Periodico di Matematica (IV) Vol. VI (3) settembre 2024, pp. 63-120

Il problema dell'infinito e l'Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs di Simon Antoine L'Huilier

Loredana Biacino*

* Già Professore Associato Università Federico II Napoli;
loredana.biacino2@unina.it

DOI : 10.53159 /PdM(IV).v6n3.140

Sunto: *Il primo che ha sottolineato la forza del concetto di limite in vista di una fondazione del calcolo fu d'Alembert. In questo lavoro si commenta una delle opere che hanno maggiormente subito l'influenza dell'enciclopedista francese, l'Exposition élémentaire di Simon L'Huilier: in essa tutta l'analisi degli odierni trattati di calcolo è impostata sulla base del concetto di limite, in modo tale da rappresentare così il momento più significativo nell'evoluzione di questo concetto prima della famosa trattazione di Cauchy. Oltre ad un'esposizione generale delle motivazioni dell'opera, molti passi particolarmente interessanti sono esposti in dettaglio.*

Parole Chiave: *Limite, differenziale, serie di Taylor, massimi e minimi.*

Abstract: *D'Alembert was the first to introduce the concept of limit with the aim of a foundation of the calculus. In this paper a book based in the seventieth century on the ideas of the French encyclopaedist, the Exposition élémentaire of Simon L'Huilier, is presented. In it for the first time all the calculus of the nowadays elementary treatises is formulated founding it on the notion of limit; it represents the more significative moment in the evolution of this concept before the famous treatment of Cauchy. A general exposition of the reasons of the book and some passages are exposed.*

Keywords: *Limit, differential, Taylor series, maxima and minima.*

1 - Introduzione

Nel 1784, esattamente cento anni dopo la pubblicazione della *Nova Methodus* di Leibniz, con cui il calcolo differenziale aveva fatto il suo ingresso ufficiale nel mondo della scienza, la sezione matematica dell'Accademia di Berlino bandì un premio di 50 ducati per chi avesse saputo fornire *una teoria chiara e precisa di ciò che si chiama "infinito" in matematica*. Il bando rispondeva alla necessità di dare un solido fondamento alla teoria degli infinitesimi e degli infiniti che nel Settecento era all'apice del successo per le sue ragguardevoli applicazioni alla meccanica e alla fisica, ma che era tuttora sprovvista di una sicura base teorica. Il trattato in cui i giovani la apprendevano era l' *Analyse des infiniment petits* scritto nel lontano 1696 dal Marchese de L'Hospital, che vi aveva introdotto gli insegnamenti impartitigli da Johann Bernoulli. Un testo che non poteva certo dirsi chiaro causa le nebulose definizioni che ne erano alla base. E le difficoltà nella comprensione dei principi delle nuove teorie aumentavano ancora con gli *Éléments de la géométrie de l'infini*, scritti nel 1727 dall'elegante e potente Bernard Le Bouvier de Fontenelle. O con i numerosi trattati di carattere scolastico redatti da sacerdoti, abati, frati in gran parte seguaci di Malebranche, che si ispiravano a Leibniz e al trattato di de L'Hospital, ma senza soffermarsi su questioni fondazionali, tra essi ad esempio l'*Analyse demontrée* di Charles-René Reyneau su cui lo studente d'Alembert aveva studiato.

Alla metà del Settecento risale anche il bel trattato in italiano di Maria Gaetana Agnesi *Istituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana* (1748), tra l'altro uno dei testi di riferimento per il giovane Lagrange, testo che si ispira alla teoria delle flussioni di Newton, ma pur esso senza una particolare attenzione ai problemi di fondo. La preparazione dei matematici e degli studiosi avveniva in gran parte sull'*Introductio in Analysin infinitorum* (1748) e sull'*Institutiones Calculi Differentialis* (1755) di Eulero, di impostazione estremamente formalista.

Due voci si erano levate per cercare di attirare l'attenzione dei matematici sul problema dei fondamenti cercando di proporre una solida base teorica al nuovo calcolo che gli permettesse di schivare gli attacchi che da più parti gli venivano mossi: al di là della Manica, in seguito alle stringenti critiche portate da Berkeley a Newton e ai suoi seguaci con il pamphlet *The Analyst* (1734) e da altri attacchi simili, Colin Maclaurin aveva pubblicato il *Treatise of Fluxions* nel 1742 con cui cercava di spiegare la teoria delle flussioni di Newton come interpretazione in chiave moderna e traduzione in forma più comoda dell'antico rigoroso metodo di esaustione. Rifacendosi a Newton anche d'Alembert nel continente aveva compiuto un'operazione analoga introducendo nelle voci

Limite e *Différentiel* dell'*Encyclopédie* l'espediente tecnico del limite per formalizzare razionalmente procedure già da tempo impiegate dai matematici. Entrambe le impostazioni rifuggivano dall'infinito attuale e cercavano con l'idea dell'avvicinamento ad un limite di regolamentare l'uso dell'infinito potenziale in matematica.

L'ispiratore del premio dell'Accademia di Berlino e quasi certamente il materiale estensore del bando, fu l'italiano Joseph Louis Lagrange, direttore della Classe di Matematica, succeduto a Eulero in tale incarico nel 1766. Poiché ormai la Geometria Superiore faceva costantemente uso di grandezze infinite e i matematici moderni ammettevano che i termini grandezza e infinito sono contraddittori, nel bando si richiedeva di spiegare "come siano stati dedotti tanti teoremi veri da una supposizione contraddittoria" e quindi "si indichi un principio sicuro, chiaro, in una parola veramente matematico, adatto ad essere sostituito all'infinito, senza rendere troppo difficili, o troppo lunghe, le ricerche che con ciò si effettuano."

Il vincitore del premio, nel 1786, fu uno svizzero, Simon Antoine L'Huilier (1750-1840), nativo di Ginevra, che viveva nella città polacca di Pulawy dove faceva il tutore del figlio del principe Adam Kazimierz Czartorysky, che fu per primo ministro dell'educazione in Europa: l'opera con cui vinse, *l'Exposition élémentaire des principes des calculs supérieures pour server à la demande d'une théorie claire et precise de l'infini mathématique*, pubblicata l'anno successivo, fu giudicata subito dallo stesso Lagrange non soddisfacente, e non ebbe grande successo e diffusione. Di essa L'Huilier fornì una seconda edizione in latino nel 1795, citata questa con grande apprezzamento da Montucla [Montucla 1802, 251, 261]. L'Huilier proponeva come base di tutto il calcolo differenziale l'idea di limite, mutuandola da d'Alembert; l'idea si era andata sviluppando in lui già da qualche anno. Nel 1780 in Polonia era stata costituita una commissione per la riforma degli studi e la scelta dei migliori libri elementari: L'Huilier si vide aggiudicato il premio come miglior testo di matematica proponendo gli *Eléments de géométrie* che già conteneva una sezione sui limiti. L'idea sarebbe poi stata negli anni successivi ripresa e popolarizzata da Lacroix nel *Traité élémentaire* del 1802, versione semplificata del famoso *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* del 1797. Maggiore successo dell'*Exposition élémentaire* ebbero invece nel seguito le *Réflexions sur la Métaphysique du Calcol Infinitésimal*, di Lazare Carnot, pubblicate nel 1797, tratte dalla memoria con cui Carnot aveva partecipato allo stesso concorso e che ebbero una gran quantità di riedizioni e traduzioni. Ma in esse sul carattere sostanzialmente algebrico dell'opera di L'Huilier prevale il carattere mistico della concezione degli infinitesimi.

2 – La definizione di limite data da L'Huilier

L'Huilier intraprende la sua opera osservando che mentre gli antichi non ammettevano la possibilità che le grandezze assumessero un ultimo grado nella grandezza o nella piccolezza, i moderni credendo di poter considerare la grandezza nell'uno o nell'altro dei suoi estremi, danno per certa l'esistenza di tali estremi, producendo in tal modo non solo i risultati già conseguiti dagli antichi, ma molti altri ancora. Egli intende dimostrare con *l'Exposition élémentaire* che del concetto di infinito si può fare completamente a meno in matematica e il metodo di esaustione, convenientemente esteso, è sufficiente per dimostrare in modo certo i principi del nuovo calcolo, sulla scia di quanto avevano già fatto Newton e i suoi seguaci di cui il più importante è Colin Maclaurin, ma tra i quali si colloca anche d'Alembert. L'Huilier afferma infatti che tutta la sua opera è "come lo sviluppo delle idee sui principi del calcolo superiore che d'Alembert non ha fatto che abbozzare e proporre negli articoli *Limite e Différentiel* dell'Enciclopedia e nei suoi *Melanges*."

Ora a Newton e ai suoi seguaci anglosassoni si rimproverava di aver introdotto in matematica idee che sembravano estranee a tale disciplina come tempo, movimento, velocità e quindi si riteneva da parte dell'Accademia di Berlino, con l'istituzione del premio, che uno sforzo andasse fatto per espungere tali idee dalla teoria matematica, giudicando che in questo non fosse riuscito completamente il Maclaurin, con il suo trattato di carattere geometrico, pur profondo e solido, ma più lodato che letto a causa della sua complessità. Anche L'Huilier era convinto che la famosa definizione di Newton dell'ultimo rapporto delle grandezze evanescenti [Newton 1687, Scolio Lemma XI, libro I]:

> *Per ultimam rationem quantitatum evanescentium intelligenda est ratio quantitatum, non antequam evanescunt, non postea, sed quacum evanescunt*

non fosse sufficientemente semplice e chiara e cogliesse per così dire le grandezze in uno stato intermedio fra l'esistenza e il niente, uno stato ben difficile da comprendere e spiegare. Però a lui, come anche a d'Alembert, sembrava che poi lo stesso autore chiarisse la sua posizione introducendo il concetto di limite:

> *Ultimae rationes illae quibuscum quantitates evanescunt, revera non sunt rationes quantitatum ultimarum, sed limites, ad quos quantitatum sine limite decrescentium rationes semper appropinquant et quam propius assequi possunt quam pro data quavis differentia, numquam vero*

> *trasgredi (neque prius attingere quam quantitates diminuuntur in infinitum)*

ed è questa formulazione che d'Alembert e L'Huilier credono sia la chiave di volta, da cogliere ed esplicitare.

Del resto dopo circa settanta anni dalla formulazione di Newton, nel 1756, Jean Baptiste de La Chapelle alla voce *Fluxion* dell'Enciclopedia ripeteva ancora che una spiegazione del calcolo di Newton non poteva esser dato che in termini del concetto di limite e scriveva:

> *M. Newton s'est servi de ce mot de fluxion, parce qu'il considère les quantités comme engendrées par le mouvement; il cherche le rapport des vitesses variables avec lesquelles ces quantités sont décrites; et ce sont ces vitesses qu'il appelle fluxions des quantités ….La vitesse n'est rien de réel…c'est le rapport de l'espace au temps, lorsque la vitesse est uniforme: ….Mais lorsque le mouvement est variable, ce n'est plus le rapport de l'espace au temps, c'est le rapport de la différentielle de l'espace à celle du temps: rapport dont on ne peut donner d'idée necte, que par celle des limites. …Au reste le calcul des fluxions est absolument le méme que le calcul différentiel: voyez donc le mot DIFFE'RENTIEL, où les opérations et la métaphysique de ce calcul sont expliquées de la maniére la plus simple et la plus claire.*

Ora, anche se nel Continente, diversamente da quanto era avvenuto oltre Manica dopo le critiche di Berkeley, era più diffusa l'idea che il calcolo potesse trovare una sua sistemazione aritmetica basandolo sul concetto di limite, ancora ne mancava una definizione soddisfacente, tale che riducendo ad esso i procedimenti di calcolo in uso e spogliandoli di ogni idea d'infinito, si riuscisse a tradurre in modo rigoroso il metodo degli antichi e lo si semplificasse: questo progetto intende portare a termine L'Huilier a partire

dal primo capitolo dell'*Exposition élémentaire* che prende l'avvio con le seguenti due definizioni:
Definizione di limite – *Sia data una quantità variabile sempre minore o maggiore di una quantità proposta e costante, ma che possa differire da essa per meno di ogni quantità data minore di essa: la quantità costante è detta il limite in grandezza o in piccolezza della quantità variabile.*
Definizione di limite di un rapporto – *Sia dato un rapporto variabile sempre più piccolo di un rapporto dato, ma che possa essere reso più grande di ogni rapporto assegnato più piccolo di quest'ultimo: il rapporto dato è chiamato il limite in grandezza del rapporto variabile; allo stesso modo sia dato un rapporto variabile sempre più grande di un rapporto dato; ma che possa essere reso più piccolo di ogni rapporto assegnato più grande di quest'ultimo: il rapporto dato è detto il limite in piccolezza del rapporto variabile.*

Lo stesso L'Huilier nella seconda edizione [L'Huilier 1795] dirà che le definizioni date e alcuni dei teoremi ad esse relativi sono stati desunti da un Opuscolo del matematico scozzese Robert Simson (1687-1768) [Simson 1776], un breve scritto che risente fortemente dell'influsso di Newton e cerca di esplicitarne la nozione di limite.

È degno di nota il fatto che Simson esordisce con la definizione di quantità costante o invariabile e la definizione di quantità mutabile. Analoga definizione è subito esposta per i rapporti. La definizione III del limite è così formulata: *Si quantitas mutabilis semper minor fuerit quantitate data, sed ita augeri poterit, ut major fiat quacumque quantitate data quae minor est prima quantitate data; vel si quantitas mutabilis semper major fuerit quantitate data, sed ita minui poterit, ut minor fiat quacumque quantitate data quae major est prima quantitate data; in utraque casu quantitas prima data dicatur Limes quantitatis mutabilis.*

Segue analoga definizione per il rapporto.

Le due definizioni precedenti sono nella seconda edizione [L'Huilier 1795] scisse ognuna in due a seconda che la grandezza minore del suo limite, supposta "crescente" nella nuova versione, possa essere aumentata in modo da superare ogni grandezza data minore del limite o la maggiore, supposta "decrescente", possa essere diminuita in modo da essere inferiore ad ogni grandezza data maggiore del limite. Si tenga presente che nella Proposizione I di [Simson 1776] è detto: *Sia data una retta AB e sia AC sempre minore di AB, ma che possa essere aumentata in modo che l'eccesso di AB sulla stessa possa essere reso minore di ogni retta data, cioè sia AB il limite della crescente AC. Allora il rapporto di eguaglianza è il limite del rapporto di AC ad AB.* Quindi la grandezza AB minore del suo limite è senz'altro supposta crescente.

L'Huilier vuole sviluppare il punto di vista di d'Alembert, che considera fondamentalmente i differenziali come puri espedienti per la semplificazione dei calcoli e riduce il calcolo differenziale al calcolo dei limiti dei rapporti di incrementi finiti, che diventano centrali nella trattazione. Vedremo alla fine della sezione come trattare i vari casi in cui possono presentarsi i limiti dei rapporti si rivelerà di fatto fruttuosa e fornirà il punto di partenza per una revisione, nella seconda edizione, della definizione stessa di limite.

Confrontiamo le due definizioni precedenti con quella di limite di d'Alembert:

"*Si dice che una grandezza è il limite di un'altra grandezza, quando la seconda può avvicinarsi alla prima con differenza minore di una grandezza data, piccola quanto si vuole, senza che la grandezza che si avvicina possa mai sorpassare la grandezza cui si approssima, in modo che la differenza d'una tale quantità al suo limite è assolutamente inassignable*".

In entrambe le definizioni di L'Huilier è messa in evidenza la parola "variabile"; la variabilità è invece sottintesa nella definizione di d'Alembert, ed è espressa dalle parole "sempre" nel caso di Huilier, "mai" in d'Alembert, parole attraverso le quali rispunta la variabile temporale, e il riferimento a Newton. In tutte si sottolinea la circostanza, troppo restrittiva rispetto alla definizione successiva del limite data da Cauchy, che la grandezza variabile sia sempre maggiore o sempre minore di quella costante, divaricazione che verrà ripetuta costantemente da L'Huilier nel seguito e di cui, riguardo a d'Alembert, già si è discusso in [Biacino Viola 2020, 64]. Inoltre l'asserzione che dato un rapporto variabile ad es. sempre più piccolo di un rapporto dato, esso può essere reso più grande di ogni rapporto più piccolo del dato non specifica se di volta in volta tutte le determinazioni del rapporto variabile a partire da una di esse debbano essere maggiori del rapporto più piccolo del dato: e quindi tale limite, secondo la definizione di L'Huilier, potrebbe anche coincidere con il limite massimo senza essere limite: ma, si noti bene, nel caso in esame si sottintende (e nella seconda edizione è richiesto) che il rapporto sia crescente e quindi il massimo limite non può che coincidere col limite.

Soprattutto in entrambe le definizioni di L'Huilier si parla volutamente di quantità come nella geometria classica e non si coglie ancora l'importanza di esprimere la variabilità nei termini della funzionalità, esplicitando la dipendenza della variabile che tende al limite dalla variabile indipendente. L'Huillier ha ben appreso la lezione di Eulero, l'importanza del concetto di funzione e della distinzione tra variabile dipendente e variabile indipendente, come appare in tutta la trattazione successiva dove la parola funzione è usata molto spesso, essendo x la variabile. Considerare la quantità variabile come funzione di una variabile reale x, e come appunto è fatto ripetutamente e sostanzialmente nel seguito, appariva forse una restrizione e un allontanamento dalla trattazione geometrica classica. Certo che nelle precedenti definizioni non appare, il riferimento essendo senz'altro sottinteso. Cauchy si libererà però nel seguito dal bisogno di rapportarsi agli antichi privilegiando l'introduzione immediata del concetto di funzione numerica e subordinando ad esso il concetto di infinitesimo e di limite. Egli comincerà il suo *Cours d'Analyse* con la definizione di funzione e proseguirà chiarendo: «Applicheremo la denominazione di quantità unicamente alle quantità reali positive o negative»", specificando che ogni grandezza sarà denotata da un numero. D'altro canto, se i primi esempi addotti da L'Huilier sono relativi a successioni e serie oppure relativi a limiti di grandezze geometriche, quali ad esempio il cerchio limite di poligoni, nel paragrafo VII si determina il limite di una funzione di tipo polinomiale *Q(x)* dipendente dalla (variabile reale) *x* e di funzioni si tratterà costantemente ed esplicitamente nel seguito.

Alle definizioni seguono poi degli esempi. Uno dei più interessanti è l'Esempio 3: data una curva qualunque riferita ad un asse, le cui ordinate vadano crescendo da zero fino ad un massimo preso come base: si divida l'asse in parti eguali. Per i punti di divisione si traccino le parallele alla base. Sulla base e sulle parallele si traccino dei parallelogrammi aventi come secondi lati i segmenti sull'asse. Tali parallelogrammi saranno detti circoscritti alla figura. Allo stesso modo si costruiscano i parallelogrammi solo sulle parallele, ottenendo i parallelogrammi inscritti. La differenza della somma dei parallelogrammi circoscritti e la somma di quelli inscritti è eguale al più grande di essi. Ma quest'ultimo, avendo la base assegnata, può diventare minore di ogni numero positivo assegnato. Ora la nostra figura è maggiore della somma dei parallelogrammi inscritti e minore della somma dei circoscritti: ma la differenza delle due somme è minore di ogni numero positivo. Dunque, la figura è il limite in grandezza della somma dei parallelogrammi inscritti ed è il limite in piccolezza della somma dei circoscritti.

L'esempio riprende quasi letteralmente [Newton 1687, Lemma II, Libro primo]: a sua volta quest'ultimo può considerarsi come ispirato dalla *Proposizione 19* di *Conoidi* e *Sferoidi* di Archimede: il ricorso all'autorità dell'antico geometra dava la possibilità di mettere al sicuro il nuovo calcolo infinitesimale, oggetto di attacchi da svariate parti. La proposizione archimedea segue la stessa logica ed ha lo stesso impianto dimostrativo ma si riferisce a (particolari) figure solide. Luca Valerio[1] nel suo *De centro gravitatis solidorum*, impadronendosi della tecnica archimedea, aveva trasportato al caso bidimensionale la dimostrazione di Archimede adattandola alle cosiddette figure monotone attorno a un diametro, cioè figure geometriche il cui contorno sia costituito da una base rettilinea e da una curva piuttosto generale, con un diametro nel senso di Apollonio e un solo punto di massimo centrale [Biacino 2010]. In Newton tale figura è spezzata a metà. E così infatti ce la presenta pure L'Huilier. E, fatto interessante, quasi a voler sottolineare il riferimento ad Archimede, egli, come pure Valerio, fa ruotare la figura attorno all'asse, determinando il volume del solido ottenuto. Come in Newton, l'asse della figura piana è sostanzialmente l'asse x, con un'inversione rispetto al diametro di Luca Valerio che va pensato invece sovrapposto a un asse delle ordinate. E'

1 Per l'uso e la trasformazione dei metodi archimedei che operò, Luca Valerio (1553-1618) ebbe grande ascendente sui matematici successivi per più di un secolo. Ad esempio il matematico inglese newtoniano Benjamin Robins (1707-51) nell'ampio dibattito seguito alle critiche di Berkeley, riteneva che alla base logica del calcolo vi fosse il concetto di limite per il quale egli fa riferimento alle idee vagamente precorritrici di Valerio e di Tacquet (1612-1660) [Boyer 1959, 230]. Galileo definisce Valerio, nella prima giornata dei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, "nuovo Archimede dell'età nostra".

importante sottolineare la differenza del punto di vista perché la curva di Luca Valerio, con terminologia moderna, è un grafico rispetto alla sua base, ma non rispetto al diametro, che è il segmento che viene successivamente suddiviso, mentre in Newton e L'Huilier il diametro è ribaltato sull'asse x, e la curva, dimezzata, è un grafico rispetto a tale asse. Questo è probabilmente legato al fatto che, mentre in Luca Valerio è assente il concetto di funzionalità, questo guida la costruzione di Newton e quella di L'Huilier.

3 – I teoremi sul limite di un rapporto

Nel paragrafo II è dato il Teorema 1, una condizione necessaria e sufficiente perché il limite di un rapporto sia rapporto d'eguaglianza che recita così:

Teorema 1 – *Sia data una quantità costante; e ci sia una quantità variabile sempre più piccola o sempre più grande della prima, ma che possa differire da essa per meno di ogni quantità assegnata più piccola di essa. Allora il limite in piccolezza o in grandezza del rapporto della quantità costante alla data è il rapporto d'uguaglianza. E viceversa se il limite del rapporto di una quantità costante a una variabile più grande o più piccola di essa è il rapporto di eguaglianza in grandezza o piccolezza, allora la quantità variabile può differire dalla quantità costante per meno di qualunque quantità assegnata.*

Ai paragrafi III, IV e V del Cap.1 sono esposti alcuni teoremi sul limite di un rapporto. Si tenga ben presente che in tali teoremi i termini dei rapporti considerati sono tutti non nulli e non infiniti, in quanto lo zero e l'infinito non sono considerati come valori acquisibili dalle quantità nell'ambito della teoria delle grandezze e d'altro canto sono solo leciti rapporti di quantità omogenee.

Non mi sembra si possa mettere in dubbio una rivisitazione del *De centro gravitatis solidorum* di Luca Valerio, opera dove per la prima volta per il calcolo di aree, volumi e centri di gravità delle figure geometriche si usano delle procedure che snelliscono il metodo di esaustione e possono essere interpretate come procedure per il calcolo di limiti [Biacino 2010]. Vi è una sorprendente somiglianza tra i teoremi di L'Huilier e le analoghe prime tre proposizioni del capitolo secondo del *De centro*, le cui enunciazioni si corrispondono quasi letteralmente. Anche nelle dimostrazioni, per le quali in ambedue le trattazioni si distinguono i due casi del limite in grandezza o piccolezza, si usa lo stesso metodo per assurdo. La fonte però non è citata da l'Huilier, forse perché probabilmente la procedura è stata ripresa da qualche opera posteriore che si ispirava al *De centro*. La differenza fondamentale sta nella terminologia più svelta in L'Huilier, alla cui agilità concorre l'uso della parola limite.

Teorema 2 del paragrafo III– *Date due grandezze variabili suscettibili di limite l'una e l'altra in grandezza, o l'una e l'altra in piccolezza, se fra loro hanno un rapporto costante anche i limiti sono nello stesso rapporto*[2].

Dim. – Consideriamo solo il caso che A' e B' siano i limiti in grandezza di A e B e che A e B abbiano rapporto costante

---

[2] Si tratta della trasposizione della seguente proposizione di Valerio:

Proposizione 2. II – *Siano A, B, C, D quattro grandezze e siano E ed F altre due grandezze dello stesso genere di A e B e che superino (o siano inferiori a) A e B di tanto poco quanto si vuole. Sia E : F = C : D; allora A : B = C : D.*

Ma anche la Proposizione XVII di [Simson 1776], riferita evidentemente a segmenti di retta, è analoga: Siano date due grandezze AB e CD, siano date altre grandezze AE, AF, etc.. minori di AB ma che possono divenire maggiori di qualunque grandezza minore di AB; e siano date le grandezze CG, CH etc… tutte minori di CD che possano essere maggiori di qualunque quantità minore di CD; siano i rapporti di AE a CG o di AF a CH etc… sempre eguali tra loro; allora il rapporto di AB a CD è uguale a questo rapporto.

eguale ad $a : b$, perché in modo analogo si ragiona nell'altro caso. Se il rapporto di A' a B' non è eguale al rapporto $a : b$ allora sarà o maggiore o minore. Se $A' : B' > a : b$ allora esiste a' tale che $(A'-a') : B' = a : b = A : B$. Poiché si può prendere $A > A'-a'$ dalla precedente proporzione si trae che deve essere $B > B'$ contro l'ipotesi che B' è il limite in grandezza di B. In modo analogo si ragiona se $A' : B' < a : b$.

L'Huilier asserisce ovviamente che il Teorema 2 è uno dei fondamenti del metodo di esaustione utilizzato da Euclide e da Archimede e ne fornisce alcune applicazioni tra cui la dimostrazione che due circonferenze o due cerchi stanno tra loro rispettivamente come i loro raggi o i quadrati dei loro raggi, due piramidi della stessa altezza stanno fra loro come le basi, lo stesso vale per coni, cilindri etc...

NOTA - Ci si rende facilmente conto del motivo per cui i limiti in considerazione vanno presi in piccolezza o in grandezza. In Valerio una tale specificazione aveva senso in quanto egli aveva in mente un preciso progetto: da un lato definire una procedura di approssimazione delle figure geometriche piane e solide e dall'altro allargare il campo di applicazione del metodo di esaustione con un insieme di regole che permettessero sostanzialmente un passaggio al limite. Ma il metodo di esaustione si applica a successioni di figure invadenti e quindi tutte minori della figura di cui si vuol calcolare l'area o il volume e a successioni di figure circoscritte, che tale figura includono. Anche L'Huilier, per appoggiare su una base solida ed indiscussa i suoi argomenti, intende far riferimento al metodo di esaustione, ma forse, operando in un ambito molto più generale di Valerio, la restrizione relativa ai limiti in grandezza o in piccolezza sarebbe potuta cadere. Questa specificazione è sempre presente nel seguito, sia nell'enunciazione che nelle dimostrazioni. Come vedremo tra poco nella seconda edizione tale ipotesi sarà indebolita.

L'Huilier applica il precedente teorema ad esempio nel Cap. VII, quando dimostra il seguente

Lemma 1 del paragrafo XLIII: *Se una curva ha un diametro, cioè una retta che taglia in due parti eguali tutti i segmenti di un fascio di rette parallele intercettati dalla curva, le due figure comprese tra la curva, una delle precedenti corde e il diametro sono eguali.*

Dim. - Siano inscritti e circoscritti nelle due parti situate da un lato e dall'altro del diametro dei parallelogrammi aventi per basi le corde e come altro lato le parallele al diametro: le somme dei parallelogrammi inscritti situati da una parte e dall'altra del diametro sono eguali, lo stesso accade per le somme dei parallelogrammi circoscritti e pertanto le due figure situate da un lato e dall'altro del diametro, in quanto limiti di queste somme, sono anch'esse eguali tra loro.

Ritornando al primo capitolo troviamo anche il seguente enunciato:

Teorema 3 del paragrafo IV– *Siano date due quantità variabili di specie differenti, suscettibili di limite, entrambe in grandezza o in piccolezza. I rapporti di queste quantità variabili a due quantità costanti siano sempre uguali fra loro. Allora anche i rapporti dei loro limiti alle quantità costanti sono eguali tra loro*[3].

[3] Si constata subito che tale proposizione è equivalente alla seguente di Valerio:

Proposizione 2. I – *Se A, B, C, D sono quattro grandezze e se, comunque si prefissino due grandezze dello stesso genere di A e C rispettivamente, esistono E e F dello stesso genere di A e C rispettivamente, con E>A e F>C (oppure E<A e F<C) che differiscano da A e C per meno delle grandezze assegnate e siano tali che E : B = F : D, allora A : B = C : D.*

Tale teorema differisce dal precedente in quanto le due quantità variabili sono supposte di specie diverse e quindi non se ne può considerare il rapporto: nel caso siano della stessa specie la dimostrazione della proposizione si ottiene dalla proposizione precedente permutando i medi.

L'Huilier fornisce subito dopo il Teorema 3 la sua applicazione alla quadratura della parabola e alla cubatura di un paraboloide generato dalla rotazione d'un segmento parabolico attorno all'asse.

Egli poi aggiunge anche il seguente teorema, che è un teorema di unicità del limite per i rapporti:

Teorema del paragrafo V – *Se due rapporti variabili sono suscettibili di limite e sono sempre eguali tra loro, anche i loro limiti sono eguali*[4].

Si osservi che il precedente teorema può essere enunciato anche in generale per quantità variabili non necessariamente rapporti: si ottiene così il teorema dell'unicità del limite, che d'Alembert enuncia in *Limite* e dimostra in *Différentiel* nella seguente forma:

Si deux grandeurs sont la limite d'une méme quantité, ces deux grandeurs seront égales entr'elles.

Per Valerio il riferimento ai rapporti è d'obbligo svolgendosi tutta la sua trattazione alla maniera classica nell'ambito della teoria delle proporzioni; per L'Huilier questo potrebbe essere evitato, ma forse egli segue questa via per la stessa motivazione già presa in considerazione nella NOTA precedente. L'Huilier, come già è stato sottolineato, intende

[4] Si noti che il teorema è enunciato esattamente allo stesso modo nella Proposizione VIII di [Simson 1776], la cui dimostrazione fa riferimento ai rapporti di segmenti.

sviluppare il punto di vista di d'Alembert, per il quale i differenziali sono solo espedienti per la semplificazione dei calcoli e il calcolo differenziale non è altro che il calcolo dei limiti dei rapporti di incrementi finiti.

Segue il:

Teorema del paragrafo VI – *Il rapporto composto di un numero qualunque di rapporti suscettibili di limite ha per limite il rapporto composto dei limiti di tali rapporti*[5].

In esso vengono condensati in un unico enunciato i vari teoremi sui limiti della somma, del prodotto e del rapporto di rapporti suscettibili di limite. La dimostrazione, come del resto l'enunciazione, è veramente ridondante. Ora d'Alembert aveva già chiaramente enunciato nella voce *Limite* dell'Enciclopedia il teorema sul limite del prodotto, e nella voce *Différentiel* il teorema sul differenziale di una somma e di una potenza. La complicazione nasce dal prendere in considerazione, invece di quantità, rapporti di quantità[6].

Una immediata applicazione del precedente teorema è subito fornita nel seguente enunciato in cui si evidenzia il ruolo svolto dalla funzionalità:

Teorema del paragrafo VII – *Siano A, B, C, D, …, L, M, N quantità date; sia x una quantità variabile che può essere minore di*

---

[5] L'Huilier sintetizza in un unico enunciato le Proposizioni XI, XII, XIII, XIV, XV e XVI di [Simson 1776] nelle quali l'autore calcola in vari casi i limiti dei rapporti che si ottengono applicando l'invertendo, il componendo e lo scomponendo a eguaglianze di rapporti di cui si conoscono i limiti o calcola il limite di un prodotto di rapporti.

[6] In [L'Huilier 1795] il capitolo sui limiti dei rapporti è molto ampliata e l'autore per molte dimostrazioni delle proprietà delle proporzioni indica il testo del 1793 di Christoph F. Pfleiderer, *Propositionum de Rationibus in se diversis Demonstrationes ex solis Libri V Elemet. definitionibus et propositionibus deductae*. Hauber, Tubinga.

ogni quantità data; siano b, c, d, …, l , m, n esponenti dati in ordine crescente. Sia Q funzione di x tale che: Q = A + Bxb+Cxc+Dxd+ ... + Lxl+Mxm+Nxn; allora il rapporto di Q ad A è rapporto di eguaglianza, in grandezza se B>0, in piccolezza se B<0.

Segue dalla dimostrazione che ogni funzione Q della variabile x, supposta tacitamente positiva, $Q= Bx^b+Cx^c+Dx^d+ ... + Lx^l+Mx^m+Nx^n$ può essere resa minore di ogni quantità assegnata.

Si osservi che, proprio in un'applicazione in cui è coinvolta la funzione Q, L'Huilier introduce per la prima volta all'interno di una formula la notazione *lim* per indicare il limite [L'Huilier 1787, 24].

Il gruppo di proposizioni del paragrafo VII si conclude con il seguente fondamentale teorema sul limite del rapporto:

Teorema (fondamentale) – *Il limite del rapporto di due quantità variabili è eguale al rapporto dei limiti*[7].

La dimostrazione, in cui come nelle altre del testo si sottintendono i quantificatori universali ed esistenziali, si basa su un lemma precedente per cui se Q è una quantità variabile che ha per limite Q′ allora il rapporto di Q a una quantità costante A ha per limite il rapporto Q′ : A. Infatti se Q′ è limite in grandezza allora è Q : A < Q′ : A e quindi, poiché *lim Q : A* non può essere maggiore di *Q′: A*, o è eguale a *Q′ : A* oppure

[7] Si osservi come più snella e più generale appare tale enunciazione rispetto a quella di Valerio, più restrittiva in quanto le grandezze variabili hanno costantemente lo stesso rapporto:

Proposizione 2. III – *Siano date quattro grandezze A, B, E e F, di cui le seconde variabili e supposte simultaneamente maggiori o minori di A e B rispettivamente; se E e F hanno costantemente lo stesso rapporto e se E e F possono essere scelte in modo da differire da A e B rispettivamente per meno di una grandezza assegnata comunque piccola allora anche A e B hanno lo stesso rapporto.*

esiste una grandezza q tale che $lim\ Q : A = Q' - q : A$. Ma quest'ultima relazione è impossibile in quanto se fosse vera allora dato che $Q' - q < Q$ per un Q, si avrebbe $Q' - q : A < Q : A$, da cui segue $Q : A\ (<Q'-q : A\ ) < Q : A$. Analogamente si ragiona se Q' è limite in piccolezza. Basandosi sul lemma L'Huilier dimostra il teorema fondamentale nel modo seguente. Siano q e Q due quantità variabili aventi limiti q' e Q' e sia A una quantità costante; allora per il *lemma* $lim\ q : A = q' : A$ *e* $lim\ A : Q = A : Q'$, dunque $lim\ q : Q = q' : Q'$.

Su questo teorema L'Huilier ritorna più volte; nel 1795, nel primo capitolo della seconda edizione lo accompagna al seguente ragionamento [L'Huilier 1795, paragrafo 12], col quale egli si rende conto della inadeguatezza della sua prima definizione di limite: se si suppone che due quantità siano limiti di due quantità variabili di cui una è crescente e l'altra è decrescente in modo che il loro rapporto sia sempre o crescente o decrescente allora il rapporto delle due quantità date coincide con il limite del rapporto delle due quantità variabili. Ma che succede se le due quantità variabili sono entrambe o crescenti o decrescenti? A questo interrogativo L'Huilier risponde col

Teorema del paragrafo 12 - *Siano date due quantità che sono limiti di due quantità variabili contemporaneamente decrescenti o crescenti, in modo che gli eccessi con cui superano i propri limiti possano diventare simultaneamente minori di ogni quantità data. Allora il rapporto delle due quantità variabili può diventare simultaneamente maggiore di ogni rapporto dato che sia minore del rapporto del primo al secondo limite e minore di ogni rapporto che sia maggiore del rapporto del primo al secondo limite.*

Aver considerato in dettaglio svariati casi in cui può presentarsi il limite di un rapporto presenta ora la sua utilità: L'Huilier si rende conto a questo punto che la precedente situazione non rientra nella sua definizione, anche se gli sembra evidente che anche in tal caso possa essere lecito parlare di limite. Prende allora le distanze dalla definizione di d'Alembert con la seguente:

Estensione della definizione di limite - *Se un rapporto variabile alternativamente diviene maggiore o minore di un dato rapporto e può avvicinarsi ad esso più di qualunque altro rapporto proposto, sia maggiore che minore, allora il dato rapporto è ancora detto il limite del rapporto variabile.*

4 – I rapporti differenziali e la serie di Taylor

Seguendo il percorso indicato da d'Alember, L'Huilier stabilisce che il punto fondamentale di tutta la sua trattazione è la seguente:

Definizione – *E' detto rapporto differenziale di due quantità variabili il limite del rapporto dei loro incrementi simultanei, ovvero il rapporto cui il rapporto di questi incrementi si avvicina tanto più quanto più essi sono piccoli.*

L'Huilier sottolinea che se P è funzione di x allora $lim\frac{\Delta P}{\Delta x}$ e $\frac{dP}{dx}$ vanno intesi come la stessa quantità: così con la definizione del limite, si dipana la nube di mistero che avvolgeva da un secolo la seconda espressione: secondo la lezione di d'Alembert e in contrasto con la definizione di Leibniz nella *Nova methodus*, dP e dx considerati separatamente non hanno alcun significato, il simbolo $\frac{dP}{dx}$ non è una frazione composta da un numeratore e un denominatore, ma rappresenta un'abbreviazione del limite del rapporto degli incrementi. Si noti che tale asserzione è giustificata dal fatto che per d'Alembert e L'Huilier non ha senso parlare di infinitesimi e quindi non ha senso il rapporto $\frac{dP}{dx}$; ma bisogna tener presente che, una volta definita la derivata $P'(x)$, Cauchy definirà come ben noto il differenziale $dP=P'(x)\Delta x$ come funzione lineare di Δx, in particolare $dx=\Delta x$ e quindi $\frac{dP}{dx}$ verrà a rappresentare effettivamente un rapporto [Cauchy 1823, 13] (situazione che non si ripropone per i differenziali di ordine superiore). È importante osservare che Cauchy, avendo già dato la definizione della derivata, chiarirà completamente con la sua definizione di differenziale lo schema abbozzato da Leibniz nel 1684 nella prima pagina del *Nova Methodus*.

Subito dopo aver dato la definizione di differenziale L'Huilier osserva che poichè P è funzione di una variabile x, allora $\frac{dP}{dx}$ è a sua volta funzione di x. E quindi può dare luogo al suo differenziale che sarà detto differenziale del secondo ordine e così di seguito si potrà parlare dei differenziali di ordine superiore.

Nel Cap. III è illustrato un altro modo di differenziare le funzioni, rappresentandole come somme di una serie di potenze. Che sia possibile tale rappresentazione per ogni funzione non è in alcun modo messo in dubbio nella prima edizione, come credeva la maggior parte dei matematici del tempo. Sia allora $P=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5+\ldots$, si ha:

$$P(x+\Delta x)=P(x)+A'\Delta x+B'\Delta x^2+C'\Delta x^3+D'\Delta x^4+\cdots \qquad (1)$$

essendo A', B', C', D' funzioni di x, e quindi

$$\frac{\Delta P}{\Delta x}=A'+B'\Delta x+C'\Delta x^2+D'\Delta x^3+\ldots \qquad (2)$$

Ora, in virtù della definizione di limite del rapporto incrementale, dalla (2) segue $\frac{dP}{dx}=A'$; quindi una volta che sia data la (1) è immediata la deduzione di carattere algebrico di A' a sua volta funzione di x e pertanto somma di una serie di potenze. L'Huilier itera quindi la procedura, dall'essere:

$$\Delta\frac{dP}{dx}=A''\Delta x+B''\Delta x^2+C''\Delta x^3+\ldots$$

si ricava $lim \frac{\Delta}{\Delta x}(\frac{dP}{dx})=A''$;

tale limite si indica con $\frac{d^2P}{dx^2}$ ed è detto differenziale del secondo ordine. In modo analogo sono poi definiti i differenziali di ordine superiore. In tutti questi casi L'Huilier ci tiene a sottolineare che, anche se i differenziali si presentano come rapporti, in effetti non lo sono.

Segue la giustificazione, in maniera piuttosto complessa e non scevra di errori, della sviluppabilità delle funzioni in serie di Taylor, che parte dalla supposizione che una qualunque funzione sia sviluppabile in serie di potenze. Ripeterà più volte nel seguito che egli ritiene fondamentale per la sua trattazione tale sviluppo, in quanto costituisce una base solida del calcolo cui fornisce una struttura aritmetica, senza alcun riferimento all'infinito e agli infinitesimi. E ricorderà gli autori da lui letti che su tale base hanno impostato le loro opere: Jacques Cousin (Parigi 1739-1800) nelle *Leçons de Calcul différentiel et intégral* (pubblicate nel 1777 in seguito alla nomina come professore di matematica all'École Militaire avvenuta nel 1769)[8] e Wenceslaus Karsten (1732-1787) nel

[8] Il *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral* [Cousin 1796] ne è la seconda edizione. Diversamente dal testo di L'Huilier, il *Traité,* come in genere i trattati dell'epoca, contiene una gran quantità di problemi di calcolo differenziale molti dei quali di notevole difficoltà esposti in una maniera molto tecnica, a livello spesso di eserciziario. Cousin calcola integrali definiti, risolve equazioni differenziali ordinarie, equazioni a variabili separabili e tratta infine con esempi svariati metodi di risoluzione di equazioni alle derivate parziali. Spesso cita soluzioni date da molti matematici, suoi contemporanei o di poco anteriori, ai problemi considerati, quali Eulero, Newton, Cotes, Maclaurin, d'Alembert, Lagrange, Laplace, Riccati, Monge e Condorcet. Interessante un suo nuovo metodo, presentato all'Accademia delle Scienze nel 1772, anno in cui cominciò a farne parte, basato su particolari trasformazioni atte ad

Mathesis Theoretica elementaris atque superioris (scritto nel 1760 come libro di testo per gli studenti).

Per effettuare la sua dimostrazione di carattere completamente aritmetico L'Huilier introduce il calcolo delle differenze finite e segue un procedimento, che sarà elogiato per la sua chiarezza in [Montucla 1802, 251], partendo dalle seguenti posizioni:

$$P(x+\Delta x)=P', \quad P(x+2\Delta x)=P'', \ \ldots, \ P(x+N\Delta x)=P^{N};$$

osserva che $P^{N}=P^{N-1}+\Delta P^{N-1}$ e ricava che:

$$P'=P(x)+\Delta P;$$
$$P''=P+2\Delta P+\Delta^{2}P;$$
$$P'''=P+3\Delta P+3\Delta^{2}P+\Delta^{3}P;\ldots$$

e in definitiva:

$$P(x+n\Delta x)=P(x)+n\Delta P+\frac{n(n-1)}{2}\Delta^{2}P+\frac{n(n-1)(n-2)}{2\times 3}\Delta^{3}P+\ \ldots.$$

A questo punto pone $b=n\Delta x$ e dalla precedente relazione ricava:

$$P(x+b)=P(x)+b\frac{\Delta P}{\Delta x}+\frac{b(b-\Delta x)}{1\times 2}\frac{\Delta^{2}P}{\Delta x^{2}}+\frac{b(b-\Delta x)(b-2\Delta x)}{1\times 2\times 3}\frac{\Delta^{3}P}{\Delta x^{3}}+\ldots. \qquad (3)$$

Fissato n, a secondo membro compare un polinomio nella variabile b, che coincide con $P(x+b)$ nel caso che sia $b=\Delta x$, $2\Delta x$, $3\Delta x$, …, $n\Delta x$. Per valori diversi di b ovviamente non vale l'eguaglianza, ma se Δx è piccolo ed n grande si ottiene in generale una buona approssimazione di $P(x+b)$. La formula precedente è sostanzialmente la formula delle differenze finite di Gregory- Newton, nota a Gregory sin dal 1670 e che

integrare molte equazioni differenziali alle derivate parziali. E poi una trattazione sulle equazioni delle corde, su equazioni alle quali si perviene nelle ricerche sulla propagazione del suono, su altri casi di equazioni del secondo ordine e su integrali particolari di tali equazioni. Un capitolo è dedicato all'integrazione delle equazioni lineari alle differenze finite con varie applicazioni, tra cui una alla matematica finanziaria e una al calcolo delle probabilità. L'ultimo capitolo è dedicato all'uso delle derivate parziali nell'inversione delle serie, con un'applicazione al calcolo delle variazioni.

compare nel famoso lemma 5 del Libro terzo dei *Principia* [Newton 1687], il cui enunciato recita così: *Invenire lineam curvam generis Parabolici, quae per data quotcumque puncta transibit*. Ad essa si era ricondotto anche Brook Taylor nella sua *Methodus incrementorum directa et inversa* (1715). Il metodo delle differenze finite è nell'impostazione e nelle notazioni un metodo algebrico astratto, non geometrico e per questo motivo non ebbe grande seguito tra i matematici inglesi. Nella (3), quando $\Delta x=0$, Taylor sostituiva in modo non rigoroso $\frac{\Delta P}{\Delta x}$, $\frac{\Delta^2 P}{\Delta x^2}$, $\frac{\Delta^3 P}{\Delta x^3}$ etc…, con le flussioni P′(x), P″(x), P‴(x) etc… e dalla formula precedente ricavava la serie:

$$P(x+b)=P(x)+b\frac{dP}{dx}+\frac{b^2}{1.2}\frac{d^2P}{dx^2}+\frac{b^3}{1.2.3}\frac{d^3P}{dx^3}+\ldots \qquad (4)$$

Una serie analoga alla (4) era già stata ottenuta da Leibniz con un passaggio al limite e indipendentemente un risultato dello stesso tipo era stato ottenuto anche da Johan Bernoulli: ne abbiamo notizia dal *Commercium philosophicum et mathematicum di Leibniz e Bernoulli* e dalla pubblicazione che ne fece Bernoulli sugli *Acta eruditorum* del 1694[9]. Taylor non cita questi lavori. L'Huilier non fa menzione di alcuno di essi nella *Exposition*.

---

[9] Nella epistola V di [Leibnitz, Bernoulli 1745] Bernoulli espone un metodo universale per le serie con cui si possono esprimere tutte le quadrature e che quindi è adatto all'inversione del metodo delle tangenti. Infatti, data una qualunque funzione *n* della *z*, afferma che il suo integrale è dato da $nz - \frac{1}{1.2}z^2\frac{dn}{dz} + \frac{1}{1.2.3}z^3\frac{d^2n}{dz^2}$ etc … , dove, quando la formula si applica in un dato caso, *n* e gli altri coefficienti sono calcolati in un punto fisso e quindi la serie consta di termini algebrici. Nella epistola VI riprende il discorso e usa per l'integrale la scrittura: $Iydx = \frac{1}{1}xy - \frac{1}{2}x^2\frac{dy}{dx} + \frac{1}{1.2.3}x^3\frac{d^2y}{dx^2}$ ….etc. Il risultato fu pubblicato sugli *Acta eruditorum* nel 1694 con il titolo *Additamentum effectionis omnium quadraturarum et rectificationum curvarum per seriem quondam generalissimam*. Una breve storia della serie di Taylor è presente in [Kline 1972, 513].

Ritornando al discorso precedente, L'Huilier, cerca di stabilire la (4) rigorosamente, ma ovviamente non riesce nel suo tentativo. Più volte L'Huilier torna su questo ragionamento, in quanto si rende conto della sua fallacia; in particolare torna sulla dimostrazione precedente in [L'Huilier 1787, 208-210], dopo il giudizio dell'accademia e ne fornisce una nuova che egli aveva appreso solo più tardi (ne riferisce nella seconda edizione) essere stata data da Abraham Kästner (1719-1800), nel 1761 nel testo *Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen (Elementi di Analisi dell'Infinito),* dove l'autore riprendeva la teoria di Newton delle prime e ultime ragioni (e si avvaleva per farlo di espressioni tratte dal discorso poetico). Tale dimostrazione può essere riassunta al seguente modo per passi successivi: prima si osserva che essa vale per una potenza della *x*, per la formula del binomio;

$$(x+h)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + \binom{n}{n}h^n$$

dove $\binom{n}{k}n^{n-k}$ coincide con la derivata di ordine k di x^n divisa per k! . Ne consegue che la formula è vera per un polinomio; a questo punto supposto che ogni funzione sia sviluppabile in una serie di potenze[10] si tratta questa alla stregua di un

[10] Questa ipotesi, in seguito ai lavori di d'Alembert e di Eulero sulle corde vibranti e la richiesta da parte di Eulero che la posizione iniziale della corda fosse del tutto arbitraria, era già stata messa in dubbio da molti matematici. Ad esempio in [L'Huilier 1795] è citato uno scritto di Christoph Friedrich Pfleiderer(1736-1821), professore all'Università di Tubinga e amico di L'Huilier, dal titolo *Theorematis Tayloriani demonstratio* (Tubinga 1789), dove si cerca di dimostrare il teorema di Taylor senza supporre che ogni funzione P(x) sia sviluppabile in serie di potenze, ma si suppone che sia sviluppabile in serie di potenze nella variabile Δx l'incremento P(x+Δx) – P(x). Pfleiderer fu un rappresentante del neoeuclidismo settecentesco, fu favorevole al metodo sintetico e privilegiò di conseguenza un approccio geometrico ai procedimenti di calcolo svolti

polinomio come al passo precedente, semplicemente ignorando le difficoltà che provengono dalla presenza di un numero infinito di addendi.

La procedura ricorda il nuovo calcolo introdotto sin dal 1772 da Lagrange in una memoria pubblicata presso l'Accademia di Berlino *Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables*, e ripreso in [Lagrange 1797]: ivi Lagrange suppone che sia verificata una relazione analoga alla (1). Osserva che si può dire che *A′, B′, C′, D′* …. che compaiono in (1) sono delle "nuove funzioni di x, derivate in certo modo" da *P(x)*. Inoltre, Lagrange dimostra che detta *A′* la derivata di *P(x)*, si ha che *B′* è la derivata di *A′* divisa per 2, *C′* la derivata di *B′* divisa per 3 etc

Appare così la parola "derivata", usata per la prima volta nel calcolo differenziale per denotare una funzione. Quindi se denotiamo con *P′(x)* la derivata di *P(x)*, con *P″(x)* la derivata della derivata di *P(x)*, detta *derivata seconda*, etc.. allora: *A′ =P′(x), B′=P″(x)/2, C′=P″′/3!* etc.… Il problema è così ridotto alla determinazione della derivata prima cui tutte le altre si riconducono, problema che Lagrange risolve dimostrando che è possibile effettuare lo sviluppo in serie di Taylor, anche se ammette che il discorso non è del tutto generale; mostra come nel caso delle funzioni elementari la derivata si possa ottenere mediante sviluppo ottenuto trasformandole direttamente. Il

---

per via analitica. Contribuì al rinnovamento della matematica in Germania introducendo le procedure di calcolo di Brook Taylor e sostenendo con Robert Simson e Colin Maclaurie la necessità di fondare il calcolo sulla rigorosa geometria archimedea, in un ambiente spesso ostile. In [Pozzo 1989, 78 e s.] è ritenuto un punto di collegamento importante tra la matematica e la filosofia in Hegel, che seguì le sue lezioni di matematica e fisica all'Università di Tubinga.

ragionamento di Lagrange parte dal presupposto che la maggior parte delle funzioni siano senz'altro localmente sviluppabili in serie di potenze, tranne in alcuni casi eccezionali, che sono per lui quelli in cui la funzione o qualche sua derivata sono infinite, punti che essendo isolati non tolgono validità alla trattazione: a questo risultato egli perviene tramite una dimostrazione erronea della sviluppabilità in serie di potenze delle funzioni.

Dopo Cauchy sappiamo che affinché una funzione sia sviluppabile in serie di Taylor in un certo intervallo l'ipotesi che sia dotata di derivate di ordine comunque elevato è necessaria ma non sufficiente. Comunque, richiede l'esistenza di quelle derivate che Lagrange si proponeva di definire. Il tentativo di Lagrange rappresentava una prima risposta organica all'esigenza di svincolare l'analisi da considerazioni di carattere infinitesimale o cinematico e ciò veniva raggiunto tramite l'adozione di un calcolo formale su espressioni simboliche di tipo algebrico. Lagrange, elaborando un programma di sviluppo del calcolo da cui fossero banditi infinitesimi e limiti, si opponeva anche all'approccio di d'Alembert, in quanto riteneva poco chiaro ed evidente il concetto di limite. Questo spiega in parte il giudizio non del tutto positivo che egli dette del lavoro di L'Huilier. Il programma di Lagrange non poteva risolvere il problema del calcolo; ma allo stesso modo di d'Alembert, Lagrange, con la grande influenza che egli ebbe sui matematici del tempo, contribuì a porre il problema dei fondamenti come ineludibile.

L'Huilier partendo dall'ipotesi della sviluppabilità in serie di potenze di una funzione, tenta di stabilire, usando lo strumento tecnico del limite, l'espressione dei suoi coefficienti: è suo merito di aver concluso rigorosamente, passando al limite nella (2), che $\frac{dP}{dx} = A' = lim\frac{\Delta P}{\Delta x}$, uguaglianza che Lagrange non avrebbe potuto ovviamente stabilire senza ricorso al calcolo differenziale, e di avere indicato di conseguenza, (ma solo indicato, vista l'erroneità della dimostrazione) come, iterando il procedimento, si sarebbero potute ricavare le espressioni degli altri coefficienti in termini delle altre derivate ottenendo lo sviluppo (4).

5 – Massimi e minimi

Ampio spazio è dedicato nel Cap.V allo studio dei massimi e dei minimi. L'Huilier determina la condizione necessaria $\frac{dP}{dx}=0$ facendo uso dello sviluppo in serie di Taylor stabilito poche pagine prima. Allo stesso modo dimostra che, una volta soddisfatta la condizione necessaria, $\frac{d^2P}{dx^2} \neq 0$ è condizione sufficiente per un minimo o un massimo. Analizza poi il caso che tutte le derivate minori di quella di ordine *n*, con *n* pari, siano nulle, mentre l'*n-sima* è diversa da zero. In maggiori dettagli entra nella seconda edizione. L'argomento gli era particolarmente congeniale: e infatti si dilunga in molti esempi sia nella prima edizione e ancor di più nell'edizione in latino.

Nella seconda metà del Settecento assistiamo a un particolare interesse per problemi di questo tipo: Eulero aveva esposto nel 1744 nel suo *Methodus inveniendi lineas curvas* un nuovo metodo per determinare le curve dotate di qualche particolare proprietà di minimo o di massimo e aveva allargato il discorso dalla considerazione di casi particolari ad una trattazione abbastanza generale; Lagrange nel 1762 aveva semplificato e generalizzato il suo metodo rendendolo puramente analitico in un suo famoso articolo che dava origine al calcolo variazionale. L'Huilier è molto più elementare, incline ad adottare in alcuni casi procedure particolari per stabilire i risultati, procedure che permettono a suo giudizio di arrivare in modo più spedito e luminoso alla soluzione: così, nella prima edizione, offre ad esempio una dimostrazione puramente geometrica della proprietà isoperimetrica del cerchio e della sfera e di qualche altro problema classico. Nella seconda edizione invece studia massimi e minimi in diverse situazioni, di carattere sempre abbastanza elementare, ma collegando tale indagine allo studio di alcune semplici equazioni differenziali, considera poi molti problemi geometrici di cui dà soluzioni di carattere differenziale. Cita spesso in entrambe le edizioni il suo testo dedicato ad argomenti simili, il *De relatione mutua capacitatis et …* [L'Huilier 1782], che sarà apprezzato e citato da Jacob Steiner (1796-1863). Si tratta di un trattato sugli isoperimetri, considerati nelle figure che sono oggetto della geometria elementare, quali poligoni, coni, cilindri, sfere. In esso affronta il problema di *determinare fra tutti i poligoni di n lati, le cui lunghezze sono assegnate, quello che racchiude l'area massima* e dimostra che si tratta del poligono inscritto in un cerchio.

Prova pure che *tra tutti i poligoni di n lati con dati angoli soltanto quello circoscritto ad un cerchio ha l'area massima quando il perimetro è assegnato e il perimetro minimo quando l'area è assegnata*. L'Huilier aveva progettato una seconda parte di tale trattato dove si sarebbe occupato di questioni più elevate, legate ai recenti sviluppi dell'analisi, ma altri impegni non gli permisero di affrontare tale lavoro. Si limitò ad aggiungere un compendio del *De relatione mutua*, l'*Abregé d'Isopérimétrie* *élémentaire*, Genéve 1971 seguito alla *Polygonométrie*, Genéve 1971. Montucla elogia questi lavori: osserva che l'autore, sottomettendo il calcolo dei lati e degli angoli dei poligoni a regole di carattere trigonometrico, esplora con profondità e profitto una ristretta parte dello sterminato campo della geometria, in cui pure avevano fatto incursioni Eulero e l'astronomo, suo collaboratore, Anders J. Lexell (1740-1784) [Montucla 1802].

Nella prima edizione, dopo aver osservato che a volte la risoluzione dell'equazione $\frac{dP}{dx}$ =0 comporta notevoli difficoltà, L'Huilier propone una strada alternativa, enunciando il seguente:

Lemma – *Se una funzione P d'una variabile x è suscettibile di massimo o minimo, essa assume sempre due valori eguali fra loro, uno prima di assumere il detto valore l'altro dopo averlo raggiunto. Tali valori corrispondono a due valori della x, uno minore, l'altro maggiore di quello che corrisponde al valore limite p.*

Dopo aver accennato ad una possibile dimostrazione basata su considerazioni infinitesimali relative alla serie di Taylor, e ad una spiegazione di tipo geometrico, che si ottiene intersecando la figura con parallele alla tangente nel punto di minimo o massimo, passa ad enunciare la regola generale in applicazione del Lemma per il calcolo dei massimi o dei minimi che non fa uso del calcolo differenziale ma utilizza la teoria dei limiti. Precisamente:

- si eguagliano due valori della funzione;
- si effettuano le semplificazioni nell'equazione risultante, cercando di eliminare quei fattori che si annullano quando i due valori della variabile coincidono;

- si cercano i limiti delle quantità variabili contenute nell'equazione, priva a questo punto di termini di indeterminazione.

Tali limiti permetteranno di ottenere le condizioni cui devono soddisfare i massimi e i minimi[11]. È ben noto che si tratta di un metodo non generale, che si applica a funzioni algebriche, frazionarie, a qualche funzione irrazionale, ma non a funzioni trascendenti.

Sebbene L'Huilier non ne faccia cenno, in tal modo si rende rigoroso un procedimento analogo usato da Fermat, che, non avendo a disposizione il concetto di limite, aveva elaborato tra

---

[11] Carnot stabilisce una procedura analoga basandosi sul metodo dei coefficienti indeterminati di Descartes: egli ritiene che con l'uso di tale metodo e con l'algebra ordinaria si possano risolvere tutte le questioni dell'analisi infinitesimale. I procedimenti nei due casi, egli afferma, sono gli stessi: le quantità che nell'una si trascurano come infinitamente piccole, sono eliminate nell'altra in modo rigoroso come quantità finite. Così se $A+Bx=0$ è un'equazione con A e B costanti e x tanto piccolo quanto si vuole, allora $A=0$ e $Bx=0$. Questo per Carnot è un principio fondamentale da cui si può dedurre tutta l'analisi infinitesimale. In particolare se si cerca il massimo della funzione $ax-x^2$ si osserva che aggiungendo all'indeterminata x un valore arbitrario x' l'incremento corrispondente della funzione può essere reso tanto piccolo quanto si vuole in rapporto a x', al diminuire sempre più di x'. Quindi da

$$a(x+x')-(x+x')^2-(ax-x^2)=x'(a-2x)-x'^2,$$

dividendo per x' si ottiene: $(a-2x)-x'$, quantità che deve essere supposta tanto piccola quanto si vuole. Allora Carnot pone $(a-2x)-x'=\varphi$, ovvero $(a-2x)=x'+\varphi$. In tale formula si osservano due termini di cui uno $(a-2x)$ non è variabile, mentre l'altro può essere reso piccolo quanto si vuole. Per il detto principio deve essere $a-2x=0$ e quindi come ben noto $x=\frac{a}{2}$ [Carnot 1797]. Si badi bene che il metodo sussiste solo nell'ambito dei polinomi, quindi anche in questo caso si hanno le solite limitazioni nelle applicazioni, inoltre non si può trarre dal metodo un algoritmo per i calcoli.

il 1637 e il 1638 un metodo essenzialmente geometrico che può essere esemplificato al seguente modo: si eguagliano due valori della funzione in corrispondenza di due valori x_1 e x_2 (in realtà nelle opere di Fermat non è data una funzione ma si tratta geometricamente sulla proprietà caratteristica della curva considerata); nei casi presi in esame si può semplificare per x_1-x_2; effettuata tale semplificazione, nella relazione ottenuta si pone x_1=x_2=x, che permette di ottenere la relazione cui deve soddisfare il punto x di minimo o massimo[12]. A volte poi Fermat applica il metodo precedente assegnando, nei casi particolari presi in esame, un incremento alla variabile indipendente, che indica con E, considera l'incremento corrispondente della variabile dipendente e lo pone eguale a zero; divide per E, pone poi $E=0$. In tal modo si ricava in genere un valore di minimo o di massimo per la funzione.

Con tale strumento, minimizzando il tempo, Fermat ottiene la prima dimostrazione della legge di rifrazione della luce, enunciata in precedenza da Cartesio.

E' evidente che la regola che L'Huilier enuncia non è altro che il metodo di Fermat per la ricerca dei massimi e dei minimi, che appare, per alcuni problemi che deve trattare, di più agevole utilizzo che non il calcolo, ormai classico anche al suo tempo, dei rapporti differenziali. Ora, mentre nella regola di Fermat c'è di fatto una violazione del principio di non contraddizione, in quanto x_1 e x_2 sono prima supposti distinti tra loro per poter dividere per x_1-x_2 e poi, una volta eliminata l'indeterminazione, sono supposti coincidenti, mediante la nozione di limite (sottointesa sostanzialmente da Fermat ed

[12] Il procedimento è descritto in [Fermat 1891-1916, IV. *Methodus de maxima et minima*].

ora esplicitata) L'Huilier supera tale difficoltà[13]. Egli applica tale metodo ad alcuni problemi geometrici la cui risoluzione presenta qualche difficoltà di calcolo se lo si vuole risolvere col metodo differenziale classico.

Problema 1 - *Dato un angolo, sia P un punto ad esso interno. Fra tutte le rette passanti per P determinare quella che rende minima la lunghezza del segmento che essa stacca nell'angolo.*

L'Huilier considera due rette che staccano segmenti eguali nell'angolo e con una semplice costruzione dimostra che se le due rette tendono a coincidere allora nella posizione limite, che non può essere che il minimo, dal momento che, come si constata subito geometricamente, non c'è massimo, si verifica che i due segmenti determinati dal punto P stanno fra loro come le tangenti degli angoli che la retta limite forma coi lati dell'angolo assegnato.

Infatti siano AB e CD due segmenti eguali tra loro, ognuno con gli estremi sui due lati dell'angolo, passanti per P. Sia a la proiezione di A su CP e sia d la proiezione di D su PB. Con centro in P tracciamo la circonferenza di raggio AP e sia a' la sua intersezione con PC; con centro in P tracciamo la circonferenza di raggio PD e sia d' l'intersezione con PB. Poiché $AP+PB=DP+PC$ si ha: $Ca'=d'B$. Ora:

[13] In [L'Huilier 1795, paragrafo 188] l'autore ricorda che le questioni dei massimi e dei minimi hanno grande attinenza con il problema delle tangenti. Egli infatti osserva che riferita una curva ad un asse e considerato sull'asse un punto da cui si possa condurre la tangente questa retta è tale che forma con l'asse un angolo che è minimo o massimo fra tutti gli angoli formati dalle secanti condotte per lo stesso punto; ponendo eguale a zero il differenziale della tangente dell'angolo rapidamente ricava l'espressione della sottotangente. A conclusione egli ricorda che tale soluzione non sfuggì ai matematici del secolo precedente che aprirono la strada del calcolo differenziale per la risoluzione dei problemi delle tangenti e dei minimi e massimi: tra loro cita Fermat, Roberval, Pascal, Barrow.

$$Aa = Ca\ tg\hat{C},\ Dd = dB\ tg\hat{B}$$

e anche:

$$Aa:dD = AP:PD.$$

Quindi:

$$AP:PD = Ca\ tg\hat{C} : dB\ tg\hat{B}.$$

Si passi al limite facendo tendere *CD* ad *AB*. Poiché *Ca* tende a *Ca'* e *dB* tende a *d'B* e poiché *Ca'*=*d'B* allora *lim Ca:dB =1*; e poiché è anche $lim\ tg\ \hat{C}=tg\ \hat{A}$, si ottiene la soluzione: $AP:PD= tg\hat{A}: tg\hat{B}$. Quindi la retta per *P* di minima lunghezza è divisa da *P* in parti proporzionali alle tangenti degli angoli che essa forma con i lati dell'angolo dato.■

Nel seguente problema la curva deve essere almeno supposta convessa in modo da assicurarsi che ogni retta la intersechi in non più di due punti.

Problema 2 - *Sia dato un punto P entro una curva XAX'; per esso si conduca una retta ZZ' tale che il settore ZAZ' abbia area minima.* Al solito si considerino due rette per il punto *P*, *TT'* e *XX'* che stacchino due settori *XAX'* e *TAT'* aventi la stessa area. Eliminando da essi la parte comune *TAX'* si perviene a stabilire l'equivalenza dei due settori *TPX* e *X'PT'*; quindi quando *TT'* e *XX'* tendono alla posizione comune *ZZ'* per le aree sussiste la seguente relazione di limite: *lim TPX : X'PT'=1.* Consideriamo l'arco di circonferenza *Tx*, di centro *P*, raggio *TP*, con *x* su *XP*; analogamente consideriamo l'arco *X'y'* della circonferenza di centro *P* e raggio *PX'*, con *y'* su *PT'*. Abbiamo ancora le seguenti relazioni di limite tra aree:

$$limTPX:TPx = 1;\ limX'PT':X'Py' = 1;\ limTPx:X'Py' = PZ^2:PZ'^2$$

quindi

$$lim\ XPT : X'PT' = PZ^2 : PZ'^2$$

Ne segue che l'area minima si ottiene quando *PZ*=*PZ'*■

Sempre nella seconda edizione troviamo anche il seguente problema, risolto in modo analogo al precedente, in cui è sottinteso che la curva presa in esame sia rettificabile:

Problema 3 – *Data una curva XAX′ si conduca per un punto P fissato interno una retta ZZ′ in modo che l'arco ZAZ′ sia minimo.*

Nella prima edizione L'Huilier propone di risolvere con il metodo impiegato nel Problema 1 anche il seguente famoso problema geometrico di doppio strato la cui risoluzione è semplificata dall'uso dell'operazione di limite:

Problema 4 (di doppio strato) - *Data una retta BB′, due punti A e A′ fuori di essa, e due segmenti a e a′, determinare un punto X su BB′ in modo che sia minima la somma aAX + a′A′X.*

Se i due punti si trovano da bande opposte rispetto alla retta, per opportuni a e a′ il problema si riduce alla determinazione della **legge di rifrazione della luce,** problema trattato da Fermat, minimizzando il tempo di percorrenza.

L'Huilier suppone che ci siano due punti X e X' per cui: $aAX + a'A'X = aAX' + a'A'X'$ da cui segue:

$$a(AX' - AX) = a'(A'X - A'X').$$

Sia P su AX' tale che $AP = AX$ e sia Q su $A'X$ tale che $A'Q = A'X'$. Allora $aPX' = a'QX$.

Siano θ e θ′ gli angoli AXB e $AX'B$ e sia α l'angolo $A'XB'$. I triangoli XPX' e XQX' possono ritenersi rettangoli in P e Q rispettivamente se si suppongono X e X' sufficientemente vicini. Quindi:

$$PX' = XX' \cos AX'B = XX' \cos \theta';$$
$$QX = XX' \cos A'XB' = XX' \cos \alpha.$$

Pertanto si può supporre $\frac{a \cos\theta'}{a' \cos\alpha} = 1$ e, facendo tendere X' a X, $\frac{a \cos\theta}{a' \cos\alpha} = 1$.

Pertanto la condizione richiesta è $\frac{\cos\theta}{\cos\alpha} = \frac{a'}{a}$ e quindi il punto X è tale che i coseni degli angoli che le rette AX e $A'X$ formano con BB' devono essere inversamente proporzionali ad a e a' .

Si osservi che nel caso della rifrazione $\frac{\cos\theta}{\cos\alpha} = \frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r}$, cioè il rapporto dei coseni degli angoli formati da AX e $A'X$ con BB' coincide con il rapporto dei seni dell'angolo d'incidenza e dell'angolo di rifrazione, mentre $a=1/u$, $a'=1/v$, essendo u e v le velocità della luce nei due mezzi che essa attraversa ■

Nella seconda edizione dell'*Exposition*, L'Huilier risolve il precedente problema in una forma molto più generale, usando il calcolo differenziale:

Problema 5 - *Siano dati una curva DD′ e due punti fuori di essa, A e B. Determinare un punto Z sulla curva tale che, dati due numeri positivi a e a′ e un intero positivo m, risulti minima la somma:* $a \times AZ^m + a' \times BZ^m$.

Alla maniera precedente L'Huilier stabilisce che il punto Z deve essere tale che:

$$a \times AZ^{m-1} \cos AZT + a' \times BZ^{m-1} \cos BZT = 0,$$

dove AZT e BZT sono gli angoli che le rette AZ e BZ formano con la tangente ZT alla curva in Z.

Ovviamente se in luogo di una qualunque curva DD′ è data una retta BB′ e inoltre m=1 ritroviamo il Problema 4. L'Huilier considera separatamente la dimostrazione in tale caso particolare. Sia r la retta BB', e i punti dati siano A e A', di cui B e B' sono le proiezioni su r; sia $c = AB$, $c' = A'B'$. Detto X il punto sulla retta r per cui $aAX + a'A'X$ è minimo, L'Huilier pone $AX = z$, $A'X = z'$, $BX = y$, $XB' = y'$, con le condizioni:

$$a\frac{dz}{dx} + a'\frac{dz'}{dx} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dx} + \frac{dy'}{dx} = 0.$$

Da $z^2 = c^2+y^2$ si ricava $z\frac{dz}{dx} = y\frac{dy}{dx}$ da cui, essendo $y = z \cos AXB$, si trae: $\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx}\cos AXB$. Analogamente si ottiene $\frac{dz'}{dx} = \frac{dy'}{dx}\cos A'XB'$.

Da tali relazioni tenendo presenti le precedenti condizioni si ricava quanto enunciato ■

Come ben noto Bernoulli nel 1696 in un articolo sugli *Acta matematica* pose il problema della brachistocrona: dati due punti A e A' in un piano verticale trovare la curva AMB tale che un punto materiale M soggetto alla gravità si muova da A

a *B* nel minor tempo possibile. L'anno dopo fornì la soluzione: la curva richiesta è un arco di cicloide e la dimostrazione era ottenuta mediante la divisione del piano in un numero finito di strati e mediante applicazione successiva della regola della rifrazione. L'Huilier segue il suo procedimento e in parte lo generalizza mediante i passi seguenti. Cominciamo con la seguente generalizzazione del Problema 4:

Problema 6 (del multistrato) – *Siano dati due punti A e A′ e una retta s: siano B e B′ le proiezioni di A e A′ su s. Si divida BB′ in parti eguali mediante i punti P, P′, P″, P′″, … per tali punti si considerino le perpendicolari a BB′: PM, P′M′, P″M″, P′″M′″ … e siano z, z′, z″, z′″, … le lunghezze dei segmenti AM, MM′, M′M″, M″M′″, … Allora, dati i numeri F, F′, F″, F′″ … il minimo di*

$$F\times z + F' \times z' + F''\times z'' + F''' \times z''' + \ldots, \qquad (*)$$

in base alla precedente proposizione si ottiene quando:

$$F\cos MAB = F'\cos M'MP = F''\cos M''M'P' = F'''\cos M'''M''P'' = \text{etc}\ldots \qquad (**)$$

Infatti, la somma data è minima quando è minima la somma di due addendi consecutivi, in particolare quando è minimo $F\times z + F' \times z'$: tale min si può pensare sia stato ottenuto determinando M sulla retta MP, dati i punti fissi A e M′, e pertanto, in base alla precedente proposizione deve risultare *F cosMAB = F′ cosM′MP*; allo stesso modo si ragiona per gli altri addendi.

Ora L'Huilier suppone, seguendo Bernoulli, che si passi al limite nella costruzione, e che la poligonale che si determina e che realizza il minimo della (*) tenda ad una curva γ di equazione da determinarsi *y=y(x)*. In luogo dei valori *F, F′, F″* etc avremo allora una funzione *F(x)*, la curva γ di equazione *y=y(x)* sarà tale che l'integrale curvilineo esteso a γ di F(x) essendo dz $=\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'(x)^2}$dx sarà il minimo al variare della curva cui è esteso l'integrale. La funzione minimizzante y(x) in quanto limite di poligonali tutte verificanti (**) deve soddisfare la condizione $\frac{dy}{dz}F(x)$=*cost*=*C*; ne segue $dx^2+dy^2=\frac{F^2}{C^2}dy^2$, da cui si trae l'equazione:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{C}{\sqrt{F^2-C^2}}. \qquad (***)$$

Per esempio, se poniamo F(y)= $\sqrt{x},$ posto C^2 = t >0, imponendo y(t)=0 si trova y(x) = $2\sqrt{t(x-t)}$. Pertanto la curva che realizza il minimo dell'integrale curvilineo in tal caso è fornito dalla traiettoria del moto dei proiettili sulla terra.

La brachistocrona – Si osservi che il risultato precedente ottenuto come conseguenza del Problema 6 sussiste anche se la F è funzione della y. Il caso più interessante, sul quale è veramente ermetico l'Huilier, è quello in cui sia *F(y)* = $\frac{1}{\sqrt{2gy}}$, caso in cui otteniamo come soluzione la brachistocrona. Infatti detti A e A' due punti della curva di equazione y=y(x) di ascisse x_A e $x_{A'}$, t=t(x_A) il tempo impiegato in corrispondenza di x_A, a partire da un istante iniziale, la velocità è data da v(x)= $\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h^2+(y(x+h)-y(x))^2}}{t(x+h)-t(x)}=\frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{t'(x)}$ da cui, essendo per il bilancio energetico v(x) = $\sqrt{2gy(x)}$, il tempo per passare da A ad A' lungo la curva di equazione y=y(x) è dato da

$$\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x_A}^{x_{A'}}\frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{\sqrt{y(x)}}\,dx,$$

che coincide con l'integrale curvilineo che si ottiene scegliendo F(y)= $\frac{1}{\sqrt{2gy}}$ e che si minimizza tenendo conto della (***), che in tal caso diviene:

$$\frac{dy}{dx}=-\sqrt{\frac{y}{2r-y}}, \qquad (****)$$

avendo posto $\frac{1}{2r}$ = 2gc². Tale è l'equazione differenziale della cicloide di equazioni parametriche

$x = r(t - sent)$
$y = r(1+cost);\quad 0\le t\le \pi$

che rappresenta quindi la curva di più rapida discesa. Infatti dalle equazioni parametriche si trae: $\frac{dy}{dx} = \frac{-sent}{1-cost}$.

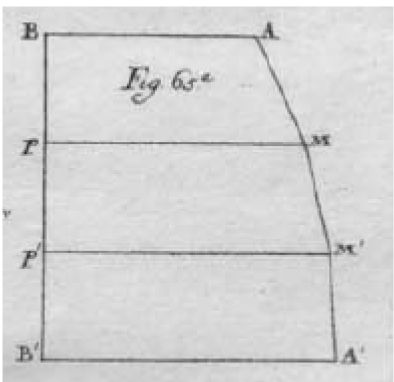
D'altro canto, si verifica subito che $-\sqrt{\frac{y}{2r-y}} = -\sqrt{\frac{1+cost}{1-cost}} = -\frac{sent}{1-cost}$ e quindi la cicloide soddisfa la (****). Dall' equazione differenziale discende subito che il punto (0, 2r) è un punto a tangente verticale, mentre il punto (πr, 0) è un punto a tangente orizzontale.

Per dare un'idea dei problemi che seguono segnaliamo il seguente:

Problema 7 – *Nelle ipotesi del Problema 6, si determinino i punti M, M′, M″, M‴ in modo che il rapporto tra l'area della figura BAMM′M″… A′B′ e il perimetro AMM′M″ … A′ risulti massimo.*

I precedenti problemi sono trattati nel capitolo ventesimo della seconda edizione, dedicato ai problemi isoperimetrici. Ce ne sono davvero molti: qui ne consideriamo uno relativo a una figura poligonale del tipo delle precedenti:

Problema 8 – *Siano dati due punti A e A′: siano B e B′ le proiezioni di A e A′ sull'asse x. Si divida BB′ in tre parti eguali mediante i punti P, P′: per tali punti si considerino le perpendicolari PM e PM′ a BB′ in modo tale che, detti z=AM, z′=MM′, z″=M′A′ e supposta data la somma z+z′+z″=a, risulti massima l'area della figura BAMM′A′B′.*



Posto $PM=y$, $P'M'=y'$, $BP = PP' = PB' = b$, il doppio dell'area della figura $BAMM'A'B'$ è data da $b(AB+2y+2y'+A'B')$, quindi la funzione da massimizzare è $y+y'$. Derivando abbiamo così le due condizioni:

$$\frac{dy}{dx}+\frac{dy'}{dx}=0, \quad \frac{dz}{dx}+\frac{dz'}{dx}+\frac{dz''}{dx}=0.$$

Procedendo come nel

Problema 5, troviamo:

$\frac{dz}{dx} = -\frac{dy}{dx}\cos BAM$; $\frac{dz'}{dx} = -(\frac{dy'}{dx} - \frac{dy}{dx})\cos PMM'$; $\frac{dz''}{dx} = \frac{dy'}{dx}\cos P'M'A'$;

da cui, tenendo conto delle condizioni si trae:

$$\cos PMM' - \cos P'M'A' = \cos BAM - \cos PMM'.$$

(Si osservi che nel problema ci sono cinque funzioni incognite e cinque relazioni che le legano. Inoltre, la spezzata simmetrica di quella che realizza il massimo rispetto alla retta AA' fornisce il minimo) ■

Come conseguenza del risultato precedente L'Huilier riesce a dimostrare con considerazioni di carattere analitico che dati due punti e data un curva variabile di assegnata lunghezza che ha tali punti per estremi, l'arco di circonferenza racchiude la figura di area maggiore fra tutte le figure delimitate dal segmento congiungente i due punti e la curva variabile.

Seguono molte altre applicazioni che rivelano, come già si è osservato in precedenza, una particolare inclinazione dell'autore per questo tipo di questioni.

6 – Quadratura delle curve, cubatura dei solidi di rivoluzione

L'Huilier introduce subito nel Cap. VII la quadratura come operazione inversa della differenziazione ed è così favorevole ad una simile impostazione che suggerisce di usare invece dell'espressione "somma integrale" l'espressione "rapporto integrale". Non fornisce una definizione di area di una superficie sotto una curva, e tratta tale questione in modo intuitivo, ciò che non meraviglia perché si sarebbe dovuto attendere circa un secolo perché il problema delle aree fosse affrontato in modo rigoroso. Egli ragiona così: sia indicata con

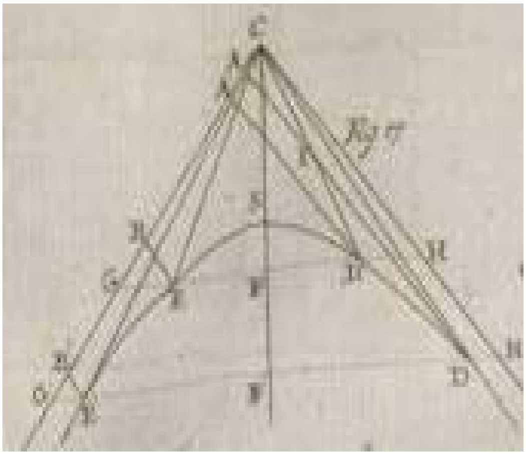
S la superficie sotto la curva, variabile con essa. Se consideriamo un rettangolo avente un lato costante e l'altro che varia con l'ascissa della curva, allora il limite del rapporto che intercede tra i cambiamenti simultanei della superficie del rettangolo e di quella sotto la curva per un medesimo cambiamento dell'ascissa è lo stesso di quello che intercede tra il lato costante del rettangolo e l'ordinata. Quindi se R è a sua volta la superficie variabile del rettangolo si ha: lim $\frac{\Delta S}{\Delta R}=\frac{y}{a}$; ma $\Delta R=a\times\Delta x$ e dunque $y=\frac{dS}{dx}$. In tal modo si ricava subito l'ordinata della curva a partire dalla conoscenza dell'area sotto di essa, discorso risalente a Newton e già intravisto da Barrow. Segue come applicazione l'integrazione della funzione potenza, distinguendo i vari casi. L'Huilier calcola così subito l'area sotto la parabola di equazione $y=x^m$, con $m>0$, delimitata dall'asse delle ascisse a partire dall'origine fino a un punto x variabile e analogamente calcola l'area sotto l'iperbole $y=\frac{1}{(x+a)^m}$ $m\neq 1$, $a>0$, considerando in entrambe le situazioni pure il caso che x cresca illimitatamente.

Egli tratta la medesima questione anche in altri due modi, con procedure di limite che ricava da proprietà differenziali delle figure (senza l'uso esplicito di limiti di somme integrali) su cui non è il caso di soffermarsi.

L'Huilier dimostra tra l'altro la proprietà fondamentale dell'iperbole con una bella e lunga dimostrazione geometrica, in cui il concetto di limite entra in un solo passo, che L'Huilier enuclea in un Lemma enunciato e dimostrato a parte e cioè il Lemma 1 del paragrafo XLIII, la cui dimostrazione è esposta al n. 3 di questo lavoro.

Teorema – *Sia data un'iperbole di cui CA e CH sono gli asintoti. Su uno dei due asintoti si considerino CA, CA', CB, CB' in* *progressione geometrica. Siano D, D′, E, E′ i punti in cui le parallele all'altro asintoto per A, A′, B, B′ rispettivamente incontrano l'iperbole. Allora i trapezi mistilinei ADD′A′ e BEE′B′ sono eguali.*

Dim. - Si considerino la retta per *E* e per *D′* e la retta per *E′* e *D*. La prima intersechi gli asintoti in *G* e *H*, la seconda in *G′* e *H′*. Poiché *EB, D′A′* e *CH* sono parallele, si ha che *GB : A′C = EG : D′H* per il teorema di Talete. Per una proprietà nota dell'iperbole *GE = D′H*[14], dunque *BG = A′C*. Per lo stesso motivo *B′G′ = AC*. Quindi *CA : CA′ = B′G′ : BG*. Ma



$$CA:CA' = CB:CB'$$

per ipotesi e, per la definizione dell'iperbole

$$CB:CB' = B'E':BE,$$

quindi

$$B'G':BG = B'E:BE$$

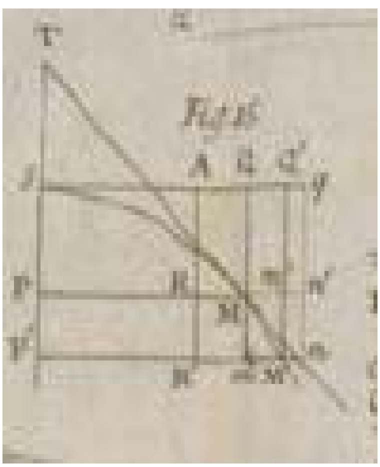
e pertanto i triangoli *BGE* e *B′G′E′* sono equiangoli: ne consegue che le rette *GE* e *G′E′* sono parallele. Allora la retta *CS* che taglia *GH* in due parti eguali mediante il punto *F*, taglia parimenti in due parti eguali in un punto *F′* la retta *G′H′*. Poiché *GE = D′H* risulta *EF = FD′* e parimenti, poiché *G′E′ = DH′* risulta *E′F′ = F′D*. Pertanto, *CF* è diametro. Per il Lemma di cui si è detto in precedenza gli spazi curvi *SE′F′* e *SDF′* sono eguali, essendo poi gli spazi *CE′F′* e *CEF* rispettivamente eguali agli spazi *CF′D* e *CFD′* ne segue l'eguaglianza:

$$CE'F' - (CEF + SE'F') = CF'D - (CFD' + SDF')$$

[14] Per questa proprietà si confronti la nota 17 di [Biacino Viola 2020].

cioè i settori ECE' e DCD' sono eguali fra loro. Sia I il punto d'intersezione delle rette CD' e AD. Poiché, per la definizione di iperbole, $CA \times AD = CA' \times A'D'$, i triangoli CAD e $CA'D'$ sono eguali tra loro. Ora il trapezio mistilineo $ADD'A'$ si può ottenere dal settore DCD' sommando questo con il triangolo $CD'A'$ e sottraendogli il triangolo CAD, triangoli aventi in comune il triangolo AIC, parte comune che viene quindi sia sommata che sottratta. Analogamente si prova che il trapezio mistilineo $BEE'B'$ è equivalente al settore ECE'. Quindi i trapezi mistilinei $ADD'A'$ e $BEE'B'$ sono eguali essendo essi rispettivamente equivalenti ai due settori ECE' e CDC', eguali tra loro ∎.

Nel Capitolo IX L'Huilier usa un metodo per determinare la cubatura di paraboloidi e iperboloidi, dimostrando anche con chiarezza la formula per determinare in generale la cubatura dei solidi di rivoluzione. Al riguardo procede nella seguente maniera: considera una curva $\delta MM'$ riferita all'asse $\delta PP'$ attorno al quale fa ruotare la curva, sia $P = (x, 0)$, $P' = (x+\Delta x, 0)$, $M=(x, y)$, M' il punto di ascissa $x+\Delta x$. Si consideri anche il cilindro C che ha come base il cerchio di raggio $\delta A = a$. Sia ΔS la variazione del volume del solido che si ottiene facendo



ruotare la curva attorno a δP quando si passa da P a P'. Analogamente sia ΔC la variazione del volume del cilindro. Il rapporto $\frac{\Delta S}{\Delta C}$ è compreso tra il rapporto a ΔC del volume del solido generato dalla rotazione del rettangolo $P'M$ attorno a δP ed il rapporto a ΔC del volume del solido generato dalla rotazione del rettangolo PM' attorno a δP. Ma tali due volumi sono dati da $\Delta x \pi P'M^2$ e $\Delta x \pi PM'^2$ e stanno con ΔC nel rapporto $\frac{P'M^2}{a^2}$ e $\frac{PM'^2}{a^2}$ rispettivamente. Poiché queste quantità tendono a $\frac{y^2}{a^2}$ al tendere di Δx a zero, si ottiene la relazione $lim\ \frac{\Delta S}{\Delta C} = \frac{y^2}{a^2}$, da cui, essendo $\Delta C = \pi \Delta x a^2$, si trae $S'(x)=\pi y^2$. Si osservi che qui è stato fatto uso del teorema del confronto a cui non si fa riferimento nella prima parte.

7 – La motivazione dell'opera

Con la teoria precedentemente esposta L'Huilier ritiene di poter evitare in analisi l'impiego diretto dell'infinito, idea estremamente misteriosa che sfugge alle menti umane limitate: infatti invano si cerca di superare gli invalicabili ostacoli che provengono da discorsi che trattano l'infinito con le metodologie usate per il finito. Egli afferma che dobbiamo ammettere l'incapacità di concepire grandezze infinitamente grandi o piccole: queste infatti non possiamo figurarcele, nel senso che è impossibile tradurle con una figura geometrica in quanto non hanno limiti. Così lo spazio nella sua totalità esce dalla classe delle grandezze in quanto non è possibile moltiplicarlo, non è possibile infatti immaginare uno spazio doppio, triplo, quadruplo etc ... E pure la sua suddivisione porta a contraddizioni.

E' davvero una lunga requisitoria quella che L'Huilier intenta contro l'infinito attuale, requisitoria che ricorda l'analoga di Gerdil nella sua *Mémoire de l'Infini Absolu consideré dans la Grandeur* del 1761 [Gerdil 1845], che non è però mai citata. Allo stesso modo egli rifiuta l'infinitamente piccolo assoluto: quest'ultima idea consiste nel pensare lo stato in cui si trova la grandezza quando è spogliata di tutto ciò che la rende grandezza: per L'Huilier non c'è che il niente assoluto, cioè la privazione completa dell'esistenza, che possa rispondere a un simile requisito. Ma allora che contributo potrà mai dare alla costituzione delle grandezze finite? Dal nulla si genera il nulla.

Contro Fontenelle, l'autore "troppo sottile" degli *Éléments de la Géométrie de l'infini,* L'Huilier, in modo simile a quanto fa Gerdil, instaura un lungo processo. Il punto su cui egli si sofferma principalmente è laddove Fontenelle asserisce che non c'è un numero maggiore di tutti numeri, nel senso comunemente inteso, ma oltre tutti i numeri troviamo l'∞, che rappresenta un limite estremo oltre il quale non si possono aggiungere altri numeri interi finiti per cui $\infty+1=\infty+2= \infty+3 = \ldots = \infty$; ciò nonostante secondo Fontenelle l'infinito partecipa della stessa natura delle quantità per cui se ne può considerare il doppio, il triplo etc. indicati con 2∞, 3∞, etc… Questo per L'Huilier è inconcepibile, in quanto affermare che c'è un termine che limita tutti i naturali implica che non è possibile superare tale limite; non è possibile considerare il doppio dell'infinito come il termine ultimo oltre tutti i numeri che sono pari dal momento che la successione dei pari dovrebbe essere concepita come la metà della successione dei numeri naturali. Lo stesso si potrebbe dire di un qualsiasi altro moltiplicatore, ciò che dimostra l'assurdità che comporta l'attribuire un ultimo termine a chi non ne può possedere. I partigiani dell'infinito pretendono che si possa considerare il quadrato dell'ultimo termine dei naturali, qualunque esso sia; poiché la successione dei quadrati coincide con la successione delle somme dei dispari, allora ∞^2 dovrebbe coincidere con la somma della serie dei dispari prolungata fino a 2∞-1, che è l'infinitesimo numero dispari, quindi la successione dei naturali invece di arrestarsi a ∞ dovrebbe procedere fino a 2∞-1, mentre i termini precedenti, $\infty+1$, $\infty+2$, etc… coincidono tutti con ∞, e ciò è manifestamente assurdo. Inoltre i partigiani dell'infinito e in particolare Fontenelle stabiliscono la successione ∞^1, ∞^2, ∞^3, ∞^4 etc … per designare i differenti ordini dell'infinito, in modo che ogni elemento è infinitamente grande rispetto a quello che lo precede. Ma di due qualunque termini di tale successione, in quanto non sono quantità, non è possibile considerare il rapporto, condizione essenziale per ogni successione, così che essa stessa non può essere considerata una successione. Per L'Huilier bisogna fermare i partigiani dell'infinito sin dai loro primi passi per evitare il torrente di contraddizioni che ne deriva. Essi hanno costruito un edificio simile a una di quelle case incantate, piene di mistero ma sprovviste completamente di fondamenta.

L'Huilier passa poi in rassegna alcune opere che hanno trattato l'argomento e innanzi tutto il primo testo, *l'Analyse des Infiniment Petits* di de L'Hospital che, ancora al suo tempo, rappresenta il trattato più completo per avvicinarsi all'analisi infinitesimale. Egli ricorda come punto essenziale di tale opera la definizione di infinitesimo, da altri detto differenziale, come un ente trascurabile rispetto alle quantità finite: questo modo di porre la questione sebbene possa risultare conveniente nelle applicazioni in cui si richiede l'approssimazione e non il rigore, non può essere invece approvato in ambito teorico, in quanto non è chiaro quale sia la sua motivazione. La questione si ripropone per la seconda delle affermazioni qualificanti la teoria, cioè che si possa prendere indifferentemente l'una o l'altra di due quantità che differiscano per un infinitesimo. Inoltre, per de L'Hospital una linea curva può essere riguardata come un aggregato di infinite linee rette, ognuna infinitamente piccola. Ovviamente per L'Huilier una simile posizione è insostenibile: non è teoricamente concepibile che un cerchio possa essere considerato coincidente con un poligono, e Fontenelle ha attribuito ad Archimede una tale credenza. Il cerchio è il limite di una successione di poligoni, senza coincidere con alcuno di essi, e questa è sostanzialmente stata pure la conclusione degli antichi.

Questa grande contraddizione che consiste nel considerare la medesima quantità a volte come trascurabile, a volte come costituente delle quantità finite costringe i cultori dell'infinito ad uno sproloquio (*verbiage*) inintelligibile.

L'Huilier avvalora le sue idee ricordando come lo stesso Leibniz avesse dei dubbi nell'ammettere l'infinitamente grande e l'infinitamente piccolo assoluti: infatti a volte egli tratta gli infinitamente piccoli come degli incomparabili rispetto alle grandezze finite servendosi del paragone che essi sono come dei granelli di sabbia rispetto alla massa della terra, paragone che non tiene conto del rigore che si richiede alla matematica. Ma Leibniz altrove, nella *Teodicea* esprime anche un altro punto di vista negazionista dell'infinito o infinitesimo attuale quando afferma:

> *on s'embarasse dans les nombres qui vont à l'infini; on conçoit un dernier terme, un nombre infini ou infiniment petit, mais tous cela ne sont que des fictions; tout nombre est fini et assignable; toute ligne l'est de méme.*

Nell'edizione in latino dell'*Exposition* L'Huilier ricorderà che Leibniz aveva però asserito che comunque bisognava sostenere i metodi del calcolo differenziale in uso cercando di fornirne una spiegazione rigorosa; scrivendo a Giovanni Bernoulli il 31 dic. 1700 circa le obiezioni di Nieuwendijdt, Rolle e altri, aveva detto: «Perutile est os illis occludi per reductionem ad demonstrationes veterum more formatas». [Leibniz, Bernoulli, 1745, t.II,Ep.108].

Questo forniva anche la motivazione dell'*Exposition*.

Ritornando a de L'Hospital, L'Huilier, facendo propria la critica di Nieuwendijdt osserva che ancora peggio vanno le cose se si passa dagli infinitesimi del primo ordine a quelli di ordine superiore [de L'Hospital 1696, Sez. IV]. Infatti se un arco è infinitesimo del primo ordine allora il suo seno verso è infinitesimo del secondo ordine, ma se il seno verso è infinitesimo del primo ordine allora non si ha diritto di dire che l'arco è infinitesimo? Sostanzialmente, afferma L'Huillier, si lascia indeterminato il rapporto che rende due quantità infinitesime l'una rispetto all'altra e si può ritenere che un tale rapporto non esista affatto[15]. E così, come ha trovato inconcepibile lo stabilire diversi ordini per l'infinito, così non può ammettere essi siano riproposti, alla maniera di Fontenelle, per gli infinitesimi $\frac{1}{\infty}, \frac{1}{\infty^2}, \frac{1}{\infty^3}, \frac{1}{\infty^4}$, etc… visti come rapporti il cui denominatore è spinto all'infinito. La confusione del calcolo differenziale, osserva, nasce dal fatto che in esso si trattano i differenziali e le funzioni dei differenziali come fossero quantità, mentre invece non lo sono.

Ed infatti uno dei problemi nasce proprio dal supporre tali differenziali in partenza diversi da zero e in un secondo tempo, dopo aver sviluppato i calcoli nell'eliminare quelli di ordine superiore, supponendoli nulli. Questo non è lecito con le quantità. Come d'Alembert afferma con enfasi in *Différentiel*, se si effettua invece un limite le precedenti contraddizioni svaniscono, non si commettono errori e non si trascura niente. Secondo L'Huilier, quindi, la parola stessa differenziale non dovrebbe essere pronunciata nel calcolo. Comunque, sia ben chiaro, la notazione differenziale è molto comoda ed egli continuerà ad usarla ma esclusivamente, alla maniera di d'Alembert, come abbreviazione di espressioni contenenti dei limiti.

---

[15] L'Huilier potrebbe citare a tal proposito la critica svolta dall'olandese Nieuwentijdt nel 1694 nelle *Considerationes circa analyseos ad quantitates infinite parvas applicatae principia* e la confutazione fatta in proposito da d'Alembert.

L'Huilier riserva una lunghissima parte della sua requisitoria ad Eulero, dalla cui scuola direttamente proveniva e per cui provava grande rispetto. Gli rimprovera l'uso troppo disinvolto di infiniti e infinitesimi: infatti Eulero a volte parla di grandezze infinitamente piccole, riguardandole come grandezze che tendono a zero senza essergli eguali, a volte le tratta alla stregua di zeri assoluti; e poiché guarda all'infinito come inverso dell'infinitamente piccolo, trasporta l'indeterminazione che regna nell'infinitesimo anche nell'infinito. L'Huilier pensa che quando si considerano i rapporti degli incrementi delle quantità variabili ci sia uno stato in cui tali incrementi divengano evanescenti, e il calcolo differenziale è proprio il metodo per determinare il rapporto degli incrementi evanescenti che subiscono delle funzioni qualunque d'una quantità variabile quando a tale quantità è attribuito un incremento evanescente. Si può ritenere che Eulero consideri gli accrescimenti variabili e le loro funzioni non nello stato in cui sono già svaniti, ma in uno stadio intermedio tra l'esistenza e il niente, nello stato tra la vita e la morte, ironizza sottilmente L'Huilier, per cui una tale idea è arbitraria e non sufficiente per basare su di essa una scienza esatta. Per questo Eulero riguarda in definitiva tali incrementi come assolutamente nulli, sebbene a tratti essi sembrino risorgere dal nulla. La sua principale affermazione al riguardo è che due zeri possono avere tra loro un rapporto qualunque come segue secondo lui dal fatto che $n \times 0 = 1 \times 0$ implica che $n : 1 = 0 : 0$. Questo ragionamento non convince L'Huilier in quanto solo le quantità possono avere un rapporto e 0 è la negazione della quantità. L'annullarsi di una grandezza non dà nessuna informazione, è il nulla. Ad esempio se consideriamo la parabola d'equazione $y^m=x$ si ha: *sotttag : x = m : 1*, in tutti gli stati tranne che per $x=0$, in cui sia l'ascissa che la sottotangente si annullano. Tutto quello che si può dire non è relativo al rapporto *0:0*, che non ha più nulla da svelare, quello che possiamo dire è che nell'avvicinarsi di x a 0 il rapporto precedente tende a m, ma non possiamo dire che se $x=0$, esso coincide con m. Supponiamo che fra due uomini uno abbia sempre il quadruplo dei soldi dell'altro e supponiamo però, che conservandosi tale rapporto i loro affari vadano così male che si ritrovano senza un soldo entrambi: possiamo dire che la povertà dell'uno è il quadruplo della povertà dell'altro? In generale per determinare i rapporti di quantità infinitesime bisogna semplificare dividendo per i fattori infinitesimi comuni del numeratore e del denominatore in modo da determinare, quando possibile, il rapporto che le quantità avevano prima di annullarsi.

Segue un lungo discorso sul fatto che Eulero pone $\frac{a}{0} = \infty$ in quanto al diminuire senza limiti del denominatore cresce senza limiti la frazione. L'Huilier osserva che nessun significato può essere attribuito alla precedente eguaglianza, poiché, come non si stanca di ripetere, *0* non è una quantità e come tale non può essere usato in un rapporto. Per chiarire l'espressione $\frac{a}{0} =\infty$ Eulero la presenta nella forma: $\frac{1}{1-1} =1+1+1+1+ \ldots$, ove la somma a secondo membro è infinita.

L'Huilier obietta in vari modi a una tale argomentazione, provando che nascono una serie di assurdità dal trasportare operazioni che sono legittime tra quantità su enti che quantità non sono: infatti, asserisce, il vero valore di $\frac{1}{1-x}$ è $1+ x + x^2+ x^3 + \ldots x^{n-1}+ \frac{x^n}{1-x}$ e quindi $\frac{1}{1-1} =1+1+1+1+ \ldots + \frac{1}{1-1}$, da cui si possono trarre le conclusioni più strane ad esempio che $\frac{1}{1-1}$ è doppio di sé stesso. Inoltre nello stesso ordine di idee si potrebbe anche osservare che, essendo

$$0 = 1^n - 1^n = (1-1)(1^{n-1}+1^{n-2}+ \dots +1)$$

dove nella seconda parentesi compaiono n addendi, si avrebbe: $\infty = \frac{1}{n} \times \frac{1}{0} = \frac{1}{n} \times \infty$ e quindi l'infinito verrebbe a coincidere con l'n-sima parte di sé stesso. In particolare per $n=\infty$ si avrebbe: $\infty = \frac{1}{\infty} \times \infty = 0 \times \infty$. Nel caso poi di $n=0$ si avrebbe: $\infty = \frac{1}{0} \times \infty = \infty \times \infty = \infty^2$, e pertanto l'infinito del primo ordine coinciderebbe con quello del secondo ordine.

8 – Conclusioni

L'Huilier conclude la sua esposizione asserendo che i principi del calcolo, spogliati di ogni idea dell'infinito, possono essere riformulati in base al concetto di limite e di rapporto differenziale e ricapitolando possono essere ricondotti infine al seguente principio:

«Se una quantità variabile suscettibile di limite gode costantemente d'una certa proprietà il suo limite gode della stessa proprietà». [L'Huilier 1787, 167].

Secondo Boyer il principale errore in cui incappa L'Huilier è fornito proprio da tale interpretazione della legge di continuità di Leibniz (che L'Huilier non cita): osserva infatti Boyer che una successione di numeri razionali può avere come limite un numero irrazionale, cioè la qualità o proprietà di essere razionale non si conserva al limite. Allo stesso modo la circonferenza è limite di una successione di poligoni ma non è un poligono. L'Huilier quindi non ha preso in considerazione e non ha sufficientemente approfondito questa possibilità [Boyer 1959, 256].

Ricordiamo che per alcuni all'epoca, ad esempio per il cardinale Gerdil, uno studioso anch'egli seguace di d'Alembert, la questione semplicemente non si poneva in quanto le successioni di razionali che non siano successioni geometriche o comunque non siano definite con legge espressa da formule in modo uniforme non si pensava che dessero luogo a numeri, e così $\sqrt{2}$ non era considerato un numero [Biacino, Viola 2000, 54]. Una trattazione dei numeri reali era infatti nel Settecento in generale ancora non definita, ad esempio erano noti diversi sviluppi per il calcolo di π, ma solo da pochi anni si sapeva che π non è razionale. D'altro canto nemmeno nella seconda edizione dell' *Exposition élémentaire* ci sono considerazioni su successioni di razionali che tendono a numeri irrazionali; π è citato come un esempio della necessità di estendere la definizione di limite anche alle successioni che alternativamente differiscono per difetto o per eccesso da una quantità data, in modo tale che sia il difetto che l'eccesso possano essere resi minori di una qualunque quantità assegnata: infatti non c'è dubbio, afferma L'Huilier, che sia

$$\frac{\pi}{2} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

essendo $\frac{\pi}{2}$ il quadrante della circonferenza di raggio 1.

Nessuna considerazione è svolta circa il valore π (che comunque è indicato col simbolo *p*). Comunque, anche la semplice osservazione che esistono successioni di numeri positivi o comunque non nulli il cui limite è zero avrebbe forse potuto mettere in guardia dall'enunciare un principio in generale non valido.

Ma, al di là di questo errore nell'interpretazione della vaga idea espressa nella legge di continuità di Leibniz, il progetto di L'Huilier si caratterizza per la negazione senza possibilità di appello dell'infinito attuale. L'Huilier è deciso a cancellare la parola infinito in matematica, sia riferita alla grandezza che alla piccolezza. In sua vece egli propone l'uso della parola *infinible*, ad indicare la possibilità di non poter portare a termine un'operazione, o di non poter colmare una distanza senza fine, mentre la prima, infinito, comporta che si sia compiuta l'operazione e si sia raggiunto l'ultimo termine di un percorso che non ha fine. Tutta l'opera cerca di dimostrare come sia possibile riproporre l'infinito potenziale contrapposto all'infinito attuale senza che nessuno degli importanti risultati del calcolo infinitesimale vada perso, ma costruendo una solida base per esso: e infatti, osserva l'Huilier, il concetto di limite è strettamente collegato con l'infinito potenziale e lo regolamenta rigorosamente, come prova una serie di esempi: così invece di asserire che se la differenza di due quantità infinite è una quantità data allora le due quantità infinite sono eguali si può asserire che il limite del rapporto di due quantità *infinibili* la cui differenza è una quantità data è rapporto di eguaglianza e parimenti, invece di dire che un arco infinitesimo e la corda sottesa sono eguali usando la teoria dei limiti si dirà senza possibilità di errore che il limite del rapporto di un arco di curva *infiniblement* piccolo e della corda sottesa è 1. Di fatto, come è sottolineato in [Bottazzini 2018], L'Huilier nega proprio quel concetto che si era impegnato di definire nel partecipare al concorso indetto dall'Accademia, riducendolo al suo solo aspetto potenziale: così facendo egli elimina la possibilità di considerare l'infinito attuale, estremamente utile come mezzo di valutazione degli aggregati; questa possibilità sarà perlustrata in tutti i suoi aspetti solo circa un secolo dopo da parte di Weierstrass, Dedekind e Cantor.

Importante è dar atto a L'Huilier di essere sostanzialmente riuscito a ricondurre tutta la matematica del tempo ad una formulazione in base alla definizione di limite: il rapporto differenziale è il limite del rapporto dell'incremento della variabile dipendente a quello corrispondente della variabile indipendente, i coefficienti angolari delle tangenti sono correttamente inquadrati come limiti dei coefficienti angolari delle secanti; massimi, minimi, flessi sono studiati facendo appello allo sviluppo delle funzioni in serie di Taylor, serie di Taylor la cui dimostrazione pur essendo sostanzialmente erronea, fa uso corretto dei differenziali; l'integrazione è proposta come operazione inversa della differenziazione; una grande quantità di problemi di carattere isoperimetrico è svolta a livello elementare in applicazione della teoria, etc... Ed è però pur vero che l'esposizione a volte non è impeccabile, non sono affrontati problemi di particolare difficoltà e novità, ciò che avrebbe contribuito a dare maggior prestigio all'argomento trattato. Queste sono forse le cause dello scarso entusiasmo con cui l'opera fu accolta.

Ma fu soprattutto la novità del nuovo sistema che interpretava tutto il calcolo svincolandolo da considerazioni metafisiche e ancorandolo invece a procedure di tipo aritmetico che svolse un ruolo decisivo in tal senso. Pertanto, nonostante alcune mancanze formali e a volte una eccessiva pesantezza nella scrittura, e invece per il fatto che, a differenza di altri matematici coevi che si ispiravano al concetto di limite, ormai abbastanza frequentato alla fine del Settecento, ma senza riuscire a dominarlo, egli riesce a svolgere un lavoro elementare ma quasi sempre rigoroso, L'Huilier può veramente essere considerato ad un breve passo dal successivo lavoro di sistemazione dei fondamenti dell'analisi iniziato da Cauchy, e la sua opera va interpretata come l'anticipazione del processo di aritmetizzazione del calcolo in cui saranno impegnati molti matematici dell'Ottocento.

Bibliografia

ARCHIMEDE (1974). *Opere.* A cura di Attilio Frajese, Torino: U.T.E.T.

BIACINO Loredana (2010). Temi generali nell'opera di Luca Valerio. *Boll. Storia Sci. Mat. A. XXX- N. 2*.

BIACINO Loredana (2019). Tangente e differenziale nell'articolo Différentiel di d'Alembert sull'Encyclopédie. www.Angoloacuto. *org. III serie, N.21 Anno VI, 23 dicembre 2019*.

BIACINO Loredana, VIOLA Gabriella (2020). Giacinto Sigismondo Gerdil e il problema dell'infinito. *Matematica, Cultura e Società, UMI, Serie 1, Vol. 5, N.1,33-58*.

BOTTAZZINI Umberto (2018). *Infinito,* Bologna: Il Mulino.

BOYER Carl (1949). *The History of the Calculus and its Conceptual Development*. Dover, New York.

CARNOT Lazare (1797). *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitesimal*, Paris: Mallet-Bachelier.

CAUCHY Augustin Louis (1821). *Cours d'analyse de l'Ėcole Royal Polytechnique,* Paris: Chez Debure frères.

CAUCHY Augustin Louis (1823). *Resumé des Leçons données a l'Ėcole Polytechnique sur le Calcul Infinitésimal*. T.1, Paris: Imprimerie Royale.

COUSIN Jacques Antoine Joseph (1796). *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*. Paris: Régent et Bernard.

D'ALEMBERT LE ROND Jean (1754). "Asymptote", "Différentiel", "Infini", "Limite", "Série". *Dictionnaire Raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers. Paris*.

DE LA CHAPELLE, Jean Baptiste (1756). "Fluxion", *Dictionnaire Raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers, Paris.*

DE L'HÓSPITAL Guillaume (1696). *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes,* Paris*:* De l'Imprimerie Royale, Montalan.

EULERO Leonhard (1744). *Methodus inveniendi lineas curvas sive solutio problematis isoperimetricis latissimo sensu accepti,* Lausannae et Genevae, Apud Marcum Michaelem Bousquet et Socios.

FERMAT Pierre (1891-1916). I. Methodus ad disquirendam maximam et minimam. IV. Methodus de maxima et minima. VIII. Analysis ad refractiones. IX. Synthesis ad refractions, *In Oeuvres de Fermat, par Paul Tannery et Charles Henry, Gauthier Villars, Paris*.

FONTENELLE Bernard LeBovier de (1727). *Élements de la géométrie de l'infini,* Paris*:* De l'Imprimerie Royale.

GERDIL Giacinto Sigismondo (1845). *Opere edite ed inedite del Cardinale Giacinto Sigismondo Gerdil*. *Vol. II*, Firenze: presso G. Celli.

KLINE Morris (1972). *Storia del pensiero matematico,* Torino: Einaudi.

LAGRANGE Joseph Louis (1762). Essai d'une nouvelle methode pour determiner les maxima et les minima des formules integrales indefinies, *Miscellanea Taurinensia*, 2.

LAGRANGE, Joseph Louis (1797). *Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel,* Paris: De l'Imprimerie de la République, Prairal.

LEIBNITZ Gottfried Wilhelm, BERNOULLI Johan (1745). *Commercium philosophicum et mathematicum. T. I, ab anno 1694 ad annum 1699,* Lausannae et Genevae.

L'HUILIER Simon Antoine (1782). *De relatione mutua capacitatis et terminorum figurarum geometrice considerata: seu de maximis et minimis, pars prior elementaris,* Sumptibus et typis Michaelis Groll Varsaviae.

L'HUILIER Simon Antoine (1787). *Exposition élémentaire des principes des calculs supérieures pour servir à la demande d'une théorie claire et précise de l'infini mathématique*, Berlin.

L'HUILIER Simon Antoine (1795). *Principiorum Calculi Differentialis et Integralis Expositio Elementaris,* Tubinga.

MONTUCLA Jean Etienne (1802). *Histoire de Mathématiques III,* Paris: Henri Agasse.

NEWTON Isaac (1687). *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, London.

POZZO Riccardo (1989). *Hegel: "Introductio in philosophiam". Dagli studi ginnasiali alla prima logica (1782-1801),* Firenze: La Nuova Italia. Pubblicazioni della Facoltà di Lettere e Filosofia dell'Università degli Studi di Milano,129.

ROBINS Benjamin (1735). *A Discourse concerning the Nature and Certainty of Sir Isaac Newton's Method of Fluxions and of Prime and Ultimate Ratios,* London.

SIMSON Robert (1776). *De limitibus Quantitatum et Rationum Fragmentum.* Opera postuma. Glasguae.