Periodico di Matematica (IV) Vol. VI (3) settembre 2024, pp. 147-158

Come vincere sempre a sudoku

Nel caso classico, con le "celle proibite"

Luca Nicotra*

*Affiliazione; e_mail

DOI : 10.53159 /PdM(IV).v6n3.142

Sunto: *Si descrive il metodo "a celle proibite" che consente di risolvere sempre il caso classico del sudoku 9 x 9. Esso consiste nell'individuare successivamente, per ciascun numero naturale da 1 a 9, l' unica cella di ciascuna regione dove quel numero può essere inserito, escludendo le celle (proibite) appartenenti a righe o colonne contenenti quel numero.*

Parole Chiave: *Sudoku, quadrati latini, quadrati magici.*

Abstract: *For the classic case of 9 x 9 sudoku, the "forbidden cells" method is described, which always allows you to solve the classic sudoku. It consists of subsequently identifying, for each natural number from 1 to 9, the only cells in each region where that number can be inserted, excluding the (forbidden) cells belonging to rows or columns containing that number.*

Keywords: *Sudoku, Latin squares, magic squares.*

1 – Cos'è il sudoku

Come è noto, il sudoku è un gioco matematico basato sulla logica[1] che consiste nel riempire una matrice quadrata n x n ($n \in \mathbb{N}$) in modo tale che ogni riga, ogni colonna e ciascuna delle n sottomatrici contigue di n elementi, dette riquadri o regioni (figura 1), contengano tutti i primi n numeri naturali in ordine differente.[2] Ciascuna sottomatrice è pertanto di ordine $\sqrt{n}$.

Più in generale gli elementi della matrice possono essere simboli qualunque, purché diversi fra loro.

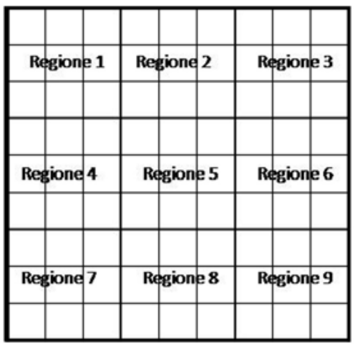

Fig. 1 – Le regioni o riquadri del sudoku 9 x 9.

[1] A vol ica" e non "matematico", considerando che gli "oggetti" da disporre nelle celle possono essere in generale non numeri. Ma la matematica non è la scienza dei numeri soltanto e comprende anche la logica formale! Il sudoku è un gioco logico-matematico perché contiene concetti matematici: permutazioni, matrici, quadrati latini. Esso deriva, come caso particolare (presenza dei riquadri) , dai quadrati latini studiati nel 1782 da Leonhard Euler (1707-1783), *Recherches sur une Nouvelle Espece de Quarres Magiques*, Verh. Genootsch. der Wet. Vlissingen, 9, 85-232 (1782).

[2] Quindi numeri senza ripetizione detti "numeri solitari". Infatti il nome del gioco in giapponese (数独?, *sūdoku*), è una abbreviazione del nome completo 数字は独身に限る ***Sū****ji wa* ***doku****shin ni kagiru*, che tradotto in italiano significa : sono consentiti solo numeri solitari.

La versione più diffusa è quella di una matrice 9 x 9. In tal caso ogni riga, ogni colonna e ogni riquadro 3 x 3 dovrà contenere tutti i primi 9 numeri naturali in ordine differente, ovvero loro permutazioni.[3] Esistono anche versioni a matrici 16 x 16 (riquadri 4 x 4) con elementi nell'insieme S = $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9, a, b, c, d, e, f, g\}$.[4]

La soluzione del gioco consiste nel completare il riempimento della matrice, iniziando da un suo parziale riempimento detto *griglia proposta* o *matrice incompleta* (figura 2). Il sudoku viene distinto normalmente in diversi livelli di difficoltà, crescenti con il diminuire delle celle già riempite all'inizio del gioco. Ma la difficoltà, in realtà, dipende soprattutto dalla posizione delle celle già occupate e non tanto dal loro numero. In figura 2, le celle inizialmente riempite sono 37 su 81.

Affinché una matrice incompleta sia considerata valida, ai fini del gioco, è necessario che la soluzione sia unica. Il gioco viene infatti considerato non valido se sussistono due o più soluzioni differenti. Pertanto il gioco non è d'azzardo, in quanto la vincita non è aleatoria, e può essere risolto con metodo deduttivo, applicando diversi criteri.

In questo articolo, si illustra il metodo delle "celle proibite".

.

[3] Non tutte ovviamente! Il numero delle soluzioni valide del Sudoku classico è 6670903752021072936960. Ma il numero delle soluzioni sostanzialmente diverse, escludendo le simmetrie dovute a rotazioni, riflessioni, permutazioni e rietichettature è 5472730538 (Jarvis, Russell, 2005).

[4] Esistono oggi oltre 200 varianti del sudoku.

9	7			6	3			4
	5		4	9			6	3
				5				2
	2		9	3			1	
5			8	2	6			9
	6			1	4		3	
2				4				
4	8			7	5		2	
6			2	8			4	1

Fig. 2

2 – Il metodo

Nella versione 9 x 9 online, più interessante di quella stampata, si chiede al giocatore di risolvere il sudoku in uno dei seguenti modi:

- senza errori e in un tempo indefinito;
- con un numero massimo di errori (usualmente 3) entro un determinato tempo (solitamente non oltre 10 minuti).

Procedere per tentativi, anche se guidati da buoni criteri probabilistici, conduce ben presto inevitabilmente a perdere la partita.

Esiste invece un metodo, detto "a celle proibite" (da me ormai ampiamente sperimentato) che consente di risolvere sempre il sudoku classico nella prima modalità, senza errori e senza limiti di tempo. Ma anche in questo caso, ovviamente, anche la rapidità con cui si arriva alla soluzione viene tenuta in conto nelle classifiche.

Concettualmente il metodo è molto semplice e deriva direttamente dal rispetto dell'unica regola del gioco:

Inserire ciascuno dei 9 numeri naturali escludendo le celle della matrice che risultano appartenere a righe, colonne e regioni (o riquadri) contenenti già il numero in oggetto.

La caratteristica del metodo è la sua attenzione primaria a completare il riempimento delle regioni piuttosto che delle righe e colonne. Il completamento di queste ultime avviene soltanto quando, durante il riempimento delle regioni, si ottengono righe o colonne con una sola cella vuota, in cui quindi è certo l'inserimento del numero mancante.

In pratica conviene procedere nel seguente modo, cercando di inserire ciascuno numero da 1 a 9 nei riquadri dove non è già presente.

Con riferimento al caso di figura 2, cominciando, per esempio, dal numero 9, si considerano i riquadri 3, 4, 7, 8, 9 dove il 9 non compare. Fra questi si individuano i riquadri contenenti soltanto una cella disponibile per contenere il 9 rispettando la regola del sudoku. In altri termini, si devono escludere i riquadri contenenti due o più celle ove sarebbe possibile inserire il numero 9: chiamiamo tali celle "ambigue". Con X si sono marcate le "celle proibite" per il 9, appartenenti a righe e colonne già contenenti il 9. Per esempio, nel caso della figura 2 le regioni 3, 7, 8, 9 contengono celle ambigue per il 9 mentre soltanto la regione 4 contiene una sola cella disponibile per il 9 (figura 3): in essa quindi è possibile inserire il 9 rispettando la regola del sudoku (figura 4).

9	7	x	x	6	3	x	x	4
x	5	x	4	9	x	x	6	3
x			x	5				2
x	2	x	9	3	x	x	1	x
5	x	x	8	2	6	x	x	9
x	6		x	1	4		3	x
2			x	4				x
4	8		x	7	5		2	x
6			2	8			4	1

Fig. 3

9	7			6	3			4
	5		4	9			6	3
				5				2
	2		9	3			1	
5			8	2	6			9
	6	9		1	4		3	
2				4				
4	8			7	5		2	
6			2	8			4	1

Fig. 4.

Lo stesso procedimento si può applicare successivamente ai numeri 8, 7, 6. 5. 4. 3. 2, 1. Normalmente non si riesce a sistemare ciascun numero in tutti i 9 riquadri in un solo "giro", ma ne occorrono diversi. Spesso, dopo un primo giro, riquadri che prima contenevano celle ambigue per un certo numero, risultano invece possedere un'unica cella "certa" per accogliere quel numero, essendo state occupate da altri numeri, alla fine del primo giro, le celle "ambigue".

Per ottenere l'unica soluzione finale del sudoku, si deve collocare ciascun numero da 1 a 9 in tutti i 9 riquadri.

Durante il riempimento dei riquadri normalmente cambia la situazione della matrice del sudoku: righe, colonne, riquadri che prima contenevano celle ambigue risultano contenere soltanto una cella vuota, che sarà riempita con il numero non presente nelle altre celle della riga, colonna o riquadro.

9	7			6	3			4
	5		4	9			6	3
		6		5				2
	2		9	3			1	
5			8	2	6			9
	6	9	5	1	4		3	
2				4				
4	8			7	5		2	
6			2	8			4	1

Fig. 5.

Per esempio, dopo avere collocato il 5 nell'unica cella certa della regione 5 (figura 5), questa risulta possedere un sola cella vuota che ovviamente può essere riempita con il numero mancante in tale regione: il 7 (figura 6).

9	7			6	3			4
	5		4	9			6	3
		6		5				2
	2		9	3	7		1	
5			8	2	6			9
	6	9	5	1	4		3	
2				4				
4	8			7	5		2	
6			2	8			4	1

Fig. 6.

Il processo di riempimento dei riquadri conduce a un certo punto alla situazione di figura 7 che differisce da quella di figura 6 per l'inserimento in alcuni riquadri dei numeri 1, 2, 3, 4, 7, 9.

9	7	2	1	6	3			4
	5		4	9	2		6	3
3	4	6	7	5	8		9	2
	2		9	3	7		1	
5			8	2	6			9
	6	9	5	1	4	2	3	
2	9			4	1			
4	8			7	5	9	2	
6			2	8	9		4	1

Fig. 7.

I numeri 2 e 9 sono stati inseriti in tutti i riquadri. Dopo l'inserimento del 9 nella terza regione, la terza riga presenta una sola cella vuota (figura 7) che evidentemente deve essere riempita con l'unico numero mancante: 1.

Proseguendo si arriva alla situazione di figura 8, in cui sono stati inseriti in tutti i riquadri i numeri: 1,2,3,4,6,8,9. Mancano i numeri 5 e 7, da inserire nel riquadro 7 dove sono vuote due celle, ma ciascuna di esse è anche l'unica cella vuota delle righe 7 e 9. Risulta pertanto univocamente definita la collocazione sia del 5 sia del 9 (figura 9).

9	7	2	1	6	3	8	5	4
1	5	8	4	9	2	7	6	3
3	4	6	7	5	8	1	9	2
8	2	4	9	3	7	6	1	5
5	1	3	8	2	6	4	7	9
7	6	9	5	1	4	2	3	8
2	9		6	4	1	3	8	7
4	8	1	3	7	5	9	2	6
6	3		2	8	9	5	4	1

Fig. 8.

9	7	2	1	6	3	8	5	4
1	5	8	4	9	2	7	6	3
3	4	6	7	5	8	1	9	2
8	2	4	9	3	7	6	1	5
5	1	3	8	2	6	4	7	9
7	6	9	5	1	4	2	3	8
2	9	5	6	4	1	3	8	7
4	8	1	3	7	5	9	2	6
6	3	7	2	8	9	5	4	1

Fig. 9.

La soluzione del sudoku è ottenuta (figura 9).

La matrice quadrata del sudoku risolto si presenta come un quadrato latino di ordine *9* e più in generale di ordine *n*. Infatti un quadrato latino di ordine *n* è:

> *Una matrice quadrata nella quale ogni riga ed ogni colonna siano una permutazione dei numeri 0,1, …,n-1, (eventualmente dei simboli* a_0, a_1,….., a_{n-1}).
>
> ………………………
>
> *Il nome fu dato da Eulero per il fatto che egli era solito denotare gli elementi della prima riga (e quindi delle altre) con lettere latine.*
>
> *Un quadrato latino si può riguardare come una generalizzazione dei gruppi finiti, in quanto un quadrato latino si può assumere come la tavola di composizione di un struttura algebrica, meno ricca dei gruppi, denominata quasi-gruppo.* (Eugeni, 2021, pp. 20-21).

3 - Cenni storici

Dalla voce Sudoku in wikipedia:

> *I primi giochi di logica basati sui numeri apparvero sui giornali verso la fine del XIX secolo, quando alcuni enigmisti francesi iniziarono a sperimentarli rimuovendo opportunamente dei numeri dai quadrati magici.* Le Siècle, *un quotidiano parigino, pubblicò nel 1892 un quadrato magico di dimensioni 9×9 parzialmente completo con sottoquadrati di dimensioni 3×3. Non si trattava di un sudoku così come lo conosciamo oggi poiché conteneva numeri a doppia cifra e, per essere risolto, richiedeva l'aritmetica piuttosto che la logica, ma ammetteva comunque la regola per cui ogni riga, colonna e sottoquadrato dovesse contenere gli stessi numeri senza ripeterli. Successivamente un giornale rivale de Le Siècle, La France, ridefinì le regole*

di questo gioco, avvicinandosi di molto al sudoku moderno: ogni riga, colonna e sottoquadrato del quadrato magico doveva essere riempita soltanto con i numeri da 1 a 9, sebbene i sottoquadrati non fossero marcati all'interno dello schema. Questi giochi settimanali furono pubblicati anche da altri quotidiani francesi come L'Echo de Paris per circa un decennio, ma poi scomparvero all'epoca della prima guerra mondiale.

Secondo l'enigmista statunitense Will Shortz, il sudoku moderno fu realizzato da Howard Garns, un ex architetto in pensione dell'Indiana (morto nel 1989), e pubblicato per la prima volta nel 1979 da Dell Magazines all'interno della rivista Dell Pencil Puzzles and Word Games con il titolo Number Place.[2]

Il gioco venne introdotto in Giappone dalla casa editrice Nikoli nella rivista Monthly Nikolist nell'aprile del 1984 con il titolo Suuji wa dokushin ni kagiru (数字は独身に限る?*), successivamente abbreviato da Maki Kaji in Sudoku prelevando soltanto i primi caratteri* kanji *del nome completo. Nel 1986 Nikoli introdusse due novità: il numero massimo di celle già riempite fu ristretto a 32 e le griglie diventarono "simmetriche" (nel senso che i numeri già stampati venivano distribuiti su celle simmetriche).*

Nell'ottobre del 2004 il sudoku venne importato in Gran Bretagna da un ex giudice neozelandese, Wayne Gould, per poi diffondersi in Europa e nel resto del mondo nel 2005. Sempre nel 2005, "sudoku" venne eletta parola dell'anno dalla Oxford University Press.

Bibliografia

BAMMEL S.F. , ROTHSTEIN J. (1975). The number of 9×9 Latin squares, «*Discrete Mathematics*» 11 93–95.

EUGENI F. (2021). *La geometria proiettiva ed affine II : quadrati greco-latini e piani affini finiti.* «*Periodico di Matematica*» (IV) Vol. III (2) settembre 2021.

FELGENHAUER B., JARVIS F. (2005). *Enumerating possible Sudoku grids.* Department of Computer Science TU Dresden 01069 Dresden, Germany; Department of Pure Mathematics University of Sheffield, Sheffield S3 7RH, U.K.

http://www.afjarvis.staff.shef.ac.uk/sudoku/sudoku.pdf

JARVIS F., Ed RUSSELL (2005).*There are 5472730538 essentially different Sudoku grids ... and the Sudoku symmetry group*, su *Frazer Jarvis's home page*, 7 settembre 2005.

https://web.archive.org/web/20061004103338/http:/www.afjarvis.staff.shef.ac.uk/sudoku/sudgroup.html

MCKAY B. D., ROGOYSKI E. (1995). Latin squares of order 10, *Electronic J. Combin*. 2, Note 3, approx 4pp. (electronic)