Periodico di Matematica (IV) Vol. VI (3) settembre 2024, pp. 7-14

Ancora sul "paradosso" delle due buste

Paolo Severino Manca

* paolo.severino.manca@gmail.com

DOI : 10.53159/PdM(IV).v6n3.137

Sunto: *La necessità di tornare sul tema delle due buste è quella di mostrare come una corretta conoscenza della natura della probabilità, ovviamente quella soggettiva, mostra come il termine "paradosso" sia inappropriato e come la soluzione possa ricondursi a considerazioni che utilizzano la probabilità condizionata.*

Parole Chiave*: due buste, lotteria, probabilità condizionale, valor medio, utilità attesa.*

Abstract: *The need to return to the topic of the two envelopes is to show how a correct knowledge of the nature of probability, obviously the subjective one, shows how the term "paradox" is inappropriate and how the solution can be traced back to considerations that use conditional probability.*

Keywords: *two envelopes, lottery, conditional probability, mean value, expected utility.*

La formulazione del problema delle “due buste” è elementare e comprensibile anche per i non addetti :

A un decisore sono presentate due buste chiuse, indistinguibili tra loro, che contengono due somme incognite. Il decisore sa solo che una somma è il doppio dell’altra.

Il decisore può scegliere una busta aprirla e , vista la somma ivi contenuta, accettarla oppure rifiutarla e accettare la somma della busta rimasta chiusa.

Come deve regolarsi?

Nel testo la domanda “come deve regolarsi” è formulata volutamente tale perché per definire un comportamento ragionevole è indispensabile chiarire quale sia l’obiettivo del decisore: solo fissando l’obiettivo ha senso parlare di scelta migliore/peggiore.

Il problema è stato affrontato, con un numero sorprendente di articoli,[1] oltre centocinquanta, da probabilisti, da economisti matematici, da logici, da filosofi, e con argomentazioni ritenute, di volta in volta, conclusive come felicemente precisa il sottocitato Hugo Hoffmann :

> *Each author is eager to emphasize what is new and exceptional in her or his approach and is inclined to conclude that earlier approaches did not get to the root of the matter.*

Qui sul tema suggerisco solo due articoli che stimo affidabili: l’articolo di Davis Draper : *Bayesian Modeling, Inference and Prediction*- Department of Applied Mathematics and Statistics

[1] È facile reperire ampie bibliografie in merito.

University of California, (December 2005) e l'articolo di Christian Hugo Hoffmann : *Rationality applied: resolving the two envelopes problem -Theory and Decision*. volume 94, pp. 555–573 (2023).2

Aggiungo che il problema è stato anche diversamente, e spesso scorrettamente, indicato come paradosso, con inutili complicazioni e generalizzazioni cervellotiche.[3] Le quali generalizzazioni sono, come noto, straordinarie quando riescono ad abbracciare e unificare rami diversi della matematica, sono dannose altrimenti.

La necessità di tornare sul tema è quella di mostrare come una corretta conoscenza della natura della probabilità, ovviamente quella soggettiva, mostra come il termine paradosso sia inappropriato e come la soluzione possa ricondursi a poche considerazioni che utilizzano la probabilità condizionata.

Assumo che, essendo le due buste indistinguibili dall'esterno, siano eguali la probabilità di aprire l'una o l'altra busta, e considero le seguenti possibili strategie/lotterie :

A1- scegliere a caso una fra le due buste, aprirla e accettare l'importo ivi contenuto

A2- scartare comunque la busta che viene aperta e accettare l'importo della seconda

B1- dopo aver conosciuto l'ammontare della cifra della busta aperta tenerne conto per decidere se accettare tale cifra o se rifiutarla,

---

[2] Accenno alla variante del problema in cui una busta viene consegnata ad Ali e l'altra a Babà e viene offerta loro la possibilità di scambiarle *ad infinitum*.

[3] La più ingenua considera non una "somma 2 volte maggiore "
ma una somma "k volte maggiore ".

B2- dopo aver conosciuto l'ammontare della cifra della busta aperta rifiutarla e accettare la cifra della busta chiusa.

Osservo che :

- la lotteria A1 e la lotteria A2 sono equivalenti essendo indistinguibili le due buste;
- le lotterie A1 e A2 sono comunque non migliori delle lotterie B1 e B2 in quanto sottocasi;
- se w è il valore trovato nella busta aperta per prima, l'alternativa B1 ha come valore medio il numero $\underline{w} = w$;
- se w è il valore trovato nella busta aperta per prima, l'alternativa B2 ha come valor medio il numero :

$$\underline{w} = 1/2 \cdot (w/2) + 1/2 \cdot (2w) = 1{,}25 \cdot w$$

Ne segue che l'alternativa B2, secondo il criterio del valor medio è sempre preferibile alla B1 e dunque conviene sempre aprire una busta scartarla e accettare l'altra.

Questo risultato non è paradossale come molti lo hanno inteso : è semplicemente conseguenza della scelta infelice del valor medio come funzione obiettivo. Il valor medio misura il prezzo equo (soggettivo) di una lotteria ed è ben noto che il valor medio non necessariamente misura il prezzo che il soggetto è disposto a pagare per parteciparvi.

L'apparente paradosso nasce inoltre dal non tener conto che l'ammontare della somma trovata nella busta aperta fornisce non poca informazione. Del resto anche il buon senso suggerisce, una volta aperta la prima busta, di accettare la somma w se è rilevante rispetto al patrimonio posseduto, rifiutarla se non è rilevante e optare per la seconda busta.

Se M è il patrimonio disponibile, per il giocatore la scelta e infatti quella di passare dal patrimonio $M + w$, al patrimonio $M + w/2$ con probabilità ½ ovvero al patrimonio $M + 2\,w$ con probabilità ½ e la scelta dunque dipende dalla sua propensione/avversione al rischio.

Anche adottando il criterio dell'utilità attesa, se U(x) è la funzione di utilità, esplicita o implicita che sia, conviene rifiutare la busta aperta se risulta: [4]

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{U}(w/2) + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{U}(2w) \;>\; \mathrm{U}(w)$$

Queste premesse per evidenziare come per decidere razionalmente occorra tener conto delle previsioni (probabilità a priori) che il soggetto si è fatto sull'ammontare delle somme contenute nelle buste e sull'informazione acquisita dopo aver aperto la busta.

Così se l'importo w viene giudicato rilevante il soggetto può ritenere meno probabile che la busta chiusa contenga il doppio di w, opposto il caso in cui w sia esiguo. Così il soggetto in funzione delle sue previsioni potrebbe aver fissato un valore soglia L e decidere se accontentarsi se $w > L$, oppure aprire la seconda busta se $w < L$.

Per procedere con un formalismo minimo:

- indico con $\boldsymbol{H}$ la variabile aleatoria che rappresenta i valori assunti dalla somma minore;[5]

---

[4] Lascio al lettore la facoltà di trovare condizioni sulla utilità attesa che favoriscono l' alternativa

[5] Ugualmente si potrebbe ragionale prendendo in considerazione la variabile aleatoria : somma maggiore.

- indico con $\boldsymbol{Y}$ la variabile aleatoria che rappresenta la somma trovata nella busta che viene aperta;
- ipotizzo che le v.a. assumano valori discreti;[6]
- indico con : $p(m) = P(\mathbf{H} = m)$, la probabilità che inizialmente il decisore attribuisce alla somma minore $\boldsymbol{H}$, (essendo m uno dei possibili valori che può assumere $\boldsymbol{H}$**).**[7]

Se w è il valore effettivamente trovato nella busta che è stata aperta, con le notazioni introdotte:

- $P(\boldsymbol{Y} = w \mid \boldsymbol{H} = w)$ misura la probabilità che la somma trovata nella prima busta sia quella minore
- $P(\boldsymbol{Y} = 2w \mid \boldsymbol{H} = w)$ misura la probabilità che la somma trovata nella prima busta sia quella maggiore.

Poiché le buste sono indistinguibili avremo, qualunque sia w :

1) $$P(\boldsymbol{Y} = w \mid \boldsymbol{H} = w) = P(\boldsymbol{Y} = 2w \mid \boldsymbol{H} = w) = 1/2$$

[6] L'ipotesi non è essenziale ma semplifica il formalismo adottato.

Su H sono state spese considerazioni di carattere teorico tanto sofisticate quanto inutili. È pacifico che il decisore giudica indifferenti somme che differiscono tra loro per poche unità, dunque il decisore non è tanto interessato ai valori puntuali che può assumere H quanto all'ordine di grandezza di tali valori.

[7] Escludo ammettere per H una distribuzione uniforme nell'intervallo $(0, +\infty)$ o comunque una distribuzione che comporta un valor medio infinito : in tal caso, tra l'altro, non avrebbe senso chiedersi quale prezzo sia ragionevole pagare per partecipare alla scommessa delle due buste.

All'apertura della prima busta, se w è la somma ivi contenuta allora $\boldsymbol{H}$ può assumere solo due valori: w o $w/2$.

Detto E_1 l'evento: $\boldsymbol{H} = w$, detto E_2 l'evento: $\boldsymbol{H} = w/2$

poiché gli eventi E_1 e E_2 formano una partizione dell'evento certo, dato un evento non nullo B risulta per Bayes :

2) $P(E_1 | B) = P(B | E_1).P(E_1) /\{ P(B | E_1).P(E_1) + P(B | E_2).P(E_2) \}$

3) $P(E_2 | B) = P(B | E_2).P(E_2) / \{ P(B | E_1).P(E_1)+P(B | E_2). P(E_2) \}$

Tenendo presente la (1), le (2) e (3) si scrivono allora:

2') $P\,(\boldsymbol{H} = w \mid \boldsymbol{Y} = w) = p(w) / (p(w) + p(w/2)$

3') $P\,(\boldsymbol{H} = w/2 \mid \boldsymbol{Y} = w) = p(w/2) / (p\,(w) + p\,(w/2)$

Sia dunque w il valore trovato nella busta che è stata aperta, allora $\boldsymbol{H}$ può valere w o $w/2$. Se $\boldsymbol{H = w}$ allora la cifra nella seconda busta vale $2w$**,** se $\boldsymbol{H = w/2}$ allora la cifra nella seconda busta vale w , pertanto il valor medio e l'utilità attesa della scommessa "*cambio busta sapendo che w è il valore trovato nella busta aperta*" valgono rispettivamente :

4) $P\,(\boldsymbol{H} = w \mid \boldsymbol{Y} = w).\, 2w + P\,(\boldsymbol{H} = w/2 \mid Y = w).\, w$
cioè:

$\{2\, w.\, p(w) + w.\, p(w/2) \} / \{ p(w) + p(w/2)\}$

5) $P\,(\boldsymbol{H} = w \mid Y = w).\, 2U(w) + P\,(\boldsymbol{H} = w/2 \mid Y = w).\, U(w)$
cioè:

$\{2U(w).\, p(w) + U(w).\, p(w/2) \} / \{ p(w) + p(w/2)\}$

Dunque col criterio del valor medio la strategia migliore consiste nel confrontare w con la (4) e scegliere l'alternativa a valore maggiore, col criterio dell'utilità attesa la strategia migliore consiste nel confrontare $U(w)$ con la (5) e scegliere l'alternativa a valore maggiore.

A questo punto si potrebbe scegliere qualche altra funzione obiettivo. Non insisto per non aggravare la lista di nuovi possibili articoli da scrivere sul tema.