primo; le classi di resto invertibili, invece, per n non primo sono solo quelle coprime con n stesso. Gli studenti hanno dedotto che se $a \equiv r_1 \pmod n$ e $b \equiv r_2 \pmod n$, allora $a + b \equiv r_1 + r_2 \pmod n$ e se $a \equiv r_1 \pmod n$ e $b \equiv r_2 \pmod n$, allora $a \times b \equiv r_1 \times r_2 \pmod n$.

Una attività di questo tipo può essere presentata anche in una classe prima della scuola secondaria di secondo grado attraverso la programmazione di un foglio di calcolo, utilizzando opportuni comandi per la formattazione, come il blocco di una riga o di una colonna, oltre all'uso della funzione logica SE: questa opportunità prevede di approfondire aspetti logici del ragionamento ipotetico-deduttivo. In particolare, all'interno di questa funzione ne sarà usata un'altra, la funzione INTERO nel far calcolare il resto di una divisione $a = n \times q + r$, cioè $r = a - n \times q$.

=SE(\$M6*\$T\$1<9;\$M6*\$T\$1;\$M6*\$T\$1-(int(\$M6*\$T\$1/9)*9))

M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
X	1	2	3	4	5	6	7	8	0
1	1	2	3	4	5	6	7	8	0
2	2	4	6	8	1	3	5	7	0
3	3	6	0	3	6	0	3	6	0
4	4	8	3	7	2	6	1	5	0
5	5	1	6	2	7	3	8	4	0
6	6	3	0	6	3	0	6	3	0
7	7	5	3	1	8	6	4	2	0
8	8	7	6	5	4	3	2	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Figura 4: tabella moltiplicativa per le classi di resto modulo 9 con relativa formula con funzione SE

Un'altra attività si è svolta attraverso l'intervento dell'insegnante in merito al controllo di una operazione, svolta volutamente in modo errato da corrispondere alla stessa classe di resto di quella corretta: gli studenti hanno potuto capire in maniera informale il concetto di "condizione necessaria ma non sufficiente" e discutere su come poter controllare anche con diversi modi la correttezza dell'operazione svolta.

2.2 - Le divinazioni

La prova del nove permette agli studenti di avvicinarsi all'aritmetica modulare, attraverso concetti conosciuti che solitamente sono trattati in classe. Quello che viene introdotto mediante la lettura del Liber Abbaci è la prospettiva diversa sotto cui guardare lo stesso concetto matematico. Quindi, si sta dando importanza al concetto di resto di divisione, solitamente trascurato dagli studenti quando si dice che $n:m$ è q con un certo resto, senza neanche specificarlo. Per attribuire al resto la sua importanza si può proporre la lettura di un problema tratto dal capitolo XII del Liber Abbaci, dal titolo "Su alcune divinazioni".

(XII.8.4; G: XII.1191) Divida il numero cercato per 3, e per 5, e per 7, e sempre chiedi quanto rimase di ciascuna divisione. Tu invero serba 70 da ciascuna unità che sarà avanzata dalla divisione per 3, e per ciascuna unità che sarà avanzata dalla divisione per 5 trattieni 21, e per ciascuna unità che sarà avanzata dalla divisione per sette ritieni 15. E ogni volta che il totale avrà superato 105, toglì via di lì 105, e ciò che ti sarà rimasto sarà il numero separato. Per esempio: sia posto che dalla divisione per tre resti 2; per i quali trattieni due volte settanta, cioè 140, da cui toglì 105, ti resterà 35. E dalla divisione per 5 resta 3, da cui trattieni tre volte 21, cioè 63, sommalo con il predetto 35, farà 98. E dalla divisione per 7 resta 4, per questo serberai quattro volte 15, cioè 60, sommalo al 98 predetto, farà 158, da cui toglì 105, ti resterà 53, che era il numero cercato. Da questo metodo procede davvero una migliore decriptazione, naturalmente se qualcuno avrà conosciuto questo metodo insieme a te, e qualcuno gli avrà detto privatamente [un numero], allora quel tuo compagno, non interrogato, divida tacitamente il numero a lui detto per 3, e per 5, e per 7 per il metodo detto prima, e quanto sarà rimasto da quella divisione te lo dica in ordine, e così potrai sapere il numero che gli fu detto in privato

Figura 5: traduzione di p. 304 di Boncompagni, 1857

Gli studenti della scuola secondaria di primo grado possono leggere e svolgere il problema raccontato da Fibonacci con lo scopo di mostrare l'aspetto ludico e di previsione della matematica, andando a considerare le parole di Leonardo Pisano in merito alla spiegazione di una prima forma di crittografia, la motivazione dell'ideazione di questo lavoro: *Da questo metodo procede davvero una migliore decriptazione, naturalmente se qualcuno avrà conosciuto questo metodo insieme a te, e qualcuno gli avrà detto privatamente [un numero], allora quel tuo compagno, non interrogato, divida tacitamente il numero a lui detto per 3, e per 5, e per 7 per il metodo detto prima, e quanto sarà rimasto da quella divisione te lo dica in ordine, e così potrai sapere il numero che gli fu detto in privato.*

Invece, gli studenti della scuola secondaria di secondo grado possono analizzare il problema proposto, ed i successivi, dal punto di vista matematico, dopo aver affrontato lo studio delle congruenze lineari. Questo lavoro è giustificato dalle Indicazioni ministeriali, quando compare la seguente affermazione: *Lo studente avrà acquisito una visione storico-critica dei rapporti tra le tematiche principali del pensiero matematico e il contesto filosofico, scientifico e tecnologico.* La lettura e la comprensione dei significati matematici che permettono di analizzare i problemi sulle divinazioni, come il teorema cinese del resto, avvicinano lo studente al concetto di crittografia, come appena spiegato da Fibonacci in maniera molto semplice.

Per cui, sia x il numero pensato. Si divida x rispettivamente per 3, 5, e 7. Siano r_3, r_5, r_7 rispettivamente i resti della divisione di x per 3, 5 e 7. Allora $x = (70r_3 + 21r_5 + 15r_7) - n105$ fino a quando $x \leq 105$. Si può procedere facendo diversi esempi, prima di cercare di capire perché tale formula funziona, a partire dalle proprietà delle congruenze emerse dalla scrittura delle tavole della somma e prodotto coinvolte nelle attività relative alla prova del 9. Gli studenti possono osservare che:

$$70 \equiv 0 \pmod{5, 7} \text{ e } 70 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$21 \equiv 0 \pmod{3, 7} \text{ e } 21 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$15 \equiv 0 \pmod{3, 5} \text{ e } 15 \equiv 1 \pmod{7}$$

e che

$$21 r_5 \text{ e } 15 r_7 \equiv 0 \pmod{3} \text{ e } x \equiv r_3 \pmod{3}$$

$$70 r_3 \text{ e } 15 r_7 \equiv 0 \pmod{5} \text{ e } x \equiv r_5 \pmod{5}$$

$$70 r_3 \text{ e } 21 r_5 \equiv 0 \pmod{7} \text{ e } x \equiv r_7 \pmod{7}.$$

Questo problema può essere spiegato applicando il teorema cinese del resto. Il numero x che costituisce la soluzione del problema deve soddisfare contemporaneamente tre condizioni:

$$x \equiv 1 \pmod{3}$$

$$x \equiv 2 \pmod{5}$$

$$x \equiv 3 \pmod{7}$$

Per tale teorema, poiché il $\text{MCD}(3,5)=\text{MCD}(3,7)=\text{MCD}(5,7)=1$, esiste una unica soluzione del sistema modulo $105 = 3 \times 5 \times 7$. Questo spiega il 105 di cui Leonardo Pisano parla nel problema considerato. Secondo il teorema, la soluzione è data da $x = \frac{N}{n_1}x_1 + \frac{N}{n_2}x_2 + \frac{N}{n_3}x_3$, con $N = n_1 \times n_2 \times n_3$ (nel nostro caso gli n_i sono rispettivamente 3, 5 e 7, e $N=105$), e gli x_i rispettivamente le soluzioni delle seguenti congruenze: $35x_1 \equiv 1 \pmod{3}$, $21x_2 \equiv 2 \pmod{5}$ e $15x_3 \equiv 3 \pmod{7}$. Risolvendole tenendo in considerazione l'aritmetica di \mathbb{Z}_n , si ottiene che $x_1 = 2$, $x_2 = 2$ e $x_3 = 3$. Infatti, $35 \times 2 + 21 \times 2 + 15 \times 3 = 157 \equiv 52 \pmod{105}$ e 52 è il numero pensato. In realtà, la formula risolutiva utilizzata da Leonardo Pisano è differente in quanto usa i resti: gli studenti potranno dimostrare che in realtà le formule sono equivalenti poiché si ha che $70r_3 = 35x_1$, $r_5 = x_2$ e $r_7 = x_3$.

Nello svolgimento delle attività descritte in questo articolo è fondamentale tenere in considerazione che la fonte storica presentata agli studenti è scritta in latino. L'analisi del testo in latino, la ricerca degli aspetti storico-culturali del periodo considerato che emergono dal testo stesso sono solo alcuni degli elementi che vengono presi in considerazione in un laboratorio matematico e interdisciplinare così strutturato. Infine, si vuole mettere in evidenza la possibilità di tradurre il

linguaggio naturale, con cui il matematico pisaño descrive le divinazioni, in un algoritmo attraverso un opportuno software: ciò permette di constatare che la matematica è una attività in continua evoluzione, e non un procedimento da seguire. Si può impostare un diagramma che schematizzi la procedura per eseguire l'algoritmo descritto, per poi programmare mediante Python quanto riportato nel problema considerato.

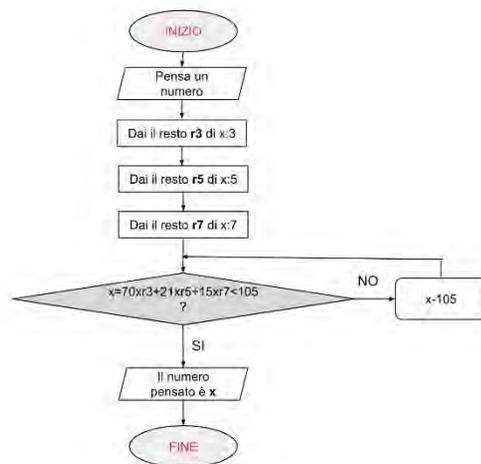


Figura 6: Diagramma di flusso sul problema di p. 304, in Boncompagni, 1857.

Il programma su Python necessita della conoscenza di comandi base e di due cicli: oltre all'uso delle virgolette e delle parentesi e dei comandi *print, inpute int*, è importante che si conosca il ciclo *if...else* e il *while*.

Impostando correttamente il software si creerà la stessa situazione verbale letta sul Liber Abbaci, che permetterà di avere, però, in breve tempo l'identità del numero pensato.

```

File Edit Format Run Options Window Help
print("Pensa ad un numero")
r3 = int(input("Inserisci il resto del numero che hai pensato diviso 3: "))
r5 = int(input("Inserisci il resto del numero che hai pensato diviso 5: "))
r7 = int(input("Inserisci il resto del numero che hai pensato diviso 7: "))

x = (70 * r3)+(21 * r5)+(15 * r7) #procedimento seguito da Fibonacci
y = x - 105 #comando per avere un numero mod 105
if x < 105:
    print("il numero che hai pensato è: ", x)
else:
    while y>105:
        y= y - 105 #corpo del ciclo per ottenere un numero <105
    print("il numero che hai pensato è: ", y)

```

Figura 7: Programmazione in Python del problema sulle divinazioni considerato.

```

Pensa ad un numero
Inserisci il resto del numero che hai pensato diviso 3: 1
Inserisci il resto del numero che hai pensato diviso 5: 2
Inserisci il resto del numero che hai pensato diviso 7: 3
il numero che hai pensato è: 52

```

Figura 8: Esecuzione del programma in Python della figura 8.

Conclusioni

I significati matematici coinvolti nelle attività presentate in classe e quelle proposte causano quello che è chiamato *choc culturale*, che a sua volta determina un *remplacement* (Barbin, 2022), cioè lo studente si sorprende e si sente apparentemente disorientato poiché concetti che già padroneggia sono presentati in maniera differente, procedendo ad una sorta di integrazione e rimpiazzamento grazie alle riflessioni scaturite dal dialogo con i compagni e con l'insegnante. Entrambi rappresentano una importante risorsa per ciascuno studente in quanto l'insegnante è un mediatore degli apprendimenti che guida verso l'autonomia mentre i compagni sono essenziali per il confronto, utile alla costruzione della conoscenza. Le ulteriori risorse a disposizione degli studenti sono state di diversa tipologia: è stato usato l'artefatto storico (il Liber Abbaci) e quello digitale (foglio di calcolo e Python):

il primo con lo scopo di trasmettere in maniera diversa un concetto già conosciuto, rielaborandolo e adeguandolo in base ai nuovi elementi emersi, sia matematici che culturali; il secondo con la finalità di manipolare i concetti appresi e comprendere che è solo il linguaggio usato a rendere apparentemente diversa la matematica studiata attraverso la sua storia.

Bibliografia

Ambrosetti, N. (2012), *L'eredità arabo-islamica nelle scienze e nelle arti del calcolo dell'Europa medievale*, 1-407

Barbin, É. (2022). On the role and scope of historical knowledge in using the history of mathematics in education. *ZDM-Mathematics Education*, 54(7), 1597-1611

Boncompagni, B. (Ed.). (1857). *Liber abbaci (Vol. 1)*. Tipogr. delle Scienze Matematiche e Fisiche

Corry, L., (2020), *Breve storia dei numeri*, Hoepli Editore

Fibonacci L., traduzione del Liber Abbaci, presente sul sito <https://www.progettofibonacci.it/index.html>

Giusti, E., & d'Alessandro, P. (2022). Leonardi Bigolli Pisani vulgo Fibonacci. Liber Abbaci. *Sudhoffs Archiv*, 106(1), 123-124

Guillemette, D. e Radford, L. (2022). Storia della matematica nel contesto della formazione degli insegnanti di matematica: una prospettiva dialogica/etica. *ZDM-Educazione alla matematica*, 54 (7), 1493-1505

Sfard, A. (2015), *Apprendimento, comunicazione e matematica. Il saggio manuale dell'apprendimento*, 129-138.

Le tassellazioni di Keplero per un percorso verticale

Roberta di Gennaro*, Nicla Palladino**, Daniela Tondini***

*Università di Napoli Parthenope; roberta.digennaro@uniparthenope.it

**Università del Molise; nicla.palladino@unimol.it

***Università di Teramo; dtondini@unite.it



Sunto: *Keplero affronta nell'Harmonices Mundi le tassellazioni del piano e dello spazio, seguendo una metodologia di ricerca molto intuitiva e lineare. In occasione di corsi di formazione per i docenti, progetti di potenziamento per gli studenti, corsi di Didattica della Matematica, abbiamo presentato l'argomento delle tassellazioni seguendo la linea di Keplero sulla base di un percorso verticale che può coinvolgere gli alunni fin dalla scuola dell'infanzia. La metodologia seguita dà la possibilità di spaziare anche su altri argomenti strettamente collegati e di presentare alcuni concetti matematici anche come punto di arrivo di una evoluzione storica durata secoli. Presentiamo l'idea alla base delle attività progettate e qualche riflessione sulle attività già attuate.*

Parole Chiave: *Keplero, tassellazioni, storia della Matematica.*

Abstract: *Kepler investigates the tessellations of the plane and space in Harmonices Mundi by following a highly intuitive and linear research methodology. On the occasion of training courses for teachers, enhancement projects for students, courses in Didactics of Mathematics, we have presented the topic of tessellations following Kepler's studies on the basis of a vertical path which may involve students from primary school. Such a methodology gives the possibility to range over other closely related topics as well as to present some mathematical concepts also as the point of arrival of a historical evolution which*

has lasted for centuries. We are going to present such an idea in accordance with planned activities and some reflections on the activities already implemented.

Keywords: *Kepler, tessellations, history of Mathematics*

1 -Introduzione

Definizione 1. “Si dice che una figura piana è regolare se ha tutti i suoi lati e tutti i suoi angoli rivolti verso l'esterno uguali uno all'altro”.

Definizione 2. “Alcune di queste [figure] sono primarie e basilari, non si estendono oltre i loro lati, ed è a queste che si applica propriamente la definizione precedente; altre sono “aumentate”, come se si estendessero oltre i loro lati, e se vengono prolungati due lati non adiacenti di una delle figure di base, questi si incontrano [a formare un vertice della figura aumentata]: queste [figure] sono chiamate Stelle”.

Con queste due definizioni, Johannes Kepler apre il primo libro, “De Figurarum Regularium demonstrationibus”, del suo “Harmonices Mundi”, trattato del 1619 (Kepler 1619). Questo è forse il più famoso dei suoi capolavori in quanto nel V libro presenta la terza legge del moto dei pianeti. Diviso in cinque libri, Keplero dedica i primi due all'armonia nella geometria (i poligoni regolari, le tassellazioni e i poliedri), il terzo all'armonia nella musica, il quarto alla metafisica e all'astrologia e l'ultimo all'astronomia.

A partire dal Medioevo e per tutto il Rinascimento, le figure a stella erano state ampiamente utilizzate nell'arte e nell'architettura ma sembra che sia stato Keplero il primo a

dar loro lo status di poligono; la conseguenza ovvia è che egli può utilizzarle nelle tassellazioni sul piano.

Per Keplero, “nel piano c'è congruenza quando i singoli angoli di più figure si uniscono in un punto in modo tale da non lasciare spazi vuoti”. Le congruenze sono oggi conosciute con i termini tassellazione, tassellatura, pavimentazione e le più note di esse, soprattutto in ambito didattico, nella scuola secondaria, sono quelle regolari e periodiche. Ne esistono però altre molto più articolate e sofisticate ed è Keplero che, probabilmente per la prima volta, presenta uno studio che potremmo dire “metodologico” sulle possibili tassellazioni del piano e, contemporaneamente, dello spazio.

Il metodo di Keplero nell'*Harmonices Mundi* è quello che abbiamo pensato di attuare anche noi per un percorso verticale sullo studio di poligoni e tassellazioni, a partire dalla scuola dell'infanzia fino alla secondaria di II grado, ma anche per i docenti in formazione. Parti distinte del progetto sono state proposte nelle seguenti occasioni: a studenti della scuola secondaria di I grado a Napoli (“Orienta-life” proposto dall'Ufficio scolastico regionale della Campania, 2024); nei corsi di Didattica della Matematica per studenti universitari del corso di laurea magistrale in Matematica (presso l'Università di Perugia, anni 2022 e 2023); nel corso di formazione per docenti di scuola dell'infanzia e di scuola primaria (“Attività matematiche competence-oriented: verso nuovi orizzonti”) nella provincia di Napoli nel 2023.

2 -Le tassellazioni del piano

Le tassellazioni costituiscono argomento rilevante nell'ambito della formazione degli studenti in quanto forniscono uno strumento per rendere la matematica concreta e facilmente trattabile, ideali per essere affrontate secondo la modalità laboratoriale. Il Laboratorio di Matematica può essere definito come un "luogo" (non necessariamente fisico) in cui studenti e docenti fanno matematica e più precisamente "un insieme strutturato di attività volte alla costruzione di significati degli oggetti matematici [...] in qualche modo assimilabile alla bottega rinascimentale, nella quale gli apprendisti imparavano facendo e vedendo fare, comunicando fra loro e con gli esperti" e nel quale "la costruzione di significati [...] è strettamente legata, da una parte, all'uso degli strumenti utilizzati nelle varie attività, dall'altra, alle interazioni tra le persone che si sviluppano durante l'esercizio di tali attività." (Matematica 2003).

Il percorso che abbiamo progettato ripercorre la trattazione di Keplero. Il secondo libro dell'*Harmonices Mundi* inizia, come il primo, con alcune definizioni:

1. Si ha una tassellazione (*in plano congruentia*) quando i vertici di più poligoni convergono in un punto senza lasciare spazi intermedi.
2. Una tassellazione si dice perfetta se ai diversi punti di convergenza concorrono gli stessi poligoni.
3. Una tassellazione si dice perfettissima quando i poligoni concorrenti sono della stessa specie.
4. Una tassellazione si dice imperfetta quando ai vertici di un poligono si presentano diverse figure, ma non è possibile proseguire la costruzione all'infinito.

La classificazione da parte di Keplero comincia dalle tassellazioni perfettissime, che oggi chiamiamo regolari e che sono le tre ben note (con triangoli equilateri, quadrati ed esagoni regolari), a cui Keplero aggiunge quella con rombi (formati da due triangoli equilateri). Si passa poi a quelle che oggi chiamiamo tassellazioni archimedee, cioè tassellazioni realizzate con due o più poligoni regolari diversi. Si inizia dalle tassellazioni che fanno uso di due poligoni regolari.

Keplero prosegue poi con una serie di proposizioni che servono ad individuare le tassellazioni fattibili e quelle che non possono essere costruite. La prima osservazione è che i poligoni convergenti su un vertice sono certamente in numero non superiore a cinque e non inferiore a tre. Procedo poi in modo sistematico confrontando i poligoni che possono formare tassellazioni archimedee: esamina come due diversi poligoni regolari possano unirsi attorno a un vertice con somma degli angoli pari a 360° . Il procedimento viene proseguito nel caso di tre poligoni e poi dimostra che da quattro distinti in su la configurazione è impossibile.

Keplero aggiunge, a queste, quelle non convesse ottenute utilizzando anche poligoni a stella. Ma oltre alle stelle che lui aveva già definito nel primo libro, costruisce nuovi poligoni non convessi con un procedimento particolare ma molto interessante: si parte dal dodecagono stellato e si cancellano, alternativamente, sei vertici. Ne viene fuori un poligono stellato a sei punte ben diverso da quelli già presentati. Questi poligoni tassellano il piano insieme ai quadrati.

C'è ben poco, prima di Keplero, sulle tassellazioni non regolari. Qualche cenno, ma certamente non in un contesto di ordinata classificazione, c'è soltanto nel famoso trattato di

geometria pratica di Albrecht Dürer (Dürer 1525), mentregià Bradwardine usava le figure stellate (Bradwardine T., Geometria speculativa. 1496). La definizione di stella data da Keplero ripercorre quella di Bradwardine e quella che dà Daniele Barbaro nel suo trattato sulla prospettiva del 1569 (Barbaro 1569). Tuttavia, la definizione di poligono stellato che usiamo oggi è dovuta a Coxeter (Coxeter 1953).

3 -Il percorso

Illustriamo qui solo sommariamente il percorso didattico sulle tassellazioni del piano da noi progettato che si basa totalmente sul “metodo” di Keplero. Scopo delle attività è quello di pervenire allo studio delle tassellazioni in modo graduale, affrontando nel contempo altri aspetti della geometria, riflettendo sulle proprietà dei poligoni, regolari e non regolari, studiando e costruendo i poligoni stellati, indagando su ulteriori questioni (anche storiche) a queste connesse.

Si parte dalla scoperta sul piano delle tassellazioni perfettissime, predisponendo pezzetti di poligoni regolari (comunemente chiamate tessere) tutti congruenti da sistemare liberamente, con l'unica indicazione di evitare sovrapposizioni e spazi vuoti. Vengono distribuite anche tessere che non potranno soddisfare la richiesta, tra cui tessere a forma di fiore, cuore, pentagoni, ecc.

I poligoni si chiamano facce della tassellazione; i lorolati si dicono spigoli della tassellazione, i loro vertici si dicono vertici della tassellazione. La formalizzazione delle proprietà da soddisfare arriva osservando le disposizioni dei poligoni

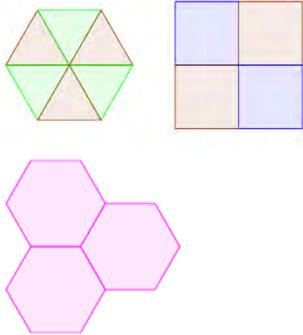
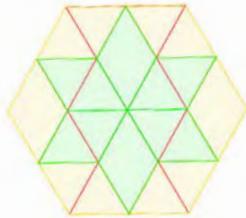
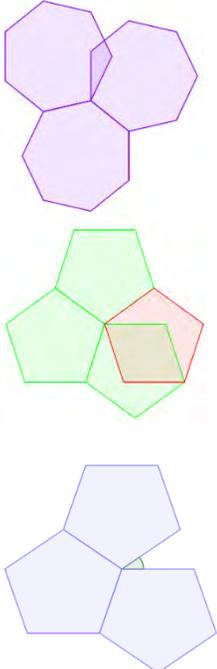
ottenute sistemando opportunamente le tessere in cartoncino e la scelta dei pezzetti utilizzati:

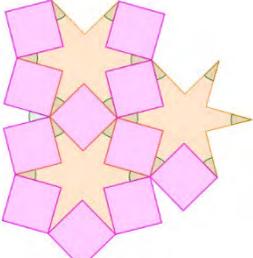
- 1) l'unione delle facce ricopre il piano;
- 2) date due facce, esse sono disgiunte; hanno in comune uno spigolo oppure hanno in comune un vertice;
- 3) ogni vertice appartiene ad un numero finito di facce.

Le più semplici tassellazioni sono formate dalla ripetizione di un unico poligono regolare e sono chiamate regolari. Esse sono anche periodiche (esistono due traslazioni indipendenti che mandano la tassellatura in sé stessa; le due traslazioni non devono avere la stessa direzione). Come Keplero, ci accertiamo anche che non formino una congruenza: 3 pentagoni, 4 pentagoni, 3 ettagoni.

Si procede poi ad una discussione per individuare e misurare gli angoli dei poligoni coinvolti e a cercare le proprietà su di essi. Si passa poi ai tentativi per tassellare il piano con due poligoni regolari di diverso tipo. È qui che Keplero inizia ad utilizzare anche poligoni stellati.

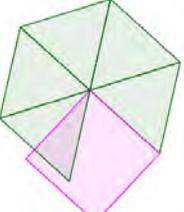
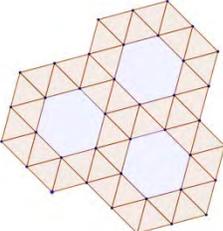
La scheda seguente mostra le tassellazioni ottenibili, alcune tassellazioni non fattibili e riassume questa prima parte del percorso. Si fa notare che Keplero utilizza anche il rombo (come unione, però, di due triangoli equilateri), concedendosi una eccezione rispetto alla definizione data. La sintesi qui realizzata ripercorre anche le tappe del progetto.

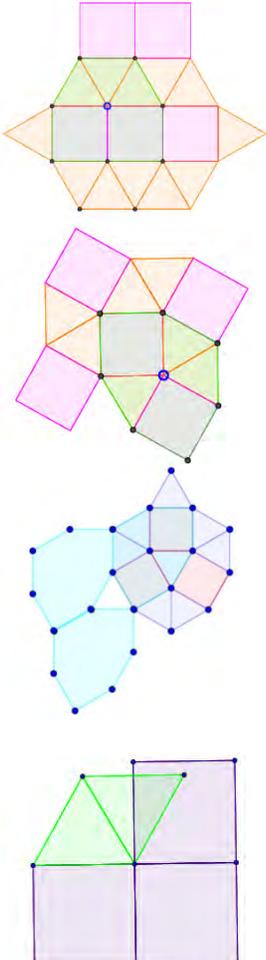
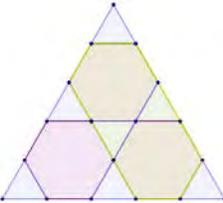
FIGURE DI UN SOLO TIPO	
<p>In modo "perfetto" usando:</p> <p>6 triangoli equilateri, 4 quadrati, 3 esagoni.</p>	
<p>Altra congruenza perfetta:</p> <p>Rombo composto da due triangoli equilateri</p>	
<p>Non formano una congruenza:</p> <p>3 pentagoni: tre angoli di un pentagono hanno somma inferiore a 360° e lasciano uno spazio vuoto.</p> <p>4 pentagoni: quattro angoli pentagonali hanno somma maggiore di 360°.</p> <p>3 ettagoni: tre angoli di tre ettagoni hanno somma maggiore di 360°.</p>	

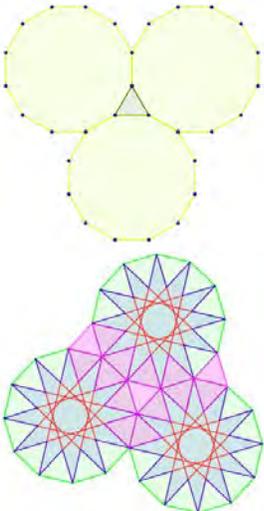
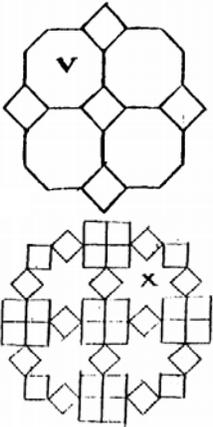
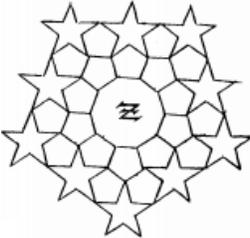
<p>Caso "stellato":</p> <p>3 quadrati → Esagono stellato: 3 punte di tre esagoni stellati + 3 quadrati</p>	
--	---

La figura a stella è oggi chiamata *isotoxal* (Grünbaum& Shephard1987).

Con figure di due tipi, seguendo sempre le indicazioni di Keplero, si scopre che:

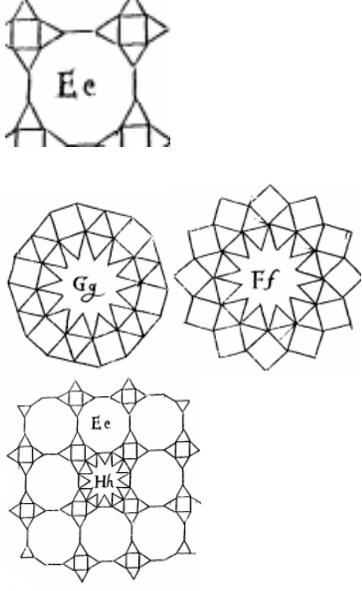
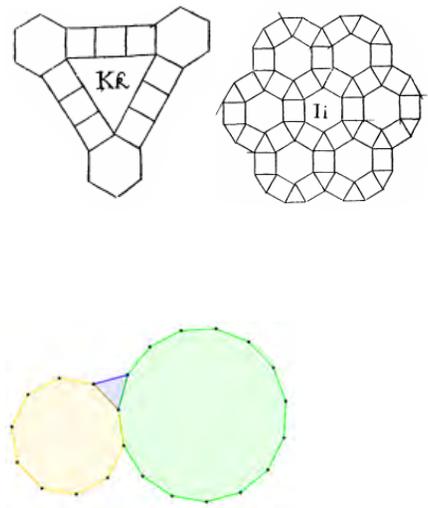
FIGURE DI DUE TIPI	
<p>Ci sono 6 modi per riempire il piano con figure di 2 tipi:</p> <ul style="list-style-type: none"> • in 2 modi con 5 angoli nei punti di incontro (cioè, con 5 figure di due tipi diversi), • in 1 modo con 4 angoli nei punti di incontro (cioè, con 4 figure di due tipi diversi), • in 3 modi con 3 angoli nei punti di incontro (cioè, con 3 figure di due tipi diversi). 	
<p>6 figure piane (di cui almeno una diversa dalle prime cinque) non possono tassellare il piano</p>	
<p>5 angoli - 1° modo in ogni punto d'incontro: 4 triangoli equilateri + 1 esagono</p>	

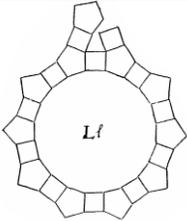
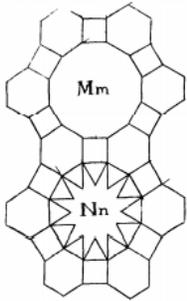
<p>5 angoli - 2° modo in ogni punto d'incontro: 3 triangoli equilateri + 2 quadrati</p> <p>Non si ricopre il piano usando 2 triangoli equilateri (o figure di ordine maggiore) e 3 quadrati.</p>	
<p>4 angoli</p> <p>2 poligoni - in ogni punto d'incontro: 2 triangoli equilateri + 2 esagoni</p> <p>Combinando altre figure, quindi né triangoli né esagoni, si ottiene sempre più o meno di quattro angoli retti, dunque non si</p>	

<p>tassella il piano.</p> <p>3 angoli - 1° modo</p> <p>In ogni punto d'incontro: 1 triangolo equilatero + 2 dodecagoni</p> <p>Caso dodecagono stellato: 2 punte di due dodecagoni stellati + 4 triangoli equilateri + 1 triangolo equilatero che riempie lo spazio rimanente</p>	
<p>3 angoli - 2° modo</p> <p>in ogni punto d'incontro: 1 quadrato + 2 ottagoni</p> <p>Caso ottagono stellato punto di incontro: 3 quadrati + 2 punte di due ottagoni stellati (gli angoli rientranti coincidono con un angolo di un quadrato)</p>	
<p>3 angoli - 3° modo</p> <p>in ogni punto d'incontro: 2 pentagoni + 1 decagono</p> <p>Modello Z: Il decagono centrale è circondato da dieci pentagoni</p>	

L'ultima tappa di Keplero sono le tassellazioni con tre poligoni:

FIGURE DI TRE TIPI	
<p>Ci sono quattro modi per tassellare il piano attraverso la congruenza di angoli piani di tre tipi.</p>	
<p>Casi non possibili</p> <p>Non possiamo usare 3 o più triangoli equilateri in ogni punto di incontro, perché tre angoli di un triangolo equilatero formano due angoli retti e quindi lasciano uno spazio già minore della somma degli angoli dei due poligoni successivi, cioè il quadrato e il pentagono.</p> <p>Per lo stesso motivo non possiamo impiegare due angoli del triangolo equilatero con due angoli del quadrato, o con quelli più grandi, poiché non lasciano spazio sufficiente per l'angolo del terzo tipo di figura.</p>	
<p>1° modo</p> <p>3 poligoni - in ogni punto d'incontro: 2 triangoli equilateri + 1 quadrato + 1 dodecagono.</p>	

<p>Caso dodecagono stellato:</p> <p>Nei punti di incontro: 4 angoli di un triangolo equilatero + 1 angolo di un quadrato + 1 punta del dodecagono stellato (modelli F, G, H).</p>	
<p>2° modo</p> <p>Consideriamo ora 1 solo triangolo equilatero.</p> <p>3 poligoni - in ogni punto d'incontro: 1 triangolo equilatero + 2 quadrati + 1 esagono</p> <p>Questo modello assume due forme: una estendibile (I) e una non estendibile (K), se non utilizzando altre figure.</p> <p>3 poligoni: 1 triangolo equilatero + 1 decagono + 1 pentadecagono</p>	

<p>3° modo</p> <p>1 quadrato + 1 pentagono + 1 icosagono (20 lati)</p> <p>Questo modello non può essere continuato verso l'esterno. È quindi una congruenza imperfetta.</p>	
<p>4° modo</p> <p>3 tipi di poligoni: 1 quadrato + 1 esagono + 1 dodecagono (M)</p> <p>Caso dodecagono stellato - ogni punto di incontro ha 4 angoli diversi: 2 angoli di triangolo equilatero + 1 angolo del quadrato + 1 angolo dell'esagono + 1 punta del dodecagono stellato (N).</p>	

Con la proposizione XXI, Keplero conclude che non si può riempire il piano con una congruenza di angoli di figure piane di quattro o più tipi diversi. I quattro angoli più piccoli sono quelli del triangolo equilatero, del quadrato, del pentagono e dell'esagono. E il primo e l'ultimo di questi si sommano a due angoli retti, mentre il secondo è un angolo retto e il terzo è maggiore di un angolo retto. Pertanto, se combinati insieme, danno più di quattro angoli retti.

4 - Alcune riflessioni

Il percorso progettato parte da esperienze più elementari ed intuitive per diventare in modo graduale sempre più articolato e formalizzato, introducendo a mano a mano particolari figure stellate e altri elementi di complessità sempre superiore. Parti diverse dell'attività sono state presentate nelle occasioni dette sopra e le esperienze sono state sicuramente efficaci e ricche di spunti. Ci limitiamo ad illustrarne qualche momento.

Come detto, i percorsi sono stati tutti affrontati in modalità laboratoriale, iniziando dalla manipolazione delle tessereda sistemare sul piano. La prima riflessione da noi fatta è nata dall'osservazione dei docenti della scuola dell'infanzia alle prese con i pezzetti di cartoncino: nonostante essi abbiano, per altre discipline, approcci sempre laboratoriali e creativi, abbiamo notato reticenza e insicurezza nel gestire i materiali per una attività di tipo "matematico". A conclusione dei vari step, però, è emersa soddisfazione in quanto si sono sentiti più sicuri nel gestire le attività matematiche e nei confronti dei concetti matematici sottesi.

Alla scuola dell'infanzia, dopo aver affrontato le tassellazioni regolari possibili con un solo tipo di tessera, il discorso si è spostato sullo studio della vita e delle abitudini delle api, affrontando la forma delle celle nell'avo.

Nella scuola secondaria (una classe terza, con potenziamento coding), quando si è trattato di misurare degli angoli, si è approfittato per parlare in modo esteso della differenza tra dimostrazione matematica e osservazione pratica che può portare a congetturare; il pretesto è seguito soprattutto dalle riflessioni su tassellazioni che sono risultate

non possibili (che, in parte abbiamo qui tralasciato per mancanza di spazio). Si è trovato anche un metodo per determinare la formula che dà la misura dell'angolo di un poligono regolare a n lati. Le immagini che seguono mostrano gli studenti della terza classe di scuola primaria alla ricerca delle tassellazioni più semplici, dopo aver ritagliato alcuni poligoni congruenti (prima fase).



Per gli studenti dei corsi universitari di Didattica della Matematica, nell'introdurre il concetto di poligono stellato, sono state ripercorse, dal punto di vista storico, alcune tappe salienti che hanno portato alla formalizzazione del concetto stesso, a partire dal Medioevo fino al Rinascimento (vedi Brigaglia e altri 2018). Queste digressioni storiche hanno permesso di riflettere su alcune nozioni geometriche rapportate a poligoni non "consueti", normalmente poco studiati, facendo emergere difficoltà e misconcezioni (relative, ad esempio, a diagonali di poligoni concavi, ad angoli esterni, alla regolarità dei poligoni, al concetto di inscritto e circoscritto). Le stesse misconcezioni sono state rilevate anche

negli studenti di scuola superiore e nei docenti in formazione (si veda Palladino e altri 2019).

In futuro, si intende implementare l'attività in altre occasioni, studiando l'efficacia di tale approccio su studenti e docenti. Inoltre, essa può essere estesa ancora seguendo il metodo di Keplero che passa, subito dopo aver affrontato il piano, ad esaminare le congruenze nello spazio. Egli inizia, naturalmente, dai cinque poliedri regolari e ripropone la sua teoria presentata nel *Mysterium* tanti anni prima sulla relazione tra poliedri regolari e struttura del cosmo (Vedi Brigaglia 2016).

Bibliografia

Barbaro D. (1569). *La Pratica della Prospettiva*. Camillo e Rutilio Borgominieri fratelli, Venezia.

Bradwardine T. (1496). *Geometria Speculativa*

Brigaglia A. (2016). Tassellazioni, solidi archimedei, poligoni stellati nell'*Harmonices Mundi* di Keplero. In *Conferenze e Seminari dell'Associazione Subalpina Mathesis 2015–2016*, ed. by Ferrara F., Giacardi L., Mosca M., KWB, Torino, pp. 91–120.

Brigaglia A., Palladino N., Vaccaro M.A. (2018). Historical notes on star geometries in mathematics, art and nature. In *Imagine Math 6 Between Culture and Mathematics*, Editors: Emmer Michele, Abate Marco, Springer International Publishing pp. 197–211.

Coxeter H.S.M., Longuet-Higgins M.S., Miller J.C.P. (1953). Uniform polyhedra. *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A* 246, 401–449.

Dürer A. (1525). *Underweysung der Messung, mit dem Zirckel und Richtscheyt, in Linien, Ebenen unnd Gantzen Corporen*, Nuremberg.

Grünbaum B., Shephard G. (1987). *Tilings and Patterns*, Freeman.

Kepler J. (1596). *Mysterium Cosmographicum*, Tübingen.

Kepler J. (1619). *Harmonices Mundi*, Frankfurt.

Matematica 2023. Documento congiunto del MIUR, UMI, SIS.
Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curriculum di Matematica.

Palladino N., Tini G., Vaccaro M.A. (2019). I poligoni stellati: origini storiche ed implicazioni didattiche. In *Matematica, Architettura, Fisica e Natura a cura di F. Casolaro e S. Sessa, Aracne, Napoli, pp. 239-248.*

Cosa sono i numeri reali?

Un possibile percorso didattico

Ruben Sabbadini *

* Mathesis Bergamo, già insegnante di Matematica e Fisica al Liceo Scientifico; rubensab@libero.it; rusabba@tin.it



Sunto: *I numeri reali non sono né definiti, né spiegati a scuola, ma si usano dandoli, praticamente, per scontati. Al massimo sono associati ai punti della retta. Da lì si potrebbe partire per illustrare i meccanismi geometrici che ne sono alla base. L'algoritmo euclideo è proprio questo, ma, una volta compreso, può lasciare il posto ad una semplice calcolatrice scientifica (o ai software di geometria dinamica). Varie rappresentazioni di reali, algebrici e trascendenti, vengono qui indicate e un teorema, si crede originale, che ne giustifica, geometricamente e analiticamente la rappresentazione.*

Parole Chiave: Numeri reali, frazioni continue, calcolatrici scientifiche.

Abstract: *Real numbers are neither defined nor explained in school, but are used by practically taking them for granted. At most they are associated with the points of a straight line. From there we could start to illustrate the geometric mechanisms that underlie it. The Euclidean algorithm is precisely this, but, once understood, it can give way to a simple scientific calculator (or dynamic geometry software). Various representations of real, algebraic and transcendent, are indicated here and a theorem, believed to be original, which justifies the representation geometrically and analytically.*

Keywords: Real numbers, continued fractions, scientific calculators.

1 - Introduzione

A scuola, nell'ultimo anno, si studiano funzioni reali di variabili reali ma relativamente alla definizione di numero reale ci si affida all'intuizione, tra l'altro piuttosto basilica. In pratica i numeri reali sono quelli che possono essere associati ai punti di una retta, fissata un'origine e un'unità di misura.

Un altro limite didattico piuttosto diffuso è l'assenza di insegnamento all'uso delle, ormai diffusissime, calcolatrici scientifiche. Potrà sembrare stupefacente, ma le due problematiche didattiche possono essere strettamente connesse.

Relativamente ai numeri reali risulta francamente insopportabile che, in contrapposizione ai numeri razionali, si insiste sulla loro presunta mancanza di "regolarità", sulla mancanza di uno "schema" che possa definirli in maniera esatta. Come si saprà questa caratteristica è conseguenza di una rappresentazione numerica in una qualche base (tipicamente decimale) ma una rappresentazione assoluta (di origine geometrica, o algebrica) porta a regolarità che è opportuno considerare.

2 - Grandezze commensurabili

Negli Elementi di Euclide è descritto un metodo, che chiameremo Algoritmo euclideo, questo metodo serviva per superare le difficoltà che venivano da quelle grandezze, dette incommensurabili, per le quali non esistono due interi n e m per cui:

$$na = mb \quad (1)$$

o, con notazione moderna:

$$a/b = m/n \quad (2)$$

ovvero il loro rapporto (*ratio* in latino), a/b , non è un rapporto tra interi, non è, come diremmo oggi, un *numero razionale*.

Euclide nel libro X degli Elementi introduce l'algoritmo (detto, erroneamente, del massimo comun divisore, MCD) e normalmente riportato nei testi moderni in forma numerica (forma che ormai ci è propria). Ne diamo qui una esposizione pressoché standard: dati due interi n e m ($n > m$, tanto per fissare le idee) avremo, in generale:

$$n = q_0 m + r_0 \quad \text{e} \quad r_0 < m$$

con q_0 detto quoziente e r_0 resto. Nell'ipotesi che r_0 sia diverso da 0 possiamo iterare il procedimento provando a dividere il divisore m , per il resto, sicché per opportuni interi q_1 e r_1 :

$$m = q_1 r_0 + r_1 \quad \text{e} \quad r_1 < r_0$$

Se $r_1 \neq 0$, si può dividere r_0 per r_1 ottenendo due interi r_2 e q_2 , tali che:

$$r_0 = q_2 r_1 + r_2 \quad \text{e} \quad r_2 < r_1$$

In generale, reiterando il procedimento, avremo che, se $r_i \neq 0$, allora esistono q_{i+1} e r_{i+1} tali che:

$$r_{i-1} = q_{i+1} r_i + r_{i+1}$$

Molto spesso si sente dire che il procedimento avrà termine, ovvero un resto $j+1$ -esimo, r_{j+1} , sarà zero e r_j sarà il MCD (dividendo questo tutti gli r_i precedenti, $i < j+1$, m e n).

C'è un piccolo, grande, problema a dare una rappresentazione numerica di questo algoritmo (e si fa erroneamente in quasi tutte le rappresentazioni moderne); Euclide non operava con numeri, neanche con quelli interi che si usavano perlomeno dai tempi dei sumeri per contare quantità, ma con grandezze (segmenti, aree, volumi, ecc.) e

l'algoritmo precedente ha tutto un altro sapore e, ciò che è più importante, tutta un'altra generalità. Vediamone il significato puramente geometrico:

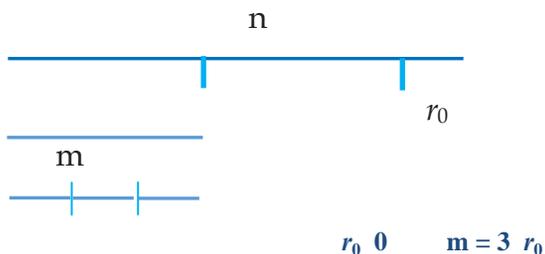


Figura 1

Dove la conclusione è $n = 7 r_0$, $m = 3 r_0$ e r_0 è il MCD. Ma Euclide pensava anche, se non soprattutto, a grandezze

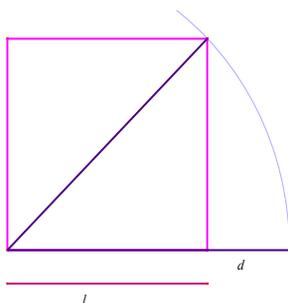


Figura 2

incommensurabili come lato l e diagonale d di figura 2 e seguenti. La seguente figura mostra l e d e, un secolo prima di Euclide, venne dimostrato che non esistono gli n e m della (1),

ma si può usare, in questo caso, l'algoritmo euclideo? e dove porta?

3 – Lo stupore dei Pitagorici

L'esempio storico, o leggendario, poco importa, dei cosiddetti *incommensurabili* per i pitagorici ha natura geometrica e gli stessi Elementi di Euclide si peritano di risolvere e affrontare il problema (ma la questione si "nasconde" tra le "pieghe" del testo e molti non la colgono).

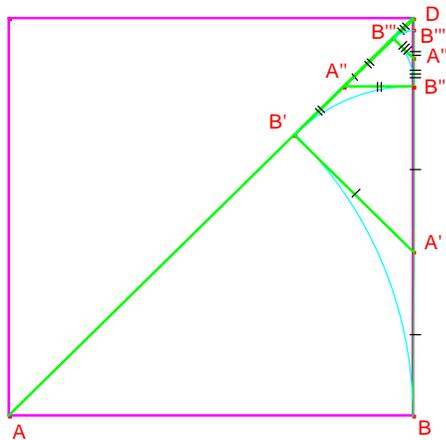


Figura 3: Ricerca pitagorica (visiva) di $\sqrt{2}$

Si arriva a $\sqrt{2}$ per passi successivi. Brevemente: al primo passo si riporta l (AB) su d e, chiaramente, entra una volta (AB') e resta $B'D$. Si riporta quest'ultimo (o meglio l'equivalente $A'B'$) sul lato, equivalente, BD e si vede che entra

2 volte e analogamente per i restanti residui (resti), sempre 2 volte (il tutto rispetta la similitudine).

Quindi al rapporto, tra d e l , che oggi chiamiamo $\sqrt{2}$, è associata la sequenza $1, 2, 2, 2, \dots$ che si scrive $[1; 2, 2, 2, \dots]$ o, meglio $[1; \bar{2}]$ usando un simbolo che usiamo alle elementari per indicare i decimali periodici. Quindi:

$$\sqrt{2} = [1; \bar{2}] \quad (3)$$

dove il primo membro è solo un simbolo che indica il rapporto tra due grandezze (d e l) e il secondo membro è il tentativo di definire un numero, con un procedimento di approssimazioni successive.

Scriviamo, in linguaggio moderno, il procedimento geometrico con l'algoritmo euclideo, e ne percepiremo appieno la genialità:

$$d = l + r_0 \quad (r_0 \text{ è il primo residuo, } B'D) \quad (4.1)$$

$$l = 2 r_0 + r_1 \quad (r_1 \text{ è il secondo residuo, } B''D) \quad (4.2)$$

$$r_0 = 2 r_0 + r_2 \quad (r_2 \text{ è il terzo residuo, } B'''D) \quad (4.3)$$

.....

$$r_{i-1} = 2 r_i + r_{i+1} \quad (r_{i+1} \text{ è l}'i+2\text{-esimo residuo, } B^{(i+2)}D) \quad (4.i)$$

.....

4 - Le frazioni continue

Eulero, Gauss, ma anche Lagrange, daranno nella modernità ulteriori contributi che è bene vedere una qualche volta. Nella (4.1) dividiamo per l , nella (4.2) dividiamo per r_0 e così via, fino alla alla (4.i) in cui dividiamo per r_i e così via:

$$d/l = 1+r_0/l = 1+1/(l/r_0) \quad (5.1)$$

$$l/r_0 = 2 + r_1 / r_0 = 2+1/(r_0/r_1) \quad (5.2)$$

$$r_0/r_1 = 2 + r_2/r_1 = 2 + 1/(r_1/r_2) \quad (5.3)$$

.....

$$r_{i-1}/r_i = 2 + r_{i+1}/r_i = 2 + 1/(r_i/r_{i+1}) \quad (5.i)$$

.....

e, sostituendo:

$$\sqrt{2} = [1; \bar{2}] = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}} \quad (6)$$

Questa è un esempio di *frazione continua semplice (f.c.s.)*, dove la scrittura $[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots]$ è un'abbreviazione di:

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots \frac{1}{a_n} \dots}}}} \quad (7)$$

e viene chiamata *rappresentazione di Eulero* della f.c.s.

Un bel teorema, di Lagrange, ci dice che qualsiasi *radicale quadratico*, ovvero soluzione di un'equazione di secondo grado, ha una struttura periodica (eventualmente con un antiperiodo $[a_0; a_1, \dots, a_k, \overline{a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}, \dots, a_n}]$), in particolare \sqrt{d} : non ha antiperiodo e l'ultimo coefficiente del periodo è $2a_0$. Una bella struttura ordinata, alla faccia di quanto si racconta agli studenti.

$$\sqrt{d} = [a_0; \overline{a_1, a_2, a_3, \dots, 2a_0}] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots \frac{1}{2a_0 + \frac{1}{a_1 + \dots}}}}} \quad (8)$$

da notare la ripetizione dopo il termine $2a_0$ evidenziata nella formula.

$$\sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots] = [1; \overline{1, 2}]$$

$$\sqrt{5} = [2; 4, 4, 4, 4, 4, \dots] = [2; \overline{4}]$$

$$\sqrt{7} = [2; 1, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 1, 4, \dots] = [2; \overline{1, 1, 1, 1, 4}]$$

Sempre algebrici anche quelli con una rappresentazione più complicata, come la *sezione aurea* $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1; \overline{1}]$.

Proponiamo qui soluzione visive, geometriche, ma non solo, per intuire i *numeri reali* e capire il significato di ogni approssimazione numerica, se decimale sarà utile una normale calcolatrice scientifica, usando solo le quattro operazioni, senza sviluppi in serie di Taylor.

Prendiamo proprio j (la *sezione aurea*)

$$\varphi = [1; \overline{1}] = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}} \quad (9)$$

Nella losanga nella (9) si riconosce proprio φ a denominatore, ovvero:

$$\varphi = [1; \overline{1}] = 1 + \frac{1}{\varphi} \quad (10)$$

questo significa che j è soluzione di:

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

cioè $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Nella (10) si riconosce l'iperbole equilatera $y=1+1/x$

Se si disegna un'iperbole equilatera, $y=1/x$, e si trasla di uno verso l'alto (sarebbe anche un'ottima occasione per insegnare che è molto più semplice lasciare l'iperbole come sta ... e abbassare l'asse delle x !!!), ovvero disegnare il grafico di $y=1+1/x$:

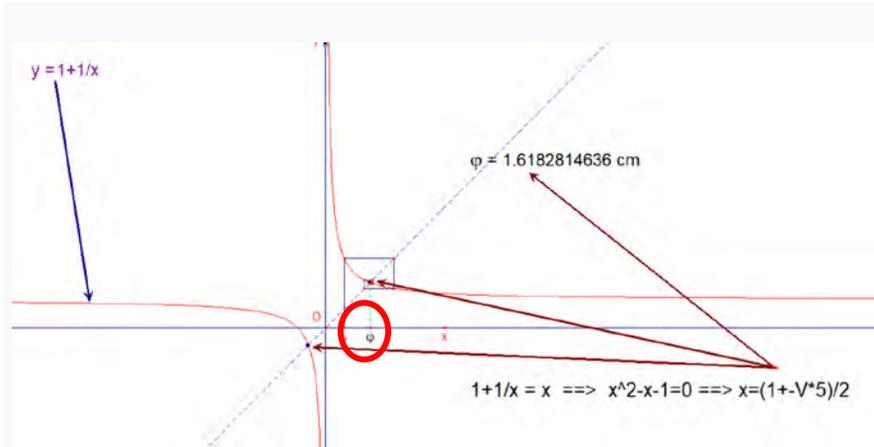


Fig. 4: Illustrazione geometrica del metodo con la calcolatrice

(In Cabri è sufficiente creare un'espressione, in questo caso $1 + 1/x$, da cui partire per illustrare tutto il metodo, per ottenere tutt'altro irrazionale è sufficiente cambiare *SOLO* l'espressione di partenza, v. più avanti la fig.6)

Il punto di nostro interesse è il valore di $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ a cui si può arrivare con una comune calcolatrice scientifica da poche decine di euro: si parte da un seme s (nella losanga in figura) che si mette in memoria (p. es. 0.3512 e poi $=$), allora si scrive l'espressione con *Ans* al posto di x : $1 + 1/Ans$ e ci si diverte a premere più volte $=$ fino ad un punto fisso che, si spiega, dipende dal numero di cifre decimali che la calcolatrice è in grado di trattare (*Cabri* ne tratta 12 dopo la virgola):

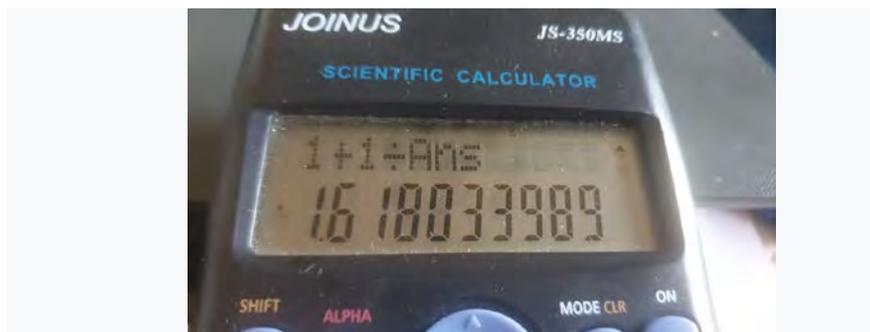


Figura 5: Ci avviciniamo al valore cercato

La spirale in figura 4 che parte dal seme s (arbitrario ... ma non troppo) e converge al valore cercato è la rappresentazione geometrica di quanto fatto con la calcolatrice.

(se si vuole si può chiarire di come il Teorema del punto fisso e le *Frazioni continue* siano strettamente connessi)

Se si vuole arrivare ad un altro irrazionale basta SOLO cambiare l'espressione di partenza mentre tutto il resto del procedimento resta inalterato (in realtà per $\sqrt{3}$, per esempio, si "salta" alternandosi tra due iperboli, ma la sostanza non cambia di molto; purtroppo le nostre calcolatrici economiche ... non gli stanno dietro!)

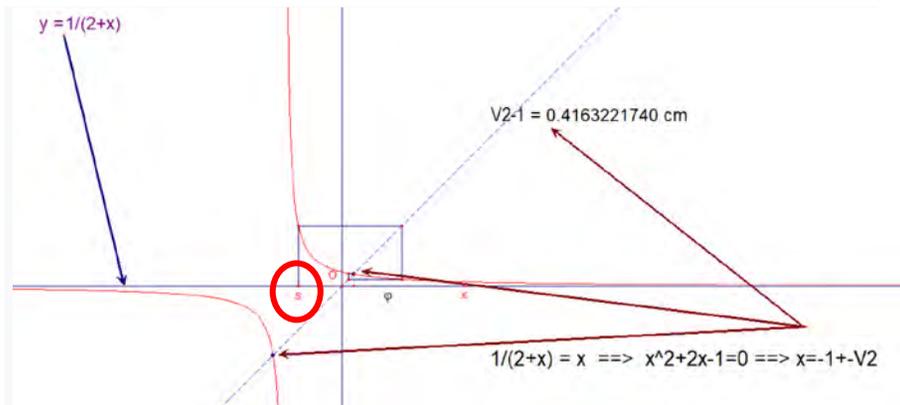


Figura 6: Si cambia solo la funzione e si ottiene $\sqrt{2}-1$

Credo che l'uso della calcolatrice e di software di geometria dinamica possano evitare di passare per questa scrittura (8) che non sempre è facile da capire e padroneggiare e potrebbe allontanare gli allievi; la *ricorsione* con la calcolatrice potrebbe, viceversa, risultare più naturale e avvicinare al vero *focus* del problema: almeno per gli algebrici quadratici si tratta di premere più volte sul tasto "=", per gli altri un piccolo software.

5 - I numeri algebrici e i Teoremi di Lagrange

Ma è sempre possibile una rappresentazione assoluta dei numeri reali, ovvero razionali e irrazionali? Joseph-Luis Lagrange nel 1870 trovò una tale rappresentazione e dimostrò che questa è possibile per ogni numero reale.

La dimostrazione è un po' articolata, una decina di Lemmi preparatori, ma non impossibile, in Kinchin.

6 - Le regolarità dei numeri trascendenti

Gli irrazionali trascendenti sono come il *brutto anatroccolo*, non sempre sono belli, ma ...

Per esempio:

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, \dots]$$

presenta una certa regolarità, mentre lo sviluppo di π non mostra regolarità:

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3 \dots]$$

ma ...

7 - Le frazioni continue generalizzate

Le frazioni continue generalizzate (f.c.g.) sono i cigni dei reali! Le *f.c.g.* sono analoghe alle precedenti ma è possibile intervenire anche sul numeratore, non solo sul denominatore:

$$\pi = 3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{6 + \frac{25}{6 + \frac{49}{6 + \frac{81}{6 + \frac{121}{6 + \frac{169}{6 + \dots}}}}}}}$$

e la regolarità è evidente come la bellezza del *cigno*!

Per questo aspetto affascinante rimandiamo a Caligaris.

8 - Klein e la visualizzazione geometrica (elementare o analitica)

Al matematico Felix Klein dobbiamo contributi importanti sulle frazioni continue e una sorprendente interpretazione geometrica della frazione continua di un numero irrazionale proposta nel 1895. Supponiamo che α sia un irrazionale positivo. Consideriamo tutti i punti del piano le cui coordinate sono interi positivi (n, m) , e immaginiamo di piantare nel piano dei pioli in corrispondenza di tutti questi punti a formare una *griglia*.

La retta $y = \alpha x$, allora, non passerà per nessuno punto della griglia: questa è l'essenza di un coefficiente angolare irrazionale. Si può immaginare la retta come un filo teso dall'origine O lungo la direzione di tale retta, e avente l'altra estremità poggiata su un punto della retta relativamente distante (o un fucile che spara un proiettile nella direzione esatta indicata da tale retta). L'esempio del filo teso può essere utile perché permette di immaginarne piccoli spostamenti: se il capo lontano del filo, viene leggermente spostato dalla retta verso l'alto, il filo si appoggerà a certi pioli; se verso il basso, il filo si appoggerà a certi altri pioli. Comunque possiamo scegliere di posizionare i pioli in punti particolari, quelli associati ai punti con coordinate (m_k, n_k) , corrispondenti ai valori $s_k = m_k / n_k$ (che Kinchin chiama *segmento k-esimo* della *f. c.*, $s_k = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_k]$), meglio, forse, *ridotta k-esima* della *f.c.*) *convergenti* a α . sempre più prossimi alla retta $y = \alpha x$. al crescere di k . In Fig. 7 mostriamo il caso di $\sqrt{2}$:

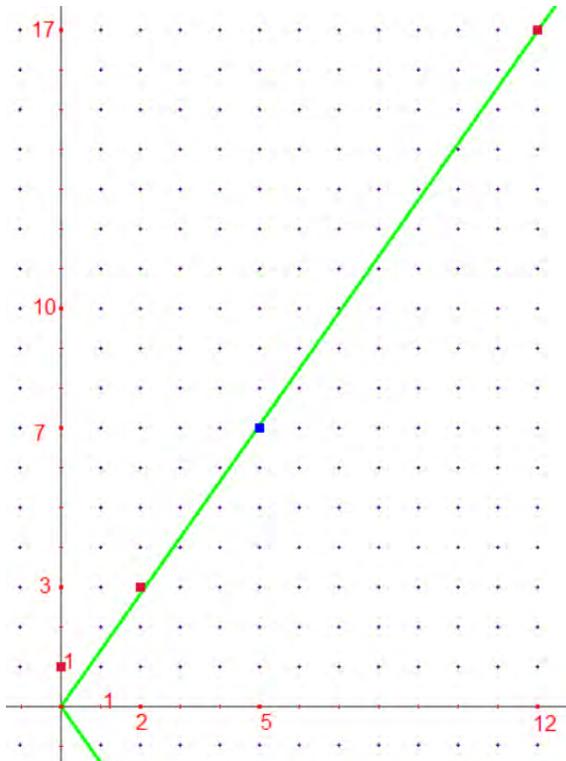


Figura 7: convergenti a $\sqrt{2}$: $1, 3/2, 7/5, 17/12, 41/29, 99/70, 239/169, 577/408, \dots$



Trovare i *convergenti* s_k nel caso dei radicali quadratici della seguente (11):

$$x = [t; \bar{t}] = t + \frac{1}{t + \frac{1}{t + \frac{1}{t + \dots}}} \quad (11)$$

(per esempio $\sqrt{2+1}$, $\sqrt{5+2}$, ecc.) è facile ed analogo a quanto visto in (10) per la *sezione aurea*. Nella losanga nella (11) si riconosce proprio x a denominatore, ovvero:

$$x = [t; \bar{t}] = t + \frac{1}{x} \tag{12}$$

(ovvamente x è soluzione di $x^2 - tx - 1 = 0$). Assegnato ad x il valore $x := s_k = m_k / n_k$ (si noti il simbolo comune in informatica “:=”, da leggersi come “assegnato”), allora:

$$m_{k+1} / n_{k+1} := t + n_k / m_k = (t m_k + n_k) / m_k \tag{13}$$

Questo ci aiuta a generalizzare al caso $x = [t; \overline{2t}]$, la versione più semplice di \sqrt{d} e della (8). Infatti: si rientra

$$y = x + t = [2t; \overline{2t}] = 2t + \frac{1}{2t + \frac{1}{2t + \frac{1}{2t + \dots}}} \tag{14}$$

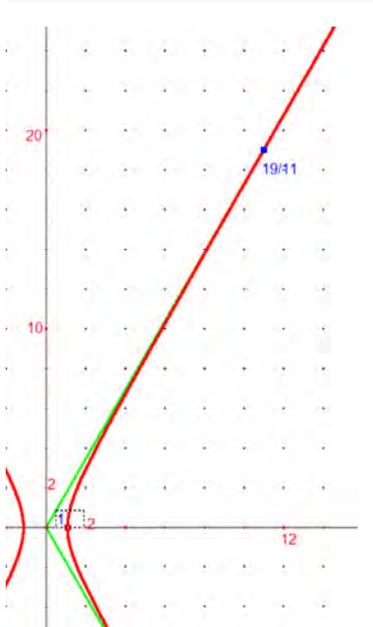
(per esempio $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{(t^2+1)}$, ecc.) e nella losanga si riconosce y ,

$$y = x + t = [2t; \overline{2t}] = 2t + \frac{1}{y} \tag{15}$$

e i convergenti a y saranno:

$$m_{k+1} / n_{k+1} := 2t + n_k / m_k = (2t m_k + n_k) / m_k \tag{16}$$

da cui banale ricavare poi i convergenti a $x = m_{k+1} / n_{k+1} - 1$



Ma come sono disposte le coppie (m_k, n_k) ? Qui dimostriamo un interessante teorema che credo sia originale (il caso generale per tutti i radicali quadratici, che ho dimostrato, è piuttosto complesso e esula gli intenti di questo articolo)

con notevoli implicazioni didattiche che danno un'immagine chiara, visiva, del significato di tutta la presente esposizione. Gli (m_k, n_k) sono su un'iperbole di equazione $\mathcal{S} : y^2 - (t^2+1) x^2 = 1$ di asintoti sulla conica degenera $y^2 - (t^2+1) x^2 = 0$.

Figura 8: convergenti a $\sqrt{3} = [1; \overline{1,2}]$: 1, 5/3, 7/4, 19/11, 26/15, 71/41,

Teor (caso particolare di agevole dimostrazione) Se gli (m, n) sono su un'iperbole di equazione $\mathcal{S} : y^2 - (t^2+1) x^2 = \pm 1$, di asintoti sulla conica degenera $y^2 - (t^2+1) x^2 = 0$, ovvero $\alpha = \sqrt{t^2+1}$, allora allora $[tm + \alpha^2 n] / (m + tn)$, convergente successivo, appartiene anch'esso a $\mathcal{S} : y^2 - (t^2+1) x^2 = \mp 1$

Dim.

Sia $m^2 - (t^2+1) n^2 = \pm 1$ l'ipotesi induttiva, allora:

$$\begin{aligned} (tm + \alpha^2 n)^2 - \alpha^2 (m + tn)^2 &= \\ &= t^2 m^2 + \alpha^4 n^2 + 2t\alpha^2 mn - \alpha^2 (m^2 + tn^2 + 2tmn) = \\ &= (t^2 - \alpha^2)(m^2 - \alpha^2 n^2) = \mp 1. \end{aligned}$$

Essendo $(0, 1)$ appartenente a \mathcal{S} il teorema è dimostrato.

9 - Conclusioni

La *rappresentazione assoluta* di un numero irrazionale, ovvero indipendente dalla base numerica scelta per rappresentarlo, significa vederne la scomposizione geometrica. Inoltre risulta palese che:

- tale scomposizione in frazione continua di un numero irrazionale è unica;
- la connessione tra *algoritmo euclideo*, cosiddetto del MCD, e suo significato geometrico;

- la connessione tra *algoritmo euclideo* e *numero reale* (dove il MCD perde di significato ma l'algoritmo no!)

- essendo i *residui* sempre più piccoli (è l'*algoritmo euclideo* che ce lo garantisce, perché altrimenti si potrebbe incrementare il *quoziente* ad ogni passo) e la natura *geometrica* del procedimento abbiamo garanzia che la successione dei resti è una successione convergente a zero;

- la cosiddetta *convergente k-esima*, ovvero la *ridotta k-esima* della frazione continua, costituisce la *migliore approssimazione razionale del rapporto irrazionale* (meglio che la rappresentazione decimale del numero irrazionale essendoci concentrati sulla natura geometrica), ovvero il *numero razionale* tratto dallo *sviluppo decimale*, è peggiore, nel senso che ha maggiore distanza dal valore vero! Tale valore tratto dallo sviluppo decimale (o in qualsiasi altra base numerica) è talvolta maggiore o talvolta minore del valore esatto dell'irrazionale ma sempre con distanza maggiore da questo, in valore assoluto, di quella della *convergente n-esima* che, invece, per sua natura, è sempre minore. Tale *convergente k-esima* è inoltre il rapporto m su n della definizione V del V Libro degli Elementi. Quindi, per quanto detto in (4), la successione delle convergenti *n-esime* è di Cauchy e, quindi, convergente all'irrazionale.

Bibliografia e sitografia

Khinchin, A. Ya., *Continued Fractions*, Dover Publications, 2018

LeVecque, W., *Fundamentals of Number Theory*, Addison-Wesley

Olds, C.D., The simple continued fraction expansion of e ,
A.M.M. Vol. 77 N. 9, Nov 1970

Knuth, D., *The Art of Computer Programming Vol. II*, Addison
Wesley

Olds, C.D., *Continued Fractions*, Random House

Miller S., Takloo-Bighash R. *An Invitation to Modern Number
Theory*, Princeton U.P.

Sabbadini, R. Un nuovo approccio all'infinito (*in preparazione*)

Siti consultati

Bigoni, R., Le frazioni continue, contiene anche un software che
trasforma un razionale in frazione continua e viceversa,

<https://www.robertobigoni.it/Matematica/FContinue/FContinue.html>

Coen, F., Sulla teoria delle Frazioni continue, Tesi di Laurea in
Teoria dei Numeri, Un. Bo

https://amslaurea.unibo.it/4547/1/Greco_Federico_tesi.pdf

<http://www.mathematicsinthemaking.eu/about/about-mima.html> (contenuto di sito Internet)

Zaccagnini, A.. Algoritmo di Euclide, numeri di Fibonacci e
Frazioni continue,

https://www.google.com/search?q=frazioni+continue&oq=frazioni+continue&gs_lcrp=EgZjaHJvbWUyCQgAEEUyORiABDIHCAEQABiABDIHCAIQLhiABDIHCAMQABiABDIICAQQABgWGB4yCAgFEAAyFhgeMggIBhAAGBYHjIICAcQABgWGB4yCggIEAAyDxgWGB4yCAgJEAAYFhge0gEINzQzM2owajeoAgCwAgA&sourceid=chrome&ie=UTF-8#fpstate=ive&vld=cid:a47fdb76,vid:Ea6aUpjsEO8,st:0

Gameludere, Le frazioni continue come approssimazione dei reali,

<https://www.gameludere.it/2020/07/04/frazioni-continue-e-approssimazione-dei-numeri-reali/>

Bravi, M. Frazioni continue,
<https://cosedimatematica.it/frazioni-continue/>

Caligaris, O. Frazioni continue,
<https://web.inge.unige.it/SMA/2003/CnFrp.pdf>

Didattica della matematica e della fisica ai tempi di ChatGPT: l'arte di fare domande

Matteo Torre*

*Liceo "G. Peano" di Tortona (AL); matteo.torre1984@gmail.com



Sunto: *L'intelligenza artificiale generativa conversazionale potrà avere davvero un impatto nella didattica della matematica e della fisica? Nell'a.s. 23-24 ho sperimentato un percorso didattico su ChatGPT coinvolgendo circa 100 studenti di 3 e 4 Liceo per un totale di 8 ore curricolari. L'obiettivo era integrare ChatGPT nella tradizionale didattica per sviluppare competenze. Gli studenti hanno proposto a ChatGPT problemi matematici e un questionario preparato per valutare le misconoscenze in fisica, interpretato le risposte e condotto il bot a formulare la risposta corretta dopo i suoi eventuali errori. Questi dialoghi metacognitivi hanno spostato l'attenzione degli studenti verso la riflessione sui significati dei termini matematici e fisici e sulla conquista dell'esigenza di spiegare i perché e non accontentarsi dei come. Vista l'ampia disponibilità di chatbot, in futuro sarà interessante implementare la sperimentazione usando altri chatbot per confrontare le risposte fornite su specifici item.*

Parole Chiave: *Didattica della Matematica e Fisica. IA nella didattica STEM. Didattica metacognitiva. ChatGPT.*

1 - Introduzione

Cantor sosteneva che in matematica l'arte di porre problemi deve essere tenuta in maggiore considerazione rispetto a quella di risolverli.

Questa citazione credo riassume molto bene la situazione che il docente di matematica deve affrontare con l'avvento di ChatGPT, anche perché sono convinto che nell'attuale società il ruolo dell'educazione scientifica debba andare ben oltre ed essere cosa ben diversa dall'apprendimento di formule e dalla loro banale applicazione. ChatGPT e, più in generale l'intelligenza artificiale generativa (IAG) rappresentano un'opportunità per affrontare le molteplici sfide che si presentano oggi nel campo dell'istruzione. Nello specifico credo che ChatGPT possa facilitare la motivazione intrinseca degli studenti e il loro impegno attivo durante l'apprendimento (Brett 2008), fattore dimostrato fondamentale per un'esperienza di apprendimento efficiente e piacevole (Mayuri 2021, Blaženka e Damir 2011, Ming-Hung et al, 2017), facendo tornare centrale il ruolo del ragionamento metacognitivo e la capacità di formulare domande ben poste in matematica e in fisica.

È importante ricordare che ChatGPT è progettata per eseguire le istruzioni degli utenti con una necessità minima di un contesto specifico (Brown et al 2020, Zhou et al 2023, Wei et al 2021). Questa proprietà, considerata il punto di forza dei Large Language Models (LLM), deve essere conosciuta e tenuta in considerazione da chi lavora nel campo dell'istruzione. L'obiettivo di ogni docente (in particolare dei docenti di matematica e fisica) è di formare allievi efficaci che,

per essere tali, devono essere in grado di sviluppare competenze nel formulare domande precise e puntuali (Oudeyer et al 2016) e, di conseguenza, ricevere risposte adeguate. Per tale motivo, affinché ChatGPT sia un “compagno” di apprendimento efficiente, deve essere utilizzato nella didattica in modo da trasformare gli studenti in soggetti attivi che controllano il loro apprendimento, aiutandoli a implementare quella capacità non posseduta da ChatGPT: la capacità di chiedersi “perché”. Dall’altro lato un uso incondizionato, non mediato da un docente e quindi acritico di ChatGPT, produce un progressivo aumento da parte degli studenti della fiducia verso di esso (i quali saranno portati a fidarsi sistematicamente dei comportamenti del sistema) e conseguentemente a un’eccessiva dipendenza dal IAG, ma soprattutto alla progressiva perdita dell’istinto critico-analitico tipico di un processo di istruzione corretto e performante.

2 – Cos’è e come funziona ChatGPT

ChatGPT (acronimo di *Chat Generative Pre-trained Transformer*, che letteralmente si traduce in *trasformatore generativo pre-addestrato*) è un chatbot basato sull’intelligenza artificiale creato da OpenAI che utilizza il modello linguistico GPT (Generative Pre-Trained Transformer). Il suo scopo è generare un discorso conversazionale che assomigli all’interazione umana (Hanna e Levic, 2023; Ray, 2023). ChatGPT offre risposte personalizzate ai suoi utenti sfruttando l’elaborazione del linguaggio naturale,

l'apprendimento supervisionato¹ e l'apprendimento per rinforzo². Nel corso della sua esistenza, ChatGPT ha subito numerose modifiche e miglioramenti sostanziali.

L'inizio del suo percorso può essere rintracciato a ChatGPT-3, un notevole esempio di modelli linguistici di grandi dimensioni (LLM) con un'impressionante quantità di parametri pari a 175 miliardi (Ray, 2023; Hanna e Levic, 2023).

Questa prima versione ha dimostrato la sua adattabilità eseguendo efficacemente diverse attività, tra cui rispondere a domande, scrivere in modo creativo e programmare. L'ampia adozione di ChatGPT-3 può essere attribuita alla sua efficacia in diversi settori, come lo sviluppo di chatbot, la traduzione linguistica, la generazione di contenuti e la sintesi di codice (Ray, 2023). Tuttavia, questa iterazione ha esposto alcune limitazioni legate a considerazioni etiche, pregiudizi presenti nelle risposte raccolte e limitazioni linguistiche, principalmente derivanti dalla forte dipendenza da set di dati in lingua inglese (Ray, 2023; Azaria, 2022).

In risposta a tali preoccupazioni, OpenAI ha creato ChatGPT-3.5, un modello linguistico con un conteggio di parametri di 6,7 miliardi. La revisione del sistema ha mostrato

¹ L'apprendimento supervisionato è una tecnica di apprendimento automatico che mira a istruire un sistema informatico in modo da consentirgli di elaborare automaticamente previsioni sui valori di uscita di un sistema rispetto ad un input sulla base di una serie di esempi ideali, costituiti da coppie di input e di output, che gli vengono inizialmente forniti.

² L'apprendimento per rinforzo è una tecnica di apprendimento automatico che punta a realizzare agenti autonomi in grado di scegliere azioni da compiere per il conseguimento di determinati obiettivi tramite interazione con l'ambiente in cui sono immersi.

una diminuzione dei pregiudizi, un aumento delle considerazioni di sicurezza ed etiche e un miglioramento della capacità di gestire vari tipi di comunicazione (Ray, 2023). L'introduzione dell'ultima versione, ChatGPT-4, è avvenuta nel marzo 2023. Questa versione vanta un impressionante conteggio di parametri di 170 trilioni, posizionandola come uno dei chatbot più sofisticati sviluppati finora (Hanna & Levic, 2023). L'interessante articolo di Ahsan et al. (2023) fornisce esaurienti spiegazioni sui miglioramenti apportati all'ultima versione di ChatGPT, spiegando che essi includono strategie di apprendimento profondo all'avanguardia, una struttura di rete neurale artificiale aggiornata e un modello di linguaggio multimodale ampliato e adatto per analizzare dati basati su testo e immagini.

3 - ChatGPT nella didattica

L'integrazione di ChatGPT nell'istruzione superiore rappresenta un salto essenziale nell'era della digitalizzazione, inaugurando, attraverso una struttura flessibile di utilizzi, una fase trasformativa in cui studenti ed educatori interagiscono con materiali educativi e comunicano tra loro. Con ChatGPT gli studenti ottengono un accesso accelerato a una vasta gamma di informazioni, assistenza linguistica, convenienza economica e opportunità educative personalizzate e ChatGPT offre un supporto per gli studenti adattandosi ai loro distinti stili di apprendimento e preferenze. Kasneci et al. (2023) e Sallam (2023) sostengono che coltivare un ambiente educativo dinamico e stimolante può essere realizzato coinvolgendo gli

studenti in dialoghi autentici mediati da ChatGPT. All'interno di questi dialoghi, agli studenti viene incoraggiato a fare domande, cercare chiarimenti e partecipare attivamente a discussioni su concetti complessi. Le ricerche più recenti forniscono prove che questo approccio favorisca l'autonomia degli studenti, portando miglioramenti sull'apprendimento metacognitivo e lo sviluppo delle capacità di pensiero critico. Anche gli insegnanti possono trarre benefici dall'impiego di ChatGPT (Rudolph et al., 2023), poiché fornisce prezioso supporto nell'ottimizzazione di compiti burocratici, nello sviluppo di idee per redigere lezioni innovative e, addirittura, nell'automatizzazione della valutazione degli elaborati degli studenti.

Tuttavia, l'integrazione di ChatGPT nel contesto della scuola superiore pone sfide specifiche, accanto alle quali è essenziale affrontare le questioni legate alla privacy, alla sicurezza e al potenziale di sfruttamento tecnologico utilizzando termini alternativi. Allo stesso modo, la generazione di informazioni e citazioni falsificate da parte di ChatGPT possiede la capacità di indirizzare gli studenti in modo errato (Hsu & Thompson, 2023). Pertanto, parallelamente a sperimentazioni didattiche con gli studenti (come quella descritta in questo articolo), è cruciale offrire formazione e opportunità di sviluppo professionale ai docenti al fine di migliorare l'utilizzo efficace di ChatGPT (Baidoo-Anu & Owusu Ansah, 2023).

Il percorso didattico descritto mira ad esaminare il potenziale utilizzo di ChatGPT nel contesto della scuola superiore, con un focus specifico su due obiettivi principali: affrontare le sfide legate all'integrazione di ChatGPT nella

didattica della matematica e della fisica; evidenziare i possibili benefici derivanti dall'uso di ChatGPT sulla metacognizione di concetti scientifici.

Sarà obiettivo di un'altra pubblicazione la proposta per un percorso formativo inerente l'IAG e i vari tipi di chatbot dedicata agli insegnanti di ogni ordine e grado, nonché disciplina.

4 - La sperimentazione didattica

Nell'anno scolastico 2023-24 ho progettato un percorso didattico sulle generalità della IAG (in particolare su ChatGPT) e le sue applicazioni alla didattica della matematica e della fisica. Il percorso didattico è stato dapprima condiviso con altri 3 docenti del mio stesso istituto (con 4 ore di sperimentazione "sul campo" sul corretto uso di ChatGPT e la condivisione di buone pratiche) e poi sperimentato in classe, coinvolgendo complessivamente 108 studenti del secondo biennio del Liceo per un totale di 8 ore curricolari. Tra i colleghi "sperimentatori", un collega è docente di storia e filosofia: le considerazioni didattiche e i risultati da lui ottenuti non sono stati riportati nel presente articolo, per coerenza con la struttura scelta, ma saranno presi in considerazione in un'altra pubblicazione.

Il percorso didattico ha come obiettivo quello di integrare ChatGPT nella tradizionale didattica della matematica e della fisica e pensarlo come strumento per il consolidamento e lo sviluppo di abilità di livello superiore quali la metacognizione, il pensiero critico e la vigilanza intellettuale,

considerati componenti fondamentali durante l'apprendimento. La metacognizione, infatti, è fondamentale per intraprendere comportamenti attivi di acquisizione della conoscenza: Loewenstein (1994) spiega che la ricerca di informazioni guidata dalla curiosità è motivata principalmente dalla capacità dell'individuo di individuare una lacuna nelle proprie conoscenze. Questa fase mobilita la capacità metacognitiva di valutare le proprie conoscenze e di decidere i comportamenti cognitivi da adottare. Numerosi studi (Hutchinson, 1993; Whitebread et al, 2009) hanno, inoltre, dimostrato che studenti con performance di livello standard oppure con prestazioni matematiche particolarmente basse, traggono un vantaggio sostanziale da procedure di didattica metacognitiva. Infatti, gli alunni con difficoltà di apprendimento sono frequentemente affetti da carenze nella metacognizione che li portano al fallimento in una o più fasi del processo risolutivo di un problema, dalla mancata comprensione del testo del problema, all'identificazione delle informazioni rilevanti, delle operazioni e degli errori, alle difficoltà nella costruzione di una rappresentazione.

Nell'ambito del percorso didattico un argomento centrale è stato appunto quello di mettere gli studenti nella condizione sviluppare l'abilità di chiedere ulteriori informazioni se sorpresi dalle risposte di ChatGPT, dialogando in "maniera colta" con il chatbot. Al tempo stesso, il percorso didattico preserva la centralità del docente, il quale ha il compito di guidare gli studenti nel sviluppare abilità metacognitive come, ad esempio, la capacità di porre domande scientificamente profonde e sensate, nonché scrivere brevi testi con un linguaggio scientifico corretto e appropriato. La scopo ultimo

della sperimentazione didattica era anche quello di sensibilizzare i docenti (in particolare quelli di matematica e fisica) verso un uso più accentuato della didattica metacognitiva con la consapevolezza che gli studenti non possono sviluppare competenze matematiche se non sono in grado di esaminare i problemi da diversi punti di vista, ovvero se non sono in grado di confrontare le loro soluzioni con altre soluzioni o altri problemi strutturalmente simili. Porsi esplicitamente l'obiettivo di una educazione scientifica di tipo metacognitivo significa non accontentarsi di porre a ChatGPT esercizi standard o definizioni condivise, ma bensì porre problemi in cui è necessario un intervento personale del fruitore di ChatGPT, lo studente perché come diceva Polya (2016) *“risolvere problemi è una impresa specifica dell'intelligenza e l'intelligenza è il dono specifico del genere umano”*.

Il percorso didattico prevedeva che gli studenti sottoponessero a ChatGPT problemi verbali, algebrici, aritmetici, oltre a un questionario di fisica preparato per valutare le misconoscenze in fisica degli alunni tra gli 11 e i 14 anni (si tratta del CEF, Conoscenze Elementari di Fisica)³, presentato in un altro articolo a questo Convegno (Torre et al 2024). I quesiti presi dalle prove standardizzate (ad esempio, INVALSI e OCSE-PISA) e gli item presenti nel questionario CEF costituiscono, infatti, ottimi esempi su cui lavorare perché necessitano lo sviluppo da parte dei ragazzi di domande metacognitive (far ricorso al perché) per interpretare le risposte date da ChatGPT ma soprattutto per condurre il bot a formulare la risposta corretta. Al tempo stesso, è stato chiesto

³ La versione dell'intero questionario è consultabile all'indirizzo https://sapie.it/wp/wp-content/uploads/2023/03/CEF_PRESENTAZIONE_20-11-1.pdf.

ai ragazzi anche di inventare alcuni quesiti prendendo spunto da quelli delle prove standardizzate, attivando così anche le loro competenze creative in ambito matematico (Fig. 3).

Come abbiamo descritto in precedenza, ChatGPT non è stato ideato per spiegare i perché, ma per generare risposte immediate. La proposta didattica chiedeva agli studenti di utilizzare le tipologie di item descritti per instaurare dialoghi metacognitivi con ChatGPT sulla matematica e la fisica (si veda Fig. 1, Fig. 2) con l'obiettivo di correggere gli errori commessi e diventare "insegnanti" del chatbot. Questi dialoghi metacognitivi hanno spostato l'attenzione degli studenti verso la riflessione sui significati dei termini matematici e fisici via via proposti da ChatGPT, sull'approccio critico allo studio, sulla conquista dell'esigenza di spiegare i perché e non accontentarsi dei come.



You

Una ragazza spinge una scatola sul terreno. Per far muovere la scatola...

- A. Occorre una forza uguale al peso della scatola
- B. Non occorre una forza uguale o maggiore al peso della scatola
- C. Occorre una forza maggiore del peso della scatola
- D. Dipende dal volume della scatola



ChatGPT

La risposta corretta è C. Occorre una forza maggiore del peso della scatola.

Per far muovere la scatola, la ragazza deve superare l'attrito tra la scatola e la superficie su cui si muove. L'attrito può essere influenzato da diversi fattori come la rugosità della superficie e la presenza di altri ostacoli. In generale, la forza necessaria per superare l'attrito e far muovere la scatola deve essere maggiore o almeno uguale al peso della scatola. Quindi, la risposta corretta è che occorre una forza maggiore del peso della scatola (opzione C).

Figura 1: una risposta di ChatGPT sul concetto di forza d'attrito



You

L'oggetto C è pieno e galleggia se immerso in acqua. Cosa succede se lo foro da parte a parte e lo immergo in acqua?

A. Affonda

B. Prima galleggia poi affonda

C. Per sapere se galleggia o affonda bisogna conoscere le dimensioni del foro

D. Galleggia



ChatGPT

La risposta corretta è B. Prima galleggia poi affonda.

Quando l'oggetto C è pieno, galleggia perché la sua densità è inferiore a quella dell'acqua. Tuttavia, quando viene forato da parte a parte, può entrare acqua all'interno dell'oggetto, aumentando la sua densità complessiva. In questo caso, l'oggetto può inizialmente galleggiare a causa della parte non ancora riempita d'acqua, ma successivamente affonderà man mano che la quantità d'acqua all'interno aumenta e la densità complessiva supera quella dell'acqua.

Figura 2: una risposta di ChatGPT sul galleggiamento dei corpi

quando avevo 6 anni mia sorella ne aveva la metà ora ne ho 70 quanti anni ha mia sorella

 Se hai 70 anni e tua sorella aveva la metà dei tuoi anni quando tu avevi 6 anni, vuol dire che tua sorella ha $70/2=35$ anni.

è sbagliato, perché io e mia sorella invecchiamo allo stesso ritmo

 In effetti, se tu e tua sorella invecchiate allo stesso ritmo, allora ogni anno che passa, entrambi avete un anno in più. Se tu hai 70 anni adesso, e tua sorella aveva la metà dei tuoi anni quando tu avevi 6 anni, allora significa che tua sorella ha $70-6=64$ anni adesso.

è ancora sbagliato, perché la differenza di età tra me e mia sorella rimane costante

Figura 3: Dialogo metacognitivo tra un allievo e ChatGPT su un quesito matematico

Ad onor del vero, in diversi item ChatGPT ha individuato subito la risposta corretta, ma i ragazzi si sono cimentati nel capire, provando a ripetere la domanda con le condizioni iniziali cambiate o proponendo un problema simile ma scritto con parole differenti, se tale risposta fosse dettata dal caso o se il chatbot avesse davvero svolto un ragionamento logico. I risultati di questi tentativi sono stati differenti e hanno portato gli studenti alla conclusioni (effettivamente corretta) che la lingua con cui si comunica con ChatGPT può influire in maniera non trascurabile sulle risposte che il bot fornisce. Alcuni studenti hanno provato a tradurre (o a farsi tradurre da ChatGPT) in inglese alcuni item presi dalle prove standardizzate e, in alcuni casi, hanno ottenuto risultati significativamente più soddisfacenti.

4 - Conclusioni

Vista l'ampia disponibilità di chatbot, in futuro sarà interessante replicare e implementare la sperimentazione didattica ripercorrendo l'idea descritta con un impiego plurimo dei chatbot attualmente più utilizzati oltre al solo ChatGPT (MathGPT, Claude2, Bard e Mistral), per confrontare le risposte fornite su specifici item in cui il solo ChatGPT falliva al primo tentativo. L'idea è quella di coinvolgere un numero ancora superiore di studenti nella produzione di lavori di gruppi cooperativi e collaborativi che li veda coinvolti in prima persona in dibattiti sulla matematica e la fisica.

L'intelligenza artificiale generativa conversazionale potrà avere davvero un impatto nella didattica della scienza? La discussione è aperta, di certo da pochi mesi si sono aperti scenari inaspettati e tutti da scoprire o meglio da sperimentare e anche se si resta impressionati, siamo solo agli inizi. È opportuno confrontarsi con queste nuove tecnologie per iniziare a conoscerle nei pregi e nei rischi, da non sottovalutare, per avviare un'esplorazione responsabile e consapevole, per coglierne le opportunità che possono essere significative per i processi di insegnamento e apprendimento. Oggi più che mai i docenti di matematica, e in generale la scuola, ha la necessità di coltivare la "cultura del dubbio" attraverso una didattica metacognitiva per guardare all'IA non come sofisticati strumenti di crisi, ma come preziosi compagni di viaggio nella ricerca di nuove possibilità pedagogiche.

Bibliografia

Ahsan, M. M. T., Rahaman, M. S., & Anjum, N. (2023). From ChatGPT-3 to GPT-4: A Significant Leap in AI-Driven NLP Tools. *SSRN Electronic Journal*, <https://www.ssrn.com/abstract=4404397> doi: doi: 10.2139/ssrn.4404397.

Azaria, A. (2022). *Chatgpt usage and limitations*. <https://hal.science/hal-03913837/>.

Baidoo-Anu, D., Owusu Ansah, L. (2023). Education in the Era of Generative Artificial Intelligence (AI): Understanding the Potential Benefits of ChatGPT in Promoting Teaching and Learning, *SSRN Scholarly Paper*. Rochester, NY, <https://papers.ssrn.com/abstract=4337484> doi: doi: 10.2139/ssrn.4337484.

Blaženka, D., Damir, T. (2011). The impact of game-based learning on the achievement of learning goals and motivation

for learning mathematics-literature review, *Journal of information and organizational sciences*, 35(1), pp. 15–30.

Brett, D.J. (2019). Motivating students to engage in learning: the MUSIC model of academic motivation, *International Journal of Teaching and Learning in Higher Education*, 21, pp. 272–285.

Brown T. et al. (2020). Language models are few-shot learners, *Advances in neural information proc. syst.*, 33, pp. 1877–1901.

Hanna, E., & Levic, A. (2023). *Comparative Analysis of Language Models: hallucinations in ChatGPT*. Prompt Study, <https://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:lnu:diva-121267>.

Hsu, T., Thompson, S. A. (2023). *Disinformation Researchers Raise Alarms About A.I. Chatbots*. The New York Times, <https://www.nytimes.com/2023/02/08/technology/ai-chatbots-disinformation.html>.

Hutchinson, N. L. (1993). Effects of cognitive strategy instruction on algebra problem solving of adolescents with learning disabilities, *Learning Disability Quarterly*, 16(1), 34–63.

Kasneji, E., Seßler, K., Küchemann, S., Bannert, M., Dementieva, D., Fischer, F., Kasneji, G. (2023). *ChatGPT for Good? On Opportunities and Challenges of Large Language Models for Education* (preprint). EdArXiv, <https://osf.io/5er8f> doi:10.35542/osf.io/5er8f.

Loewenstein G. (1994). The Psychology of Curiosity: A Review and Reinterpretation, *Psychological Bulletin* 116, pp. 75–98.

Mayuri, B. (2021). Motivation in learning, *Journal of Critical Reviews* 8(2), pp. 550–552.

Ming-Hung L., Huang-Cheng C., Kuang-Sheng L. (2017). *A study of the effects of digital learning on learning motivation and learning outcome*. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 13(7), pp. 3553–3564.

Oudeyer P.Y., Gottlieb J., Lopes M. (2016). Intrinsic motivation, curiosity, and learning: Theory and applications in educational technologies, *Progress in brain research*, 229, pp. 257–284.

Polya, G. (2016). *Come risolvere problemi di matematica*. UTET, Torino. ISBN: 978-8860084644.

Ray, P. P. (2023). ChatGPT: A comprehensive review on background, applications, key challenges, bias, ethics, limitations and future scope, *Internet of Things and Cyber-Physical Systems*, 3, pp. 121–154, <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S266734522300024X> doi: doi: 10.1016/j.iotcps.2023.04.003.

Rudolph, J., Tan, S., & Tan, S. (2023). ChatGPT: Bullshit spewer or the end of traditional assessments in higher education?, *Journal of Applied Learning and Teaching*, 6(1), pp. 342–363, <https://journals.sfu.ca/jalt/index.php/jalt/article/view/689>doi:doi: 10.37074/jalt.2023.6.1.9.

Sallam, M. (2023). ChatGPT Utility in Healthcare Education, Research, and Practice: Systematic Review on the Promising Perspectives and Valid Concerns, *Healthcare*, 11(6), pp. 881–887, <https://www.mdpi.com/2227-9032/11/6/887>doi:doi: 10.3390/healthcare11060887.

Torre, M., Calvani, A., Leone, M. (2024). *Misconoscenze di fisica nella scuola del I ciclo: un questionario didattico*, in press.

Wei J. et al. (2021). *Finetuned language models are zero-shot learners*. Preprint arXiv: 2109.01652.

Whitebread, D., Coltman, P., Pasternak, D. P., Sangster, C., Grau, V., Bingham, S., Almeqdad, Q., & Demetriou, D. (2009). The development of two observational tools for assessing metacognition and self-regulated learning in young children, *Metacognition and learning*, 4(1), 63–85.

Zhou C. et al. (2023). *A comprehensive survey on pretrained foundation models: A history from Bard to chatgpt*, Preprint arXiv: 2302.09419.

Misconoscenze di Fisica: un questionario didattico per il I ciclo

Matteo Torre*, Matteo Leone **

*Liceo "G. Peano" di Tortona (AL); matteo.torre1984@gmail.com

** Univ. Degli Studi di Torino; matteo.leone@unito.it



Sunto: *Il conseguimento di un adeguato livello nelle conoscenze scientifiche è un importante traguardo per far raggiungere alle nuove generazioni competenze chiave per una cittadinanza responsabile. Per l'Italia, le comparazioni internazionali mettono in luce l'accentuarsi di particolari criticità in fisica. Per tale motivo, la ricerca delle azioni didattiche volte a migliorare la comprensione dei fenomeni fisici, rimane fondamentale per capire le preconoscenze degli alunni con gli ostacoli cognitivi che esse comportano. Abbiamo allestito e validato un questionario per evidenziare le criticità più diffuse in fisica da parte di alunni tra i 11-14 anni. I dati raccolti confermano la presenza di diffuse misconoscenze già segnalate in letteratura che è opportuno mettere al centro dell'attenzione dei docenti.*

Parole Chiave: *Didattica della Scienza. Conoscenze elementari di fisica. Cambiamento cognitivo.*

Abstract: *The achievement of an adequate level of scientific knowledge is recognized as an important milestone to enable the new generations to possess important skills for responsible citizenship. Regarding Italy, international*

comparisons highlight the accentuation of specific critical issues in this area. Concerning the search for teaching actions aimed at improving the understanding of physical phenomena, it remains fundamental to understand the preconceptions from which students start and the cognitive obstacles that these entail. We have prepared and validated a questionnaire on the most common critical elements in the explanation of physical phenomena by students aged 11-14. The collected data confirm the presence of widespread misconceptions already reported in the literature, which it is appropriate to bring to the attention of teachers.

Keywords: *Science Teaching. Elementary knowledge of physics. Cognitive change*

1 - Introduzione

La questione della didattica delle scienze ha una lunga storia in Italia (Israel, 2008). Dal secondo dopoguerra ed in tempi più recenti non sono mancate e continuano ad essere attive iniziative locali o regionali nelle sue diverse articolazioni, caratterizzate da attività di ricerca didattica spesso condotte in collaborazione da docenti universitari e docenti della scuola. Tuttavia, alla luce delle comparazioni internazionali (OCSE-PISA), la situazione è andata peggiorando tra il 2012 e il 2018 (Fig. 1) senza che il problema risulti al momento oggetto di un adeguato dibattito e di significativi interventi istituzionali (Calvani et al, 2022).

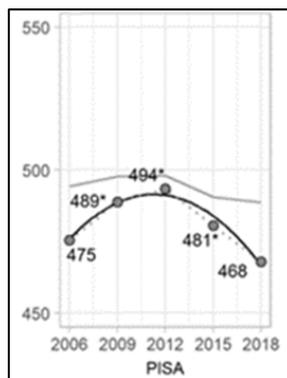


Figura 1: Andamento studenti italiani nelle scienze alle prove OCSE-PISA

Per provare a sensibilizzare ulteriormente il mondo della didattica della fisica, abbiamo allestito e validato un questionario che porta in evidenza gli elementi di criticità più diffusi nelle spiegazioni di fenomeni fisici da parte di alunni di età 11-14. L'ipotesi è che una segnalazione delle maggiori misconcezioni possa essere di particolare utilità perché mette gli insegnanti in grado di conoscere immediatamente i punti di maggiore criticità nella visione che ha l'alunno dei fenomeni fisici, su cui conviene intervenire prioritariamente. Si assume in particolare che la storia della scienza offra indicazioni specifiche per diagnosticare e anticipare le rappresentazioni mentali degli studenti di scuola primaria e secondaria (Leone, 2014; Rinaudo e Leone, 2024).

2 - Il ruolo delle preconoscenze

Se ci interroghiamo sulle metodologie didattiche che funzionano meglio nell'educazione delle scienze, pur nella

consapevolezza oggi acquisita che non ci sia una strada sola o metodi o mezzi ottimali esclusivi (Slavin et al., 2014), ci si imbatte in un punto di riferimento ricorrente, il ruolo delle preconoscenze come punto di partenza di interventi didattici volti ad un *conceptual change* (Posner et al, 1982), da favorire in attraverso azioni di modellamento guidato, integrate con esperienze e momenti metacognitivi, come sintetizzato in ottica evidence-based dall'EEF (Education Endowment Foundation)¹. Nella comunità scientifica è tuttora in discussione quale sia la natura di queste preconoscenze, tra fautori dell'idea che rappresentino delle vere e proprie teorie intuitive unitarie, sostenitori dell'idea che rappresentino una molteplicità di principi fenomenologici derivati dall'esperienza (la cosiddetta "*knowledge in pieces*" di Di Sessa) e, ancora, quelli dell'idea che consistano in una collezione di credenze e di presupposti organizzati in quadri teorici non stringenti ma relativamente coerenti (Vosniadou, 2019). Sul piano terminologico si incontra il termine "misconcezione", frequente nella letteratura di ricerca in didattica della fisica (Allen 2014, Neidorf et al., 2020), che indica concezioni contrarie a quelle in uso nella scienza, che possono appartenere a soggetti di qualunque età, anche se tipicamente si impiega per preconoscenze erranee di studenti. Premettendo che il prefisso "mis", non dovrebbe assumere il connotato di un giudizio negativo, che può essere inappropriato e comunque ingeneroso a fronte di

¹ L'Education Endowment Foundation è il più importante centro EBE europeo, che elabora test ed attività informate dalle migliori evidenze sull'insegnamento delle scienze (BEST), Education Endowment Foundation, <https://educationendowmentfoundation.org.uk/education-evidence/guidance-reports>

preconoscenze che possono rappresentare un punto di arrivo naturale dello sviluppo cognitivo o che possono implicare anche forme di buon senso², ce ne avvarremo anche noi, usando però più prudentemente, il termine “misconoscenze”.

Possiamo in breve considerare una misconoscenza come una preconoscenza, che emerge come risposta inadeguata dinanzi un problema scientifico, che può essere indicativa di un “ostacolo cognitivo” per una corretta acquisizione di conoscenze, quali è lecito attendersi da soggetti scolarizzati di quell’età. Essa può essere influenzata dalla presenza di forme diffuse di pensiero ingenuo infantile, da influenze diffuse nel senso comune o semplicemente da carenze informative dovute a ritardi o inadeguatezze dell’istruzione scolare. Se ci si interroga su dove siano stati identificati questi elementi di criticità, numerosi sono gli studi che sono stati compiuti (Leone 2020, Allen 2014) e che proviamo qui a riassumere relativamente agli ambiti toccati dal nostro questionario.

2.1 - Conservazione

Ci si deve rifare agli esperimenti classici di Piaget (Piaget e Inhelder, 1974), ripresi da altri (Smith et al, 1985), sulla conservazione del volume, del peso e della quantità di sostanza in oggetti modellati (esempio blocchetto di pongo modellato ed immerso) fino al concetto più difficile di

² Quando si analizzano le idee sbagliate in fisica, molti ricercatori si sono concentrati su “credenze di buon senso”, un “sistema di credenze e intuizioni su fenomeni derivati da una vasta esperienza personale” che gli studenti possono sviluppare prima ancora di entrare in classe (Halloun e Hestenes 1985 a, b).

conservazione del peso in una transizione da liquido a gas, raramente presente prima dei 12 anni (Galili e Bar, 1997).

2.2 - Forze

Per i bambini forza e movimento sono concetti che si sovrappongono, la forza non esiste separatamente dal movimento, nel senso che ogni movimento comporterebbe una forza come motore interno. Così quando un oggetto viene lanciato continuerebbe ad agire (Piaget, 1974) su di lui una forza interna (anche secondo Aristotele la spinta dell'aria cerca di contrastare il formarsi del vuoto). Altre misconoscenze riguardano l'azione della forza di gravità, di cui non si riconosce l'azione diffusa su tutti i corpi, nonché l'idea che per trascinare un oggetto sul pavimento ci voglia una forza maggiore del suo peso oppure che la forza necessaria per sollevare un oggetto dipenda da quanto è forte la persona che solleva (Vosniadou et al, 2001).

2.3 - Galleggiamento

L'idea di galleggiamento non risulta chiara ai bambini perché il concetto di densità appare tardi (non prima dei 10 anni) per poi evolvere in un concetto maturo e separato da quelli di peso e volume. Il concetto di densità e il principio di Archimede sono un esplicito prodotto dell'insegnamento scolastico, sebbene esistano evidenze di una sorta di intuizione del concetto di densità già tra i bambini della scuola dell'infanzia (Kohn 1993). Inoltre, oggetti con una parte emersa sono considerati galleggiare un po' di più o di meno, a

seconda di quanta parte dell'oggetto stia sopra il livello dell'acqua. L'idea che alcuni oggetti galleggino ed altri no è stata studiata da Piaget e altri (Biddulph e Osborne 1984) e le risposte degli studenti sono in relazione alla dimensione o all'essere genericamente "pesante" di un oggetto, accanto alla credenza che gli oggetti forati affondino. Anche se esistono pre-intuizioni sul fatto che un materiale possa essere più o meno compresso o costituito dalla mescolanza di materia e vuoto, il concetto di pesante-leggero non viene messo in rapporto al volume della massa spostata. La ricerca ci dice che per una piena comprensione del galleggiamento risulta essere significativa la domanda *"perché le navi, che sono fatte di materiale pesante, non affondano?"* (Piaget, 1972).

2.4 - Aria e gas

Sull'aria sussistono varie misconoscenze che vanno anche oltre l'intervento scolastico ordinario. L'idea dell'aria immateriale è molto presente nel pensiero infantile (Brook e Driver, 1989). Altre tipiche misconoscenze sono: idea dell'aria senza peso o "leggera" nel senso di tendente ad andare in alto; idea dell'espansione di un gas come aumento di materia. Un'idea tipicamente assente è quella che l'aria possa esercitare una forza. L'idea più assente (non banale ed incompresa dallo stesso Galileo) è quella che viviamo immersi in un fluido, l'aria, che è caratterizzato da una grandezza scalare e intensiva (la pressione atmosferica) da cui consegue la presenza di forze che agiscono in tutte le direzioni, che si percepiscono solo in situazioni speciali (Tytler, 1998).

2.5 - Suono

Si tende ad attribuire proprietà materiali al suono. In generale non c'è consapevolezza che il suono è generato da vibrazioni (West Wallin, 2013). Le misconoscenze riguardano l'idea del suono come materia o aria in movimento, che il suono ha bisogno di fessure per passare.

2.6 - Energia

Il concetto di energia è molto complesso, dato che rappresenta un'idea matematica piuttosto astratta e relativamente recente (il concetto di energia nasce sostanzialmente con la formulazione a metà '800 del principio di conservazione dell'energia). Eppure, la parola "energia" fa parte del senso comune ed è molto utilizzato nella vita quotidiana, pur con un significato assai diverso rispetto a quello scientifico. Nelle preconoscenze diffuse il concetto di energia si lega spesso al movimento o ai viventi, come a qualcosa che fa funzionare le cose (energia come agente causale) o qualcosa che cambia da una forma ad un'altra ma che poi si consuma e scompare (Gilbert e Watts, 1983). Nella pratica didattica e sui manuali ci si limita di solito al riconoscimento di alcune fonti di energia.

2.7 - Calore e temperatura

Misconoscenza diffusa è l'idea di calore come sostanza materiale e della temperatura come misura del "grado di calore" di un corpo. È difficile la comprensione del trasferimento di energia termica (come quando un oggetto caldo viene immerso in un liquido freddo, o viceversa). Nel pensiero infantile manca l'idea di equilibrio termico e si tende

a giudicare la temperatura in base alla natura di cui è costituito un oggetto (alcuni materiali sarebbero intrinsecamente più caldi di altri, come il legno rispetto al ferro). Anche quando l'equilibrio termico tra due corpi è osservato empiricamente, tende ad essere interpretato come l'effetto di un doppio scambio, di caldo e di freddo, tra i due corpi (Erickson e Tiberghien 1985).

2.8 - Elettricità e circuito elettrici

Anche l'elettricità, alla pari del calore, è pensata come sostanza (Caillot 1993) e l'attrazione elettrica osservabile a seguito di strofinio è interpretata come una sorta di "colla e spesso è confusa con l'attrazione magnetica. La corrente elettrica è intesa essere come qualcosa che "si consuma" e si può eventualmente anche fermare in un certo tratto di un circuito. Queste misconoscenze si riflettono sul modello di circuito degli studenti, a partire dal modello unipolare, implicito nella previsione secondo cui una lampadina possa essere accesa collegandola attraverso uno o più fili elettrici a un singolo polo di una pila (Leone, 2014), per passare a modelli a circuito chiuso, quali quello a correnti "che si scontrano", dopo essere fuoriuscite dai due poli di una pila, o quello della corrente "che si consuma" ad opera di lampadine o altri utilizzatori nel tragitto da un polo all'altro, fino al cosiddetto modello "scientifico" a corrente elettrica costante (Driver et al, 1994).

2.9 - Magnetismo

Anche fenomeni di attrazione e repulsione magnetica sono spiegati con proprietà assolute (Piaget e Chollet, 1973), in analogia alla storia delle concezioni di magnetismo, e il concetto di polarità magnetica emerge solo faticosamente. Negli studenti tra i 10 e i 12 anni si registrano il modello del magnete che tira, il modello dell'emanazione e il modello del magnetismo come nube (Erickson 1994).

2.10 - Luce

Rispetto ad altri fenomeni (elettricità, magnetismo) qui la misconoscenza è di tipo diverso. La difficoltà sta nel riconoscere nella luce un'entità autonoma che viaggia nello spazio tra la sua sorgente e l'effetto che produce. Secondo molti autori questa difficoltà deriva dalla tendenza ad associare la luce solo alla sorgente e agli effetti visibili che provoca nello spazio "vissuto" (Guesne 1985). Altre misconoscenze connesse alla luce, alla visione, ai colori: difficoltà a riconoscere la propagazione rettilinea della luce; difficoltà a pensare che oggetti illuminati riflettano la luce anche se non sono degli specchi; idea del colore come proprietà degli oggetti; idea della luce bianca come luce "pura", che non contiene colori; idea che quando una luce colorata raggiunge un oggetto si ha una mescolanza tra il colore della luce e quello dell'oggetto.

2.11 - Astronomia

Qui troviamo le misconoscenze classiche legate alla causa dell'alternanza giorno-notte, alla causa del movimento quotidiano del Sole (e degli altri corpi celesti) e quelle legate all'alternanza delle stagioni, spesso legata alla distanza Terra-Sole (idea, questa, che tende a permanere anche dopo le spiegazioni scolastiche) e all'orientamento della caduta di un oggetto se rappresentata su scala planetaria.

3 - L'oggetto della ricerca

Sulla base della letteratura esistente (Leone 2020; Allen 2014) e di esempi attinti dal TIMMS e PISA abbiamo allestito uno strumento per fornire un'istantanea delle misconoscenze che presentano alunni tra gli 11 e i 14 anni dinanzi a quesiti la cui risposta richiede l'applicazione di concetti e principi basilari della fisica elementare (CEF, Conoscenze Elementari di Fisica). L'ipotesi è che l'individuazione di queste situazioni problematiche offra segnali ed ancore di riferimento utili per interventi mirati sui fraintendimenti più diffusi circa concetti scientifici di base, che possono e debbono essere messi in discussione con gli alunni. Le tematiche sono state selezionate sulla base delle sezioni sopra indicate, ripartite come indicato in Tab. 2. Il questionario presenta al soggetto fenomeni fisici comuni e richiede spiegazioni con domande tipiche: "*Perché accade?*", "*Cosa succede se?*" con quattro alternative di risposta, che solitamente includono le conoscenze ingenuie più diffuse. La prima versione del questionario è composta di 52 item da applicarsi in classe in due sessioni da 26 item

ciascuna³. Terminata l'applicazione complessiva segue un feed-back didattico, che l'insegnante può arricchire ulteriormente. In fig. 2 è riportato un esempio di un item e del feed-back didattico. Il questionario si può definire "didattico" nel senso che non si limita a somministrare i quesiti per valutare come li affronta l'alunno.

ARGOMENTO	N. ITEM
Conservazione	3
Forze	10
Galleggiamento	5
Aria e Gas	6
Energia	3
Equilibrio termico / Passaggi di stato	5
Elettricità	6
Magnetismo	2
Luce	6
Suono	2
Astronomia	4

Tabella 2: distribuzione degli item per argomento

³ La versione dell'intero questionario è consultabile all'indirizzo https://sapie.it/wp/wp-content/uploads/2023/03/CEF_PRESENTAZIONE_20-11-1.pdf, raggiungibile anche dalla Home page del sito di SApIE (www.sapie.it).

<p>D.1.2 Ho un contenitore con dell'acqua e un blocco di pongo. Immergo il pongo nell'acqua e dunque il livello dell'acqua si innalza. Tolgo il pongo dall'acqua e lo modello a forma di «S». Lo reimmergo in questa forma nell'acqua. Il livello dell'acqua rispetto a quello di prima raggiunge:</p> <p>A. Un livello più alto B. Un livello più basso C. Un livello più alto o più basso a seconda del peso del pongo D. Lo stesso livello</p>
<p>R.1.2 Feed-back didattico. <u>La risposta corretta è D.</u></p> <p><i>Qui ci sono due cose da dire.</i> <i>Prima cosa. Ti sarai accorto che quando entri nella vasca da bagno piena, vedi che il livello dell'acqua si alza. Questo succede perché il tuo corpo occupa spazio che prima era occupato dall'acqua. E qui è la stessa cosa! Quando immergi un oggetto vedi che il livello del liquido sale perché l'oggetto occupa spazio che prima era occupato dall'acqua.</i> <i>Seconda cosa. E se deformati l'oggetto? Non cambia niente! Il pongo non riduce il suo volume; infatti la parte di pongo pigiata da una parte si sposta da un'altra. L'oggetto continua a occupare sempre lo stesso spazio e quindi a spostare sempre la stessa quantità di acqua.</i></p>

Figura 2: esempio di un item e successivo feed-back

4 - L'applicazione del test

Per la validazione del test è stato utilizzato un campione non probabilistico costituito da studenti delle classi I, II e III scuola secondaria di 1° grado, selezionato sulla base della disponibilità data dal dirigente scolastico e dagli insegnanti. La somministrazione dello strumento ha coinvolto 235 studenti delle province di Pesaro-Urbino e Napoli (Tab. 3).

	CLASSE	MASCHI			FEMMINE			TOTALE		
		I	II	III	I	II	III	I	II	III
PROVINCIA										
PU		11	23	14	13	16	11	24	39	25
NAPOLI		33	19	26	21	26	22	54	45	48
TOTALE		126			109			235		

Tabella 3: caratteristiche del campione

La Tab. 4 riassume le statistiche del questionario nella sua globalità. Le prime osservazioni riguardano i risultati ottenuti dagli studenti sia nella progressione dalla classe 1° alla classe 3°, sia nelle distinzioni di genere sono riassunte dalla Tab. 5.

	Media	Deviazione Standard	Signif. statistica delle diff tra classi (T di Student)		
			1-2	1-3	2-3
Cl. 1	20,74	6,19	p < 0,01	p < 0,01	-
Cl. 2	25,33	7,48	p < 0,01	-	0,24
Cl. 3	23,97	6,97	-	p < 0,01	0,24
Totale	23,39	7,15			

Tabella 4: statistiche campione CEF

	Classi 1		Classi 2		Classi 3		Signif. statistica delle diff tra classi (T di Student)			Signif. statistica delle diff M/F della stessa classe (T di Student)		
	media	DS	media	DS	media	DS	1-2	1-3	2-3	M/F 1	M/F 2	M/F 3
Maschi	20,29	6,14	25,78	7,29	24,45	6,44	p < 0,01	p < 0,01	0,19	0,235	0,291	0,265
Femmine	21,32	6,28	24,88	7,72	23,39	7,63	0,015	0,042	0,20			
Totale	20,74	6,18	25,33	7,48	23,97	6,97						

Tabella 5: Test T di Student tra classi e M/F

I dati mostrano che esistono delle differenze statisticamente significative tra gli alunni delle classi 1°, che hanno un rendimento più basso, rispetto a quelli delle classi 2° e 3° secondaria di I grado. Si nota inoltre come la differenza dei rendimenti tra maschi e femmine che hanno partecipato non risulti statisticamente significativa, anche se sussistono differenze statisticamente significative tra il gruppo dei maschi delle classi 1° e il gruppo di quelli delle altre classi.

Essendo questa la prima applicazione del CEF è stato necessario valutare alcune caratteristiche sue psicometriche al fine di migliorare la sua qualità interna e arrivare a disporre anche di una versione ridotta che ottimizzi il suo livello di attendibilità. La coerenza interna che determina l'attendibilità del test è valutata con il coefficiente alfa di Cronbach, il quale risulta molto alto (0,96). Per quanto riguarda l'analisi specifica degli item, usando il Classical Test Theory (CTT) abbiamo valutato la bontà degli item in relazione alla difficoltà e alla capacità di discriminazione (se quest'ultimo indice è maggiore di 0,30 si può ritenere che l'item abbia una buona capacità di discriminare i due gruppi, ovvero i soggetti "preparati" da quelli meno preparati). Dalla prima versione di 56 item, selezionando solo gli item che superano la soglia di 0,30, abbiamo poi ricavato una versione ridotta di soli 30 item in cui si è scelto per semplicità di mantenere invariata la numerazione originale degli item. La Tab. 6 riporta i valori medi e i risultati relativi al campione e inerenti considerando la versione ridotta del questionario⁴.

	Media	DS	I Quartile	II Quartile	III Quartile
Classi 1	11,56	5,32	8	11	16
Classi 2	15,61	6,22	10	14	22
Classi 3	14,40	5,25	10	14	19
Totale	13,89	5,87	9	13	18

Tabella 6: dati relativi al questionario CEF ridotto

⁴ La versione ridotta di 30 item è consultabile al seguente link: https://sapie.it/wp/wp-content/uploads/2024/01/PROVA-CEF_VERSIONE-RIDOTTA_18-01-24.pdf raggiungibile anche dalla Home page del sito di SApIE (www.sapie.it).

5 - Prime conclusioni (non definitive) sui dati raccolti

Una prima analisi dei dati ci mette innanzi un quadro di criticità significative. Anche se non possediamo altri parametri di riferimento, il fatto che il punteggio medio sia inferiore alla metà del punteggio possibile, è indicativo di per sé di una situazione complessiva di evidente difficoltà, seppur la deviazione standard segnali che ci sono rilevanti differenze interne alle classi campionate. Limitandoci quindi ad una rassegna veloce e rimandando per approfondimenti ad un successivo lavoro, si può rilevare che:

- gli studenti ottengono risultati migliori in alcuni item specifici relativi ai passaggi di stato, all'aria e ai gas, al suono e all'energia elettrica.
- numerose misconoscenze si riscontrano intorno a concetti analizzati e discussi in letteratura. A un primo sguardo, infatti, le criticità maggiori sono sugli item relativi alla conservazione del volume e del peso, al concetto di forza (in particolare sul principio di inerzia), sul sollevamento di un peso, sul galleggiamento, sulla distinzione tra fenomeni elettrici e magnetici di attrazione, sulla luce (in particolare sulla lunghezza delle ombre), sul movimento apparente del Sole; sulla rotazione della Terra attorno al proprio asse.

Solo a titolo esemplificativo, ci soffermiamo qui sull'item 1.17 relativo al galleggiamento, da cui possiamo ricavare delle conclusioni interessanti se lette in parallelo ai risultati pubblicati in letteratura e a quanto enunciato dalle *Indicazioni nazionali per il curriculum della scuola dell'infanzia e del primo ciclo*

di istruzione (Miur, 2012). Questo documento, infatti, indica tra gli obiettivi di apprendimento per la disciplina “Scienze” al termine della classe quinta primaria, l’individuazione delle proprietà di alcuni materiali, tra le quali la *densità*, e al termine della classe terza della scuola secondaria di primo grado, la realizzazione di esperienze sul galleggiamento. Eppure, a quanto risulta dall’item 1.17, anche incrociando le risposte con gli altri item relativi al galleggiamento, emerge un quadro di insufficiente differenziazione tra i concetti di peso e densità, coerente con i risultati in letteratura (Leone, 2020). L’item 1.17 consiste infatti nella classica domanda, già utilizzata da Piaget, sul galleggiamento delle navi: *“Le navi sono fatte di metallo. Allora perché non affondano?”*. Meno di metà del campione complessivo (34,7%) e del campione delle sole classi terze (45,2%) ha risposto facendo riferimento al principio di Archimede (*“perché la spinta che ricevono dall’acqua è maggiore del peso della nave”*). Il 26,5% del campione ha risposto che le navi non affondano *“perché il metallo con cui sono fatte ha una densità minore di quella dell’acqua”*, applicando un concetto corretto, quello di densità, in modo erroneo (il metallo di cui non ha densità dell’acqua). Il 24,5% degli studenti ha invece risposto che le navi non affondano *“perché il metallo con cui sono fatte viene scelto in modo da non essere molto pesante”*, evidenziando così l’idea errata che il peso determini l’affondamento o il galleggiamento degli oggetti. Una piccola percentuale del campione, 13,6%, ha addirittura scelto come risposta quella secondo cui le navi non affondano *“perché si muovono sull’acqua”*, mostrando così di non essere ancora entrati nel 4° stadio dell’evoluzione delle spiegazioni del

galleggiamento secondo Piaget (1972), tipico dei ragazzi dai 9 anni in su.

6 - Conclusioni

In questo lavoro ci siamo occupati delle conoscenze sulle scienze fisiche possedute da alunni tra gli 11 e i 14 anni, validando un questionario che intende offrire una visione sintetica degli ostacoli cognitivi più diffusi. Da una prima versione più estesa di questo strumento è stata ricavata una versione più breve, adatta per un veloce test nelle classi di scuola media, che si rende disponibile all'uso per ogni scuola che volesse utilizzarlo sin da subito. L'ipotesi è che una segnalazione delle maggiori misconoscenze in un'ottica di vasto spettro possa essere di particolare utilità per gli insegnanti che potranno conoscere i punti di maggiore criticità nella visione dell'alunno sui fenomeni fisici e quindi su cui conviene intervenire. Anche se in qualche caso un'idea sbagliata può essere solo la superficie di un iceberg più complesso, un'informazione correttiva può già gettare una luce diversa sul problema in questione o generare una forma di conflitto per orientare ad una ulteriore revisione delle spiegazioni ingenua. In un futuro molto prossimo, prevediamo di operare sul potenziamento della parte didattica del CEF, con la messa a punto di un kit di brevi interventi, sotto forma di simulazioni o video, volti a favorire la consapevolezza degli alunni sulla necessità di ristrutturare i propri schemi sui punti critici individuati.

Bibliografia

Allen M., *Misconceptions in Primary Science*, Open University Press Second Edition, 2014.

Biddulph F., Osborne R., Pupils idea about floating and sinking, *Review in Science education*, 14, 1, 114-124, 1984.

Brook A., Driver R., Hind D., *The development of pupils' understanding of physical characteristics of air across the age range 5-16 years*, Centre for Studies in Science and Mathematics Education, University of Leeds, Leeds, 1989.

Caillot M., *Learning Electricity and Cognitive Modeling*, in *Advanced Educational Technologies for Mathematics and Science* Springer, Berlin, Heidelberg, 1993, pp. 151-164.

Calvani A., Chiappetta Cajola L., Leone M., Torre M., *Potenziare la formazione degli insegnanti sulla didattica scientifica*, *OrizzonteScuola*, 30/09/22, <https://www.orizzontescuola.it/potenziare-la-formazione-degli-insegnanti-sulla-didattica-scientifica-le-linee-dazione-dei-pedagogisti/>

Di Sessa A. A., *Toward an epistemology of physics*, *Cognition and Instruction*, 10(2-3) (1993), 105-225.

Driver R., Squires A., Rushworth P., Wood-Robinson V., *Making sense of secondary science research into children's ideas*, Routledge, London and New York, 1994, pp. 117-125.

Erickson G.L., *Pupils understanding of magnetism in a practical assessment context: The relationship between content, process and progression*, in P. Fensham, et al (Eds.), *The content of science*, The Falmer Press, London, 1994, pp. 80-97.

Erickson G.L., Tiberghien A., *Heat and temperature*, in R. Driver, et al (Eds.) *Children's ideas in Science*, Open University, Philadelphia, 1985, pp. 52-84.

Galili I., Bar V., Children's operational knowledge about weight, *Int. Jou. of Scie. Ed.*, 19(3) (1997), 317-340.

Gilbert J., Watts D., Concepts, misconceptions and alternative conceptions: changing perspectives in science education, *Studies in Science Education*, 10 (1983), 61-98.

Guesne E., *Light*, in R. Driver et al (Eds.), Children's ideas in Science, Open University, Philadelphia, 1985, pp. 11-32.

Halloun I.A., Hestenes D., The initial knowledge state of college physics students, *Am. J. of Physics*, 53, (1985a), 1043-1055.

Halloun I.A., Hestenes, D., Common sense concepts about motion, *Am. J. of Physics*, 53(11) (1985b), 1056-1065.

Israel G., *Chi sono i nemici della scienza*. Lindau, Torino, 2008.

Kohn A.S., Preschoolers' reasoning about density: will it float?, *Child Development*, 64(6) (1993), 1637-1650.

Leone M., History of physics as a tool to detect the conceptual difficulties experienced by students: the case of simple electric circuits in primary education, *Science & Ed.*, 23 (2014), 923-953.

Leone M., *Insegnare e apprendere fisica nella scuola dell'infanzia e primaria*, Mondadori Educational, Milano, 2020.

MIUR, *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione*, Ann. della P.I., 2012.

Neidorf T., Arora A., Erberber E., Tsokodayi Y., Mai T., *Student misconceptions and errors in physics and mathematics: Exploring data from TIMSS and TIMSS Advanced*, Springer Nature, 2020.

Piaget J., *The child's conception of physical causality*, Littlefield, Adams, Totowa, NJ, 1972.

Piaget J., *Understanding causality*, Norton, Oxford, 1974.

Piaget J., Inhelder B., *The child's construction of physical quantities*, Routledge, London, 1974.

Posner G.J., Strike K.A., Hewson P.W., Gertzog, W.A.,
Toward a theory of conceptual change, *Scie. Ed.*, 66, (1982), 211-227.

Rinaudo M., Leone M., History of physics as a heuristic device to anticipate students' ideas: the case of electrostatics, *Physics Ed.*, 59 (2024), 015019.

Slavin R.E., Lake C., Hanley P., Thurston, A., Experimental evaluations of elementary science programs: A best-evidence synthesis, *Journ. of Resear. in Scie. Teach.*, 51(7) (2014), 870-901.

Smith C., Carey S., Wiser M., On differentiation: a case study of development of the concepts of size, weight, and density, *Cognition*, 21 (1985), 177-237.

Tytler R., Children's conception of air pressure: exploring the nature of conceptual change, *Journ. of Sci. Ed.*, 20, (1998), 929-958.

Vosniadou S., The development of students' understanding of science, *Front. Educ.*, 4 (2019), 32.

Vosniadou S., Ioannides C., Dimitrakopoulou A., Designing learning environments to promote conceptual change in science, *Learning and Instruction*, 11 (2001), 381-419.

West E., Wallin A., Students' Learning of a Generalized Theory of Sound Transmission from a Teaching-Learning Sequence about Sound, Hearing and Health, *Int. J. of Sci. Ed.*, 35(6) (2013), 980-1011.

Le argomentazioni incredibilmente semplici di Archimede sulla legge di galleggiabilità

Antonella Palma* Luca Dragone**

*Sapienza Università di Roma; antonella.palma@gmail.com

**Università di Roma Tor Vergata; luca.dragone71@gmail.com



Sunto: *Lo studio del galleggiamento rimanda immediatamente al Principio di Archimede, solitamente proposto agli studenti come assunto da accettare in quanto evidenza sperimentale. Riteniamo che nella didattica sia formativo recuperare la proposizione che invece è costruttiva, seguendo la delicata e rigorosa dimostrazione di Archimede nel Libro I Sui Galleggianti. La geometria e la fisica si intrecciano in un pacato equilibrio, così che il rigore logico e l'applicabilità ritornano ad essere caratteristiche essenziali e complementari della scienza. La lettura dei testi originali e l'interpretazione dei diagrammi consente un approccio diretto alla storia della matematica. La proposta didattica laboratoriale si realizza attraverso un Libro GeoGebra che privilegia un apprendimento per scoperta.*

Parole Chiave: *Principio di Archimede, Galleggiamento, GeoGebra, Storia della matematica.*

Abstract: *The study of buoyancy is immediately linked to Archimedes' Principle, usually proposed to students as an assumption to be accepted as experimental evidence. We believe that in teaching it is educational to focus on the proposition, which is instead constructive, following Archimedes' delicate and*

rigorous proof in Book I On Floating Bodies. Geometry and physics intertwine in a calm balance, so that logical rigor and applicability return to being essential and complementary characteristics of science. Reading the original texts and interpreting the diagrams allows a direct approach to the history of mathematics. The laboratory teaching proposal is carried out through a GeoGebra Book which favors learning by discovery.

Keywords: *Archimedes' Principle, Floatation, GeoGebra, History of mathematics.*

1 - Introduzione

Chi non ricorda il principio di Archimede? Affrontato in ogni ordine scolastico sempre con lo stesso enunciato che, per chi non prosegue negli studi strettamente scientifici, ha l'aspetto di una formula magica. I testi scolastici, sia quelli delle scuole secondarie di primo grado sia quelli universitari, propongono il solo risultato archimedeo, spoglio dell'elegante argomentazione che il Siracusano espone nel Libro I *Sui Galleggianti*. Questo risultato è premessa necessaria per affrontare il galleggiamento di modelli a forma di calotta sferica, esaminato nella fine del libro I, e a forma di segmento di paraboloidi di rotazione, studiato nel libro II. Questa indagine è considerata, non a torto, il primo trattato di ingegneria navale della storia. Il notevole risultato è dedotto da una supposizione ricavata da una evidenza mentale situata all'inizio del trattato e che rappresenta la chiave di lettura di tutta l'opera, seguendo la modalità della tradizione scientifica greca. Infatti è la tradizione moderna che ha spogliato la fisica antica del metodo dimostrativo, finendo a volte col considerare "leggi sperimentali" anche affermazioni

dimostrabili sulla base di principi semplici, come nel caso che stiamo considerando (Russo, 1996). Non ponendo enfasi al processo deduttivo, il nudo risultato esibito rischia di rientrare tra quelle *conoscenze fossili*, come le chiama Lucio Russo, che costituiscono un ostacolo all'acquisizione della padronanza di un concetto.

2 - I contenuti del Libro I dei Galleggianti di Archimede

Nel libro I Archimede introduce il concetto di pressione di un fluido, avviando così la scienza dell'idrostatica. Essa però dovrà aspettare quasi diciotto secoli prima di essere ripresa e formulata da scienziati della statura dell'olandese Simon Stevin (1548-1620), degli italiani Galileo Galilei (1564-1642) e Evangelista Torricelli (1608-1642), del francese Blaise Pascal (1623-1662) e dell'inglese Isaac Newton (1642-1727). In realtà questo tesoro era a disposizione anche prima dell'anno mille, ma sorprendentemente era rimasto silente. Infatti è assai probabile che i tre i codici (A, B e C che hanno alcuni testi archimedei in comune) siano il frutto di una rinascita di interesse per Archimede all'inizio del IX secolo, come suppone lo studioso Reviel Netz basandosi su fonti relative al caso di Leone di Tessalonica. Però, o il contenuto ostico o il declino della scienza hanno reso il testo Sui Galleggianti solo un manuale di istruzioni su come determinare la densità di oggetti, come pietre preziose e manufatti in metalli, confrontando i loro pesi in aria e in acqua. Ci stupiamo di come quest'opera incredibilmente moderna e pratica, un vero trattato di ingegneria navale, non sia stata usata nel corso del tempo per lo sviluppo della tecnica di costruzione delle navi. L'idea di modello suggerito da Archimede, chiamato nella

tradizione anche μηχανικός, fa fare un balzo geniale per spiegare la fisica di fenomeni complessi attraverso relazioni geometriche che possono pure ricondursi a misure utili per scopi pratici.

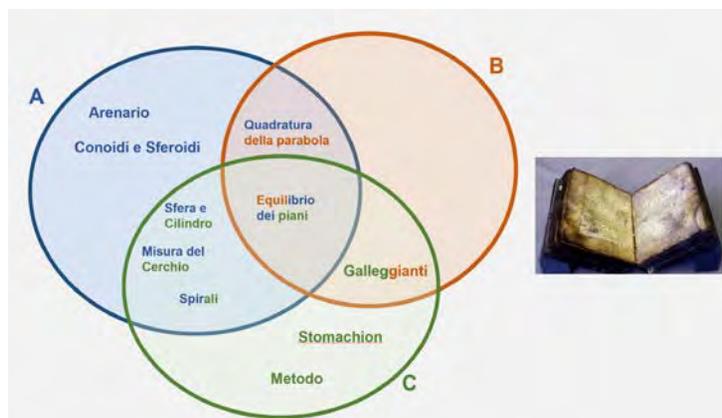


Fig. 1 - I testi di Archimede nei codici A, B e C e il palinsesto

L'opera Αρχιμήδους Οχουμένων è disponibile nella versione latina di Guglielmo di Moerbeke (1269), di Jacopo di San Cassiano (1538), di Federico Commandino (1566), e nell'editio princeps greco-latina di Basilea (1544), nell'edizione italiana di Nicolò Tartaglia (1565), ed infine la redazione in greco del palinsesto da parte di Reviel Netz e William Noel et alii (2011). Oggi ci è consentito di avvicinare questi codici con l'attenzione derivante dal fascino di accostarsi ad antiche parole preziose e ricche di significato. È proprio soffermandosi a lungo sulle parole (siano esse in greco, in latino, in italiano cinquecentesco o in lingua corrente) che l'opera di Archimede, ostica sia per i contenuti in sé sia per i requisiti necessari alla sua comprensione, lentamente disvela la sua evidenza, dopo aver richiesto uno sforzo intellettuale non indifferente, ma sicuramente appagante. A differenza di

ciò che Archimede fa nel libro II, che è ellittico nelle sue dimostrazioni lasciate per lunghi tratti al lettore, nel libro I egli accompagna l'interlocutore delicatamente alle conclusioni, partendo dal postulato posto all'incipit: «Si assuma che [...] se due porzioni di liquido sono contigue e allo stesso livello, la meno compressa sia spinta via dalla più compressa e ciascuna porzione sia compressa dal peso del liquido che è sopra di sé in verticale, purché il liquido non sia rinchiuso in qualcosa e compresso da qualcos'altro» (traduzione letterale del palinsesto a cura di Fleck). E' importante considerare che l'enunciato di Archimede è intuitivo, ma non direttamente verificabile; infatti non è possibile né osservare né misurare la compressione di porzioni interne di una massa di liquido. Si possono invece verificare alcune conseguenze di ciò che è dichiarato, come ad esempio l'eguaglianza dei livelli di un liquido inserito nei vasi comunicanti.

E' una caratteristica generale delle teorie scientifiche ellenistiche quella di basarsi su postulati o principi non verificabili direttamente, ma dai quali è possibile dedurre fenomeni osservabili. Il valore delle teorie scientifiche consiste così, oltre che nella loro coerenza interna, anche nella capacità di "salvare i fenomeni" ($\Phi\alpha\iota\nu\omicron\mu\epsilon\nu\alpha\ \sigma\omega\zeta\epsilon\iota\nu$).

Siamo così portati a svolgere, insieme ad Archimede, esperimenti mentali (che ci ricordano i *Gedankenexperiment* di Einstein) che conducono alla dimostrazione della forma sferica degli oceani (proposizione 2) e ad osservazioni sul comportamento di corpi solidi, di peso uguale o diverso da quello del fluido, immersi nel fluido stesso (proposizioni 3 e 4). La geometria accompagna con garbo la descrizione fisica

dei fenomeni, finendo col confondere le parole ai diagrammi schematici che esercitano in tal modo l'immaginazione del lettore consentendogli di riempire di significato i concetti proposti.

«Proseguendo nelle medesime costruzioni geometriche» - è l'esordio della proposizione 5 - il Siracusano introduce come enunciato quello che è generalmente noto come "principio di Archimede" che egli elegantemente e rigorosamente dimostra, riconducendolo così ad un teorema apprezzabile anche da un pubblico non specialistico, ma curioso, come può essere quello costituito da studenti di qualunque grado scolastico.

Le conseguenze fisiche della "spinta di Archimede" determinate dalla condizione se il corpo solido è più leggero o più pesante del fluido (stiamo parlando di un rapporto omogeneo ma che è strettamente legato al concetto moderno di densità) sono descritte nelle proposizioni 6 e 7 le quali, poiché affrontate sempre in modo geometrico, sono minuziosamente dimostrate.

Dopo aver derivato la galleggiabilità, Archimede espone nelle proposizioni 8 e 9 una semplice, elegante dimostrazione geometrica che un segmento fluttuante di una sfera solida omogenea è sempre in equilibrio stabile quando la sua base è parallela alla superficie del fluido, sia essa al di sopra o al di sotto di questa. Un significativo esercizio che costituisce una geniale applicazione alla realtà dei risultati appena dimostrati.

3 - La proposta didattica

Il percorso viene proposto attraverso un *Libro GeoGebra* (codice: JWUXXYXK) organizzato con diverse attività

interattive che consentono una lettura pacata, critica e ragionata del testo archimedeo, inteso ovviamente anche nella sua parte diagrammatica. Le figure bidimensionali, parte integrante delle parole che enunciano e dimostrano le proposizioni, possono essere disegnate digitalmente con il software di geometria dinamica GeoGebra 2D, seguendo procedure di costruzione indicate lungo il percorso. Questa riproduzione, oltre a fornire l'opportunità didattica di introdurre all'uso degli strumenti base del software, permette di cogliere a fondo le proprietà descritte nei disegni di Archimede. Inoltre il diagramma, spogliato del suo aspetto apparentemente pittorico grazie alla dinamicità propria della figura GeoGebra, riprende la veste informativa che fa parte della logica della proposizione, il cui racconto è rigoroso nelle parole e generale nella rappresentazione. I filosofi e i logici moderni insistono sul fatto che una dimostrazione è valida solo se basata esclusivamente sulla logica proposizionale; Archimede, in accordo con la tradizione ellenistica, utilizza in modo sistematico la valenza dimostrativa delle figure; riprendendo le parole di Netz: «questo è uno dei grandi enigmi della matematica greca: totalmente diagrammatica eppure assolutamente rigorosa».

Nel *Libro GeoGebra* viene anche proposta la costruzione di figure 3D seguendo le indicazioni delle parole delle proposizioni. Questa aggiunta aumenta indubbiamente la chiarezza del testo ma soprattutto consente l'osservazione che i diagrammi proposti in due dimensioni da Archimede non sono una proiezione sul piano di una realtà tridimensionale.

Ciò corrobora la fondata ipotesi di Netz relativa al fatto che gli antichi diagrammi greci sono schematici, ossia rappresentano proprietà topologiche di entità geometriche.

Tali proprietà sono quindi generali come il linguaggio, per questo abilitate, con pari dignità, a contribuire alla logica di un'argomentazione.

Definire la scienza greca come una scienza visiva non è quindi un'affermazione azzardata. Seguendo un approccio di insegnamento e apprendimento ispirato dalla storia, noto come approccio genetico (Tzanakis e Arcavi, 2000), è dunque auspicabile inizialmente fornire agli studenti un sistema di rappresentazione legato all'uso dei sensi, anche perché, come è stato più volte evidenziato in letteratura (Arzarello et al., 2009), la visualizzazione e l'immaginazione sono fondamentali per dare significato ai concetti. Nel processo di apprendimento genetico è importante valorizzare anche altri sistemi di rappresentazione attuali e astratti che devono essere riconosciuti in modo consapevole dallo studente come alcuni tra i possibili, e solo così completeranno la sua formazione.

3.1 L'approccio linguistico

Questo percorso può essere proposto a diversi livelli scolastici, anche riferito all'approccio linguistico: infatti si può proporre la lettura dei testi nella versione in lingua italiana tradotti da Tartaglia o da studiosi quali Frajese e Fleck, nella versione latina di Moerbeke o greca direttamente dal testo digitalizzato del palinsesto a cura dello stesso Fleck. La lettura delle fonti ha sempre una valenza importante nell'approccio di un argomento, ma il fascino dell'accostarsi al palinsesto è del tutto particolare. La storia raccontata da Netz e Noel ne "Il

codice perduto di Archimede” ci riporta al 14 aprile (calendario giuliano) del 1229, quando il monaco Johannes Myronas termina la copiatura di un εὐχολογίον. Per realizzarlo l’amanuense ha grattato e piegato a quaderno alcune pergamene antiche accatastate per essere usate come fogli riciclabili. Quei fogli destinati ad accogliere le preghiere della chiesa greco-ortodossa vengono “lavati”, distruggendo così il testo originario che raccoglieva alcuni scritti antichi, tra cui Αρχιμήδους Οχουμένων. Solo un incredibile lavoro di equipe unito all’uso di sofisticati strumenti tecnologici ha consentito alle parole deputate all’oblio di tornare a narrare un racconto fantastico. Quelle preghiere sembravano aver distrutto una conoscenza antica, in realtà l’hanno custodita per questa nostra epoca capace di leggere l’illeggibile grazie alla tecnologia.

Una tale lettura, oltre al palese valore dell’uso delle fonti per un approccio storico alla matematica, è importante perché dà centralità alle parole: lo sforzo della traduzione letterale è complemento e rinforzo alla fatica della traduzione del significato matematico. Ciò promuove una visione interdisciplinare del sapere, con una mescolanza di applicazioni di competenze letterali e scientifiche che consente l’emergere di un campo semantico più ampio, di elevata valenza formativa e capace di aprire nuovi orizzonti.

3.2 Il percorso nel Libro GeoGebra: Introduzione

Nel percorso del *Libro GeoGebra* le situazioni raccontate a parole vengono riprodotte anche attraverso figure 3D. Le differenze tra la proiezione nel piano della figura tridimensionale e la rappresentazione schematica di

Archimede evidenziano proprio l'utilizzo del pensiero diagrammatico di cui abbiamo parlato.

Archimede Galleggianti Libro I



Sommario

Galleggianti Libro I introduzione

AP_LD Archimede Galleggianti Libro I, introduzione

AP_LD Archimede Galleggianti Libro I, La forma degli oceani

Galleggianti Libro I, proposizioni 3 e 4

AP_LD Archimede Galleggianti Libro I, proposizione 3

AP_LD Archimede Galleggianti Libro I - proposizione 4

Il Teorema di Archimede

AP_LD Archimede Galleggianti Libro I, proposizione 5 + Libro II,1

AP_LD Archimede Galleggianti Libro I, Teorema di Archimede

La lettura delle proposizioni 6 e 7

AP_LD Archimede Galleggianti Libro I, proposizioni 6 - 7

Il galleggiamento di un segmento sferico

AP_LD Archimede Galleggianti Libro I, proposizioni 8-9

AP_LD Archimede Galleggianti Libro I, proposizione 8

Fig. 2 - Il Libro GeoGebra (codice: JWUXXYXK)

Nell'introduzione si propone la lettura del postulato sia nella traduzione letterale di Fleck fedele al testo riportata precedentemente nel capitolo 2 sia quella di Frajese che intende declinare l'asserto criptico: «Si supponga che il liquido abbia natura tale, che delle sue parti ugualmente disposte ($\epsilon\lambda\iota\sigma\sigma\upsilon\ \kappa\epsilon\iota\mu\acute{\epsilon}\nu\omega\nu$) e continue, quella meno compressa venga spinta da quella più compressa, e che ciascuna delle sue parti sia compressa secondo la perpendicolare [=verticale] dal fluido situato sopra di essa, a meno che il liquido non sia contenuto dentro un [recipiente], e non sia compresso da qualunque altra [causa]» e si invitano gli studenti a scrivere il significato di questa frase utilizzando un linguaggio narrativo. Viene anche proposta una figura dei vasi comunicanti e presentato un racconto immaginario in cui

parole moderne richiamano quelle usate da Archimede e apposite domande aiutano la comprensione. Un esempio dalle attività del *Libro GeoGebra*: «Mentre e si riempie questo strano oggetto [un vaso comunicante] con acqua si nota che il liquido si distribuisce, quindi "alcune porzioni di liquido hanno scacciato via quelle contigue", più precisamente "quella meno compressa è stata spinta da quella più compressa". Ad un certo punto però si è fermato tutto, quindi siamo all'equilibrio (quindi nessuna porzione di liquido scaccia via quella contigua). Come sono "comprese" tutte le porzioni di liquido allo stesso livello?».

Si fa un richiamo storico relativo al principio dei vasi comunicanti. Esso è in genere considerato una scoperta di Erone (I secolo d.C.), invece la conoscenza del fenomeno era sicuramente antecedente ad Archimede (287-212 a.C.) infatti anche Platone (428-347 a.C.) ne parla nel Simposio, dove osserva che se si immergono gli estremi di un filo di lana in due coppe (evidentemente uguali e poste sullo stesso tavolo), l'acqua passa, lungo il filo, dalla coppa più piena a quella meno piena finché i livelli divengono uguali. Di quest'ultima osservazione si propone anche un semplice esperimento fisico.

Nella seconda attività viene presentata la deduzione relativa alla forma degli oceani e quindi della Terra. Dalla proposizione 2 «Ogni fluido [supposto] immoto [e] in quiete, assumerà la forma di una sfera con centro in quello della Terra» (traduzione di Fleck comparata a quella di Frajese: La superficie di ogni liquido che si trovi in riposo avrà la figura di una sfera avente come centro lo stesso centro della Terra) e con l'introduzione di un lemma che consente ad Archimede di ricondurre il problema nel piano si svolgono una serie di

attività con GeoGebra per argomentare l'impossibilità che la superficie degli oceani non sia sferica.

In una di queste si propone l'inferenza archimedeo attraverso domande mirate, l'uso dell'immaginazione per la costruzione di certe situazioni reali e il movimento delle figure dinamiche costruite con GeoGebra.

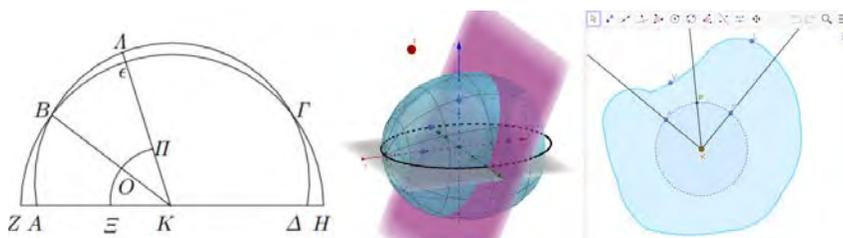


Fig. 3 - Il diagramma di Archimede e l'attività con GeoGebra

Infine si ripropone la lettura integrale del testo archimedeo che, dopo l'attività, diviene chiaro e fornisce una visione sintetica d'insieme della questione affrontata

3.3 Il percorso nel Libro GeoGebra: Le proposizioni 3 e 4

La proposizione 3 narra: «Corpi solidi dello stesso peso del fluido, se immersi in questo, s'immergeranno senza discendere in alcuna [loro] parte sotto la superficie del fluido, né precipiteranno sul fondo». Archimede parte da una supposizione, ossia immagina di rilasciare nel fluido un corpo solido dello stesso peso del fluido che emerga un poco rispetto alla superficie del fluido e guida il lettore nel ragionamento relativo all'esperimento mentale. Rifacendosi sempre al postulato che considera la situazione di equilibrio in cui il

fluido è in quiete, arriva così ad una contraddizione che quindi riconduce alla veridicità dell'enunciato.

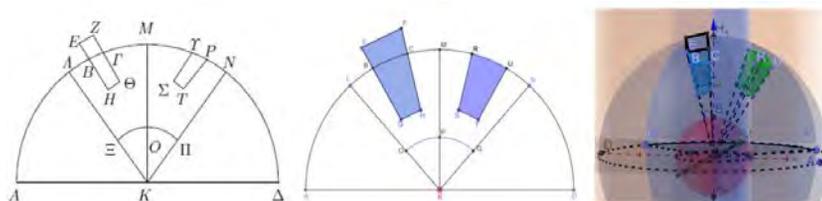


Fig. 4- Dal diagramma di Archimede alle rappresentazioni GeoGebra 2D e 3D per la proposizione 3

Archimede procede in modo simile per la dimostrazione della proposizione 4: «Di corpi solidi, quello più leggero del fluido [ed] in questo rilasciato, non precipiterà interamente ma una sua [parte] emergerà sulla superficie del fluido». Il postulato di Archimede implica quindi che i corpi più pesanti (a parità di volume) del liquido in cui sono immersi affondino, mentre quelli più leggeri galleggino e si può anche determinare quanta parte del corpo galleggiante emerge.

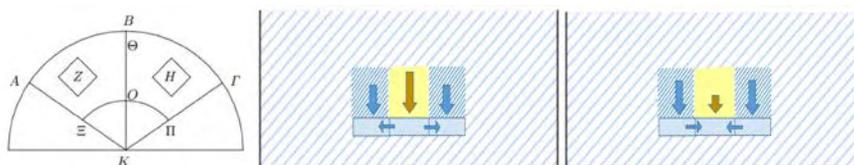


Fig. 5- Il diagramma di Archimede e la semplificazione schematica dinamica per la proposizione 4

Tutte le considerazioni, che sembrano banalmente ricavabili dall'osservazione di un fenomeno, sono geometricamente argomentate.

3.4 Il percorso nel Libro GeoGebra: Il teorema di Archimede

La proposizione 5 narra: «Di corpi solidi, quello più leggero del fluido, [se in questo] rilasciato, s'immergerà [in misura] tale [da aversi] corrispondenza fra il volume del fluido, per la parte del solido immersa, e l'intero peso del corpo solido». Nel *Libro GeoGebra* è proposta una semplificazione grafica bi e tri-dimensionale, che visualizza il ragionamento di Archimede senza perdere in generalità.

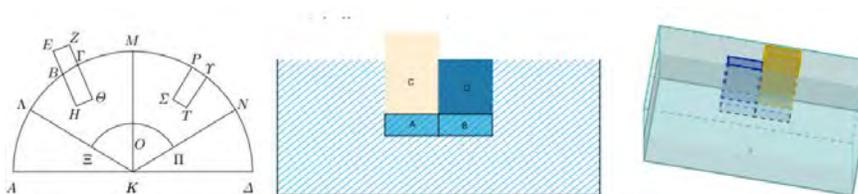


Fig. 6- Il diagramma di Archimede e la semplificazione schematica dinamica 2D e 3D per la proposizione 5

Dopo aver fatto considerazioni sulla compressione delle varie parti viene proposta una trasposizione simbolica (ovviamente estranea ad Archimede) della proposizione che consente di evidenziarne la corrispondenza con l'enunciato scolastico del "principio di Archimede", che così cambia prospettiva divenendo la dimostrazione di un teorema.

Si traducono quindi le osservazioni appena fatte con il linguaggio simbolico cercando una relazione anche quantitativa. Si indica con $p(X)$ e $v(X)$ il peso e il volume di un qualsiasi corpo X ; con E ed I le porzioni Emersa e Immersa del corpo galleggiante; con I' la porzione di liquido dello stesso volume della parte immersa. Con A e B si indicano due porzioni uguali di liquido in equilibrio tra loro. Facendo riferimento all'immagine centrale della fig. 6, la proposizione che dice che il peso D è uguale al peso C si può scrivere: $p(D)=p(C)$ ma il volume di D è proprio la parte immersa del

corpo C che però è fatta di liquido e quindi $p(D)=p(I')$; inoltre evidentemente il peso del corpo C è dato dalla somma dei pesi della parte Emersa e Immersa, quindi $p(I)=p(E)+p(I)$.

Si indica con s il rapporto tra il peso del corpo e quello di un uguale volume di liquido, per comodità si prenda per esempio il solo volume immerso del corpo, per avere così: $s = \frac{p(I)}{p(I')}$ dove si può sostituire $p(I')$ sopra trovato. Poiché si sta considerando solo il corpo C, supposto omogeneo, e ricordando che per porzioni di un corpo omogeneo il rapporto tra i pesi è uguale al rapporto tra i volumi, si può scrivere:

$$s = \frac{p(I)}{p(I')} = \frac{p(I)}{p(E) + p(I)} = \frac{v(I)}{v(E) + v(I)}$$

che significa aver dimostrato la proposizione 1 che si trova nel libro II dei Galleggianti: «Se un corpo [omogeneo] più leggero [a parità di volume] di un liquido è immerso nel liquido, il corpo si immergerà parzialmente in modo tale che [in condizioni di equilibrio] il rapporto tra il peso del corpo e quello di un uguale volume di liquido (ossia s che in termini moderni si chiama peso specifico relativo) sia uguale al rapporto tra il volume della sua parte immersa e l'intero volume del corpo» :

$$s = \frac{v(\text{Immerso})}{v(\text{totale} = \text{Emerso} + \text{Immerso})}$$

Questa conclusione è derivata solo dalla premessa del libro I e da alcune considerazioni geometriche, non si è fatto mai ricorso ad affermazioni assiomatiche.

Per dedurre quello che si conosce come "principio di Archimede" si fa la seguente congettura. Si supponga ora di porre sopra il corpo galleggiante C un altro corpo $p(Z)$, di peso tale da costringere C a non emergere, ma a rimanere con

la faccia superiore esattamente al livello della superficie del liquido (fig. 7). Poiché siamo nella condizione di equilibrio, il peso $p(Z)$ spinge il corpo C per far sì che le porzioni A e B siano spinte dalla stessa forza, quindi $p(Z)$ deve uguagliare la forza idrostatica che spinge il corpo C verso l'alto.

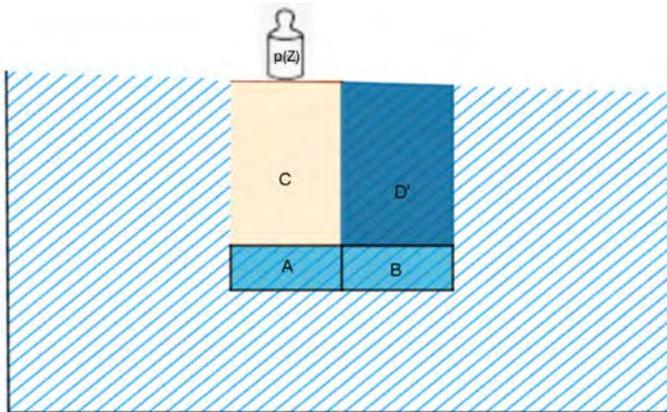


Fig. 7- Semplificazione del diagramma di Archimede per dedurre il teorema noto come “principio di Archimede”

Si ha la relazione $p(D')=p(C)+p(Z)$ ma, per la notazione precedente, $p(D')=p(I')+p(E')$, dove $p(E')$ è la parte Emersa del corpo C fatta di liquido, quindi $p(I')+p(E')=p(C)+p(Z)$. Inoltre ricordiamo che il peso del corpo C, $p(C)$, è uguale al peso di acqua della parte immersa $p(I')$, cioè $p(C)=p(I')$. Quindi $p(Z)=p(E')$ è la forza che spinge il corpo C verso il basso per avere la condizione di equilibrio. Allora la spinta verso l'alto è pari a $p(E')$, che è il peso del liquido spostato dal corpo C.

Si è così arrivati ad enunciare che un corpo immerso (totalmente o parzialmente) in un fluido è soggetto ad una spinta verso l'alto pari al peso del fluido spostato dal corpo stesso, che è il linguaggio usato dai libri di testo per indicare il

principio di Archimede. La proposizione costruttiva di Archimede, secondo Lucio Russo (Russo, 1996), è stata volutamente spogliata della sua dimostrazione perché considerata troppo concreta e quasi indegna di appartenere al corpus matematico, ponendo così in alternativa le due caratteristiche essenziali della scienza: il rigore logico e l'applicabilità.

Uno schema visivo intuitivo, utilizzabile didatticamente, è riportato nella figura 8.

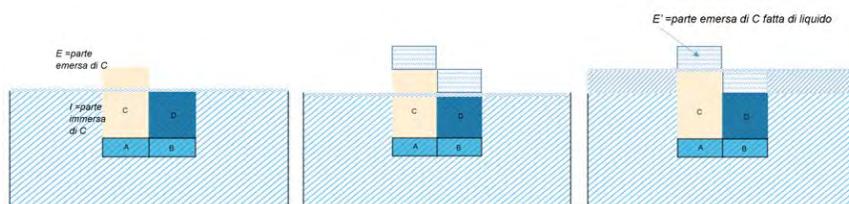


Fig. 8- Schema visivo intuitivo del Teorema di Archimede

3.5 Il percorso nel Libro *GeoGebra*: Le proposizioni 6 e 7

Fino ad ora la lettura delle proposizioni nel *Libro GeoGebra*, dopo una guida all'interpretazione attraverso domande e costruzioni visive, propone il ritorno al testo essenziale di Archimede abituandoci così al linguaggio e al procedimento dimostrativo del siracusano. In questo capitolo le due proposizioni che trattano le conseguenze della spinta trovata quando un corpo è immerso in un fluido sono solo enunciate.

La lettura della dimostrazione originale vuole incoraggiare gli studenti all'autonomia e testare se il percorso proposto è riuscito a fornire un metodo di decodifica del testo antico. La proposizione 6 dice: «Corpi solidi più leggeri del fluido, spinti a forza [in questo], sono condotti in alto con un'intensità proporzionale al [loro] volume, [se] il fluido di volume eguale

al solido è più pesante del solido [stesso]». E la 7: «Solidi più pesanti del fluido in questo rilasciati, saranno condotti in basso verso il fondo, ed il [loro] peso nel fluido diminuirà di una quantità corrispondente al fluido [spostato] per un volume eguale a quello del solido. [Ed] è chiaro che saranno condotti sul fondo; infatti le porzioni di fluido sotto questi saranno maggiormente compresse delle porzioni attorno disposte, poiché si sono supposti i solidi più pesanti del fluido: si dimostrerà come il peso dei corpi diminuirà della detta quantità». Le dimostrazioni sono accompagnate da diagrammi ormai familiari e decodificabili grazie all'esercizio svolto per le proposizioni precedenti.

3.6 Il percorso nel Libro GeoGebra: Il galleggiamento di un segmento sferico

Nelle proposizioni 8 e 9 Archimede applica le leggi di galleggiabilità a un segmento fluttuante di una sfera solida omogenea: «Un qualsiasi solido a figura di segmento sferico [e] più leggero del fluido, se immerso in questo in modo che la base del segmento non sia a contatto col fluido, si disporrà con l'asse del segmento in verticale, e se la figura è spinta in basso da una qualsiasi [forza] in modo che la base del segmento tocchi il fluido, questa non rimarrà inclinata ma si disporrà dritta». Nelle attività del *Libro Geogebra*, dopo aver definito un segmento sferico, il suo asse e la sua altezza, e individuato la posizione del baricentro, si costruisce il modello dinamico con GeoGebra 2D (semplificato con una semisfera, anche se Archimede prende in considerazione prima una calotta con altezza maggiore del raggio e poi generalizza a tutti gli altri casi). Nel simulatore è possibile modificare il pescaggio,

mediante la variazione del parametro b che rappresenta il rapporto tra i pesi specifici del segmento sferico e del fluido, e l'angolo di inclinazione α tra l'asse del segmento e la superficie del liquido.

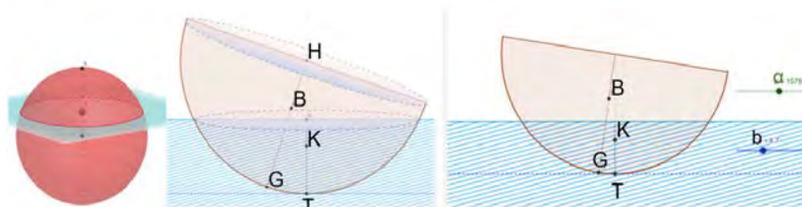


Fig. 9- Segmento sferico e modello GeoGebra per lo studio della galleggiabilità.

La simulazione è stata costruita considerando la superficie del liquido orizzontale, come Archimede farà nel Libro II quando studierà la stabilità di un segmento retto di paraboloido omogeneo.

È stato anche prodotto un modello dinamico concreto con una tavoletta di legno, chiodino e carta lucida per consolidare il concetto attraverso il movimento delle mani.

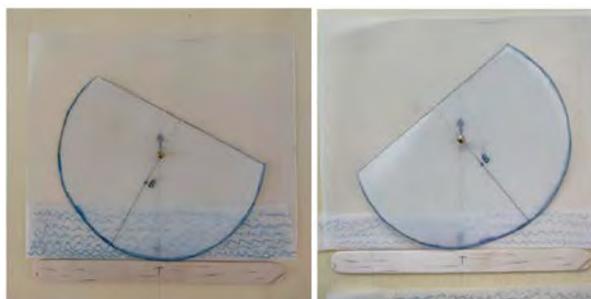


Fig. 10- Modello concreto per la galleggiabilità del segmento sferico

Per non tradire la diagrammatica archimedea si è anche studiata la situazione che appare nella proposizione 8, sempre attraverso figure dinamiche 2D e 3D, e si sono potute esplorare e interpretare situazioni dal diagramma originale.

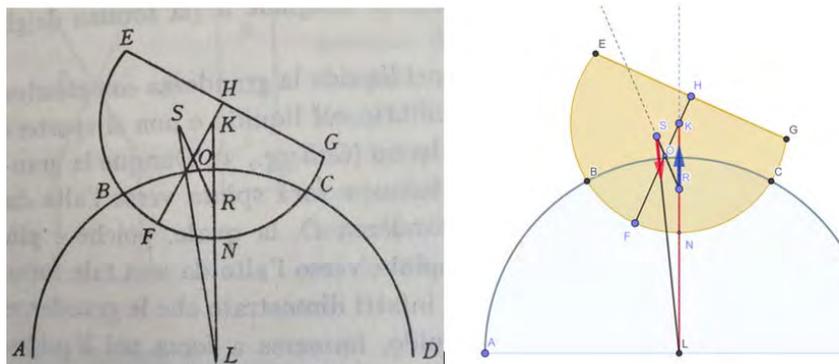


Fig. 11- Il diagramma di Archimede e la riproduzione con GeoGebra 2D

4 - Conclusioni

Il recupero di antiche conoscenze, perse nella memoria storica, ha un fascino indubbio e una forte valenza formativa di cui, crediamo, si sia esplorata solo una piccola parte nella didattica. Ripercorrere la logica dimostrativa attraverso la diagrammatica topologica di Archimede apre un orizzonte nuovo in cui la legge di galleggiabilità viene affrontata con argomentazioni incredibilmente e inaspettatamente semplici.

Bibliografia

Archimede: *Sui corpi galleggianti*, a cura di H.F. Fleck pubblicazione elettronica, 2016.

Arzarello F., Paola D., Robutti O., Sabena C. (2009). Gestures as semiotic resources in mathematics classroom, *Educ. Studies in Mathematics*, 70(2), pp 97-109.

Brousseau G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic.

Frajese A. (1974). *Opere di Archimede*. Torino: UTET.

Jahnke H.N. (2000). The use of original sources in the mathematics classroom. J. Fauvel, J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education, the ICMI study* (pp. 291–328, Chapter 9). Dordrecht: Kluwer Academic.

Rorres C. (2016) Archimedes' floating bodies on a spherical Earth. *Am. J. Phys.* 84 (1) <https://aapt.org/ajp>

Rorres C. (2004) Completing Book II of Archimedes's On Floating Bodies. *The Mathematical Intelligencer* (Vol. 26, N.3,) https://www.cs.drexel.edu/~crrorres/screw/Rorres_MI_2004.pdf

Russo L. (1996). *La rivoluzione dimenticata*. Milano: Feltrinelli.

Russo L. (2019). *Archimede*. Roma: Carocci editore.

Tzanakis C., Arcavi A. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey. In J. Fauvel, & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education* (pp. 201–240, Chapter 7). *The ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

La soluzione di problemi lineari attraverso l'uso degli artefatti: l'evoluzione dei materiali e la crescita degli studenti.

Laura Tomassi* Daniela Tossini**

*Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Roma Tor
Vergata, Italia, tomassi@axp.mat.uniroma2.it

**IC Falcone e Borsellino Roma, Italia
daniela.tossini@falconeborsellino.edu.it



Sunto: *nel "Liber Abbaci" di Leonardo Pisano (1202), sono presenti diversi problemi che possono essere portati nelle classi del terzo millennio, senza l'utilizzo del linguaggio simbolico introdotto solo più tardi. La risoluzione di quesiti con un approccio geometrico o con l'uso di particolari diagrammi permetterà agli studenti di conoscere metodologie di soluzione differenti da quelle che solitamente usano. Si utilizzerà un approccio storico-laboratoriale usando la fonte storica diretta, manipolando opportuni materiali e sviluppando piccoli progetti di nuovi materiali, passando quindi dalle mani, alla mente e di nuovo alle mani. L'attenzione sarà focalizzata sul linguaggio utilizzato: mediante l'analisi e la comprensione del testo si rifletterà in maniera critica sulle soluzioni trovate.*

Parole Chiave: *Artefatti storici; artefatti manipolativi; artefatti digitali;
problem-solving*

Abstract: *in the “Liber Abbaci” by Leonardo Pisano, known as Fibonacci, there are several problems that can be brought into the classes of the third millennium, without the use of the symbolic language introduced only later. Solving questions through a geometric approach or with the use of particular diagrams will allow students to learn solution methodologies different from those they usually use. A historical-laboratory approach will be used, using the direct historical source, manipulating appropriate materials and developing small projects of new materials, then moving from the hands, to the mind and back to the hands. Attention will be focused on the language used: through analysis and the understanding of the text we will reflect critically on the solutions found.*

Keywords: *Historical artifacts, manipulative artefacts; digital artifacts; tris of artifacts; problem solving*

1 - L’approccio storico alla didattica della matematica

Negli ultimi decenni diversi studi hanno confermato l’esplorazione delle correlazioni tra la storia e la didattica della matematica come campo di ricerca, ponendo domande sia di tipo metodologico sia sulla valutazione dell’efficacia dell’uso della storia integrata nella didattica della matematica (Radford, L., 1996), (Radford, L., Santi, G., 2022), (Hernandez, L. R., Furinghetti, F., Radford, L., & English, L., 2008), (Demattè, A., Furinghetti, F., 2022), (Chorlay, R., Clark, K. M., & Tzanakis, C. 2022).

L’approccio storico alla didattica della matematica permette di gettare le basi per far vivere la matematica come parte della storia dell’umanità e in questo modo la matematica si umanizza e forse intimorisce meno: è una parte di noi. La matematica può essere vissuta come un continuo sforzo di ripensamento e di miglioramento da parte dell’uomo,

piuttosto che come un edificio che raccoglie verità certe e immutabili. Seguendo l'itinerario del suo pensiero, i suoi tentennamenti, i suoi progressi, ne potremmo rendere più obiettivo il cammino e più significativi i concetti (Grugnetti, L., et al, 2000).

Il presente lavoro si basa sul concetto di "ricapitolazione genetica" ponendo un parallelo tra lo sviluppo della matematica nel XIII secolo in Europa e la tappa dell'educazione matematica che permette lo sviluppo del pensiero algebrico, che il sistema scolastico colloca tra la fine della scuola secondaria di primo grado e il biennio della scuola secondaria di secondo grado. In particolare si prende in esame la matematica dei problemi d'Abaco, come riportata nel Liber Abaci di Leonardo Pisano detto Fibonacci. Nella pratica, l'utilizzo del metodo storico in questo percorso didattico è giocato sotto l'ombrello del *dépaysement* (Barbin, 1997) attraverso diversi elementi: i problemi realistici o surreali, dove la realtà non è quella consueta della quotidianità, ma quella del passato; la lingua è quella delle fonti storiche originali dei documenti, il latino medioevale; il linguaggio è quello inconsueto della matematica retorica.

Ci si domanda se questi elementi possano non solo attrarre l'attenzione degli studenti, ma anche coinvolgerli da un punto di vista emotivo, grazie al *dépaysement*.

1.1 - Le fonti originali

Biblioteche digitali, teche e archivi digitali rendono fruibili le fonti di Fibonacci e le carte dei testimoni principali del Liber Abaci: un patrimonio librario altrimenti difficile da raggiungere. È dunque fondamentale introdurre gli studenti

ad un utilizzo consapevole delle risorse digitali: per il manoscritto del liber Abbaci Conventi Soppressi C.1. 2616, si fa riferimento alla Biblioteca Digitale del Museo Galileo (che pubblica collezioni digitali tematiche di interesse storico scientifico); The Internet Archive sia per il Magliabecchiano XI.21, per il II testimone Testimone G del Liber Abbaci. Di particolare interesse è il Progetto Fibonacci (www.progettofibonacci.it), il prodotto di un lavoro collettivo e interdisciplinare che ha reso accessibile a tutti il Liber Abaci: in quattro anni, attraverso quella che il Professore Franco Ghione definisce una libera attività di volontariato intellettuale, questo progetto ha tradotto per la prima volta in lingua italiana la principale opera di Leonardo Pisano. All'interno del sito sono disponibili le pagine dell'edizione di Baldassarre Boncompagni, cui si fa riferimento per la traduzione in italiano. Le fonti sono fondamentali sia per il lavoro di studio e progettazione dell'insegnante che per il laboratorio di matematica degli studenti.

1.2 La didattica di Leonardo Fibonacci

“E poiché la scienza aritmetica e quella geometrica sono connesse e si sostengono a vicenda, non si può trasmettere una piena dottrina del numero se non intersecandola con alcuni concetti di geometria o spettanti alla geometria, che in questo caso pratica il giusto modo di operare sui numeri; modo che è assunto per molte argomentazioni e dimostrazioni che si fanno con le figure geometriche.Così chi volesse conoscere bene la pratica di questa scienza dovrà applicarsi con uso continuo ed esercizio giornaliero nella pratica di essa, perché se la conoscenza si muta in abitudine attraverso la pratica, la memoria e l'intelligenza concordano a tal

punto con le mani e i segni che quasi in un unico impulso e anelito, in uno stesso istante, si accordano naturalmente su tutto”

Questo è un estratto del programma di Leonardo Pisano nel Prologo del Liber Abaci. Da esso vengono estrapolate e condivise importanti indicazioni che possono essere rintracciate anche in moderne teorie didattiche: il ruolo della geometria nell’acquisizione di una piena dottrina del numero ed il suo potenziale dimostrativo ha attinenza con il quadro teorico della *teoria dei concetti figurati* (Fischbein, E., 1993); l’utilizzo delle mani, dei sensi in generale e dei segni per l’apprendimento della matematica ben sono rappresentati dalle moderne neuroscienze (Giaquinto, M., 2009). Questi concetti si sposano con ‘una dimensione “sperimentale” nella matematica, nonché una tensione dinamica tra la natura empirica delle attività con esse, che comprende componenti percettive e operative – e la natura deduttiva della disciplina, che implica la formalizzazione rigorosa e sofisticata” (Arzarello, F., 2012). La dialettica di un flusso aperto tra i problemi teorici e pratici, porta ad utilizzare la costruzione geometrica come strumento didattico; oltre alla costruzione di materiali manipolativi, i DSG come Geogebra possono essere utilizzati come artefatto digitale. I due tipi di artefatti vengono presi in considerazione nella nostra esperienza d’aula. In passato sono stati condotti studi (Maschietto M., 2016) sulla combinazione di un duo di artefatti.

In questo nostro lavoro si considera di usare il DSG per disegnare e realizzare un nuovo artefatto manipolativo realizzato attraverso l’uso di una taglierina laser (Makeblock Laserbox Rotary Smart Educational Desktop Laser Cutter) che porti gli studenti ad essere i protagonisti della creazione del loro materiale. Ci si pone la domanda se questi artefatti con i

loro protocolli di realizzazione e d'uso possano rappresentare uno strumento adeguato alle esigenze di studenti nella fase della formazione dei prerequisiti del pensiero algebrico astratto.

1.3- Il problem solving tout court

La regola della falsa posizione o regola dell'albero viene applicata da Fibonacci alla risoluzione di problemi di vario genere, per l'appunto definiti di natura erratica. Tali problemi introducono nell'educazione matematica una valenza metodologica che "non si limita alla loro soluzione. Nella storia della matematica, il tentativo di dare una risposta a problemi aperti ha portato alla costruzione di nuove teorie e nuovi risultati" (Zan R., 2007).

Si possono attribuire inoltre a questi artefatti diverse peculiarità. Innanzitutto i problemi del Liber Abaci possono essere definiti come "compiti di realtà storica": essi rappresentano fonti storiche originali, riportando la realtà dell'epoca in cui sono stati concepiti in tutto e per tutto. Fibonacci sceglie spesso nei problemi degli oggetti (tinea/tina), animali (equi; coniculi), azioni e situazioni (baractus) della vita quotidiana che fanno parte dell'immaginario comune, in modo che i suoi esempi siano comprensibili a Pisa come a Bugia o in qualsiasi altro luogo del mondo allora conosciuto (Catastini, L., Ghione, F., 2023). L'oggetto è un "segno" significativo. I problemi erratici possono essere pensati all'interno del quadro teorico della Realistic Mathematical Education (Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. 2020), esempi volti a fissare la

mente su un tipo di problema matematico, su una procedura o a raccontare una realtà importante per i risultati numerici che produce. Problemi astratti o concreti che cominciano col formare il corpo della nuova matematica, nata con l'introduzione dei numeri razionali e dei relativi algoritmi. Il racconto permette di enunciare verbalmente una sorta di proto-algebra nella quale le incognite sono indicate con una locuzione, che ricorre nei diversi passaggi algebrici, al posto di una lettera che la rappresenti simbolicamente.

Ci si domanda se questa algebra retorica, come viene chiamata, non possa essere didatticamente un passo preliminare dell'algebra simbolica vera e propria, come è avvenuto storicamente, e pertanto essere fonte d'ispirazione per attività che vanno a curare lo stesso passaggio nella vita degli studenti.

14 - Il pensiero prealgebrico: la regola arboris

Nel capitolo XII del Liber Abaci, Leonardo Pisano descrive la Regula che permette di risolvere problemi lineari costruendo un modello di linearità, svincolato da sistemi di riferimento spaziali e dall'espressione algebrica e fondato sulla sola geometria euclidea e sul pensiero diagrammatico (Hamami, Y., & Mumma, J. 2013). Il presente percorso didattico si basa sulla *regula arboris o falsa posizione* (Hanna J, 2007).

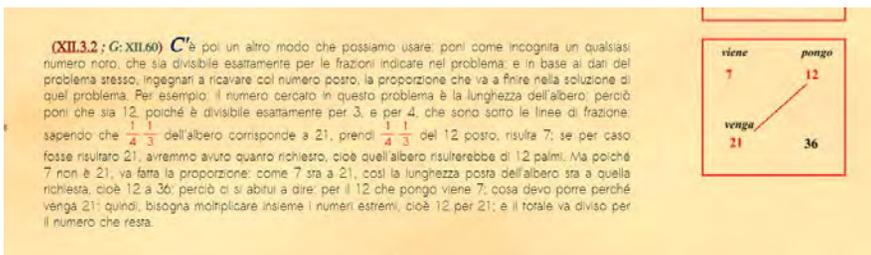


Figure 1: La regola arboris in www.progettofibonacci.it

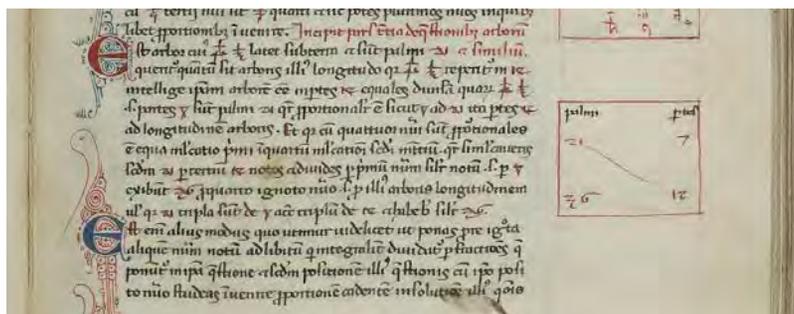


Figure 2 La regola arboris nel Magliabecchiano XI.21

2 - Esperienze d'aula: l'attenzione al pensiero proporzionale

In questa sezione descriviamo delle esperienze da noi proposte in classi di scuola secondaria di primo e secondo grado, specificatamente presso L'I.C. Falcone e Borsellino di Roma e presso il Liceo Classico Varrone di Rieti durante l'anno scolastico 2023/2024. Ci siamo focalizzati verso gli studenti della seconda e terza classe della scuola secondaria di primo grado e delle classi prime del primo biennio del liceo classico.

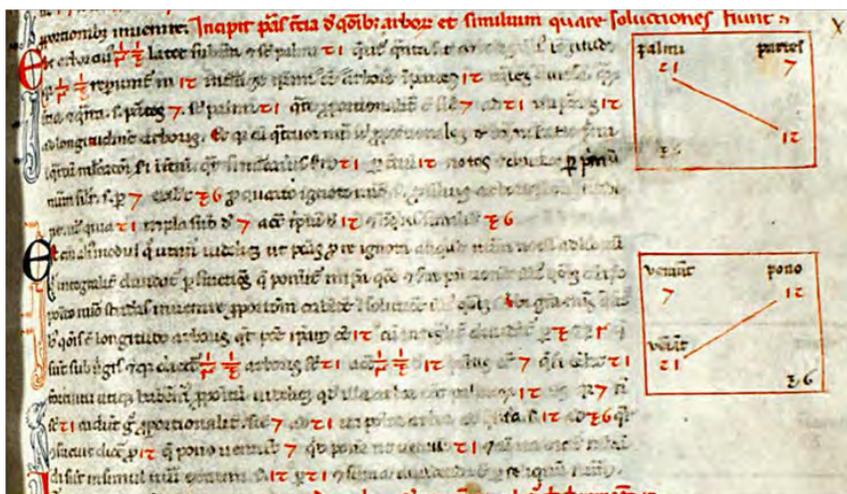


Figura 3: Conv. Sopp. C.I. 2616, BNCF, folio 73 recto

2.1- L'esperienza nella scuola secondaria di primo grado: i prerequisiti al pensiero proporzionale

La prima lezione ha portato direttamente la proposta del manoscritto del Liber Abaci senza alcuna introduzione, utilizzando diversi Codici (Figura 2 e Figura 3). La reazione degli studenti di classe seconda è stata di stupore. Nonostante uno dei codici considerati sia uno di quelli maggiormente leggibili, è stato difficile per loro inquadrare che tipo di testo fosse e in quale lingua fosse scritto.

Si è così passati all'esame dello stesso testo sul sito di www.progettofibonacci.it (come riportato in Figura 1)

Dalla lettura del documento originale abbiamo estrapolato il problema:

“C'è un albero $\frac{1}{3} \frac{1}{4}$ del quale, cioè 21 palmi, è sotto terra,

quale è la lunghezza complessiva dell'albero?”

Agli studenti è stato chiesto: “Lo sai risolvere da solo?”

Molti hanno risposto positivamente, ma non sono riusciti a spiegare bene l’algoritmo utilizzato. Ad esempio una risposta è stata: “divido 21 per 12 e moltiplico per 7, no aspetta forse il contrario”

Propongo di modellizzare gli alberi con i segmenti. Io ho in mente il seguente diagramma, che non voglio spiegare ma costruire.

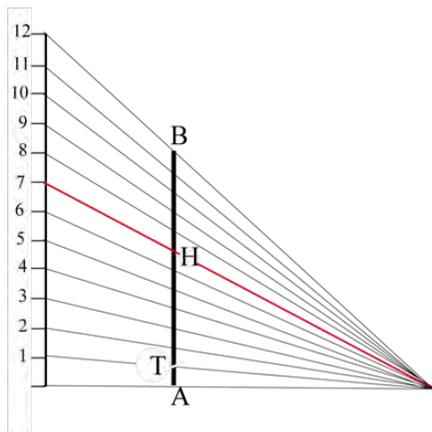


Figura 4: rappresentazione diagrammatica della *Regula Arboris*

Servendoci del seguente artefatto (Figura 5) diamo corpo al diagramma:



Figura 5: I bastoncini Geo Stix®

I bastoncini Geo Stix®, formulati in origine per studiare gli angoli, vengono ristrutturati ed usati per congiungere gli estremi di segmenti che modellizzano l'albero di Fibonacci disegnati su carta trasparente, usando come strumento di misura fogli a quadretti da 1 cm, che permettono di disegnare l'albero di riferimento con lunghezza 12 ed un albero ad esso parallelo e con l'estremo inferiore sulla stessa linea.

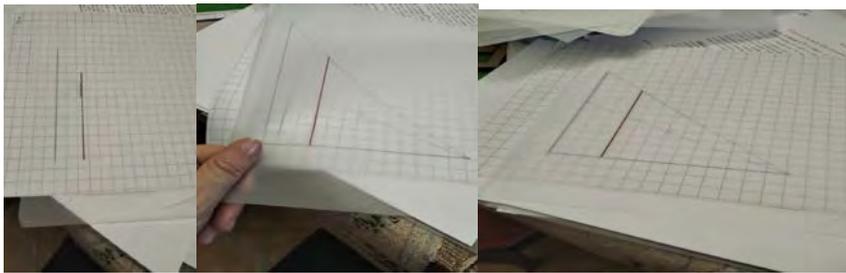


Figura 6: dal problema al diagramma

Il disegno viene riprodotto in duplice copia, colorando e ritagliando due parti diverse, corrispondenti ai triangoli riportati nella figura seguente.



La materializzazione del diagramma porta a due forme scarsamente manipolabili, ma che permettono agli studenti di fare delle considerazioni di carattere geometrico:

“i due triangoli hanno la stessa forma” “si somigliano” “una parte è sovrapponibile”.

Partendo da questa ultima osservazione, meglio esplicitata, evidenziando il parallelismo tra gli alberi e quindi tra i cateti dei triangoli, si è enunciata in maniera intuitiva la proposizione VI.2 degli Elementi (Teorema di Talete).

L’obiettivo successivo è realizzare un artefatto manipolabile facendo uso del programma Geogebra®.

Il primo passo è stata la divisione di un segmento in dodici parti uguali, usando una costruzione geometrica che fa uso del Teorema di Talete. Il diagramma dell’albero digitalizzato permette di realizzare file in formato vettoriale da usare come guida per la taglierina laser. Di seguito le immagini del nostro lavoro.

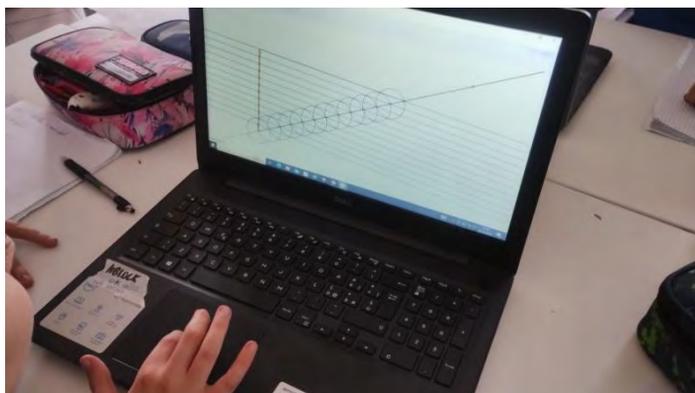


Figura 7: divisione di un segmento in dodici parti uguali

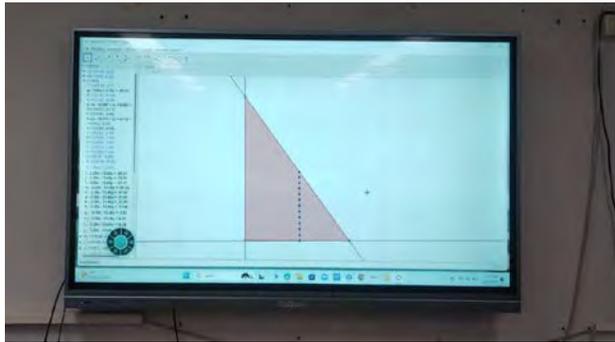


Figura 8: La digitalizzazione del diagramma

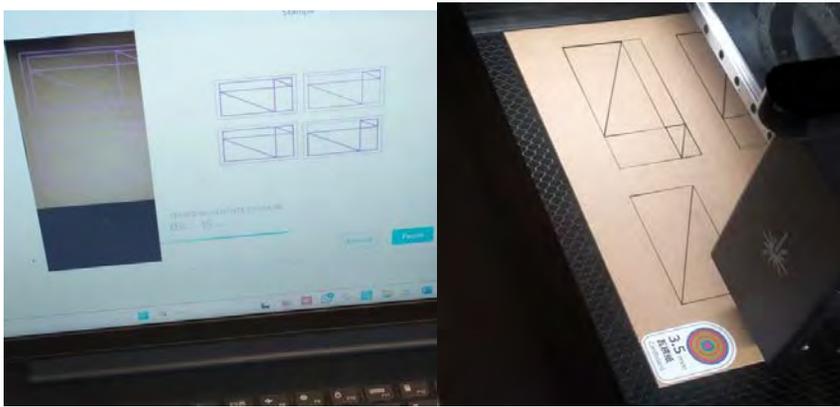


Figura 9: la taglierina digitale è guidata dal file edito dai ragazzi.

Ragioniamo sulle figure geometriche che rappresentano il problema dell'albero: attraverso il movimento di esse dentro una cornice si può dare la prova geometrica della proprietà fondamentale delle proporzioni, cosa fatta negli Elementi basandosi sul Teorema dello Gnomone (proposizione I.43) e sulla proposizione VI.16, che può essere espressa così:

$A : B = C : D$ se e solo se il rettangolo di lati A e D è equivalente al rettangolo di lati B e C

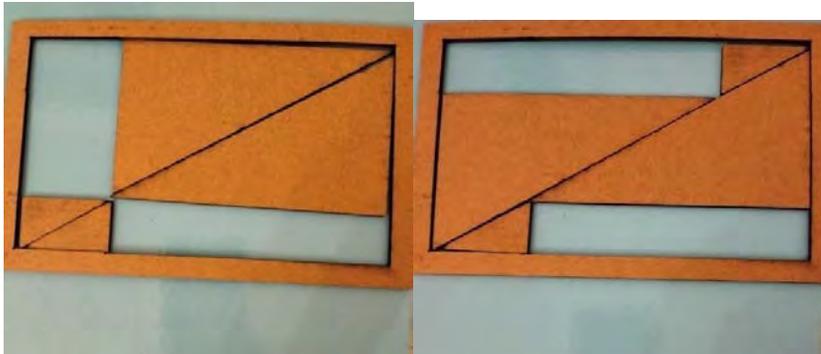
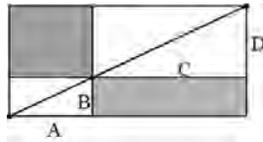


Figura 10: La proprietà fondamentale delle proporzioni e la sua dimostrazione

La soluzione del problema viene così esplicitata da Fibonacci:

“per il 12 che pongo viene 7; cosa devo porre perché venga 21: quindi, bisogna moltiplicare insieme i numeri estremi, cioè 12 per 21; e il totale va diviso per il numero che resta”.

Riassuntivamente viene fornito il seguente diagramma.

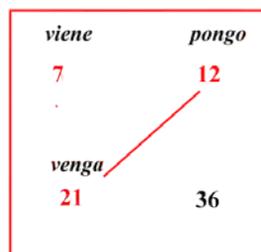


Figura 11: La proprietà fondamentale delle proporzioni in un diagramma

È importante rimarcare che il percorso di sperimentazione non è stato lineare e che, dopo un paio di incontri, la classe si è mostrata spaesata nel lavoro di gruppo. Viene proposto il questionario mostrato in figura seguente:

È importante imparare dalle cose che non funzionano, quanto dalle cose che funzionano. Trovare dove i meccanismi si bloccano serve a farli girare meglio: è così nella vita di tutti i giorni ed è così anche a scuola.

1. Ritieni utile lavorare con i materiali nello studio dei concetti di matematica? Giustifica la tua risposta.
Sì, per capire meglio un concetto se non l'abbiamo capito ma pare perché quando facciamo un lavoro lungo il materiale ci aiuta anche a ragionare e a trovare una risposta, però è anche più divertente con i materiali.
2. Ti sembra di imparare di più o di meno rispetto a quando leggi solamente? Giustifica la tua risposta.
io penso di più perché a me i materiali mi aiutano a ragionare e come ho scritto prima è anche divertente e se una cosa ti piace, dicono che ti viene meglio.
3. Ti sembra di imparare di più o di meno rispetto a quando ascolti? Giustifica la tua risposta.
in realtà io penso che, sia ascoltando sia svolgendo con i materiali perché come in un'interrogazione se capisci qualcosa è più facile.
4. Ritieni utile parlare della storia nello studio dei concetti di matematica? Giustifica la tua risposta.
Sì, perché sapendo la storia della matematica capisci pure il perché adesso ci sono cose diverse e poi può essere pure ~~interessante~~ sapere la storia di una materia o di un concetto di una materia.
5. Pensi sia facile lavorare nel tuo gruppo? Perché?
Sì, perché certe volte io e il mio gruppo siamo attenti ma alcune volte siamo un pochino distratti.
6. Ti sembra di imparare di più o di meno rispetto a quando stai da solo? Giustifica la tua risposta.
di più perché ~~da~~ insieme se non capisci qualcosa il tuo gruppo ti può aiutare a possiamo ragionare insieme su una cosa.
7. Hai dei suggerimenti da dare?
Sarebbe che facessimo un po' più di laboratori però noi dovremo imparare ad ascoltare un po' di più e non fare sempre "casino".

Figura 12: Il questionario rivolto ai ragazzi della classe seconda

Le risposte al questionario hanno denotato motivazione nel voler continuare questo tipo di approccio e che questa proposta ha dato i suoi frutti in termini di coinvolgimento degli studenti.

Nella classe seconda della scuola secondaria di primo grado i percorsi di proporzionalità vengono sperimentati tuttora ed è necessario fare delle interviste conclusive.

2.2 - L'attenzione al linguaggio e l'esperienza nella classe di quarta ginnasio

Il pensiero proporzionale è stato portato nelle classi della quarta ginnasio attraverso la proposta di risolvere il problema XII. 3.34 leggendo direttamente dal manoscritto. A causa della difficoltà derivante dalla decodifica del testo, gli studenti hanno ricevuto una copia dello stesso problema con il testo del Liber Abaci di Boncompagni (Boncompagni, B, 1857.), come riportato qui di seguito:

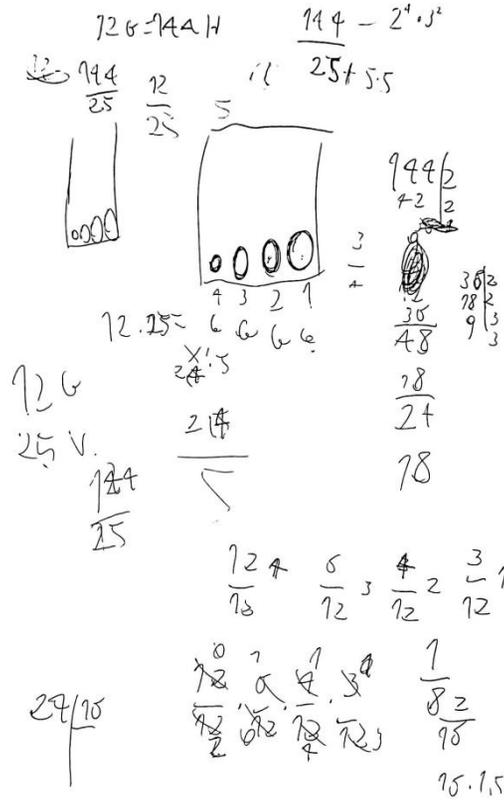
XII.3.34

De tina que habet quatuor foramina in fundo.

Est tina, que habet quatuor foramina, per primum quorum euacuatur in die 1; per secundum in 2; per tertium in 3; per quartum in 4; queritur quot horis euacuabitur, si dicta quatuor foramina simul aperiantur: pone dies 12 pro ipsius euacuatione. In quibus per primum foramen tina euacuaretur duodecies; cum dies 12 sint duodecuplum unius diei: similiter in illis positus 12 diebus per secundum foramen euacuaretur tina septies; per tertium quater; per quartum ter; et sic in diebus 12 tina euacuaretur uigies quinquies; hoc est, quod in diebus 12 euacuatur tina 25: et queritur, in quot euacuabitur tina 1. Multiplica ergo extremos, scilicet 12 per 1, et diuide per medium, exhibunt $\frac{12}{2}$ unius diei: de quibus si uis horas facere, Multiplica 12, que sunt super uirgam, per horas unius diei, scilicet per 12, erunt 144; que diuide per 25, exhibunt hore $\frac{144}{25}$ 5 pro tina euacuatione.

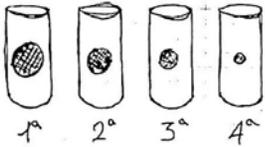
Dopo aver letto e tradotto le prime due righe, che riportano semplicemente il testo del problema, (la traduzione è riportata in una delle immagini seguenti, come trascritta dagli studenti) si è chiesto di risolvere autonomamente in gruppo. Vi sono soluzioni diverse, alcune delle quali basate sulla falsa posizione spontaneamente, più o meno influenzate dall'abilità

di tradurre dal latino il testo successivo. Vi sono diversi modelli dell'oggetto "caraffa che si vuota", con diverse ipotesi di modalità di svuotamento. In un caso è stato proprio realizzato l'oggetto vero e proprio (Figura 13).



• De tina que abet quatuor foramina in fundo.
 Est tina, que habet quattuor foramina, per
 primum quorum enacuatur in die 1; per
 secundum in 2; per tertium in 3; per quartum
 in 4; queritur quot horis evacuabitur.

C'è una caraffa che ha quattro fori, per il primo
 si svuota in un giorno, il secondo in due; il terzo
 in tre e il quarto in quattro, si chiede in quante
 ore si svuota



DATI
 1° = 1 giorno
 2° = 2 giorni
 3° = 3 giorni
 4° = 4 giorni

tempo impiegato dalla caraffa per svuotarsi da ogni foro

in 12 giorni la caraffa si svuota

- 12 volte dal 1° IN 12 GIORNI
- 6 volte dal 2° SI SVUOTANO 25 CARAFFE
- 4 volte dal 3°
- 3 volte dal 4°

$12 : x = 25 \cdot 1$
 $\frac{12}{25}$ } IN ORE $\rightarrow 12 \cdot 12$
 $= 144 : 25 \rightarrow$ CARAFFE SVUOTATE
 $= 5$ ORE PER LO SVUOTAMENTO

↳ della caraffa con i 4 fori aperti

Figura 13: la risoluzione dei ragazzi della quarta ginnasio primo gruppo

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{2-6+4+1}{12} = \frac{1}{12}$$

X = quantità di liquido che esce in...

~~1/2~~ = ~~1/2~~ = quantità di liquido che

$$24 = b_1$$

$$15 = b_2$$

$$42 = b_3$$

$$96 = b_4$$

$$107b = b_1 \cdot X$$

$$b_2 = b_1 + b_1 \rightarrow b_1 + b_1$$

$$b_3 = -b_2 + b_1 \rightarrow b_1 + b_1 + b_1$$

$$b_4 = b_3 + b_1 \rightarrow b_1 + b_1 + b_1$$

Figura 13 tris : la risoluzione dei ragazzi della quarta ginnasio del quarto gruppo (un tentativo di scrittura di un sistema)



Figura 14: la risoluzione dei ragazzi della quarta ginnasio; incarnazione

XII.3.14

De leone qui erat in puteo.

Quidam leo est in quodam puteo, cuius profunditas est palmis 50; et ascendit cotidie $\frac{1}{7}$ unius palmi, et descendit $\frac{1}{9}$. Queritur in quot diebus exierit de puteo. Pone, ut exiret extra puteum in diebus 63; ideo quia in 63 inuenitur et $\frac{1}{9} \cdot 63$; et uide quantum ascenderit leo ille, si descendendo in illis 63 diebus, ascendit enim septimas 63 unius palmi, que sunt palmi 9; et descendit nouenas 63, que sunt palmi 7: quos extrahere de 9, remanent palmi 2; et tot ascendit amplius quam descendat in diebus 63. Unde dices: pro diebus 63, quos pono, ascendit palmos 2; quid ponam, ut ascendat palmos 50: multiplica 63 per 50, et diuide per 2, exhibunt dies 1575; et in tot diebus leo exiet de puteo.

Dies 1575

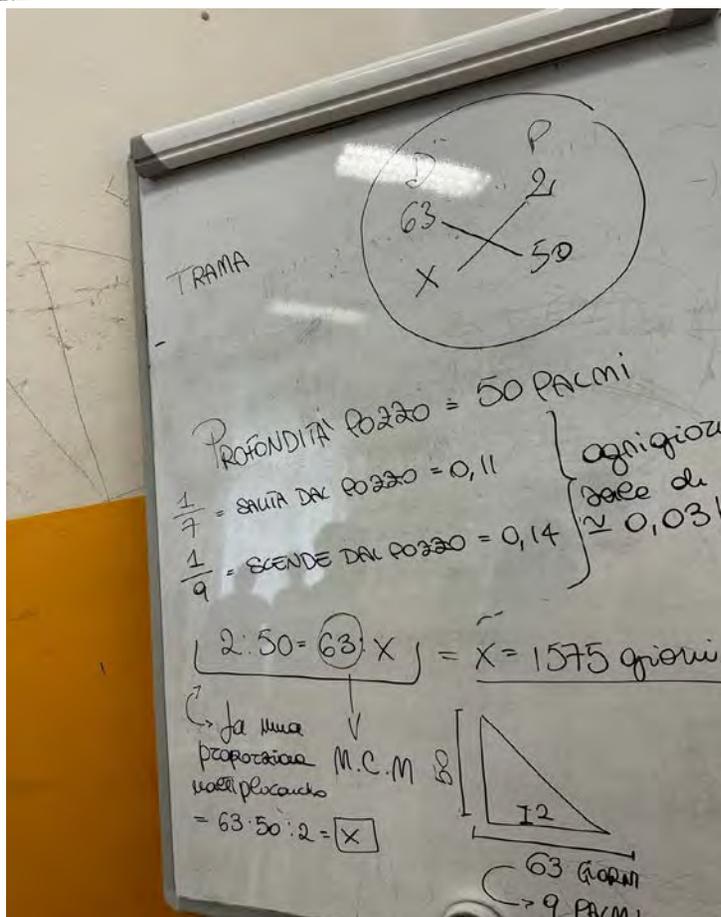


Figura 17: il problema del leone nel pozzo

2.3 Digitalizzazione

La dimostrazione della proprietà delle proporzioni, su cui si fonda il diagramma della “regola tre”, oltre che con l’artefatto manipolabile, come nella scuola secondaria di primo grado, viene proposta attraverso un artefatto digitale, dove le figure rappresentate a partire dal diagramma dell’albero, ossia la coppia di triangoli simili, sono mobili e permettono di fare delle considerazioni logico-dimostrative a partire dall’osservazione del loro inserimento nella cornice rettangolare, come si può vedere dalla figura.

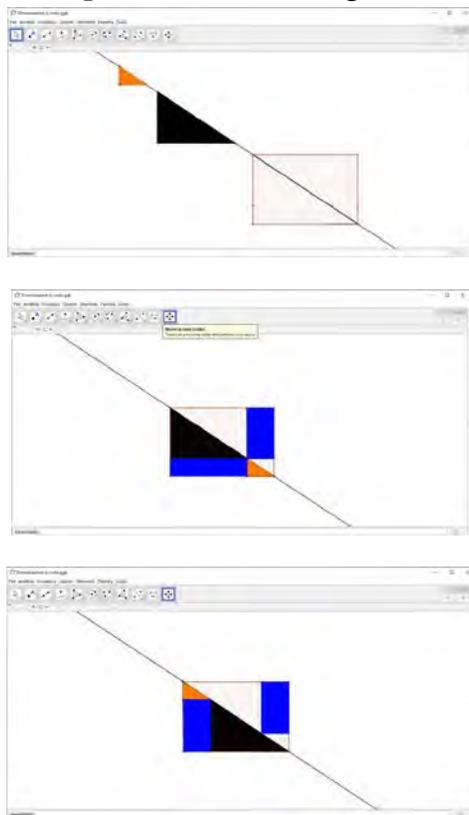


Figura 18: Dalla realtà al pensiero; la digitalizzazione

3 - Conclusioni

In entrambe le esperienze d'aula il coinvolgimento degli studenti è affidato al "dépaysement" che viene creato affrontando per la prima volta fonti storiche, storie e diagrammi risolutivi originali. Il linguaggio della verbalizzazione dei problemi e la lingua latina hanno fatto da supporto. Naturalmente il lavoro descritto qui è una prima fase, e si sta lavorando su come analizzare l'impatto del problema. Il carattere multidisciplinare e l'impatto emotivo motivazionale hanno necessità di una fonte valutativa come l'intervista, che richiede attenzione e tempo ulteriore.

Bibliografia

Arzarello, F., Bussi, M. G. B., Leung, A. Y. L., Mariotti, M. A., & Stevenson, I. (2012). Experimental approaches to theoretical thinking: Artefacts and proofs. Proof and proving in *Mathematics education: The 19th ICMI study*, 97-143.

Boncompagni, B. (Ed.). (1857). *Liber abbaci (Vol. 1)*. Tipogr. delle Scienze Matematiche e Fisiche.

Chorlay, R., Clark, K. M., & Tzanakis, C. (2022). History of mathematics in mathematics education: Recent developments in the field. *ZDM–Mathematics Education*, 54(7), 1407-1420.

Demattè, A., & Furinghetti, F. (2022). Today's students engaging with Abacus problems. *ZDM–Mathematics Education*, 54(7), 1521-1536.

Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural Concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 139-162.
<http://www.jstor.org/stable/3482943>

Catastini, L., Ghione, F. (2023). *La matematica che trasformò il mondo: il Liber abbaci di Leonardo Pisano detto Fibonacci*. Carocci editore.

Giaquinto, M. (2007). *Visual thinking in mathematics*. Oxford University Press.

Grugnetti, L., Rogers, L., Carvalho e Silva, J., Daniel, C., Coray, D., de Guzmán, M., ... & Vasco, C. (2000). Philosophical, multicultural and interdisciplinary issues. In *History in Mathematics education: The ICMI study* (pp. 39-62). Dordrecht: Springer Netherlands.

Hannah, J. (2007). False position in Leonardo of Pisa's Liber Abbaci. *Historia Mathematica*, 34(3), 306-332.

Hernandez, L. R., Furinghetti, F., Radford, L., & English, L. (2008). Contrasts and oblique connections between historical conceptual developments and classroom learning in mathematics. In *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 626-655). Routledge

Giordani, M., Maschietto, M., & Saracino, C. (2016). Il duo d'artefatti, pascalina Zero+ e-pascalina, nella costruzione di significati matematici nella scuola primaria. In *La matematica e la sua didattica. Convegno del trentennale*. (Vol. 30, pp. 105-106). Pitagora Editrice.

Radford, D. L. (2009). Time, Space and the Semiotics of Cartesian Graphs. *Mathematical representation at the interface of body and culture*, 45

Radford, L. (1996). The roles of geometry and arithmetic in the development of algebra: Historical remarks from a didactic perspective. In *Approaches to Algebra: perspectives for research and teaching* (pp. 39-53). Dordrecht: Springer Netherlands..

Radford, L., & Santi, G. (2022). Learning as a critical encounter with the other: *Prospective teachers conversing with the history of mathematics*. *ZDM–Mathematics Education*, 54(7), 1479-1492.

Hernandez, L. R., Furinghetti, F., Radford, L., & English, L. (2008). Contrasts and oblique connections between historical conceptual developments and classroom learning in mathematics. In *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 626-655). Routledge.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2020). Realistic mathematics education. *Encyclopedia of mathematics education*, 713-717.

Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica*. Springer-Ver