

# Periodico di Matematica

**PER  
L'INSEGNAMENTO SECONDARIO SUPERIORE**

**Anno XXXIX - Serie IV – volume VI (2)**

**Giugno 2024**

A cura di

**Ferdinando CASOLARO – Franco EUGENI – Luca NICOTRA**

Edizioni



AFSU



MATEMATICA - FISICA - INFORMATICA

# PERIODICO DI MATEMATICA

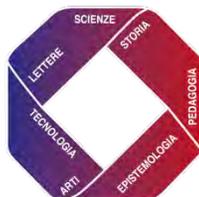
PER

L'INSEGNAMENTO SECONDARIO SUPERIORE

Fondato da Davide Besso nel 1886,  
continuato da Aurelio Lugli e Giulio Lazzeri  
e attualmente a cura di

Ferdinando Casolaro - Franco Eugeni - Luca Nicotra

Anno XXXIX - Serie IV - Volume VI (2)  
Giugno 2024



ACCADEMIA DI FILOSOFIA DELLE SCIENZE UMANE

### **Comitato Direttivo**

Franco Eugeni  
Ferdinando Casolaro  
Giovanna Della Vecchia  
Antonio Lungo  
Antonio Maturo  
Luca Nicotra  
Renata Santarossa

### **Comitato Scientifico**

Gian Italo Bischi (Urbino)  
Giordano Bruno (Roma)  
Mauro Cerasoli (L'Aquila)  
Giuseppe Conti (Firenze)  
Franco Francia (La Spezia)  
Giangiacomo Gerla (Napoli)  
Stefano Innamorati (L'Aquila)  
Paolo Manca (Pisa)  
Raffaele Mascella (Teramo)  
Fabrizio Maturo (Caserta)  
Mario Mandrone (Napoli)  
Pietro Nastasi (Palermo)  
Canio Noce (Salerno)  
Nicla Palladino (Perugia)  
Salvatore Rao (Napoli)  
Ezio Sciarra (Chieti)  
Salvatore Sessa (Napoli)  
Massimo Squillante (Benevento)  
Luca Tallini (Teramo)  
Ugo Vaccaro (Salerno)  
Giovanni Vincenzi (Salerno)

### **Copertina e progetto grafico**

Luca Nicotra

### **Direzione e redazione**

*Direttore responsabile:*

Luca Nicotra

*Direttori di redazione:*

Franco Eugeni  
Via Lucania 1 l.  
64026 Roseto degli Abruzzi (TE)  
cell. 338 9644305

[eugenif3@gmail.com](mailto:eugenif3@gmail.com).

Ferdinando Casolaro  
Via Camaldolilli n. 1B  
80128 Napoli- cell. 347 1960693

[ferdinando.casolaro@unina.it](mailto:ferdinando.casolaro@unina.it)

Luca Nicotra  
Via Michele Lessona 5  
00134 Roma- cell. 340 5065616  
[luca.nicotra1949@gmail.com](mailto:luca.nicotra1949@gmail.com).

*Segreteria di redazione:*

Giovanna Della Vecchia (Napoli)

[giovanna.dellavecchia@gmail.com](mailto:giovanna.dellavecchia@gmail.com)

### **Rivista di proprietà di:**

Accademia di Filosofia delle  
Scienze Umane - Zona Industriale  
Colleranese - 65021 Giulianova  
(TE) C.F. 91053660675

Copyright © 2024 Edizioni AFSU -  
UniversItalia-Teramo, Roma -  
ISSN Online: 2612-6745

® Reg. Versione online n.695/2019  
del 19 luglio 2019 e Versione  
cartacea n.695/2021 del 3 giugno  
2021 Tribunale di Teramo.

Tutti i diritti riservati.

ISBN 978-88-3293-778-7. Gli scritti  
apparsi sulla Rivista possono essere  
pubblicati altrove purché se ne  
dichiari la fonte.

Il Periodico di Matematica, che rinasce dopo 100 anni, si propone, oggi, come allora, di orientare i propri obiettivi di ricerca alla didattica dell'astronomia, della fisica, della matematica, aggiungendo a queste discipline il moderno campo dell'informatica. La metodologia proposta sarà quella storico-fondazionale-divulgativa, con forte interesse nelle direzioni di studi elementari da un punto di vista superiore. I saggi pubblicati, vagliati dai Referee del Comitato scientifico, saranno valutati tenendo conto dei seguenti criteri:

- originalità nella stesura del lavoro e dell'apparato critico;
- significatività didattica del tema proposto;
- correttezza scientifica e rigore metodologico;
- proprietà di linguaggio e fluidità del testo;
- approfondito apparato di riferimenti bibliografici.

I *referee* restano anonimi per un anno. Le comunicazioni, i report, i pareri e tutti i dati dei *referee* sono trattati e gestiti dal Comitato Direttivo, preposto alla redazione.

Per essere inseriti nella mailing list di coloro che, via mail, riceveranno il *Periodico di Matematica*, occorre scrivere, inviando un mini-curriculum di poche righe, alla prof.ssa Giovanna Della Vecchia (Napoli) [giovanna.dellavecchia@gmail.com](mailto:giovanna.dellavecchia@gmail.com). Tutti i lavori vanno inviati al prof. Franco Eugeni, ([eugenif3@gmail.com](mailto:eugenif3@gmail.com)) secondo il template word e le norme editoriali della Rivista scaricabili dal sito dell'A.F.S.U. ([www.afsu.it/istruzioni-per-gli-autori/](http://www.afsu.it/istruzioni-per-gli-autori/)).

I profili biografici dei membri del Comitato Direttivo sono disponibili nel sito [www.afsu.it](http://www.afsu.it).

«Periodico di Matematica» è una rivista trimestrale distribuita con Licenza Creative Commons Attribuzione - Non commerciale - Non opere derivate 4.0 Internazionale:



## PEZZULLI

I pezzulli, seguendo una antica idea di Roberto Giannarelli attuata sin dai primi numeri di «Archimede» (1949) e di «La scienza per i Giovani» (1952), poi ripresa da Bruno de Finetti per il «Periodico di Matematiche», sono piccole pillole di saperi e riflessioni, atti a riempire spazi vuoti nel testo di una rivista (ad esempio la pagina pari, o metà della stessa, di fine lavoro se vuota).

## AVVERTENZE PER I COLLABORATORI

Gli articoli devono essere redatti nella forma *camera ready*, con MS Word utilizzando il *template* scaricabile dal sito dell'AFSU:

[https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2020/03/Template\\_Periodico-di-Matematica-18-02-2020.doc](https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2020/03/Template_Periodico-di-Matematica-18-02-2020.doc)

rispettando le norme editoriali pubblicate nello stesso sito:

<https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2020/03/Principali-Norme-Editoriali-per-la-scrittura-degli-articoli-18-02-2020.pdf>

Le figure utilizzate devono essere in alta risoluzione (300 dpi).

## SOSTENITORI AFSU

Ferdinando Casolaro (Napoli), Silvana D'Andrea (Roseto), Franco Francia (Pisa), Gianni Di Paolo (Teramo), Diana Le Quesne (Roseto), Franco Eugeni (Roseto), Antonio Maturo (Pescara), Antonio Napoletano (Ancona), Luca Nicotra (Roma), Marisa Quartiglia (Roseto), Renata Santarossa (Napoli), Ezio Sciarra (Pescara), Alberto Trotta (Salerno), Salvatore Sessa (Napoli).

## AMICI AFSU

Ivano Casolaro (Napoli) Gianluca Eugeni (L'Aquila), Andrea Manente (Teramo), Enrico Massetti (Ascoli Piceno), Giovanni Grelli (S.Benedetto del Tronto), Francesco Pezzoli (Ascoli Piceno), Federico Verrigni (Pineto), Alessandro Vicerè (Roseto), Orfeo Zaffi (Penne - PE).

Finito di stampare nel mese di giugno 2024 presso UniversItalia

Via di Passolombardo 421, 00133 Roma Tel. 06/2026342 -

e\_mail: [info@universitaliasrl.it](mailto:info@universitaliasrl.it)-[www.unipass.it](http://www.unipass.it).

## INDICE

Sofia La Franca	7
<i>Dall'intuizione alla scoperta</i>	
Enrico D'Amora	23
<i>Un'estensione del metodo di Erone per le approssimazioni delle radici cubiche</i>	
Franco Francia	33
<i>Coppie di punti parallele e congruenti</i>	
Giuliano Laccetti	55
<i>Dall'Università di Federico II all'istruzione ... differenziata</i>	
Giuseppe D'Angelo	69
<i>Entropia</i>	
<i>Profili biografici degli autori</i>	103



# ARTE SCIENZA

*magazine*

Alberto Macchi, Angela Ales Bello, Antonio Castellani, Caterina Della Vecchia, Eva Sansanelli, Ferdinando Casolaro, Franco Eugeni, Fulvio Guerrieri, Gaspare Mura, Giancarlo Gaeta, Ilaria Calò, Isabella de Paz, Luca Nicotra, Luigi Campanella, Mario de Paz, Paola Dallavalle, Pierluigi Assogna, Romano Romani, Stefano Torossi, Vinicio Busacchi, Viola Spicuglia, Yansha Yu-Sandstrom

SE VUOI LA PACE NON PREPARARE LA GUERRA	QUANDO LA SCIENZA È SOCIAL	DIO ESISTE E VI SPIEGO PERCHÉ	LEGAMI CHIMICI E COSCIENZA	PRESENZE DI CARAVAGGIO IN CIOCIARIA	LA VERITÀ IN MATEMATICA DA GÖDEL A EUCLIDE	COME CURARE LA PELLE DEL PIANETA
---	----------------------------------	-------------------------------------	-------------------------------	---	--	--

Anno IV - N.7 giugno 2024 - Supplemento di *ArteScienza*  
<http://www.artescienze-arte-scienza.it>  
Direttore Responsabile: Luca Nicotra - Direttore di redazione: Isabella De Paz  
Registrazione n.194/2014 del 23 luglio 2014 Tribunale di Roma - ISSN online 2385-1961 - Proprietà dell'A. P.S. "Arte e Scienza"

# *Dall'intuizione alla scoperta*

## *L'ordine del Caos*

Sofia La Franca\*

\*Liceo Classico Torquato Tasso; sofialf700@gmail.com



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v6n2.132

**Sunto:** *Si propone una comprensione della natura e dell'Universo attraverso lo studio di componenti della geometria non euclidea quali il numero aureo e i frattali e la loro implicita presenza nei più grandi capolavori architettonici e naturali. Tale visione sarà arricchita da riflessioni basate sulla filosofia classica, in particolare la filosofia platonica.*

**Parole Chiave:** *Frattali, numero aureo, filosofia*

**Abstract:** *It aims to understand nature and the Universe through the study of components of non-Euclidean geometry such as the golden number and fractals and their implicit presence in the greatest architectural and natural masterpieces. This vision will be enriched by reflections based on classical philosophy, in particular Platonic philosophy.*

**Keywords:** *Fractals, golden number, philosophy*

## 1 – I frattali: una dimensione frazionaria

Si definisce frattale uno schema in cui una figura è ripetuta infinite volte su scala decrescente, dunque è dotata di omotetia interna. L'ideatore della teoria unificata sui frattali è stato Benoit Mandelbrot, il quale per definire tali strutture geometriche ha formulato il seguente sistema:

$$z_{n+1} = z_n^2 + z_c, z_0 = 0$$

Dove  $z_{n+1}$ ,  $z_n$  e  $z_c$  sono numeri complessi e dove  $z_c$  è costante, applicando ripetutamente il medesimo procedimento.

Nonostante l'ingente lavoro sviluppato da Mandelbrot, bisogna sicuramente citare Hausdorff, suo predecessore, il quale introduce la nozione di dimensione frattale, conosciuta anche come dimensione di Hausdorff-Besicovič, poiché quest'ultimo ha sviluppato molti degli strumenti di calcolo necessari.

### 1.1 – Due poli attrattivi

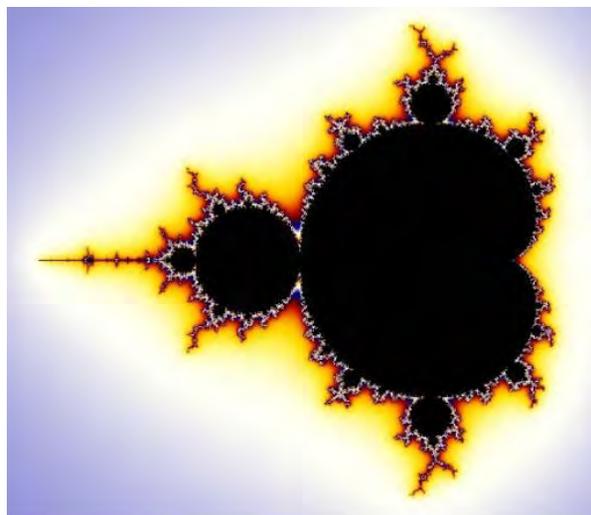
Nel caso  $z_c$  sia nullo, si possono verificare 3 situazioni:

1. i punti che distano 1 dall'origine, ossia stanno su una circonferenza di  $r=1$ , non subiscono trasformazioni (poiché  $z_{n+1}=z_n$ , se  $z_n=1$ );
2. i punti che distano meno di 1 dall'origine, ossia sono all'interno della circonferenza di  $r=1$ , si muovono verso l'origine (poiché  $z_{n+1}<z_n$ , se  $z_n<1$ );
3. i punti che distano più di uno dall'origine, ossia esterni alla circonferenza di  $r=1$ , si muovono verso l'infinito (poiché  $z_{n+1}>z_n$ , se  $z_n>1$ ).

In questo modo si vengono a definire due "poli attrattivi", verso lo zero e verso l'infinito.

Nel caso in cui  $z_c \neq 0$ , il risultato varia in base ai valori:

1. per certi valori di  $z_c$ , continuando ad applicare l'equazione, i punti del piano si allontanano, per cui si dice che il percorso è "imprevedibile", i punti sono detti "di fuga";
2. per certi valori di  $z_c$ , i punti si riversano verso l'interno e non "fuggono", creando le forme intricate dalla bellezza unica, denominate frattali. In questo caso il percorso è prevedibile e punti sono "prigionieri".



**Fig. 1 - L'insieme di Mandelbrot**

## 1.2 - Gli insiemi di Julia

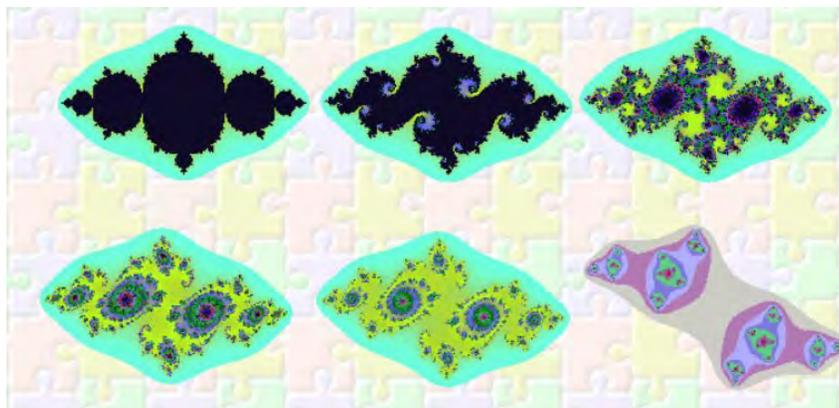
Gli insiemi dei due punti hanno i rispettivi nomi di insieme di fuga e insieme prigioniero. Sorge dunque spontanea la domanda:

1) Qual è il “limite” che separa l’insieme di fuga dall’insieme prigioniero?

La risposta a tale domanda è data da un teorema dimostrato da Mandelbrot stesso:

*Se un punto si trova ad una distanza maggiore o uguale a due unità dall' origine, allora è destinato all'infinito; se invece si trova ad una distanza minore a due unità dall'origine, allora è un punto prigioniero.*

Tale “limite” è chiamato insieme di Julia o, in maniera più precisa, insiemi di Julia (ossia una famiglia di insiemi dipendenti dal parametro  $z_c$ ) e può essere connesso o disconnesso, quando presenta discontinuità nella figura.



**Fig. 2 - Insiemi di Julia**

## 2 - Lo studio del Caos

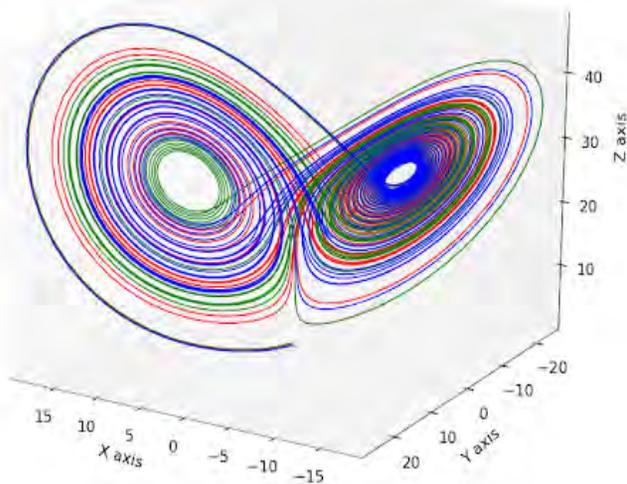
I frattali per la loro natura complessa rientrano nella teoria del Caos. I Greci lo chiamavano χάος, la cui radice etimologica indica il vuoto, ma ciò non significa che debba essere interpretato come “privo di”; anzi, nella teogonia esiodea caos è il primo essere generato: ἐγένετο. Con la dottrina di Anassagora assume una formulazione teorica capace di adattarsi al naturalismo greco, ossia la materia informe plasmata dall'intelletto divino (νοῦς), che in Platone prende il nome di Demiurgo. Secondo la filosofia platonica il Demiurgo non è “il creatore” ma “l'artefice divino”, quindi colui che apporta ordine alla sostanza. Sempre appartenente a tale filosofia è il mito della caverna, per cui gli uomini possono solo vedere l'ombra degli oggetti, il riflesso della verità. Quest'idea è applicabile, ad esempio, alla felce “ideale” e reale, di cui si tratterà più approfonditamente nel paragrafo 4.

### 2.1 - Il modello del Caos

La visione degli antichi si rivela però limitata; infatti, negli anni '60 nasce convenzionalmente la teoria del Caos, attraverso cui si comprende che il Caos ha in sé un modello, un ordine, e non deve essere arbitrariamente concepito come una matassa da srotolare, bensì da comprendere nella sua forma prima. Uno degli elementi tra i più noti di una così vasta teoria è il pendolo doppio, il cui comportamento è particolarmente sensibili alle condizioni iniziali.

I frattali svolgono un ruolo essenziale nella teoria del Caos, poiché costituiscono i suddetti attrattori strani. Un attrattore,

un insieme a cui tende un sistema dinamico (ad esempio il pendolo), si dice strano se ha una dimensione che oscilla in una dimensione non-intera, frazionaria, frattale appunto.



**Fig. 3- Attrattore di Lorenz**

### **3 – La polvere di Cantor**

La polvere di Cantor rientra tra i modelli più noti di frattali ed è antecedente alla teoria di Mandelbrot. Preso l'intervallo  $[0,1]$  per ogni passo, dopo averlo diviso in tre parti uguali, si sottrae la sezione centrale dell'intervallo, ossia l'insieme aperto. Data la sua natura frattalica la dimensione non è intera, bensì oscilla tra un insieme di punti (dimensione 0) e una linea (dimensione 1). Per il primo passaggio ( $p=1$ ) si individuano tre parti mediante i punti  $1/3$  e  $2/3$ , in seguito si

elimina la parte centrale e si rimane con due intervalli  $[0, 1/3] \cup [2/3, 1]$ . Tale procedimento può essere applicato all'infinito, fino a formare appunto la polvere da cui prende il nome tale frattale. Formalmente si afferma che per  $p$  che tende a infinito l'insieme  $C$  è costituito dagli estremi ottenuti ad ogni passaggio  $p$ ; di conseguenza saranno sempre presenti infiniti punti.



Fig. 4 - La polvere di Cantor

#### 4 - La natura a somiglianza dei frattali

Per Platone il mondo delle idee non si interseca con la Natura, regno della realtà sensibile e in costante mutamento. La natura diventa così subordinata dell'idea, un'immagine riflessa e imprecisa. Tale sembra anche l'essenza dei frattali, i quali si ripetono nelle strutture materiali con la differenza di essere determinati da una fine. Si prendano in analisi il cavolo romano, il cavolfiore, la dalia, il girasole, la felce.

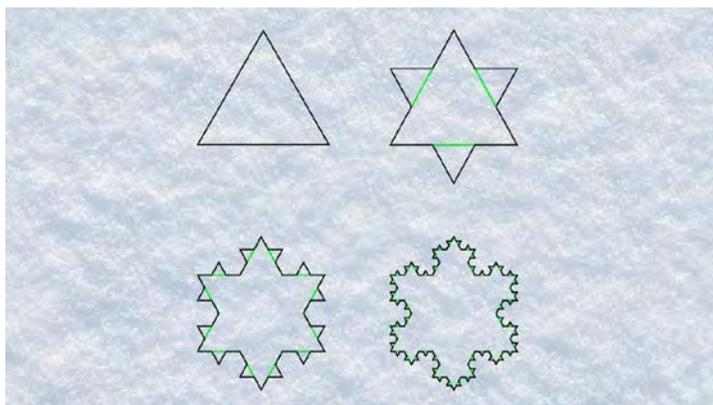


**Fig. 5- Confronto fra una felce “ideale” e una reale**

#### **4.1 - L’isola di von Koch**

In natura si possono ritrovare i frattali “imperfetti”, in quanto la loro ricorsività è limitata, come già esposto, nelle ramificazioni di rami e radici, nelle coste frastagliate, nei fiocchi di neve che nel mondo delle idee si realizzano nella curva di Koch, la quale poi ripetuta più volte costituisce l’isola di von Koch (vedi figura 6, immagine 4).

Partendo da un triangolo equilatero, ogni lato si suddivide in tre parti, ovviamente più si ripeterà il processo più la forma sarà dettagliata.



**Fig. 6 - La curva di von Koch**

La sua dimensione è  $\sim 1,26$  che otteniamo dal seguente ragionamento:

$$4^{1/D} = 3 \Rightarrow \log_3 4$$

Calcolata la dimensione (D), conoscendo come calcolare l'area del triangolo  $L^2/4 \sqrt{3}$  (dove L è il lato), possiamo istituire un rapporto di autosomiglianza:

$$\frac{L^2}{(\log_3 4)^2} = \frac{L^2 \sqrt{3}}{4 A}$$

Segue il ricavo dell'Area (A):

$$A = (\log_3 4)^2 \frac{L^2 \sqrt{3}}{4} \sim 1,26 \frac{L^2 \sqrt{3}}{4}$$

Per il perimetro (P) si procede ricordando che tale successione è divergente e ogni volta aumenta di  $4/3$ , dunque partendo dal triangolo equilatero (vedi figura 5, immagine 1)

$P=3L$ , alla seconda ripetizione  $p= 3(L/3+ L/3+ L/3+ L/3) = 3(4/3L)$  e così via. Generalizzando per  $n$ , si ottiene

$$3(4/3L)n (L)$$

Il numero ottenuto  $D$  indica la relazione tra i numeri di elementi costituenti e le loro dimensioni, una bellezza nascosta come in 1,26 anche in altri numeri irrazionali.

## 5 - Il numero aureo: una bellezza nascosta

Prendiamo un segmento e dividiamolo in due parti, tali che il rapporto tra la sua parte maggiore ( $a$ ) e la sua parte minore ( $c$ ) sia uguale al rapporto tra l'intero segmento ( $c$ ) e la sua parte maggiore.

$$(a+b) / a = a / b = \varphi = 1,6180339887... = \sim 137,5^\circ$$

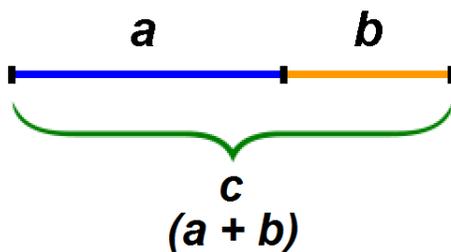


Fig. 7- Il rapporto  $\varphi$  rappresentato visivamente

Il rapporto ottenuto è definito rapporto aureo, per secoli ne è stata percepita l'armoniosità, e può essere descritto anche attraverso la Sequenza di Fibonacci:

$$1+2=3; 3+2=5; 3+5=8; 5+8=13 \text{ ecc...}$$

Possiamo intuire la formazione di tale serie, formata da una successione di numeri, ognuno tale da essere la somma dei due che lo precedono. Nella natura da noi osservabile si scorge la Sezione Aurea come un flusso, un movimento in itinere, che si moltiplica seguendo la logica geometrico-matematica ordinata.

Alcuni esempi sono presentati da: il cavolo romano, l'andamento filiforme del *Nautilus pompilius*, le code degli Hippocampi.



**Fig. 8 - Nautilus pompilius.**



**Fig. 9 - Il cavolo romano.**

Il cavolo romano, oltre a possedere la struttura ricorsiva del frattale (già esaminata in precedenza), conta sempre un numero di rosette uguale a un numero della Sequenza di Fibonacci. Le foglie sono disposte secondo l'angolo aureo, il quale si dimostra ottimale nella crescita dei vegetali, come anche il cavolfiore.

## **6 - Il numero aureo in architettura**

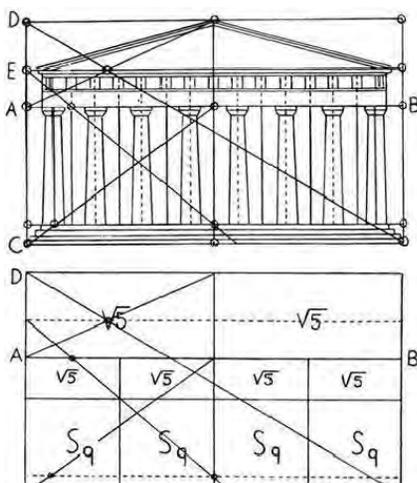
Il numero aureo prende il nome di  $\phi$  dallo scultore greco Fidia, il quale supervisionò i lavori per la costruzione del Partenone di Atene, alla cui costruzione parteciparono Ictino, Callicrate e Mnesicle. In tale tempio si possono ritrovare rettangoli aurei nella facciata come nelle statue.

La Sezione Aurea fu scoperta da Ippaso di Metaponto ed era già stata nominata nel libro VI degli *Elementi* di Euclide, secondo tale definizione:

*Una linea retta è divisa secondo la proporzione estrema e media quando l'intera linea sta alla parte maggiore così come la maggiore sta alla minore.*

Una definizione che corrisponde a quella data nel paragrafo 4.

I rapporti aurei ritornano nel Canone di Policleto, in cui la testa è  $1/8$  dell'intero corpo e il piede  $1/7$ .



**Fig. 10 - Il Partenone**

La Sezione Aurea si rivela in numerosi templi di cui Atene è l'archetipo, riconfermandosi ancora una volta un esempio per tutta l'antichità. Si prenda in considerazione il tempio della Segesta elima. Ancora una volta il mondo dell'idee, in questo caso la perfezione dei modelli matematici, si proietta in un mondo di materia, nei petali di un fiore come nelle opere,

attraverso cui gli antichi cercavano la connessione con il divino, una “coincidenza” alquanto affascinante.

## 7 - Il DNA: il “divino” in ognuno di noi

La sezione trasversale del DNA coincide con il decagono regolare, ossia esattamente 10 volte il triangolo aureo. La molecola di DNA è lunga 34 angstrom e larga 21 per ogni ciclo della sua struttura, due numeri che tra di loro sono in rapporto aureo. La spirale, simbolo di dinamismo ed elasticità, ricorre nelle galassie e nelle conchiglie.

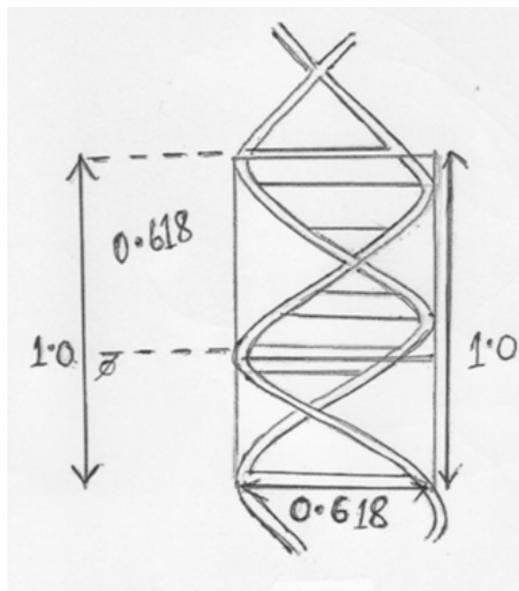


Fig. 11 - Il numero aureo nel DNA

## **8 - L'Universo frattale: una nuova idea, una vecchia intuizione**

Il fisico Luciano Pietronero ha proposto un'interpretazione frattale dell'Universo. È infatti applicabile la proprietà di auto-somiglianza non tra le singole galassie ma considerando gli ammassi galattici.

In un solido frattale la massa decresce al crescere del volume, poiché presenta al suo interno diversi spazi vuoti. Questo porta a ipotizzare che diverse regioni dello spazio, in base alla massa e alla densità, si espandono in maniera disomogenea.

Una teoria sicuramente con i suoi dubbi, che tuttavia ci porta a riflettere su quanto i frattali abbiano influenzato la scienza e di come delle semplici intuizioni filosofiche trovino la loro massima realizzazione nelle scienze, proiettando e concretizzandone le idee. Un'idea rivoluzionaria che cela in sé un'aspirazione più grande: trovare una "teoria del tutto".

Una nuova idea da trovare, ma rifacendosi alle intuizioni degli antichi, continuare ad alimentare la scintilla scatenata con la filosofia e proiettarla nella scienza.

## Bibliografia

AMPOLO C., GIGLIO R., MAGNETTO A., PARRA M. C. (2019).  
Centro Ettore Majorana. Le Mostre. Blackett- San Domenico -  
Wigner San Francesco, pp 39-50.

COLESANTI A. I Frattali,  
<https://web.math.unifi.it/users/muge/promat/frattali/frattali.htm>

COLONNESE M., TURCO R. - Geometria frattale: tra filosofia e  
necessità, <https://www.rudimathematici.com/blocknotes/pdf/RMNC.pdf>

# *Un'estensione del metodo di Erone per le approssimazioni delle radici cubiche*

Enrico D'Amora\*

\*Università degli studi di Salerno, Salerno, corso di laurea in Matematica;  
enricochiara4@gmail.com



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v6n2.133

**Sunto:** *In matematica sono stati sviluppati numerosi metodi per l'approssimazione della radice quadrata, tra i quali si distingue il metodo di Erone, che utilizza un algoritmo di natura geometrica. Tale metodo, può essere esteso al caso delle radici cubiche.*

**Parole Chiave:** *Erone, algoritmo, radici.*

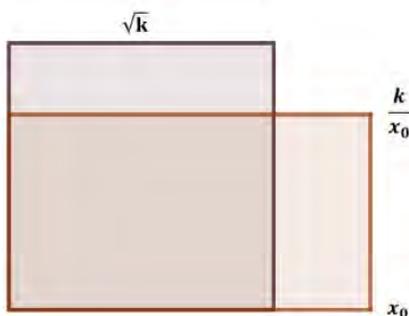
**Abstract:** *In mathematics, numerous methods for approximating the square root have been developed, among which is the method of Heron, which uses a geometrical algorithm. This method, can be extended to the case of cubic roots.*

**Keywords:** *Heron, algorithm, roots.*

## **1 -Metodo di Erone per radici quadrate**

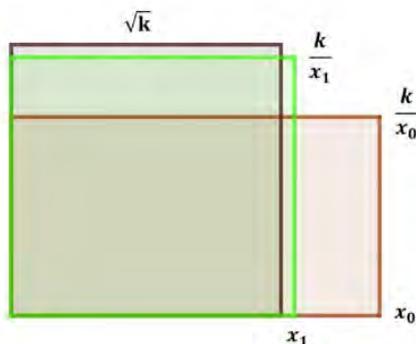
La costruzione geometrica del metodo di Erone è descritta nell'articolo di Mauro Saita Algoritmo di Erone. Sia  $k > 1$ ,

sicostruisce un quadrato di lato  $\sqrt{k}$  e al primo step si prende un punto  $x_0 > \sqrt{k}$ , per poter costruire un rettangolo di dimensioni  $x_0$  e  $\frac{k}{x_0}$ . Vedere figura 1.



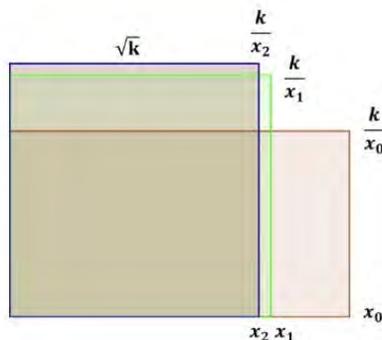
**Fig. 1 - Rappresentazione del rettangolo equivalente al quadrato di area  $k$ .**

Successivamente, si considera  $x_1$  la media aritmetica tra  $x_0$  e  $\frac{k}{x_0}$ , e si costruisce un nuovo rettangolo di lati  $x_1$  e  $\frac{k}{x_1}$ . Risulta dunque che  $x_1 = \frac{1}{2} \left( x_0 + \frac{k}{x_0} \right)$ . Vedi figura 2.



**Fig. 2 - Seconda approssimazione del quadrato iniziale mediante un rettangolo (verde) equivalente.**

Possiamo costruire allo stesso modo un nuovo rettangolo, prendendo  $x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{k}{x_1}\right)$ , cioè la media aritmetica tra  $x_1$  e  $\frac{k}{x_1}$ . Le nuove dimensioni dunque saranno  $x_2$  e  $\frac{k}{x_2}$ . Vedere figura 3.



**Fig. 3 -Terza approssimazione: il rettangolo (blu) di lati  $x_2$  e  $\frac{k}{x_2}$  si confonde col quadrato iniziale.**

Si noti come i rettangoli che stiamo costruendo si avvicinano sempre di più al quadrato iniziale. Già al terzo step il rettangolo (blu) sembra sovrapposto al quadrato di lato  $\sqrt{k}$ . Iterando il procedimento, giungiamo alla scrittura della seguente successione:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{k}{x_n}\right), \\ x_0 = \alpha \end{cases}$$

È possibile dimostrare che:

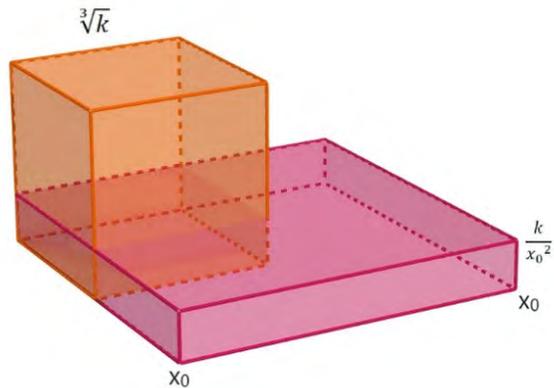
1. I termini della successione sono positivi;
2. La successione è strettamente decrescente;
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{k}$ .

Una possibile dimostrazione è proposta da Stefano Finzi Vita (2013) nella nota *Le successioni definite per ricorrenza e l'algoritmo di Erone per approssimare  $\sqrt{2}$* . L'idea di base è che se la successione risulta essere strettamente decrescente e limitata, allora per il teorema delle successioni monotone essa converge. Inoltre, tale limite dovrà essere un punto fisso.

## 2 - Metodo di Erone per radici cubiche

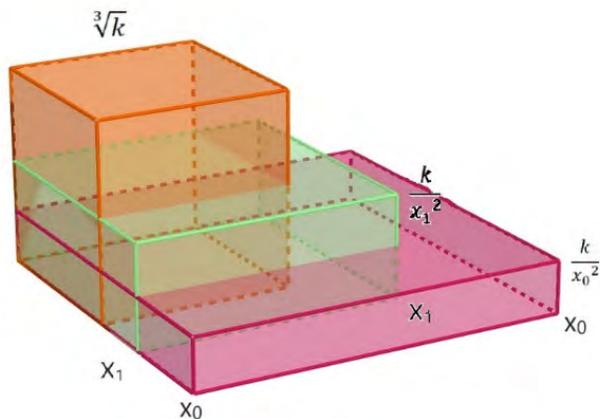
Seguendo il ragionamento proposto precedentemente, ci si potrebbe chiedere se il metodo funziona anche per le radici cubiche, e se in tal caso il metodo è suscettibile di una rappresentazione visiva così come nel caso della radice quadrata. In primo luogo, cerchiamo di sviluppare una successione il cui limite è la radice cubica di un numero. Procediamo quindi prima per via geometrica, costruendo parallelepipedi anziché rettangoli.

Partiamo da un cubo di spigoli  $\sqrt[3]{k}$  e al primo step prendiamo un punto  $x_0 > \sqrt[3]{k}$ , per costruire un parallelepipedo di dimensioni  $x_0, x_0$  e  $\frac{k}{x_0^2}$  (figura 4).



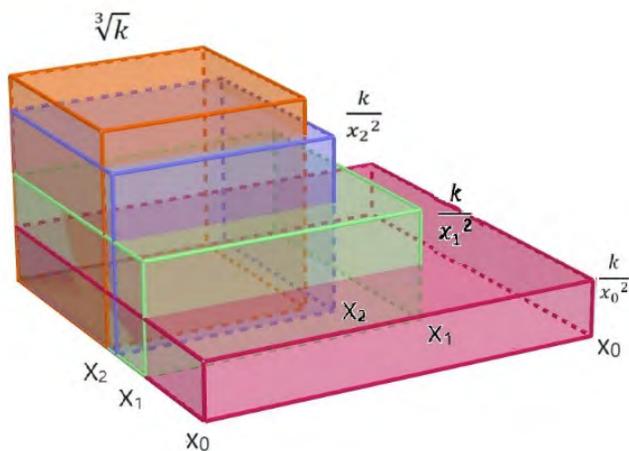
**Fig. 4 - Rappresentazione del parallelepipedo equivalente al cubo di volume  $k$ .**

Successivamente, si considera  $x_1$  la media aritmetica tra  $x_0$ ,  $x_0 \frac{k}{x_0^2}$ , e si costruisce un nuovo parallelepipedo di spigoli  $x_1, x_1$  e  $\frac{k}{x_1^2}$ . Risulta dunque che  $x_1 = \frac{1}{3} \left( 2x_0 + \frac{k}{x_0^2} \right)$ . Vedi figura 5.



**Fig. 5-Seconda approssimazione del cubo iniziale mediante un parallelepipedo (verde) equivalente.**

Costruiamo allo stesso modo un nuovo parallelepipedo, di spigoli  $x_2$ ,  $x_2 e \frac{k}{x_2^2}$ , dove  $x_2 = \frac{1}{3} \left( 2x_1 + \frac{k}{x_1^2} \right)$ , cioè la media aritmetica tra  $x_1$ ,  $x_1 e \frac{k}{x_1^2}$ . Vedere figura 6.



**Fig. 6 - Terza approssimazione: il parallelepipedo (blu) di spigoli  $x_2, x_2 e \frac{k}{x_2^2}$  si avvicina al cubo.**

Si nota che i parallelepipedi siffatti si avvicinano sempre di più al cubo iniziale.

Iterando il procedimento, giungiamo alla scrittura della seguente successione:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{3} \left( 2x_n + \frac{k}{x_n^2} \right), \\ x_0 = \alpha \end{cases}$$

Lo scopo è dimostrare che, come per le radici quadrate:

1. I termini della successione sono positivi;
2. La successione è strettamente decrescente;
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt[3]{k}$ .

Il punto 1 è semplice, poiché si parte da un  $x_0 > 0$  e i successivi termini si costruiscono come media aritmetica di termini positivi.

Per gli altri due punti, prendiamo ke cerchiamo di dimostrare che  $x_{n+1} \geq \sqrt[3]{k}$ . A differenza del caso precedente, in cui si poteva utilizzare la relazione  $a^2 + b^2 \geq 2ab$ , in questo caso non è immediato utilizzare un passaggio algebrico. Possiamo allora ragionare analiticamente e mostrare che

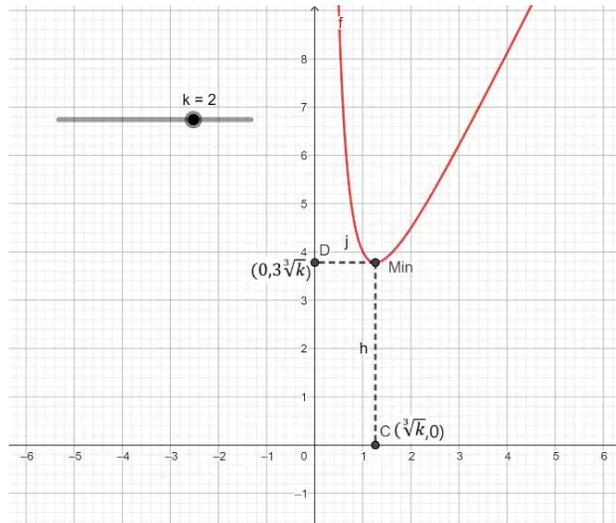
$$2x_n + \frac{k}{x_n^2} \geq 3\sqrt[3]{k}.$$

Consideriamo la parte a sinistra come una funzione sostituendo  $x_n$  con  $x$  e calcoliamo la sua derivata. Allora il risultato sarà:

$$\left(2x + \frac{k}{x^2}\right)' = 2 - \frac{2k}{x^3},$$

da cui si ricava che il punto di minimo è proprio  $(\sqrt[3]{k}, 3\sqrt[3]{k})$ .

A supporto di quanto detto si veda la figura 7.



**Fig. 7 - Punto di minimo della funzione  $2x + \frac{k}{x^2}$ .**

Ora basta dimostrare che la successione è decrescente, cioè

$$x_n > \frac{1}{3} \left( 2x_n + \frac{k}{x_n^2} \right).$$

Sviluppando i calcoli si giunge alla conclusione che la disuguaglianza  $x_n > \frac{1}{3} \left( 2x_n + \frac{k}{x_n^2} \right)$  si verifica se e solo se  $x_n^3 > k$ , che abbiamo visto essere vero.

Per concludere applichiamo il teorema delle successioni monotone: la successione è decrescente e si mantiene sempre al di sopra di  $\sqrt[3]{k}$ , dunque converge ad un certo  $L \geq \sqrt[3]{k}$ . Ma per  $n \rightarrow \infty$ , da  $x_{n+1} = \frac{1}{3} \left( 2x_n + \frac{k}{x_n^2} \right)$ , si ha che

$$3L = 2L + \frac{k}{L^2},$$

cioè  $L = \sqrt[3]{k}$ .

### 3 -Conclusioni

Nonostante l'utilizzo delle conoscenze analitiche per giungere ad una dimostrazione completa, da un punto di vista didattico non è da sottovalutare la costruzione geometrica che ha portato a definire la successione. È noto che sin dall'antichità i matematici utilizzavano argomentazioni geometriche per dimostrare risultati numerici. Un esempio di ciò si trova nel *Menone* di Platone (IV secolo a.C.), dove viene descritta la costruzione di un quadrato con un'area doppia rispetto a quella di un quadrato precedentemente costruito. Successivamente, Euclide (300 a.C.) ha racchiuso in una raccolta di 13 libri, gli *Elementi*, tutte le conoscenze

geometriche dell'epoca, delle quali gran parte sono studiate ancora oggi nelle scuole.

L'importanza della visualizzazione in matematica è stata dimostrata anche scientificamente: secondo un articolo di Boaler et al. (2016) intitolato *Seeing as Understanding: The Importance of Visual Mathematics for our Brain and Learning*, contrariamente alla credenza comune che la matematica visiva sia solo per studenti di livello inferiore, evidenze neuroscientifiche dimostrano come la visualizzazione matematica attivi diverse aree del cervello, migliorando la comprensione e l'apprendimento.

Per concludere, si osservi che la dimostrazione esposta si potrebbe estendere al caso di una qualunque radice  $n$ -esima.

In tal caso, però, non si ha un supporto geometrico, data l'impossibilità di rappresentare figure in dimensioni superiori alla terza.

Il lettore si può cimentare e dimostrare che per la seguente successione definita ricorsivamente

$$\begin{cases} x_{s+1} = \frac{1}{n} \left( (n-1)x_s + \frac{k}{x_s^{(n-1)}} \right), \\ x_0 = \alpha \end{cases}$$

valgono le seguenti proprietà:

1. I termini della successione sono positivi;
2. La successione è strettamente decrescente;
3.  $\lim_{s \rightarrow \infty} x_s = \sqrt[n]{k}$ .

Sebbene questa formula fosse conosciuta da Newton, che l'ha riportata nel suo lavoro *Method of Fluxions* pubblicato postumo nel 1736, e poi è stata ripresa da altri

matematico come illustrato nell'articolo *A Note on Machine Method for Root Extraction* di Gadtia&Padhan (2022), il diverso contributo di questo articolo risiede in un approccio di tipo geometrico, che semplifica la comprensione del processo iterativo, ed è quindi più fruibile da un punto di vista didattico.

## Ringraziamenti

Desidero esprimere la mia gratitudine al Professore Giovanni Vincenzi (Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Salerno) per il suo costante supporto e i preziosi consigli durante la stesura di questo articolo.

## Bibliografia

BOALER J., CHEN L., WILLIAMS C., CORDERO M. (2016). Seeing as Understanding: The Importance of Visual Mathematics for our Brain and Learning. «*Journal of Applied and Computational Mathematics*». DOI: 10.4172/2168-9679.1000325.

FINZI V.F. (2013). Le successioni definite per ricorrenza e l'algoritmo di Erone per approssimare  $\sqrt{2}$ . In: <https://lc.cx/TparYO>

GADTIA S., PADHAN S.K. (2022). A Note on Machine Method for Root Extraction. «*Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática*». DOI: 10.5269/bspm.42530.

SAITA M. (n.d.). Algoritmo di Erone. In: [https://lc.cx/N5n\]Cm](https://lc.cx/N5n]Cm)

# Coppie di punti parallele e congruenti

Franco Francia\*

\*Docente attualmente in pensione; franco.francia40@virgilio.it



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v6n2.134

**Sunto:** L'articolo inizia richiamando l'attenzione su "coppie di punti parallele", espressione che, tradotta nel linguaggio della geometria tradizionale, indica la particolare collocazione dei vertici del parallelogramma. L'unione degli insiemi completi, aventi per sostegno "coppie di punti parallele", con insiemi completi del V ordine di punti dello spazii, offre schemi operativi che permettono di modificare un poliedro sostituendo uno spigolo con un altro, parallelo al precedente, oppure, parallelo ad un piano contenente una faccia del solido.

**Parole Chiave:** Coppie di punti parallele. Coppie di punti parallele, congruenti, egualmente orientate. Insiemi di punti materiali ridotti. Teorema 12.

**Abstract:** The article begins by drawing attention to "parallel pairs of points", an expression which, translated into the language of traditional geometry, indicates the particular location of the vertices of the parallelogram. The union of complete sets, having "parallel pairs of points" as support, with complete sets of the fifth order of points in space, offers operational schemes that allow you to modify a polyhedron by replacing one edge with another, parallel to the previous one, or, parallel to a plane containing a face of the solid.

**Keywords:** Parallel pairs of points. Parallel, congruent, equally oriented pairs of points. Sets of reduced material points. Theorem 12.

Nota1. Nella geometria euclidea la relazione di congruenza riguarda segmenti, poligoni, angoli. Trattando di insiemi di punti materiali, la congruenza si riferisce a distribuzioni di punti nel piano e nello spazio. Pertanto, definizioni come congruenza di coppie di punti, oppure congruenza di insiemi ternari o quaternari, risultano formulate come di seguito:

Def.1. Due coppie di punti  $(X,Y)$  e  $(Z,W)$  sono dette congruenti, e scriviamo  $(X,Y) \cong (Z,W)$ , se i segmenti  $[X,Y]$ ,  $[Z,W]$  sono congruenti. Analogamente:

Def. 2. Due terne di punti  $(X,Y,Z)$  e  $(W,U,V)$  sono dette congruenti, e scriviamo  $(X,Y,Z) \cong (W,U,V)$  se i triangoli  $T(X,Y,Z)$  e  $T(W,U,V)$  sono congruenti.

TH. 1. Sia  $J = (A,B,C,D)$  un insieme di punti complanari. Sia  $(A,C)$ ,  $(B,D)$  una partizione di  $J$  in coppie. Se  $(A,C)$ ,  $(B,D)$  hanno in comune il punto medio  $M$ , le coppie  $(A,B)$ ,  $(D,C)$  e  $(A,D)$ ,  $(B,C)$ , ulteriori partizioni di  $J$ , sono congruenti e appartengono a rette parallele.

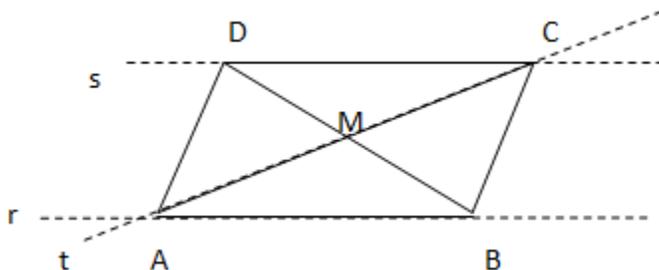


Fig. 1

Essendo  $(A,M) \cong (M,C)$ ,  $(B,M) \cong (M,D)$ ,  $\widehat{AMB} \cong \widehat{CMD}$ , i due triangoli,  $T(A,M,B)$  e  $T(C,M,D)$  sono congruenti.

- a) Essendo  $T(A,M,B) \cong T(C,M,D)$  si ha:  $(A,B) \cong (D,C)$ . Analogamente risultano congruenti  $(A,D)$  e  $(B,C)$ .
- b) Sia  $r$  la retta individuata da  $A$  e  $B$ ; sia  $s$  la retta individuata da  $D$  e  $C$ ; sia  $t$  la retta passante per  $A$  e  $C$ . Dalla congruenza:  $T(A,M,B) \cong T(C,M,D)$ , segue che anche gli angoli  $\widehat{BAM}$ ,  $\widehat{DCM}$ , alterni interni rispetto alle rette  $r$  e  $s$  intersecate da  $t$ , sono congruenti. Pertanto, le rette  $r$  e  $s$  contenenti, rispettivamente  $(A,B)$  e  $(D,C)$ , sono parallele. Procedendo in modo analogo risulta che anche  $(A,D)$  e  $(B,C)$  appartengono a rette parallele.

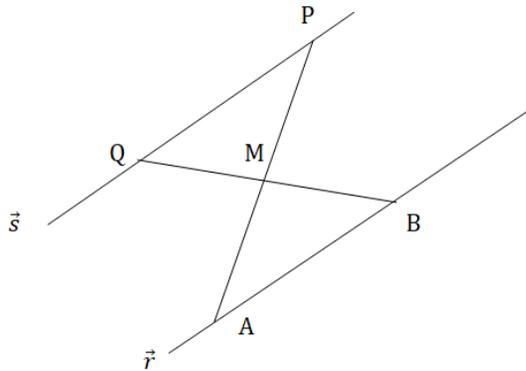
Dal precedente teorema discende la seguente definizione:

Def. 3. Se  $(A,C)$  e  $(B,D)$  sono coppie di punti simmetrici rispetto al punto  $M$ , le coppie  $(A,B)$  e  $(D,C)$ , appartenenti a rette parallele, sono dette congruenti e parallele; le rappresentiamo così:  $|A,B| \parallel |D,C|$ . Anche  $(A,D)$  e  $(B,C)$  sono dette congruenti e parallele. Le rappresentiamo così:  $|A,D| \parallel |B,C|$ .

Def. 4. Le rette  $r$  e  $s$  siano parallele. Se la retta  $s$  appartiene al piano  $\pi$ , diciamo che la retta  $r$  è parallela al piano  $\pi$  (e viceversa).

Def. 5. Sulla retta orientata  $\vec{r}$  il punto  $B$  sia successivo ad  $A$ . Diciamo che  $A$  è estremo inferiore,  $B$  è estremo superiore della coppia orientata  $\overrightarrow{AB}$ .

Def. 6. La coppia orientata  $\overrightarrow{AB}$  e il punto  $Q$  appartengono al piano  $\pi$ . Diciamo che  $\overrightarrow{QP}$  e  $\overrightarrow{AB}$  sono coppie parallele, congruenti, egualmente orientate se l'estremo superiore  $P$  è il simmetrico dell'estremo inferiore  $A$  rispetto ad  $M$ , punto medio di  $B$  e  $Q$ . Oppure, diciamo che  $\overrightarrow{QP}$  e  $\overrightarrow{AB}$  sono coppie parallele, congruenti, egualmente orientate se l'estremo inferiore  $Q$  è il simmetrico di  $B$  rispetto ad  $M$ , punto medio di  $A$  e  $P$ .



**Fig. 2**

TH. 2. I punti di ciascuna coppia  $(A,C)$  e  $(B,D)$  siano simmetrici rispetto a  $M$ . L'insieme completo, con sostegno  $J = (A,B,C,D)$ , è  $I = (A,-B,C,-D)$ .

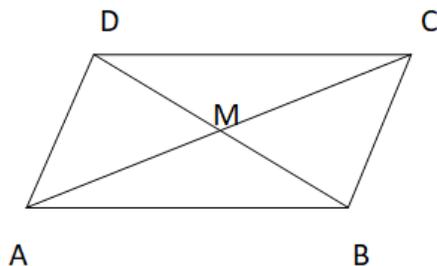


Fig. 3

Se  $M$  è punto medio di  $(A,C)$ , l'insieme completo, con sostegno  $J_1 = (A,M,C)$  è  $I_1 = (A,-2M,C)$ . Se  $M$  è punto medio di  $(B,D)$ , l'insieme completo, con sostegno  $J_2 = (B,M,D)$  è  $I_2 = (B,-2M,D)$ . L'insieme completo, differenza dei due insiemi completi è:

$$I = I_1 - I_2 = (A,-2M,C) - (B,-2M,D) = (A,-B,C,-D)$$

Nota 2. Richiamiamo la relazione di equivalenza intercorrente fra l'insieme  $I = (A, -B, C, -D)$  e l'insieme

$I^* = K \cdot I = (K \cdot A, -K \cdot B, K \cdot C, -K \cdot D)$ : se  $I$  è completo, anche

$I^* = K \cdot I = (K \cdot A, -K \cdot B, K \cdot C, -K \cdot D)$ , per qualsiasi  $K \in R^*$ , è completo.

TH. 3. Se  $I = (A,-B,P,-Q)$  è un insieme completo, allora  $(A,P)$  e  $(B,Q)$  sono simmetrici rispetto ad un punto  $M$ .

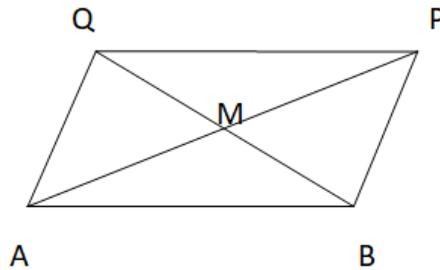


Fig. 4

Se  $M$  è il punto medio di  $(A,P)$ , l'insieme  $I_1 = (A,-2M,P)$  è completo.

Effettuando la differenza dei due insiemi completi  $I_1$  e  $I$  si ottiene l'insieme completo

$$I_2 = I_1 - I = (A,-2M,P,-A,B,-P,Q) = (B-2M, Q).$$

Essendo  $(A,-2M,P)$ ,  $(B-2M,Q)$  due insiemi completi, risulta che  $(A,P)$  e  $(B,Q)$  sono simmetrici rispetto a  $M$ .

Applicazione 1. Siano  $A, B, C$  tre punti del piano  $\pi$  e risulti:  $d(A,B)=5$ ,  $d(B,C)=\sqrt{34}$ ,  $d(A,C)=\sqrt{29}$ . Sia  $H$  il punto comune alle due terne  $(A,H,B)$  e  $(C,H,Q)$  e risulti:  $\frac{d(A,H)}{d(H,B)} = \frac{2}{3}$ ,  $\frac{d(C,H)}{d(H,Q)} = \frac{5}{2}$

Sia  $M$  un punto non appartenente a  $\pi$  e risulti:

$$d(A,M)=\sqrt{22}, d(B,M)=\sqrt{17}, d(C,M)=\sqrt{19}.$$

Essendo  $(M,P)$  e  $(C,Q)$  due coppie dei punti parallele e congruenti, aventi stesso orientamento:  $\overline{MP} \parallel \overline{CQ}$ , trovare

l'insieme completo con sostegno  $J = (A, B, C, M, P)$ , individuare la posizione del punto  $P$  mediante le distanze  $(PM)$ ,  $(P, A)$ ,  $(P, B)$ .

Essendo  $\frac{d(A, H)}{d(H, B)} = \frac{2}{3}$  risulta completo l'insieme  $I' = (3A, -5H, 2B)$ ; essendo  $\frac{d(C, H)}{d(H, Q)} = \frac{5}{2}$  risulta completo l'insieme  $I'' = (2C, -7H, 5Q)$ . Anche l'insieme  $I''' = (7I' - 5I'') = (21A, -35H, 14B, -10C, 35H, -25Q) = (21A, 14B, -10C, -25Q)$  è completo così come:  $I^{IV} = (M, -P, Q, -C)$  essendo  $(M, P, C, Q)$  vertici di parallelogramma. Effettuando l'unione dei due insiemi completi  $I'''$  e  $25 \cdot I^{IV}$  si ottiene:

$$I = [I''' \cup (25 \cdot I^{IV})] = (21A, 14B, -35C, -25P, 25M).$$

Osservazione 1. L'insieme  $I$  contiene due punti materiali opposti,  $-25P$ ,  $25M$ .

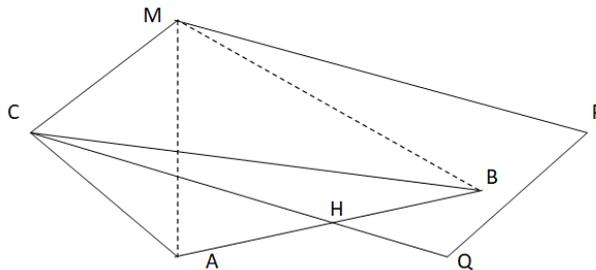


Fig. 5

Per calcolare  $(PM)$ ,  $(P, A)$ ,  $(P, B)$  si utilizza il TH.12 (Francia, 2022).

Essendo  $I$  completo si ha:  $[I-(25M-25P)]^2 = (25M-25P)^2$ .  
 Sviluppando si ottiene:  $(21A,14B,-35C)^2 = (25M-25P)^2$  e  
 quindi  $21 \cdot 14 \cdot [d(A,B)]^2 - 21 \cdot 35 \cdot [d(A,C)]^2 - 35 \cdot 14 \cdot [d(B,C)]^2 =$   
 $= -25 \cdot 25 \cdot [d(M,P)]^2$  da cui  $d(M,P) = 7$ .

Analogamente si calcola  $d(P,A)$ :  $[I+(25P-25A)]^2 = (25P-25A)^2$   
 $(-4A,14B,-35C,25M)^2 = (25P-25A)^2$  da cui  $d(A,P) = \sqrt{43}$ .

Procedendo in modo analogo si ottiene  $d(B,P)$ .

Applicazione 2. Siano  $A,B,C$  tre punti del piano  $\pi$  e risulti:  
 $d(A,B) = \sqrt{65}$ ,  $d(B,C) = 3\sqrt{10}$ ,  $d(A,C) = 5\sqrt{5}$ . Siano  $M$  e  $N$  due  
 punti interni, rispettivamente, a  $(A,C)$  e  $(B,C)$  e risulti:  
 $\frac{d(A,M)}{d(M,C)} = \frac{3}{2}$ ,  $\frac{d(B,N)}{d(N,C)} = 2$ . Sia  $P$  un punto non appartenente a  $\pi$ .  
 Sapendo che:  $d(A,P) = 5$ ,  $d(B,P) = 6$ ,  $d(P,C) = 2\sqrt{15}$ , trovare  
 l'insieme completo avente sostegno  $J = (A,B,C,Q,P)$ , essendo  
 $(M,N)$  e  $(P,Q)$  coppie di punti parallele, aventi stesso  
 orientamento:  $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{MN}$ . Trovare le distanze  $d(P,Q)$ ,  $d(A,Q)$ ,  
 $d(B,Q)$ .

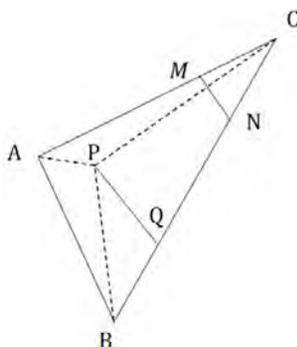


Fig. 6

Essendo  $\frac{d(A,M)}{d(M,C)} = \frac{3}{2}$ , risulta completo l'insieme  $I' = (2A, -5M, 3C)$ .

Essendo  $\frac{d(B,N)}{d(N,C)} = 2$ , risulta completo l'insieme  $I'' = (B, -3N, 2C)$ .

Essendo  $\overrightarrow{PQ} // \overrightarrow{MN}$ , risulta completo l'insieme  $I''' = (Q, -N, -P, M)$ . Moltiplicando gli insiemi completi  $I'$ ,  $I''$ ,  $I'''$ , rispettivamente, per  $+3$ ,  $-5$ ,  $+15$ , si ha:

$$\begin{aligned} I &= (3I') \cup (-5I'') \cup (15I''') = \\ &= (6A, -15M, 9C, -5B, 15N, -10C, 15M, -15N, 15Q, -15P) = \\ &= (6A, -5B, -C, 15Q, -15P). \end{aligned}$$

Osservazione 2. L'insieme  $I$  contiene due punti materiali opposti,  $-15P, 15Q$ . Essendo  $I$  completo, per calcolare  $d(P, Q)$  applichiamo il TH.12:

$$\begin{aligned} [I - (15Q, -15P)]^2 &= (15Q - 15P)^2 \text{ da cui} \\ (6A, -5B, -C)^2 &= -225[d(P, Q)]^2 - 30[d(A, B)]^2 + 5[d(B, C)]^2 \\ - 6[d(A, C)]^2 &= -225[d(P, Q)]^2 \text{ da cui } d(P, Q) = \sqrt{10}. \end{aligned}$$

Procediamo in modo analogo per calcolare  $d(A, Q)$ :

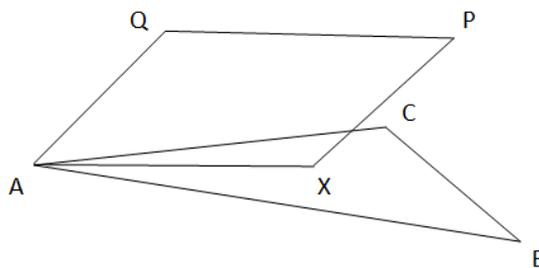
$$\begin{aligned} [I + (15A, -15Q)]^2 &= (15A - 15Q)^2 \text{ da cui} \\ (21A - 5B, -C, -15P)^2 &= (15A, -15Q)^2 - 21 \cdot 5[d(A, B)]^2 - 21[d(A, C)]^2 \\ - 21 \cdot 15[d(A, P)]^2 &+ 5[d(B, C)]^2 + 15 \cdot 5[d(B, P)]^2 + 15[d(C, P)]^2 = \\ - 225[d(A, Q)]^2 &- 105 \cdot 65 - 21 \cdot 125 - 315 \cdot 25 + 5 \cdot 90 + 75 \cdot 36 + \\ 15 \cdot 60 &= -225 \cdot [d(A, Q)]^2 \text{ da cui } [d(A, Q)] = \sqrt{59}. \end{aligned}$$

Procedendo in modo analogo si ricava  $d(B, Q)$ .

Nota 3. Nelle precedenti applicazioni, 3 e 4, sono stati ricavati insiemi completi del V ordine. In entrambi i casi è stata segnalata la stessa “osservazione”: gli insiemi completi contenevano coppie di punti materiali aventi masse opposte. Nel teorema seguente motiviamo le precedenti osservazioni: mostriamo che le posizioni di due punti materiali opposti, appartenenti ad un insieme completo  $I$ , con sostegno  $J$ , sono posizionati su una retta parallela al piano contenente i restanti punti di  $J$ .

TH 4. L'insieme  $J=(A,B,C,P,Q)$ , non contenente quaterne di punti complanari, sia di sostegno all'insieme completo proprio del V ordine:  $(m_1 A, m_2 B, m_3 C, m_4 P, m_5 Q)$ .

Nel caso che due punti materiali di  $I$  abbiano masse opposte, le relative posizioni individuano una retta che è parallela al piano contenente la rimanente terna di elementi di  $J$ .



**Fig. 7**

Supponiamo che le masse opposte siano  $m_4, m_5$ :  $m_4 = K$ ,  $m_5 = -K$  con  $K \in R$ .

L'insieme  $I$  diviene:  $I = (m_1 A, m_2 B, m_3 C, K P, -K Q)$ .

In modo arbitrario, scegliamo un punto fra gli elementi dell'insieme  $(A, B, C)$  attribuendogli la massa  $+K$  oppure  $-K$ . Supponiamo che l'elemento scelto sia il punto materiale  $+K \cdot A$ . Essendo  $-K \cdot X$  il complementare di  $(+K P, -K Q, +K \cdot A)$ , risulta completo l'insieme  $I' = (+K P, -K Q, +K \cdot A, -K \cdot X)$  il cui sostegno,  $J=(P,Q,A,X)$ , per quanto visto nel TH.3, contiene i vertici di un parallelogramma. Utilizzando il linguaggio dei punti materiali diciamo che la completezza di  $I'$  implica il seguente parallelismo:

$$(A, X) \parallel (Q, P) \text{ e } (A, Q) \parallel (X, P).$$

Sottraendo  $I'$  a  $I$  otteniamo l'insieme :

$$\begin{aligned} I'' &= I - I' = (m_1 A, m_2 B, m_3 C, K P, -K Q) - (+K P, -K Q, +K \cdot A, -K \cdot X) = \\ &= (m_1 \cdot A, m_2 \cdot B, m_3 \cdot C, -K \cdot A, +K \cdot X) = [(m_1 - K) \cdot A, m_2 \cdot B, m_3 \cdot C, +K \cdot X]. \end{aligned}$$

Essendo  $I''$  completo, proprio e quaternario, i punti  $(A, B, C, X)$  devono appartenere allo stesso piano  $\pi$ . Conseguentemente la retta  $r$ , contenente  $(A, X)$ , deve appartenere a  $\pi$ . La retta  $s$ , contenente  $(Q, P)$ , coppia di punti parallela ad  $(A, X)$  (def.4), deve essere parallela a  $r$  e quindi,  $s$  è parallela al piano  $\pi$ .

TH.5 L'insieme  $J'=(A,B,C,X)$  contenga terne di punti non allineati del piano  $\pi$ . Sia  $M$  il punto medio di  $(X,Q)$  essendo  $Q$  un generico punto dello spazio. Sia  $P$  il simmetrico di  $A$  rispetto a  $M$ . Se  $I = (m_1 A, m_2 B, m_3 C, m_4 Q, m_5 P)$  è un insieme completo, i punti materiali  $m_4 Q, m_5 P$ , posizionati in  $Q$  e  $P$ ,

appartenenti alla retta  $r$  parallela al piano  $\pi$ , hanno masse opposte:  $m_4 = -m_6$ .

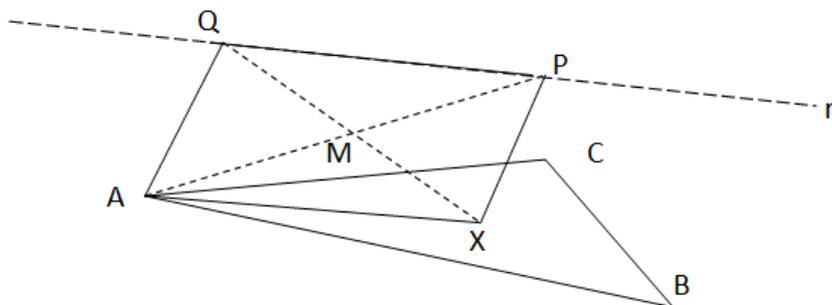


Fig. 8

L'insieme  $J = (A, B, C, X)$  è sostegno di un insieme completo:

$$I' = [m_1A, m_2B, m_3C, -(m_1 + m_2 + m_3)X].$$

Essendo  $(A, P)$  e  $(Q, X)$  coppie di punti simmetrici rispetto a  $M$ , per il TH.2, l'insieme  $(-A, X, -P, Q)$  è completo e così l'equivalente:

$$I'' = [-(m_1 + m_2 + m_3)A, (m_1 + m_2 + m_3)X, -(m_1 + m_2 + m_3)P, (m_1 + m_2 + m_3)Q].$$

Effettuando l'unione:  $I' \cup I''$ , si ha:

$$\begin{aligned} I &= I' \cup I'' = [m_1A, m_2B, m_3C, -(m_1 + m_2 + m_3)X, -(m_1 + m_2 + m_3)A, \\ &(m_1 + m_2 + m_3)X, -(m_1 + m_2 + m_3)P, (m_1 + m_2 + m_3)Q] = \\ &= [-(m_2 + m_3)A, m_2B, m_3C, -(m_1 + m_2 + m_3)P, (m_1 + m_2 + m_3)Q]. \quad (2) \end{aligned}$$

Posto  $(m_2 + m_3) = u_1$ ,  $m_2 = u_2$ ,  $m_3 = u_3$ ,  $(m_1 + m_2 + m_3) = v$ , la (2) diviene:

$I = [-u_1A, u_2B, u_3C, -vP, vQ]$ . Essendo  $-vP, vQ$ , la tesi risulta verificata.

Applicazione 3. Siano  $A, B, C$  tre punti del piano  $\pi$  e risulti:  $d(A, B) = 8$ ,  $d(B, C) = 6\sqrt{2}$ ,  $d(A, C) = 2\sqrt{10}$ . Siano  $P$  e  $Q$  due punti del semispazio  $S^+$  con origine  $\pi$ ; essendo  $d(P, A) = \sqrt{17}$ ,  $d(P, B) = 7$ ,  $d(Q, A) = \sqrt{35}$ ,  $d(Q, B) = \sqrt{19}$ , trovare  $d(P, C)$ ,  $d(Q, C)$  sapendo che  $P$  e  $Q$  appartengono ad una retta parallela a  $\pi$  e che risulta:  $d(P, Q) = \sqrt{10}$ .

Sia  $I' = (r_1 A, r_2 B, r_3 C, r_4 P, r_5 Q)$  l'insieme completo con sostegno  $J = (A, B, C, P, Q)$ ; appartenendo  $P$  e  $Q$  ad una retta parallela al piano  $\pi$ , per il TH.4, le masse dei relativi punti devono essere opposte:  $r_4 + r_5 = 0$ ; posto  $r_5 = -r_4 = t$ ,  $I'$  diviene:

$I' = (r_1 A, r_2 B, r_3 C, -tP, tQ)$ . Dividendo  $I'$  per  $r_3$ , posto  $\frac{r_1}{r_3} = m$ ,  $\frac{r_2}{r_3} = n$ ,  $\frac{r_3}{r_3} = 1$ ,  $-\frac{t}{r_3} = -h$ ,  $\frac{t}{r_3} = h$ , l'insieme completo equivalente a  $I'$  diviene:  $I = (m A, n B, 1 C, -h P, h Q)$ .

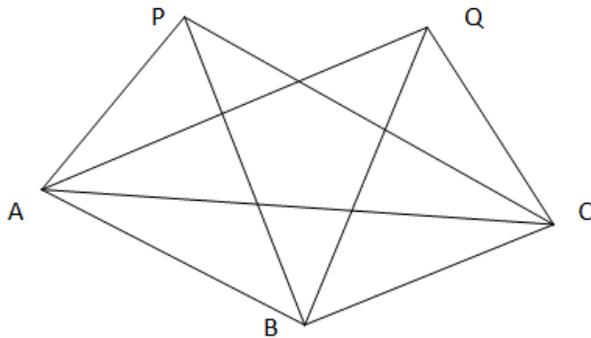


Fig. 9

Secondo le ipotesi del testo, essendo  $I$  completo deve risultare:

$$m+n+1-h+h=0 \text{ da cui:}$$

- a)  $m+n+1=0$ ;
- b) essendo  $I$  completo, si ha  $A \cdot I = B \cdot I$ ;
- c) per il TH.12 si ha:  $[I - (hQ, -hP)]^2 = [hQ, -hP]^2$ .

Mettendo a sistema le relazioni a), b), c), si ottiene:

$$\begin{cases} m + n + 1 = 0 \\ A \cdot I = B \cdot I \\ [I - (hQ, -hP)]^2 = [hQ, -hP]^2 \end{cases} \text{sviluppando}$$

$$\begin{cases} m + n + 1 = 0 \\ n[d(A, B)]^2 + [d(A, C)]^2 - h[d(A, P)]^2 + h[d(A, Q)]^2 = \\ = m[d(B, A)]^2 + [d(B, C)]^2 - h[d(B, P)]^2 + h[d(B, Q)]^2 \\ m n [d(A, B)]^2 + n[d(B, C)]^2 + m[d(A, C)]^2 = -h^2[d(P, Q)]^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m + n + 1 = 0 \\ 4n - 4m + 3h - 2 = 0 \\ 32 m n + 36 n + 20 m = -5h^2 \end{cases} \text{da cui}$$

$$n = -\frac{2+3h}{8}, m = \frac{-6+3h}{8}, h = \pm 6.$$

Si hanno due casi:

a)

$$_1 = 6, n_1 = -\frac{5}{2}, m_1 = \frac{3}{2} \text{ da cui si ricava l'insieme completo } I_1 = (3A, -5B, 2C, -12P, 12Q);$$

b)

$$_2 = -6, n_2 = 2, m_2 = -3 \text{ da cui si ricava l'insieme completo } I_2 = (-3A, 2B, 1C, 6P, -6Q).$$

Con riferimento al caso a), per calcolare  $d(C,P)$  essendo  $I$  completo operiamo così:

$$[(3A, -5B, 2C, -12P, 12Q) - (2C, -2P)]^2 = (2C, -2P)^2$$

$$(3A, -5B, -10P, 12Q)^2 = (2C, -2P)^2$$

$$4[d(C,P)]^2 = 15[d(A,B)]^2 + 30[d(A,P)]^2 - 36[d(A,Q)]^2 - 50[d(B,P)]^2 + 60[d(B,Q)]^2 + 120[d(P,Q)]^2 \text{ da cui } [d(C,P)]^2 = 25, d(C,P) = 5.$$

Analogamente, si ha:

$d(C,Q) = \sqrt{43}$ . Procedendo in modo analogo si calcolano  $d(P,C)$  e  $d(Q,C)$ , distanze riferite ai punti di  $J_2$ , insieme di sostegno dell'insieme completo  $I_2$ .

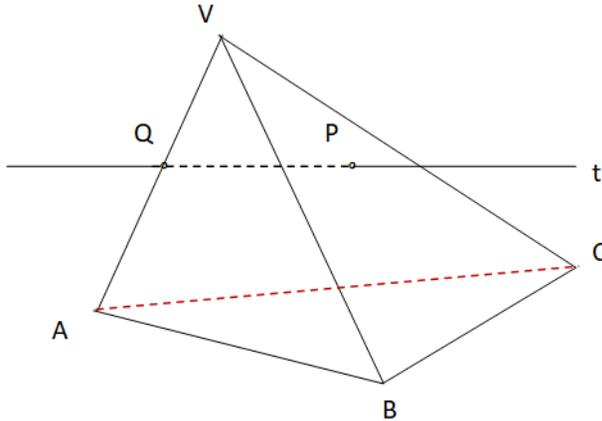
Applicazione 4. Sia  $V$  il vertice della piramide a base triangolare:  $T(A,B,C)$ , con  $A,B,C$  appartenenti al piano  $\pi$ . Sia  $P$  il punto interno di  $V,B,C$ , vertici di una faccia della piramide. Sapendo che  $S_{CPB} = 3$ ,  $S_{BPV} = 5$ ,  $S_{VCP} = 4$ , trovare il rapporto  $\frac{d(V,Q)}{d(Q,A)}$  essendo  $Q$  il punto di intersezione dello spigolo  $[V,A]$ , con  $t$ , retta passante per  $p$ , parallela al piano individuato da  $A,B,C$ .

L'insieme  $J' = (B,C,V,P)$  è di sostegno all'insieme completo  $I' = (4B,5C,3V,-12P)$ . Le masse dell'insieme ternario avente sostegno  $J''=(V,Q,A)$  non sono note.

Poniamo:  $I''=[3V,-sQ,(s-3)A]$  essendo  $s$  il parametro incognito delle masse  $-s$  e  $(s-3)$ ; attribuiamo a  $V$  la massa 3 in modo che l'insieme completo  $I' - I''$  non contenga  $V$ . Dalla differenza dei due insiemi si ha:

$$I = I' - I'' = [4B,5C,3V,-12P,-3V,sQ,(3-s)A] = [(3-s)A,4B,5C, -12P,sQ].$$

Poiché le condizioni del testo stabiliscono che  $P$  e  $Q$  appartengano ad una retta parallela al piano individuato da  $A, B, C$ , per il TH.4, deve risultare che le masse di  $P$  e  $Q$  siano opposte:  $s = 12$ , da cui  $I$  diviene:  $I = (-9A, 4B, 5C - 12P, 12Q)$ .



**Fig. 10**

Essendo  $S = 12$ , l'insieme  $I''$  diviene:  $I'' = (3V, -12Q, 9A)$  da cui  $\frac{d(V, Q)}{d(Q, A)} = 3$ .

Nota 4. Completiamo l'articolo soffermandoci su coppie di punti parallele non congruenti:

Def. 7. Siano parallele e congruenti le coppie di punti complanari:  $(AB) \parallel (DH)$ . Diciamo che le coppie di punti  $(A, B)$  e  $(D, C)$  sono parallele, non congruenti, e scriviamo  $(AB / DC)$ , se  $C$  è interno a  $(D, H)$ . Se  $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DH}$  hanno stesso orientamento anche  $(A, B)$  e  $(D, C)$  hanno stesso orientamento e scriviamo:  $\overrightarrow{AB} / \overrightarrow{DC}$ .

TH 6. Siano  $(\overrightarrow{DH} // \overrightarrow{AB})$  due coppie di punti parallele e congruenti. Coppie di punti parallele e non congruenti, siano  $(\overrightarrow{DC} / \overrightarrow{AB})$  con  $C$  interna a  $(D,H)$  e risulti:

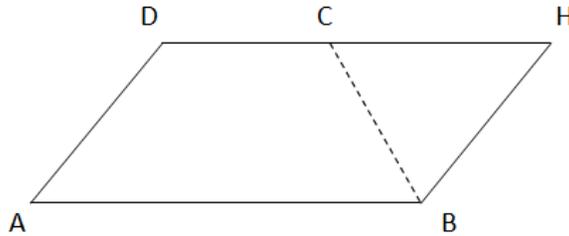


Fig. 11

$d(D,C)=b$ ,  $d(A,B)= d(D,H) = a$ , con  $a > b$ . L'insieme completo, con sostegno  $J=(A,B,C,D)$  è  $I=(nA,-nB,mC,-mD)$  essendo  $n = K b$ ,  $m = K a$ , con  $K \in R^*$ , arbitrario. (1)

Essendo il punto  $H$  allineato con  $D$  e  $C$ , si ha:

$d(C,H) = (a - b)$ ; l'insieme completo con sostegno

$J_1=(D,C,H)$  diviene:  $I_1 = [(a - b)D,-aC,bH]$ . L'insieme completo con sostegno  $J_2=(A,B,H,D)$  diviene [TH.3],  $(-A,B,-H,D)$ ; moltiplicando per  $b$  si ha:

$I_2 = (-bA,bB,-bH,bD)$ . Dall'unione degli insiemi completi  $I_1, I_2$ , si ottiene:

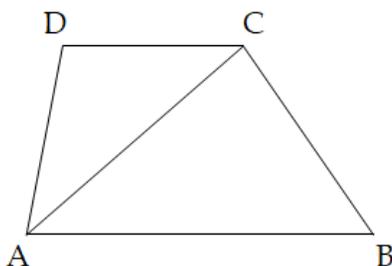
$$I_1 \cup I_2 = [-bA,bB,-bH,bD,(a - b)D,-aC,bH] = (-bA,bB,-aC,aD).$$

Moltiplicando  $a$  e  $b$  per  $-K$ , per la (1), si ha:

$$I = (-nA, nB, -mC, mD).$$

Applicazione 5. Siano  $\overrightarrow{AB} / \overrightarrow{DC}$  coppie di punti, parallele non congruenti, e risulti:

$d(A,D)=\sqrt{10}$  ,  $d(D,C)= 5$  ,  $d(A,C)=3\sqrt{5}$  ,  $d(C,B)=3\sqrt{2}$  . Trovare  $d(A,B)$ .



**Fig. 12**

Posto  $d(A,B)=x$ , essendo  $d(D,C)=5$ , l'insieme completo avente sostegno  $(A,B,C,D)$  è:  $I=(5A-5B,xC,-xD)$ . Utilizzando il TH 2, calcoliamo  $d(A,B)$ :

$$[(5A,-5B,xC,-xD) \cup (5B,-5C)]^2 = (5B,-5C)^2 \text{ da cui}$$

$$[5A,-xD,(x-5)C]^2 = -25(B,C)^2$$

$$-5x[d(A,D)]^2 - x(x-5)[d(D,C)]^2 + 5(x-5)[d(A,C)]^2 = -25[d(B,C)]^2$$

$$x^2 - 12x + 27 = 0 \text{ da cui } x_1 = 9 \text{ e } x_2 = 3.$$

TH 7. Sia  $I=[-nA,nB,-mC,mD]$ , con  $m,n \in R^*$  e  $m \neq n$ , un insieme completo essendo  $(\overrightarrow{AB} / \overrightarrow{DC})$ , coppie di punti paralleli

non congruenti del piano  $\pi$ , aventi stesso orientamento. Le rette  $r_1$  e  $r_2$  passanti, rispettivamente, per  $(A,D)$  e  $(B,C)$ , si intersecano in un punto  $Q$  e si ha:  $\frac{d(A,Q)}{d(D,Q)} = \frac{d(B,Q)}{d(C,Q)} = \frac{d(A,B)}{d(D,C)}$ .

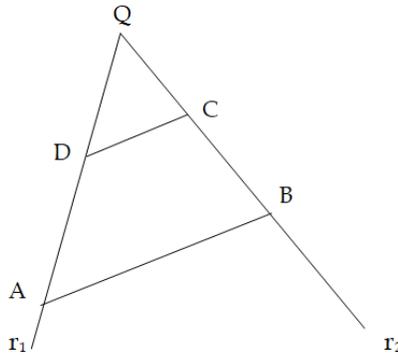


Fig. 13

I complementari delle coppie di punti materiali:  $(-nA,mD)$  e  $(nB,-mC)$ , appartenenti, rispettivamente, a  $r_1$  e  $r_2$ , sono, rispettivamente:

$(n-m)X, (m-n)Y$ , con  $X, Y \in \pi$ . Ciascuno dei due insiemi,

$I_1 = [-nA,mD,(n - m)X]$  e  $I_2 = [nB,-mC,(m - n)Y]$ , contenente coppia di punti materiali ed il rispettivo complementare, sono completi.

Effettuando l'unione degli insiemi completi

$[I \cup (-I_1) \cup (-I_2)]$  si ottiene l'insieme completo:

$$I_0 = [-nA,nB,-mC,mD,nA,-mD,(-n+m)X,-nB,mC,(n-m)Y]$$

$$I_0 = [(-n+m)X, (n-m)Y].$$

L'insieme  $I_o$ , unione di tre insiemi completi, deve risultare completo. Poiché  $I_o$  contiene soltanto due elementi, per essere completo deve risultare improprio (Francia, 2019); più esplicitamente, ciascuna delle masse  $(-n+m)$  e  $(n-m)$  dovrebbe essere eguali a zero in contrasto con le ipotesi premesse nell'enunciato.

Soltanto ammettendo che i punti  $X$  e  $Y$  siano coincidenti, l'insieme  $I_o$ , ridotto (Francia, 2019), conterebbe un solo elemento nullo: supponendo  $X=Y$ , posto  $X=Y=Q$ , sostituendo  $Q$  in  $I_o$ , si ha:  $I_o=[(-n+m)Q, (n-m)Q]$ ; riducendo, si ha:

$I_o=[(-n+m)+(n-m)]Q = [0 \cdot Q]$ . Per il TH. 1 (Francia, 2019),  $I_o$  è completo, improprio. Essendo  $X$  e  $Y$  coincidenti, gli insiemi  $I_1$  e  $I_2$  diventano:

$$I_1=[-nA, mD, (n-m)Q] \text{ e } I_2=[nB, -mC, (m-n)Q].$$

Tenendo conto delle relazioni intercorrenti fra masse e distanze di punti dell'insieme  $I$  si ha:

$$m=kd(A,B), n=kd(C,D) \text{ da cui: } \frac{d(A,B)}{d(D,C)} = \frac{m}{n}. \quad (1)$$

Tenendo conto delle relazioni intercorrenti fra masse e distanze di punti degli insiemi  $I_1$  e  $I_2$  si ha rispettivamente:

$$\frac{d(A,Q)}{d(D,Q)} = \frac{m}{n}, \quad \frac{d(B,Q)}{d(C,Q)} = \frac{m}{n} \quad (2)$$

Dalle (1) e (2), si ha:  $\frac{d(A,Q)}{d(D,Q)} = \frac{d(B,Q)}{d(C,Q)} = \frac{d(A,B)}{d(D,C)}$ .

Il risultato conseguito coincide con la tesi del teorema di Talete.

## Bibliografia

FRANCIA Franco (1985). Insiemi di punti materiali, «*Archimede*».

FRANCIA Franco (2019). Insiemi completi del terzo ordine, «*Periodico di Matematica*», Vol. I (1-2). Edizioni AFSU.

FRANCIA Franco (2020). Insiemi completi del quarto ordine, «*Periodico di Matematica*», Vol. II (2). Edizioni AFSU.

FRANCIA Franco (2023). Insiemi del V ordine contenenti punti nello spazio, «*Periodico di Matematica*», Vol. V (2). Edizioni AFSU.

\*\*\*\*\*

## La matematica per un matematico

*La matematica per un matematico (almeno per la maggior parte, per quanto ne so) non è soltanto un'attività culturale che noi stessi abbiamo creato, ma ha una sua vita e gran parte di essa si trova in stupefacente armonia con l'universo fisico. Non possiamo comprendere profondamente le leggi che reggono il mondo fisico senza entrare nel mondo della matematica. In particolare, la precedente nozione di classe d'equivalenza è pertinente non soltanto a molta matematica importante (ma ambigua), ma anche a molta fisica importante (ma ambigua), come la teoria della relatività generale di Einstein e i principi delle "teorie di gauge" che descrivono le forze naturali secondo la moderna fisica delle particelle. Nel campo della fisica moderna non si può evitare di affrontare le sottigliezze di una grande quantità di matematica sofisticata.*

Da Roger Penrose, premio Nobel 2020 per la fisica, *La strada che porta alla realtà. Le leggi fondamentali dell'universo*, Milano, BUR Rizzoli, p. 11.

\*\*\*\*\*

# *Dall'Università di Federico II all'istruzione ... differenziata*

*Perché non si deve regionalizzare l'istruzione  
pubblica nazionale*

Giuliano Laccetti\*

\*Università degli Studi di Napoli Federico II ; giuliano.laccetti@unina.it



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v6n2.135

**Sunto:** *Nel 1224 un geniale e superlativo Federico II fondava l'Università di Napoli, che oggi da lui prende il suo nome. Università pubblica, laica, moderna, nata e voluta anche per la creazione di una classe dirigente che potesse governare il "moderno" Regno di Sicilia, con concezioni e principi "illuminati", con una forte accentramento dei poteri, tipici di monarchie e in genere stati dell'Europa continentale. Ma dopo "solo" 800 anni i problemi sembrano essere gli stessi, con minore voglia e capacità di affrontarli e risolverli. Acuiti dalla proposta di "istruzione differenziata": l'istruzione, una delle materie strategiche, nazionali, che invece si vorrebbe regionalizzare con la richiesta di oscena secessione dei ricchi.*

**Parole Chiave:** *Federico II, università statale, istruzione regionalizzata, autonomia differenziata.*

**Abstract:** *In 1224 the brilliant and superlative Emperor Federico II founded the University of Naples, which today takes its name from him. Public, secular, "state" and modern university, born and desired also for the creation of a ruling class that could govern the "modern" Kingdom of Sicily, with "enlightened"*

*conceptions and principles, with a strong centralization of powers, typical of monarchies and states in continental Europe in general. But after "only" 800 years the problems seem to be the same, with less desire and ability to face and solve them. Sharpened by the proposal for "differentiated education": education, one of the strategic, national subjects, which some would instead like to regionalize with the request for "obscene" secession of the rich.*

**Keywords:** *Federico II, State University, Regionalized Education, Differentiated Autonomy*

**Nota:** *Questa è la riscrittura di un intervento pronunciato dall'autore al Convegno "La Scuola tra Università e Istituzioni nell'800-esimo anniversario della nascita dell'Ateneo "Federico II", organizzato dall'ANFSU, Napoli, 8 maggio 2024*

## **1 - L'Università di Federico II**

Come tutti sanno, l'*Universitas Studiorum* napoletana per eccellenza, la *Federico II*, chiamata così dal nome del suo fondatore, è la prima Università laica del mondo. Fu fondata nel giugno del 1224. Esistono altre "Scuole" o "Studia" (così si chiamavano spesso le Università a quei tempi) precedenti, anche di un centinaio di anni e più, ma erano di fatto università pensate, volute e finanziate da privati. L'Università di Napoli nasce come università laica e statale, voluta da un sovrano a caratterizzazione "ghibellina" (si pensi al contrario alla più "vecchia" Università di Bologna, il cui anno di nascita si fa risalire al 1088: università privata, a caratterizzazione guelfa, "papalina"); ecco, perché, tra l'altro, quella di Napoli può e deve essere considerata la più antica Università laica e di Stato del mondo. Nel senso che era pensata per le esigenze dello Stato!

La modernità, la complessità e vastità dell'opera di un sovrano come Federico II si apprezzano leggendo ad esempio le *Constitutiones Melphitanae*, un documento di alto rango e valore, che configura una vera e propria organizzazione statale tipica di uno stato centralizzato, caratteristico nella storia dell'Europa continentale. Le *Constitutiones, o Liber Augustalis*, pensate e volute da Federico II, furono stese da una sorta di assemblea legislativa di giuristi, filosofi, scienziati, tra cui Pier Delle Vigne, notaio a Capua, Michele Scoto, matematico e filosofo scozzese, Roffredo di Benevento, e anche abati e vescovi di gran cultura, quali ad es. Giacomo Amalfitano e Berardo di Casacca, arcivescovo di Palermo. Esse hanno come principale obiettivo la regolamentazione di una convivenza civile e ordinata nel regno di Sicilia, in cui vivevano popolazioni di origine italiana, greca, araba, normanna. I principi affermati nelle *Constitutiones* devono essere rispettati da tutti, ricchi, poveri, nobili, clero, cristiani, ebrei, musulmani. Si tratta di norme che dimostrano come Federico II avesse appreso appieno la lezione bizantina e tenesse nel massimo conto la tradizione normanna: esse miravano infatti a costituire uno stato centralizzato, burocratico, tendenzialmente livellatore, insomma avviato a concezioni che si possono reputare "moderne".

La lungimiranza e la modernità di Federico II sono esemplificate dalla importanza che, anche nelle *Constitutiones*, fu data alla cultura, all'arte, alla scienza. Sotto Federico II Palermo divenne una delle città culturalmente più importanti d'Europa, e fu fondata, come detto, l'Università di Napoli. Una università nata con il compito di formare una classe dirigente adeguata ai compiti di una amministrazione

pubblica complessa, nata in funzione di esigenze politico-sociali. Insomma, una modernità davvero stupefacente (Laccetti, 2019):

*Nella detta città saranno dottori e maestri in ogni facoltà, gli scolari, donde che vengano, vengano sicuri di soggiornare, stare o ritornare senza patire alcun danno, tanto nella persona, quanto negli averi. I migliori alloggi che si troveranno nella città si fitteranno agli scolari per due once d'ore di pigione, né l'importo di essa sarà più alto. Tutti gli alloggi si fitteranno per meno di questa somma, e fino all'ammontare di essa, secondo che stimeranno due cittadini e due scolari. Si farà prestito agli scolari, secondo i loro bisogni, dalle persone a ciò designate, dati in pegno i libri ...; però, lo scolaro che riceverà il prestito non si allontani dalla città, se prima non abbia riconsegnato i pegni e pagato il prestito ... . I predetti pegni non saranno ridomandati dai creditori per tutto il tempo, che gli scolari vorranno rimanere nello Studio.*

Il problema del “diritto allo studio”, così drammatico ai tempi d'oggi, è affrontato e risolto, certo, con una “legge” che però aveva forza per essere applicata. Con indicazioni e avvertenze. Residenze per studenti, affitti “calmierati”, borse di studio, libri in prestito: davvero stupefacente.

Ma non basta. Fuga dei cervelli? Esisteva anche allora, ma per ragioni probabilmente opposte a quelle di oggi: beh, a modo suo, con le “armi” a disposizione a quel tempo, la “coercizione”, Federico II, affronta e risolve anche questo problema:

*... nessun scolaro osi uscire dal Regno per ragioni di studio, sotto pena della persona e dei beni; coloro che si trovino presso Scuole fuori del Regno, ... tornino per la festa di S. Michele; né alcuno osi apprendere o insegnare altrove all'interno del Regno.*

Il bando di Borgo San Donnino, del 1226, ancora, è un documento attualissimo ... in maniera "divertente" e sorprendente: si ordinava che dalle nemiche città della Padania fossero rimossi *Scholas et Studia* e che dottori e scolari che avessero continuato a *docere, legere, audire* in quelle località fossero condannati all'infamia perpetua e all'interdizione dai pubblici uffici. Una sorta di lotta *ante-litteram* al regionalismo differenziato? Metteva in essere azioni "decise" di contrasto. Azioni, minacce e punizioni ... magari lo potessimo fare adesso!

Infine, la cosiddetta "terza missione". Da vari anni, adesso, formalmente, si chiede all'università di aggiungere alle tradizionali "mission" della didattica e della ricerca, la cosiddetta terza missione, quella di interagire con la società per trasmetterle, in modo diretto e immediato, i risultati di conoscenze ed esperienze, per potenziare lo sviluppo civile, economico e culturale, per favorire la mobilità sociale. Federico II fa anche questo: ribalta l'impostazione dei suoi predecessori, premia capacità, conoscenze e professionalità, le uniche capaci di migliorare la società. indipendentemente dal censo o dalla nascita. Famoso l'episodio in cui Federico II redarguisce Tommaso di Montenegro, "giustiziere" di Benevento, per aver scelto come giudice un "illetterato" (magari, era di nobili natali).

## **2 - Facciamo un salto di 800 anni**

I problemi per l'università ... sono proprio gli stessi, *mutatis mutandis!* E soprattutto, ahimé, con una minore voglia e soprattutto capacità, di comprenderli, affrontarli, risolverli!

Che cosa rischia di diventare l'intuizione geniale, moderna, di Federico II, con le oscure richieste di autonomia, la cosiddetta secessione dei ricchi, secondo una brillante definizione del mio amico e collega Gianfranco Viesti, ordinario di Economia all'Università di Bari "Aldo Moro"?

Il tema della cosiddetta "istruzione differenziata", intrecciata con il Pnrr e la questione meridionale, è sicuramente un argomento di estrema attualità e importanza. Non a caso molti sono d'accordo nel ritenere l'istruzione (scuola e università), insieme con la ricerca, settori strategici di sviluppo del Paese, che non si può permettere che i divari su questi aspetti tra vari territori si accrescano (o si creino) specialmente adesso, per "colpa" del regionalismo differenziato, e degli ingenti investimenti del *Next Generation EU*, che noi decliniamo con il nostro Pnrr.

"Non si tratta di soldi..."; "non basta aumentare i finanziamenti..."; "... eh, i soldi ci sono, ma poi... restano inutilizzati...". Quante volte abbiamo sentito queste parole. Il tema del sottofinanziamento cronico, per anni davvero imbarazzante, dell'intero settore Istruzione e Ricerca, va con forza denunciato, per rivendicare, al di là di finti moralismi e preoccupazioni (bisogna saper spendere i soldi), che prima di tutto si finanzino in maniera adeguata scuola, università, ricerca. Certo, i finanziamenti, poi, vanno "ben spesi"!

Io vorrei chiedere a tutte le forze politiche, *in primis* a quelle della mia parte, per così dire, e a tante autorevoli personalità indipendenti, che hanno a cuore la scuola, l'istruzione pubblica in Italia, l'impegno di stabilizzare almeno sul 5% o poco più del PIL l'investimento per la scuola; sullo 0,75-0,80% del PIL quello per il FFO degli atenei, come all'incirca è in

Spagna, senza voler pensare (almeno per adesso) di arrivare all'1% o ancora di più, di Francia e Germania; e sul 2-2,3% del PIL per la ricerca, grosso modo come la media europea. "Non basta dare soldi". Ancora si sente dire. Ma cominciamo a riservarli, in maniera sicura e significativa, a temi centrali e strategici, come questi, per lo sviluppo del Paese.

Il dover ancora oggi discutere per affermare la necessità di un riequilibrio Sud-Nord, lungi dall'essere una sorpresa, dimostra purtroppo come sia difficile convincersi del fatto che il Paese cresce se il Sud cresce; e che solo visioni davvero miopi e di corto respiro, che vedono la fine *nell'espace d'un matin*, possono pensare di non essere accorti, solidali e coesi, come paese intero, e non guardare solo al proprio "particolare", al proprio territorio, ancorché, ancora per poco temo, in vantaggio economico e di sviluppo rispetto ad altri.

Una cosa che la propaganda leghista e di destra non sottolinea (anzi!) è che le regioni possono chiedere, ma il governo e il Parlamento non sono obbligati a concedere. Si sente spesso dire: l'autonomia è nella Costituzione, si deve perciò attuare! Niente di più falso. Le regioni chiedono, il governo e poi il Parlamento decidono. Questo, e non altro, è scritto nella Costituzione.

### **3 -Cos'è l'autonomia differenziata**

Lasciamo da parte per un attimo l'istruzione, ci ritorno subito: chiediamoci quali conseguenze avrebbe la competenza regionale in materie come le grandi reti nazionali di trasporto e navigazione; oppure produzione e trasporto di energia. In quest'ultimo caso, le ultime vicende internazionali (aumento

del gas, guerra, ecc.) spingono a pensare a una dimensione sovranazionale, altro che ridursi a una asfittica visione regionale italiana! Ma, in definitiva, che cosa chiedono le regioni secessioniste? Solo alcuni esempi: acquisizione al demanio regionale della rete ferroviaria e autostradale; l'approvazione delle infrastrutture strategiche di competenza statale che interessano il territorio regionale; le competenze statali in materia di immigrazione; addirittura, per chiudere, l'equivalenza terapeutica dei farmaci: immaginate 20 piccole AIFA, una per regione, con norme e regole diverse per i farmaci! Un delirio! Eppure, Calderoli (o Zaia o Fontana) affermano che l'autonomia significa "semplificare" e "migliorare" la vita dei cittadini (Viesti, 2023).

Sulle risorse: esiste una legge, che non ha a che vedere con l'autonomia differenziata, ma, relativa al federalismo fiscale, è un tassello che si intreccia con queste nuove richieste. È la legge Calderoli, la 42/2009, che, di fatto, non è mai stata attuata. I LEP, Livelli Essenziali delle Prestazioni (meglio definirli Livelli Uniformi delle Prestazioni, ché essenziali può far pensare/temere a livelli davvero minimi!) devono essere definiti: ma .. .poi ... chi li garantisce? Con quali soldi? Per portare il Mezzogiorno e le zone interne allo stesso livello di quantità e qualità di servizi delle zone più ricche, è stato stimato ci vogliano tra 80 e 100 miliardi in più ogni anno! E ancora: I LEP sono davvero garanzia di equità?

Abbiamo ahimè l'esempio pessimo dei LEA nella sanità: esistono da anni, sono noti e definiti, eppure ... eppure non servono ad esempio a stabilire la ripartizione del Fondo Sanitario Nazionale. Che si basa su numero di abitanti per regione, ed età della popolazione della regione. La Campania,

che è la regione più giovane d'Italia, riceve in proporzione molti meno soldi rispetto alla Liguria, o all'Emilia-Romagna, regioni con età media della popolazione più alta. In Campania, studi recentissimi lo confermano, ci sono moltissimi adolescenti e giovani, ad esempio, sovrappeso o addirittura obesi, con gravi rischi per la salute, e quindi in questo modo il fabbisogno è evidente come sia più alto che in altre regioni, ma questo parametro (le patologie) non viene preso in considerazione, e i trasferimenti alla Campania sono molto bassi rispetto alle necessità.

Se a Reggio Emilia ci sono centinaia di asili nido, e a Reggio Calabria pochissimi asili nido, invece di invertire la tendenza, finanziare costruzione e mantenimento (personale, trasporti scolastici, mense, ecc.) di asili nido a Reggio Calabria, si è deciso per anni (fortunatamente in quest'ultimo periodo pare che le cose comincino a cambiare) di finanziare Reggio Emilia con 9 milioni di euro l'anno (deve pensare a tanti asili nido!), e Reggio Calabria con 90.000 euro l'anno (ne ha pochi, 90.000 euro bastano!) Una vergogna!

#### **4 - Istruzione differenziata**

E torniamo alla scuola. La scuola si può regionalizzare? Servono robuste leggi cornice per definire con chiarezza cosa deve trattenere per sé lo stato: ad esempio, i criteri selettivi per la docenza, i titoli di studio, eccetera. C'è invece il pericolo di autorizzare un serio disfacimento scolastico. In Italia negli ultimi anni il livello di insegnamento nelle scuole e negli atenei ha subito un calo preoccupante. Non solo. Migliaia di giovani preparati, competenti e capaci, a spese dello Stato

italiano, preferiscono l'esodo in Paesi anglosassoni o europei. E in questo c'entra l'oscenità della autonomia differenziata. Perché quando si vuole modificare *tout-court* un sistema complesso come la scuola, bisogna fare attenzione. Le riforme devono migliorare il Paese, non accentuarne il degrado. E il conto di questa fuga all'estero dei nostri migliori cervelli è già salatissimo.

L'autonomia differenziata apre a una scuola regionalizzata, *à la carte*. Con quel che ne consegue: il rischio di professori assunti dalle regioni e non più dal ministero dell'istruzione, cioè dallo Stato. Raddoppio delle funzioni e, di conseguenza, dei costi.

Da una parte i palazzi della pubblica amministrazione a Roma svuotati. Dall'altra il budget delle regioni che impenna per farsi carico del corpo docente e del personale scolastico. E ancora: inquadramenti contrattuali di docenti e collaboratori, retribuzioni, sistemi di reclutamento e valutazione. Su tutto questo le regioni potrebbero avere l'ultima parola.

Lo stesso vale per i programmi scolastici: una volta ottenuta la delega sull'istruzione, sarebbero ancora le regioni a decidere il menu delle materie e la tabella di marcia sui banchi di scuola. L'ipotesi mette in allarme i sindacati: «affidare il reclutamento del personale alle regioni significa creare differenze tra stipendi e contratti, dunque indebolire un'intera categoria». Ma il piano suscita preoccupazione un po' in tutti: ministro e sottosegretari garantiscono l'uniformità del sistema di assunzione e dei programmi, e assicurano che lo "spezzatino" del corpo docenti e dei suoi costi tra governo e regioni non ci sarà. Eppure il rischio c'è. Nelle intese firmate dalle Regioni che nel 2017 hanno chiesto l'autonomia -

Veneto, Lombardia ed Emilia-Romagna - c'era il pacchetto completo. Assunzioni, concorsi, «fondi integrativi». Inclusi i programmi scolastici: nel 2018 Zaia ha perfino firmato un protocollo con il ministero dell'istruzione perché si insegnasse nelle aule della regione «la storia dell'emigrazione veneta». Interessantissima, per carità, ma ... solo nel Veneto? Un corso sulla Serenissima e le sue vicende per gli studenti veneti, «un'anteprima dell'autonomia regionale che verrà», appunto. Sei anni dopo, oggi, il destino di un comparto da un milione di dipendenti rimane in bilico. Secondo autorevoli costituzionalisti includere la scuola nelle intese tra stato e regioni significa dare a queste ultime la possibilità di decidere su stipendi e assunzioni con una drastica riduzione delle competenze dei ministeri che si troverebbero svuotati e una probabile desertificazione di Roma e dei suoi apparati.

Secondo alcuni la spesa media pro-capite al Centro-Nord, e segnatamente in Veneto e Lombardia, è più bassa che nel Mezzogiorno, e quindi una maggiore "autonomia" anche in tema di finanziamenti avrebbe garantito maggiore equità. I soldi che Veneto e Lombardia hanno attualmente sono pochi! Pochi ... misurati in base a quale parametro? La popolazione. Ovviamente chiunque, di buon senso, capisce che il parametro deve essere il numero di studenti, non di abitanti; un trucco ulteriore è sempre stato considerare la sola spesa statale (in pratica, gli stipendi). E il trasporto scolastico? E la mensa? E il tempo pieno (si stima in circa 1000 ore in 5 anni la differenza di "frequenza", praticamente un anno in meno su 5!)? E le vacanze per gli studenti, pagate da regione e comuni? Tutti soldi che non esistono neanche a pensarci al Sud, ma che sono "normali" in moltissime realtà del Centro-Nord.

Io credo che compito nostro sia discutere, e tanto, di queste cose, e di informare insegnanti, studenti, famiglie, perché poi si facciano sentire con le varie forze politiche e verso chi detiene il potere, per farla finita con questa oscena secessione dei ricchi, idea che, sia pure in quantità più o meno diversa, e con qualche distinguo minore, alberga ahimé in tutte le forze politiche, in molte organizzazioni sindacali, in molti dirigenti di quelle organizzazioni in tutto il Nord. Non voglio essere cerchiobottista, ma non posso non sottolineare, e ricordare a tutti voi, che se la responsabilità maggiore ovviamente è delle forze politiche “nordiste”, la Lega Nord, tanto per parlar chiaro, con le richieste di Veneto e Lombardia, non posso tacere, dicevo, che un sostegno a questo obbrobrio lo abbiano dato forze politiche di colore opposto, come quelle che guidano la regione Emilia-Romagna!

In definitiva, bisogna denunciare con forza il rischio di una “istruzione differenziata” (Laccetti, 2022), dove per il combinato disposto di regionalismo differenziato e finanziamenti da Pnrr, “solo in alcune regioni”:

- si riducano le classi-pollai aumentando il numero di insegnanti e magari riattrezzando o costruendo nuove aule e scuole;

- si faccia in modo che dal 1° settembre di ogni anno gli insegnanti siano già al proprio posto, e si possa quindi iniziare l’anno scolastico senza ritardi, senza successivi trasferimenti in corso d’anno, eccetera;

- mense e trasporti scolastici siano sufficienti a gestire e soddisfare un sempre più alto numero di studenti;

- finanziamenti, per lo meno nei 5 anni successivi, siano garantiti in modo da consentire una corretta e sicura programmazione ad esempio nel campo dell'edilizia scolastica;

- si aumenti fino al 33% e oltre la percentuale di bambini in età di asilo-nido che possano usufruire di questo servizio.

Credo che sia arrivato il momento di avere il coraggio, tutti, di rispondere a chi chiede: "ma se chiedo tutte queste cose significa che voglio spaccare l'Italia?": sì, vuoi spaccare l'Italia, perché queste cose le chiedi, egoisticamente, per la tua sola regione.

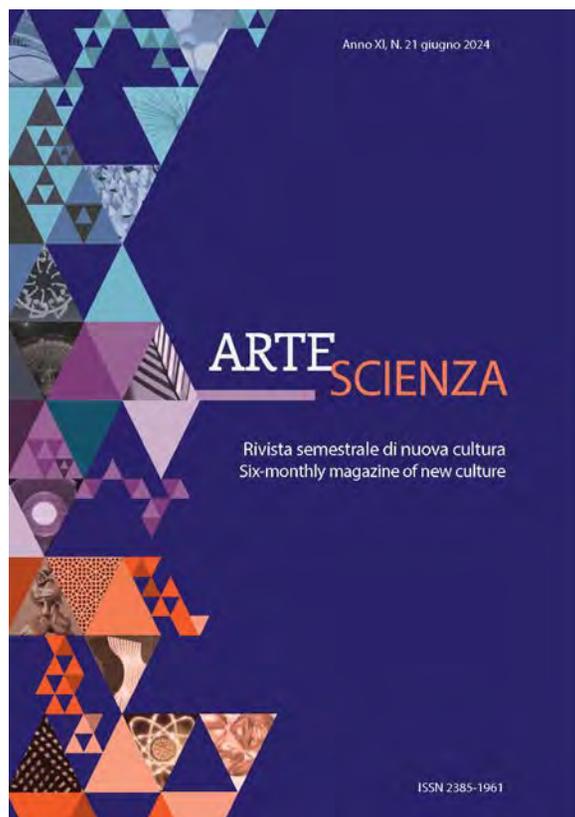
Il divario Nord-Sud è uno dei principali freni allo sviluppo dell'Italia e dobbiamo continuare a batterci perché venga da subito ridotto e poi eliminato del tutto.

## **Bibliografia**

LACCETTI G. (2019). *Diritto allo studio e fuga dei cervelli nell'Università di Federico II Imperatore*, La Prima Pietra, <https://www.laprimapietra.eu/diritto-allo-studio-fuga-dei-cervelli-nelluniversita-di-federico-ii-imperatore/>

LACCETTI G. (2022). Il rischio dell'istruzione differenziata, "*La Repubblica-Napoli*", 28 ottobre 2022.

VIESTI G. (2023). *Contro la secessione dei ricchi*. Bari:Laterza.



### ArteScienza N.21- giugno 2024

- *Per un modello generale dell'equilibrio nei sistemi dinamici complessi adattivi* (Ezio Sciarra)
- *Leon Battista Alberti e la nascita dei codici polialfabetici* (Franco Eugeni)
- *La bellezza della scienza nell'arte della parola* (Eugenia Rigano)
- *Tra matematica e schizofrenia: Gregory Bateson e Russell, von Neumann, Wiener* (Davide Bondoni)
- *Il mitico Pitigrilli, interprete dell'erotismo del Ventennio fascista* (Franco Eugeni)
- *Temperamenti musicali senza le UCAS- Parte I* (Paolo Severino Manca)
- *Achille, l'Auto-immunità e le Arti Occidentali* (Duilio Carpitella)
- *Dalla Roma pontificia ai fasti della Belle Èpoque* (Antonio Castellani)
- *Il mazzocchio negli studioli di Urbino e Gubbio* (Maurizio Sisti)

# Entropia

## Correlazione tra macrostato più probabile del sistema e maggiore disponibilità di spazio

Giuseppe D'Angelo \*

\*Docente di Scienze Naturali presso Liceo Scientifico "Leonardo" di Giarre  
(CT); sitdang010762@gmail.com

DOI: 10.53159 /PdM(IV).v6n2.136



**Sunto.** *L'esistenza di processi fisico-chimici irreversibili e la freccia unidirezionale del tempo vengono giustificati dalla Fisica come inevitabile conseguenza del costante aumento medio dell'entropia nell'universo. È possibile anche osservare che il verificarsi delle trasformazioni termodinamiche, dove entra in gioco l'entropia, sono sempre strettamente dipendenti dallo spazio volumetrico che il sistema ha a disposizione per effettuare la trasformazione. Tale spazio è sempre abbondante ed anche in progressivo aumento, a causa dell'espansione dell'universo. Ciò determinerebbe il costante aumento medio dell'entropia e l'orientamento della freccia del tempo.*

**Parole Chiave:** *entropia, Entalpia, Energia libera, Spazio*

**Abstract.** *The existence of irreversible physico-chemical processes and the unidirectional arrow of time are justified by Physics as an inevitable consequence of the constant average increase in Entropy in the universe. It is also possible to observe that the occurrence of thermodynamic transformations, where entropy comes into play, are always strictly dependent on the volumetric space that the system has available to carry out the transformation. This space is always abundant and progressively increasing, due to the expansion of the universe. This*

*would determine the constant average increase in entropy and the orientation of the arrow of time.*

**Keywords:** *Entropy, Enthalpy, Free Energy, Space*

## 1 - Introduzione

In tutto l'universo si osservano processi irreversibili che seguono in modo unidirezionale la freccia del tempo. Gli eventi si susseguono sempre in una successione prevedibile e determinata. Se una bottiglia o un bicchiere di vetro cadono dal tavolo, quando giungono a terra si osserva sempre che si rompono in tanti pezzi. Non accade mai di osservare poi i pezzi di vetro rimettersi insieme, spontaneamente, e la bottiglia o il bicchiere ritornare sul tavolo. Come anche non accade mai di vedere un pezzo di legno bruciare totalmente e poi la cenere ed i fumi ritornare a costituire il pezzo di legno come era prima. Ed ancora, prima si nasce, poi si cresce ed infine si invecchia e si muore. Nessun vecchio è ritornato neonato.

Tuttavia, le leggi fondamentali della fisica non prevedono l'irreversibilità di questi processi. Teorie accreditate come quella di Newton o di Einstein, come pure quella delle stringhe, trattano in maniera perfettamente identica sia il passato che il futuro. Il verso unico della freccia del tempo non trova affatto una facile giustificazione. La risposta a questo mistero risiede nel concetto di entropia. In tutti i processi irreversibili in cui esiste una freccia del tempo si osserva che l'entropia cresce mentre il sistema procede dall'ordine al disordine.

Lo stato di un sistema termodinamico, o macrostato, dipende dalla particolare configurazione microscopica dei suoi costituenti elementari.<sup>i</sup> Esso evolve spontaneamente verso la forma più probabile<sup>ii</sup> e tale probabilità è legata all'entropia, cioè al disordine del sistema,<sup>1</sup> secondo la legge descritta dall'equazione di Boltzmann:<sup>2</sup>

$$1) \quad S = K_B \ln(N) + c$$

con:

$K_B$  = costante di Boltzmann

$N$  = numero di microstati che corrispondono al macrostato considerato

$c$  = costante arbitraria che scompare quando si considerano differenze di entropia

Se i microstati possono aumentare anche l'entropia aumenta. Una trasformazione che porta ad aumentare il numero di microstati che costituiscono il macrostato finale del sistema è, in generale, una trasformazione spontanea.

In questo breve lavoro si vuole volgere l'attenzione ad una particolare correlazione che lega l'entropia, comunemente definita tramite il concetto di disordine particellare presentato

---

1 L'entropia (dal greco antico ἐν εν, "dentro", e τροπή tropé, "trasformazione") è, in meccanica statistica, una grandezza in particolare una coordinata generalizzata) che viene interpretata come una misura del disordine presente in un sistema fisico qualsiasi. Viene generalmente rappresentata dalla lettera S. Nel sistema internazionale si misura in Joule fratto Kelvin (J/K).

2 Ludwig Eduard Boltzmann (1844 - 1906) è stato un fisico, matematico e filosofo austriaco.

da un sistema, con la disponibilità di ulteriore spazio<sup>3</sup> che un sistema in trasformazione può occupare alla fine della trasformazione medesima

## 2 - Sistemi ed entropia

Se consideriamo ad esempio un sistema costituito da un contenitore di un certo volume con del gas al suo interno, il suo macrostato più probabile sarà quello in cui le  $n$  molecole (per ipotesi tutte uguali per massa e dimensioni) di cui è composto il gas si distribuiscono uniformemente in tutto il volume del contenitore medesimo perché la probabilità che avvenga ciò anziché formare dei nuclei di addensamento è massima. Finché il gas non sarà omogeneamente distribuito il sistema non avrà raggiunto l'equilibrio finale ed evolverà finché non lo trova. Una volta raggiunto tale equilibrio la densità media delle molecole si manterrà costante. Se la scatola adesso dovesse cambiare volume (diventa più grande o più piccola) l'equilibrio precedente subisce un momentaneo cambiamento per raggiungere poi un nuovo macrostato nel quale la densità media delle molecole sarà ancora uniforme ma minore o maggiore rispetto a prima. In entrambi i casi il nuovo equilibrio è dato dal macrostato più probabile, cioè quello che prevede una distribuzione uniforme delle

---

<sup>3</sup> Si vuole sostenere l'esistenza di una relazione generale monotona tra l'entropia statistica di un sistema chiuso ed il volume dell'ensemble microcanonico nello spazio delle sole coordinate. Questa particolare relazione prevede, tuttavia, una estensione del concetto di sistema includendone anche l'aspetto legato all'energia scambiata.

molecole. Il caso in cui il volume del contenitore diminuisce<sup>4</sup> è possibile osservarlo solo se il sistema in questione è chiuso ma non se si tratta di un sistema totalmente isolato.<sup>5</sup>

Nel primo caso, infatti, ipotizzando di comprimere il contenitore, le molecole del gas, sulla base dell'energia cinetica posseduta, aumentano la frequenza degli urti tra di loro e con le pareti del recipiente facendo aumentare la pressione all'interno del contenitore e la temperatura del gas. La cessione di calore poi attraverso le pareti del contenitore e il raggiungimento dell'equilibrio termico con l'ambiente esterno<sup>6</sup> determinerà il raggiungimento anche dell'equilibrio cinetico interno del sistema. Il sistema presenterà adesso un nuovo macrostato caratterizzato da un determinato valore della pressione che dipende, ovviamente, dall'equilibrio termico raggiunto con l'ambiente. Le molecole avranno adesso meno energia cinetica, faranno meno urti e ci sarà un numero minore di microstati possibili e quindi una minore entropia.<sup>iii</sup>

Se il sistema è isolato totalmente il processo di riduzione del volume non può avvenire proprio per definizione di sistema isolato. Il sistema se è già in equilibrio non può auto comprimersi o auto espandersi perché nessun sottoinsieme del sistema può cedere o sottrarre energia alle altre parti componenti.<sup>7</sup>

---

<sup>4</sup> Il volume può diminuire o perché il contenitore viene compresso, applicando ad esso una forza, o per raffreddamento a pressione costante.

<sup>5</sup> Cioè se il sistema non può scambiare con l'ambiente né calore né lavoro.

<sup>6</sup> Ipotizziamo che l'ambiente esterno sia rappresentato da un sistema isolato in equilibrio termico iniziale con il gas all'interno del contenitore.

<sup>7</sup>Ad esempio, il gas contenuto in un termos perfetto (un semplice contenitore, senza pistone) non può scambiare calore e/o altra forma di energia (es. energia meccanica, come nell'esempio di un cilindro con

Nel caso, invece, di un sistema isolato solo termicamente la diminuzione di volume del contenitore dipende sostanzialmente dalla resistenza offerta dalle sue pareti alla pressione che può assumere il gas al suo interno. Tuttavia, anche in questo caso ed entro i limiti del carico di rottura, le molecole del gas si distribuiranno all'interno del contenitore seguendo il modello del macrostato più probabile che è sempre quello di una distribuzione uniforme in relazione allo spazio disponibile. Nel caso di un sistema chiuso, per una riduzione di volume del contenitore (conseguente ad un raffreddamento) non parliamo, come è giusto che sia, di aumento di entropia ma, piuttosto, di una sua diminuzione.

In un sistema isolato, deduciamo che l'entropia può solo aumentare se non ha già raggiunto il macrostato più probabile in assoluto ed il massimo livello di semplificazione delle sue componenti.

In effetti le molecole del gas sono più vicine e cominciano a disporsi in modo più ordinato facendo diminuire il numero di microstati differenti che compongono il macrostato finale di equilibrio.

La funzione logaritmica di Boltzmann ci dà, in questo caso, un valore inferiore di entropia perché essa è proporzionale al numero di microstati  $N$ . In particolare, possiamo osservare un grado di ordine elevato quando il gas, portato al di sotto della sua temperatura critica, passa allo stato liquido (in tal caso il calore ceduto all'ambiente fa aumentare l'entropia

---

stantuffo termicamente isolato) con l'ambiente esterno e le variazioni di energia cinetica sono nulle.

dell'ambiente più di quanto diminuisca l'entropia del sistema) e successivamente a quello solido.

Eppure, anche in un corpo solido gli atomi e le molecole si dispongono sempre secondo il macrostato più probabile in relazione alle condizioni ambientali vigenti. Ad esempio, il reticolo cristallino dei minerali subisce delle modifiche strutturali (trasformando il minerale da una forma mineralogica ad un'altra, con facies anche molto differente) se cambiano le condizioni di pressione e temperatura dell'ambiente geologico in cui si ritrovano. In questo caso si parla di entropia configurazionale e di fenomeni di ordine - disordine cristallografico.<sup>iv</sup> L'entropia configurazionale dei cristalli dipende sia dalla temperatura che dalla pressione dell'ambiente di formazione, spesso ipogeo. Il polimorfismo ne è un esempio esplicito. Il diverso abito cristallino che può presentare un minerale è infatti dovuto a questi due parametri ambientali. Un esempio di polimorfismo molto noto è quello del diamante e della grafite. Nel primo il carbonio assume una struttura compatta tetraedrica scarsamente entropica. Tale struttura viene acquisita nel mantello della Terra, dove esistono condizioni di altissima pressione, a profondità comprese tra i 150 e i 225 Km. I diamanti così formati durante un lungo periodo geologico vengono poi portati in superficie da attività vulcaniche, inglobati in rocce contenenti olivina e kimberlite. Nella grafite invece il carbonio forma strutture planari esagonali sovrapposte e tenute insieme da deboli forze di Van der Waals, a causa della notevole distanza tra i piani (0,340 nm). La distanza tra i piani permette addirittura ad atomi di vari elementi (anche molecole gassose) di interporsi con regolarità geometrica tra i piani medesimi.

La grafite rappresenta la forma stabile a temperatura e pressione ordinaria con una evidente e maggiore entropia reticolare. Si trova in rocce di metamorfismo termico regionale derivate dalla trasformazione di preesistente materiale organico.

Per comprendere meglio gli aspetti termodinamici dell'entropia dobbiamo considerare in modo più approfondito gli scambi di energia di un sistema chiuso. Il calore ceduto dal gas che viene compresso, ad esempio, fa aumentare l'entropia generale del sistema più ampio nel quale è contenuto il primo, che potrebbe essere il volume della stanza in cui si trova il contenitore con il gas. Ad esempio, se il nostro contenitore viene sottoposto ad una pressione da parte di un macchinario, allora dobbiamo considerare anche l'energia liberata dal macchinario che comprime il contenitore con il gas al suo interno, oltre al calore ceduto dal gas medesimo.

Tutto il calore ceduto dal nostro sistema si diffonde adesso nello spazio occupato dalla stanza venendo intercettato dalle molecole dell'aria che la riempiono oltreché dagli oggetti presenti in essa. Adesso il sistema chiuso che dobbiamo considerare diventa tutta la stanza con il sistema iniziale al suo interno. Nel complesso osserviamo che l'energia cinetica delle particelle dell'aria contenuta nella stanza aumenta e, quindi, aumenta l'entropia del più ampio sistema che adesso stiamo considerando e cioè tutta l'aria della stanza e gli oggetti che vi si trovano dentro. Le molecole dell'aria della stanza tendono ad occupare un volume cinetico<sup>8</sup> maggiore

---

<sup>8</sup>Il termine cinetico associato a volume vuole far riferimento al volume utilizzato dalle molecole di un gas che varia al variare dell'energia cinetica posseduta dalle stesse. Il termine si contrappone a quello di volume

con una conseguente espansione ed un maggiore disordine complessivo. Ci rendiamo conto che la diminuzione di entropia subita dal gas all'interno del contenitore (primo sistema) è strettamente correlata all'aumento dell'entropia del gas all'interno della stanza (secondo sistema). Il calore ceduto dal gas, che prima era energia cinetica e quindi disordine del gas, ora diventa energia cinetica e quindi disordine dell'aria della stanza. Il disordine si trasferisce dalle molecole del gas, tenuto nel contenitore, alle molecole dell'aria della stanza. Puntando l'attenzione sul fenomeno "disordine" sembra che esso non tenga strettamente conto del sistema che stiamo analizzando e del solo spazio in cui esso è confinato. Gli scambi energetici tra sistema ed ambiente esterno<sup>9</sup> sembrano mediare la diffusione spaziale del "disordine". L'energia scambiata permette così di spostare il "disordine" da un sistema ad un altro, prima considerato ambiente esterno (esempio del gas che viene compresso), e viceversa (è il caso di un gas che si espande, occupando più spazio).<sup>10</sup>

A scanso di equivoci si vuole ricordare che esistono processi apparentemente anti - entropici, come quelli che riguardano i sistemi viventi. Tali sistemi operano una concentrazione spaziale di materia ed energia, nelle singole

---

intrinseco (caso dei gas reali) che deve intendersi invece nel senso di volume molecolare, quello che per l'atomo sarebbe il volume atomico.

<sup>9</sup> Che per il primo sistema (contenitore con il gas) poteva essere, inizialmente, il volume della stanza e poi tutto lo spazio rimanente se consideriamo anche la stanza come sistema (chiuso o aperto che sia).

<sup>10</sup> Nell'esempio della stanza, se spegniamo il macchinario che aveva compresso il gas riducendolo ad un volume minore si riporta la pressione del gas al valore della pressione dell'aria della stanza. Il gas quindi si espanderà spontaneamente assorbendo calore dall'aria della medesima stanza.

cellule e nei corpi di ciascun vivente. Ma si tratta di una riduzione apparente di entropia di cui ci rendiamo conto se fermiamo, magari, la nostra attenzione al sistema più ampio che contiene il primo. Cioè, l'entropia totale aumenta sempre, anche nei processi di costruzione dei viventi. Un esempio è dato dalla fotosintesi clorofilliana e dal sistema fisico-chimico rappresentato dai complessi di pigmenti e dalle molecole della catena di trasporto degli elettroni fino ad arrivare ai composti che realizzano il ciclo di Calvin - Benson. Di tutta l'energia solare catturata dai fotosistemi solo una modesta percentuale la si ritrova sotto forma di energia chimica di legame nelle molecole di gliceraldeide prodotte alla fine del ciclo di Calvin. Il resto è andato disperso nello spazio sotto forma di calore. L'apparente riduzione di disordine posta in evidenza dal processo costruttivo molecolare viene ampiamente compensata dal maggior disordine energetico conseguito, legato al degrado subito dalla forma energetica in ingresso nel sistema (luce) che ritroviamo poi sotto forma di calore. L'entropia totale è quindi aumentata. Analogo discorso può essere fatto per tutti i processi del metabolismo, sia catabolico che anabolico.

### **3 - Entropia e spazio**

Ricapitolando, possiamo osservare che, sebbene si rispetti sempre il principio che i macrostati più probabili sono quelli più ricchi di microstati, e quindi più disordinati, dove l'entropia assume il valore massimo possibile secondo l'equazione di Boltzmann è pur vero che la spontaneità è dettata dalle condizioni ambientali e che, se vogliamo parlare

di vero disordine di un sistema è evidente che esso aumenta solo nel caso il sistema si ritrova ad avere spazio in più rispetto a quello che aveva prima della trasformazione.<sup>11</sup> In questi casi le componenti del sistema si ritrovano più distanti tra loro e quindi con un minor grado di ordine. Nell'esempio del gas che viene compresso abbiamo osservato che l'energia termica ceduta dalle sue molecole si trova ora dispersa nello spazio circostante rappresentato dal volume della stanza,<sup>12</sup> pertanto la compressione ha determinato un aumento del disordine dell'energia del sistema che prima era confinata in esso sotto forma di energia cinetica delle sue molecole, mentre dopo si disperde nello spazio sotto forma di calore (quindi in forma elettromagnetica). Il maggior ordine acquisito dalle molecole del gas dentro al contenitore è stato compensato dal maggior disordine della sua energia ceduta, che viene poi assorbita dalle molecole dell'aria della stanza che di conseguenza presentano una maggiore energia cinetica, cioè un maggiore disordine entropico. Quindi possiamo parlare di correlazione tra disordine di un sistema e la sua entropia,

---

<sup>11</sup>Anche adesso bisogna ricordare che l'aumento del numero di compressioni corrispondenti ad un macrostato si può realizzare per un aumento del volume dello spazio dei momenti senza bisogno che ci debba essere, necessariamente, un aumento di volume in quello delle coordinate spaziali. Tuttavia, la disponibilità di ulteriore volume delle coordinate spaziali porta le componenti del sistema ad occupare quest'ultimo tipo di volume più che sfruttare più intensamente lo spazio dei momenti. Lo spazio dei momenti è infatti correlato a quello delle coordinate e se quest'ultimo è disponibile per essere occupato verrà occupato necessariamente.

<sup>12</sup>Che possiamo considerare, ipoteticamente, come un altro sistema chiuso in grado di scambiare solo energia. In tal caso il calore liberato dal gas si potrà propagare, in teoria, anche oltre la stanza, per tutto l'universo se sussistono le condizioni fisiche per poterlo fare.

generalmente parlando, quando il sistema può distribuire la sua materia e/o la sua energia in un volume di spazio maggiore. In tal modo nel novero dei microstati che vanno a comporre il macrostato di equilibrio andiamo a considerare anche quelli dell'energia termica scambiata.<sup>13</sup> Anche un sistema isolato termicamente può assumere ulteriori macrostati più probabili e stabili e quindi raggiungere un livello di entropia maggiore se si trova ad avere a disposizione ulteriore spazio. Considerando infatti uno scambio di lavoro tra il sistema e l'ambiente esterno in grado di causare in esso l'aumento della temperatura (compressione), in quanto l'energia cinetica delle molecole si trasforma in radiazione termica, nel momento in cui la forza comprimente cessa, il volume ritorna come prima ed in ogni caso lo spazio complessivo delle fasi rimane costante in questo processo di trasformazione.<sup>14</sup> Ma se il contenitore del nostro sistema diventasse improvvisamente più grande<sup>15</sup> allora lo spazio delle velocità rimarrebbe costante (perché non è variata l'energia cinetica) ma quello delle coordinate aumenterebbe e quindi aumenterebbe il disordine complessivo, cioè l'entropia del sistema. Poiché i sistemi sono quasi sempre chiusi (o aperti) l'energia scambiata durante una trasformazione non ha mai un confinamento spaziale e ciò rende possibile la trasformazione proprio perché il disordine complessivo

---

<sup>13</sup> Questo concetto sarà meglio esplicitato più avanti, nei prossimi paragrafi.

<sup>14</sup> Se diminuisce lo spazio delle coordinate aumenta quello dei momenti e viceversa nella trasformazione inversa.

<sup>15</sup> Collegando, per esempio, ad esso un altro contenitore vuoto (senza alcun gas) attraverso un tubo collettore ed aprendo il rubinetto di collegamento.

aumenta comunque, anche quando dovesse riguardare solamente l'energia termica. Ritornando al sistema isolato termicamente, quando il gas si espande, a seguito della compressione subita, il calore liberato in fase di compressione viene riassorbito. L'entropia del sistema è anche ora funzione dello spazio e della temperatura come lo era prima della trasformazione. Essa verrà sempre misurata dividendo il calore scambiato  $Q$  per la temperatura del sistema  $T$  ( $Q/T$ ). La variazione complessiva di entropia  $\Delta S$  (durante l'intero processo di compressione ed espansione) è quindi pari a 0 (trasformazione isoentropica), come appunto nelle trasformazioni adiabatiche nei sistemi conservativi, proprio perché il calore non è stato ceduto dal sistema in quanto isolato. Quindi è chiaro che per far variare l'entropia è necessario uno scambio energetico con l'ambiente.<sup>v</sup> Inoltre, va precisato che sono le condizioni ambientali a dettare legge nell'individuare il macrostato più probabile. L'uniforme densità di un gas compresso e liquefatto all'interno del suo contenitore (es. una bombola) rappresenta il macrostato più probabile del gas a quelle condizioni pressorie, ma anche l'uniforme densità di un gas non liquefatto all'interno di un altro contenitore a minore pressione ne rappresenta il macrostato più probabile. In entrambi i casi, infatti, le molecole dei due gas si distribuiscono uniformemente in tutto il volume disponibile senza la presenza di nuclei di accumulo preferenziali all'interno di esso. Tuttavia, se i due contenitori venissero collegati osserveremmo un flusso di gas dal contenitore a maggiore pressione a quello a minore pressione fino al raggiungimento dell'equilibrio pressorio. Ciò che ha indotto questa espansione spontanea è stato il maggior

volume disponibile che poteva essere occupato dal gas contenuto nella bombola ad alta pressione.

### **3.1 - Tre importanti funzioni di stato**

Un concetto molto importante in termodinamica è quello di funzione di stato. È un concetto indispensabile che permette di definire scientificamente i fenomeni (trasformazioni) termodinamici medesimi e quantificarne le entità energetiche. È quindi necessario puntualizzare questo concetto e definire tre importanti funzioni di stato come entropia, entalpia ed energia interna che stanno alla base delle leggi della termodinamica.

In analisi matematica, si definisce funzione di stato una funzione la cui variazione tra due punti, detti stati del sistema, dipende solo dal valore delle coordinate di questi ultimi. Le funzioni di stato in termodinamica rappresentano grandezze fisiche la cui variazione nel passare da uno stato iniziale a uno stato finale dipende solamente dalle condizioni assunte da un sistema all'inizio e alla fine di una trasformazione termodinamica, cioè dallo stato iniziale e finale, e non dal particolare percorso seguito durante la trasformazione. In termodinamica, inoltre, le funzioni di stato dipendono dal volume, dalla pressione e dalla temperatura, cioè da quei parametri che caratterizzano le proprietà macroscopiche di un sistema, indipendentemente dalla sua struttura locale. Non ci si sofferma sulla definizione dei tre principi della termodinamica, cosa che ci porterebbe un po' lontani dallo scopo della riflessione qui presentata, ma si vuole comunque definire queste tre importanti grandezze.

L'energia interna (E) di un sistema termodinamico è data dalla somma di tutte le energie, cinetica e potenziale delle particelle del sistema medesimo. Quando si parla di energia cinetica si fa certamente riferimento a tutte e tre le sue componenti (traslazionale, rotazionale e vibrazionale).

L'entropia viene calcolata sommando le quantità di calore scambiate dal sistema in una qualsiasi trasformazione reversibile che vada da A a B, divise rispettivamente per le temperature assolute delle sorgenti con cui si scambia calore e si misura in joule per grado Kelvin. In tutti i processi fisici irreversibili di un sistema isolato, l'entropia, come già osservato, aumenta sempre e tende ad un valore massimo. Quindi è una funzione crescente della probabilità che un sistema si trovi in un determinato stato macroscopico (come descrive l'equazione di Boltzmann). L'entropia motiva il secondo principio della termodinamica in quanto indice di non totale utilizzabilità del calore nelle conversioni energetiche.

L'Entalpia è definita come la somma dell'energia interna e del prodotto pressione per volume ( $H = E + P*V$ ). Procediamo adesso con l'osservare che tra le funzioni di stato prese in considerazione dalla termodinamica (energia interna, entalpia, entropia, energia libera di Gibbs) l'entalpia manifesta in modo specifico l'aspetto entropico dell'energia. Ricordando infatti che:

$$2) \quad \Delta E = Q - L = Q - P*(V_2-V_1) \quad 16$$

---

<sup>16</sup> Il segno meno risponde ad una convenzione fatta per tener conto del calore assorbito dal sistema (che assume segno positivo) e di quello ceduto (che assume segno negativo). Ma è chiaro che la variazione di energia interna del sistema la ritroviamo sempre sotto forma di somma tra calore e lavoro:  $\Delta E = Q + |L|$ .

ricaviamo:

$$3) \quad Q = (E_2 + P_2 \cdot V_2) - (E_1 + P_1 \cdot V_1)$$

Ponendo:

$$4) \quad H = E + P \cdot V$$

ed ipotizzando un processo isobarico in cui

$$5) \quad Q = \Delta E + p \cdot \Delta V.$$

Sappiamo che:

$$6) \quad Q = H_2 - H_1 = \Delta H$$

Dalla 6) possiamo anche considerare l'entalpia come il contenuto termico di un sistema di cui possiamo però misurarne solo le variazioni ( $\Delta H$ ).

### 3.2 - Entropia ed energia libera

In un sistema chiuso, a pressione costante, che subisce una diminuzione di volume per raffreddamento avremo un  $\Delta H$  (variazione di entalpia)  $< 0$ , cioè una cessione di calore all'ambiente, e un  $\Delta S < 0$  in quanto si raggiunge una disposizione più ordinata delle componenti particellari con una riduzione dello spazio delle fasi. In questo caso sappiamo che la trasformazione può essere spontanea alla temperatura  $T$ , in cui si trova il sistema, solo se:  $\Delta H - T\Delta S < 0$  (secondo la nota relazione dell'*energia libera*  $G$  di Gibbs - Helmholtz). In buona sostanza, in questo caso, affinché la trasformazione sia spontanea il sistema deve cedere complessivamente energia all'ambiente. In questo modo il sistema evolve verso il macrostato più probabile. Poiché il calore di un sistema, chiuso o aperto che sia, può essere scambiato solo se attorno al sistema c'è dell'altro spazio oltre a quello occupato dal sistema stesso e dove l'energia può propagarsi, possiamo affermare che una trasformazione è favorita, e quindi anche spontanea<sup>vi</sup>

se vi è altro spazio che può essere occupato dall'energia e dalla materia del sistema in trasformazione.<sup>vii</sup> Se in una reazione chimica esoergonica l'energia liberata non avesse spazio dove propagarsi (ipotizziamo il nostro sistema chimico perfettamente isolato nel suo volume intrinseco, cioè nel volume proprio dei suoi reagenti chimici) la reazione non potrebbe avvenire perché il calore resterebbe all'interno degli atomi/molecole delle differenti sostanze reagenti. Nell'esempio del gas liquefatto che si espande notiamo poi che il sistema assorbe calore dall'ambiente nel processo di espansione e così facendo aumenta il proprio disordine interno. In tal caso avremo un  $\Delta H > 0$  e un  $\Delta S > 0$ . A parte osservare che l'espansione di un gas non può avvenire senza avere a disposizione altro spazio da occupare è importante notare anche che l'energia termica assorbita dal gas (ceduta dall'ambiente) si ritrova adesso sotto forma di energia cinetica delle particelle del gas medesimo e distribuita, sotto questa forma, nel maggior volume occupato adesso dal gas. Una riduzione di disordine a carico dell'energia (ceduta dall'ambiente) ha permesso un aumento di disordine a carico del gas (il sistema). Anche in questo caso vale il principio dell'energia libera di Gibbs. La reazione diventa spontanea solo se  $\Delta G < 0$ . Cioè, solo nel caso in cui l'energia si distribuisca in un volume di spazio maggiore (il maggior volume occupato dal gas a seguito dell'espansione). Il calore assorbito adesso si ritrova sotto forma di maggior energia cinetica posseduta dalle molecole del gas che in tal modo si distribuiscono in un volume maggiore. In senso generale l'ambiente riceve sempre complessivamente (tra entalpia ed entropia) energia. In questo caso, come già osservato, si tratta

di energia cinetica in quanto aumenta l'entropia del sistema. Come è possibile notare si parla di entalpia e di entropia che sono due grandezze termodinamiche che hanno entrambe a che fare con l'energia (termica e cinetica) come infatti dimostrano le loro unità di misura in cui compare sempre il Joule ( $\Delta H = \text{KJ/mol}$ ;  $\Delta S = \text{J/}^\circ\text{Kmol}$ ).

L'energia termica e cinetica sono due forme di energia<sup>17</sup> che richiedono spazio per manifestarsi.<sup>viii</sup> Dagli esempi che sono stati fatti deduciamo che, se si vuole parlare in maniera completa di disordine di un sistema che subisce una trasformazione è bene che in tale concetto si faccia rientrare anche quello di entalpia<sup>18</sup> e non solo quello di entropia. Le due grandezze termodinamiche entrano in gioco sempre insieme.<sup>ix</sup> Anche l'energia come la materia subisce un aumento di disordine nelle trasformazioni fisico - chimiche. L'energia termica ceduta da un sistema si disperde infatti nello spazio occupandolo uniformemente. Se dunque si può parlare di disordine, sia in riferimento alla cinetica delle particelle di un sistema fisico sia all'energia da esso posseduta e scambiata, il concetto di entropia travalica il significato classico attribuitogli, inglobando quello di energia libera di Gibbs - Helmholtz. È, infatti, questa funzione termodinamica

---

<sup>17</sup> Sebbene energia termica ed energia cinetica siano sostanzialmente dei sinonimi, tuttavia, ci si riferisce alla energia termica quando si vuole indicare l'aspetto elettromagnetico della stessa, mentre si parla di energia cinetica in riferimento agli effetti di movimento che essa ha sulle particelle del sistema.

<sup>18</sup> Parliamo soltanto di entalpia se facciamo riferimento a trasformazioni che avvengono a pressione costante. In altre situazioni (come nell'esempio del gas che viene compresso) il calore scambiato deve tenere conto anche del lavoro fatto sul sistema, così come vuole il primo principio della termodinamica:  $Q = \Delta E + L$ .

che riesce a considerare contemporaneamente sia il disordine energetico del sistema (più direttamente rappresentato dalle variazioni di entalpia) sia quello particellare tipicamente entropico, con manifestazione più prettamente cinetica. È dunque l'energia libera di Gibbs che esprime in modo completo il concetto di entropia totale di un sistema. L'entropia così intesa appare sempre più strettamente correlata, nelle sue variazioni, alla disponibilità di spazio fisico. Un ipotetico sistema privo di spazio, ad eccezione di quello intrinseco occupato fisicamente dal sistema medesimo,<sup>19</sup> non può infatti evolvere non potendo subire trasformazioni termodinamiche di alcun tipo.

#### 4 - Energia ed entropia

Sappiamo che l'energia può subire delle trasformazioni a tutti note. Ad esempio, l'energia potenziale gravitazionale si può facilmente trasformare in energia cinetica, come accade quando un corpo cade. Anche l'energia potenziale chimica (energia interna, energia di legame) può trasformarsi in altre forme di energia come calore e luce. Anche l'energia di un campo elettrico oscillante può trasformarsi in energia elettromagnetica sotto forma di onde radio (radiocomunicazioni). In tutti questi casi si tratta di trasformazioni energetiche nelle quali l'energia passa da uno stato iniziale ad uno stato finale (ad esempio dallo stato di

---

<sup>19</sup> Si immagini un oggetto con una massa che occupa solo il volume intrinseco dai suoi atomi senza ulteriori spazi reticolari che rappresenta, di per sé, tutto ciò che esiste, una sorta di universo. Questo oggetto non potrà subire trasformazioni.

energia potenziale chimica a quello di energia termica). La quantità di energia trasformata sembra dipendere soltanto dallo stato iniziale e da quello finale della forma potenziale. Ad esempio, se si lascia cadere un oggetto più volte sempre dalla medesima altezza  $h$ , riferita ad un piano di riferimento, ma facendolo arrivare, di volta in volta, su piani diversi posti ad altezze minori di  $h$  ed infine sul piano di riferimento posto proprio all'altezza  $h$ , si osserveranno effetti meccanici differenti sui vari piani d'impatto. Questo perché l'energia cinetica sviluppata è differente e maggiore man mano che i vari dislivelli diventano sempre più vicini ad  $h$ . Analogamente l'energia termica scambiata da un medesimo elemento chimico quando si combina con elementi differenti non è la stessa nei vari casi perché dipende dalla differenza tra l'energia potenziale chimica posseduta prima e dopo la formazione del legame che dipende, a sua volta, dall'elemento con il quale avviene il legame. Sembra quindi che l'energia assuma il tipico comportamento di una funzione di stato. Cioè, essa dipende esclusivamente dallo stato iniziale e da quello finale dopo la trasformazione. In effetti è noto che l'energia interna di un sistema fisico-chimico è proprio una funzione di stato. Ma dobbiamo considerare solo l'energia potenziale una funzione di stato oppure in questo concetto possiamo far rientrare anche altre forme di energia? In tutti i casi presi sopra in considerazione l'energia subisce un aumento di disordine evidenziato dal suo distribuirsi in uno spazio molto maggiore: l'energia potenziale chimica si converte, in parte, in energia termica o luminosa e si propaga nello spazio in tutte le direzioni, mentre l'energia potenziale gravitazionale, trasformandosi in energia cinetica, fa sì che il

corpo percorra uno spazio e quindi si manifesta lungo un percorso nel quale è come se si distribuisse. Come abbiamo visto l'energia potenziale gravitazionale, prima che il corpo cada, è confinata nel corpo stesso in relazione alla posizione altimetrica che esso occupa; l'energia potenziale chimica è invece localizzata nei singoli legami chimici, quindi in volumi dello spazio molto ristretti. Dopo la trasformazione l'energia occupa invece tutto lo spazio a disposizione. È evidente che si è verificato un aumento del disordine dell'energia, cioè della sua entropia. A questo punto pare possibile espandere il concetto di entropia anche all'energia oltreché al sistema vero e proprio. Adattare il concetto di entropia a qualcosa come l'energia, che non possiamo definire sistema fisico in senso classico, può essere teoricamente giustificabile a condizione che si consideri un modello interpretativo che tenga conto della doppia natura ondulatoria e corpuscolare dell'energia elettromagnetica che, quindi, consideri la stessa anche come "particella".<sup>20</sup>

La relazione 5) ci informa che il calore scambiato corrisponde alla variazione di entalpia, cioè all'energia liberata in seguito al degrado di una forma di energia più complessa (energia potenziale chimica, ad esempio); energia liberata che adesso si trova in uno stato di disordine, cioè in uno stato di maggiore entropia.

Proviamo a chiarire ulteriormente proponendo il seguente modello descrittivo. Consideriamo un sistema (A) che scambia (ad esempio cedendo) una certa quantità di calore ( $Q = \Delta H$ )

---

<sup>20</sup> L'energia cinetica non ha bisogno di ulteriori giustificazioni teoriche in quanto essa è associata alle particelle costituenti un sistema e del suo "disordine" si occupa già l'entropia classicamente intesa.

con l'ambiente circostante. Consideriamo una frazione di questo calore liberato attraverso una superficie unitaria di una sfera virtuale (Sf.<sub>1</sub>) che delimita il sistema. Immaginiamo pure una seconda sfera virtuale (Sf.<sub>2</sub>), più grande della prima, ad essa circoscritta. Lo spazio vuoto delimitato dalle due sfere, nell'intercapedine creatasi tra esse, rappresenti per noi un secondo sistema (B).<sup>21</sup> La frazione di calore ( $Q_1$ ) ceduto attraverso la superficie unitaria della prima sfera virtuale raggiunge in parte, propagandosi, una porzione di uguale superficie della seconda sfera virtuale, attraversandola. Sia  $Q_2$  tale quantità di calore tale che  $Q_1 > Q_2$  a causa della rarefazione subita dall'energia termica all'aumentare della distanza dalla superficie sorgente. La differenza tra il calore ceduto dal sistema A e quello ceduto dal sistema B ( $Q_1 - Q_2$ ) rappresenta il calore virtualmente assorbito dal sistema B e questo ci suggerisce l'ipotesi di estendere il teorema di Clausius al caso in questione, teorizzando una forma di lavoro virtuale svolto dal sistema B. Teorema che, nel caso di 2 sfere

---

<sup>21</sup> Lo spazio vuoto compreso tra la sfera di raggio minore e quella di raggio maggiore delimita un volume che vogliamo considerare perfettamente vuoto, privo cioè di componenti materiali come, ad esempio, molecole di gas. Questo spazio sebbene vuoto per quanto riguarda la materia risulta permeato dall'energia termica che lo attraversa, rilasciata dalla superficie della sfera più piccola. Essendo comunque l'energia l'alter ego della materia, possiamo dire che questo volume di spazio proprio vuoto non lo è. Da questo punto di vista acquista le caratteristiche di sistema, energetico e non materiale, ma pur sempre di sistema fisico; tenuto conto, proprio appunto, della sua doppia natura corpuscolare - ondulatoria.

concentriche,<sup>22</sup> come in quello considerato, può essere espresso da:

$$\sum_{k=1}^2 \frac{Q_k}{T_k} = 0$$

Se invece consideriamo il calore che viene scambiato tra infinite sfere concentriche integrando su un ciclo completo avremo:

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0$$

Ma l'integrale tra le due sfere concentriche del calore scambiato lo possiamo paragonare all'integrale tra due stati termodinamici (C e D) di una trasformazione reversibile che viene considerato per definizione come variazione di entropia:

$$\int_C^D \frac{dQ}{T} = S_D - S_C = \Delta S$$

Quindi la variazione di entropia appare non soltanto come calore scambiato dal sistema ma anche come una forma di entropia dell'energia; energia che costituisce una sorta di sistema materialmente vuoto.

L'energia di legame sarebbe quindi una forma di energia molto concentrata e ordinata perché incapsulata nel minimo volume molecolare. Analogamente l'energia associata ad un campo gravitazionale o elettrico. Nel primo caso risulta concentrata in una precisa distanza dal centro gravitazionale, nel secondo è invece concentrata nello specifico quantitativo di carica accumulata in un punto dello spazio.

---

<sup>22</sup> Le due sfere concentriche (dalle quali si irradia il calore) rappresentano due stati (C e D) in cui si trova il sistema energia considerato, prima e dopo la trasformazione.

## 5 - Conclusioni

L'energia libera di Gibbs - Helmholtz assume quindi non soltanto il consueto significato di energia utile, cioè in grado di essere utilizzata per svolgere un lavoro utile, ma anche quello di un indicatore del complessivo aumento del disordine dell'energia - materia del sistema. Cioè, bisogna considerare l'energia libera di Gibbs come la variazione dell'entropia totale che si verifica durante la trasformazione. Cioè, ancora, l'insieme del disordine cinetico molecolare e del disordine energetico generato dal calore scambiato (entropia dell'energia). Calore che pertanto non rimane nella forma di contenuto termico incorporato al sistema (entalpia  $H$ ) ma che si trasforma in entalpia liberata<sup>23</sup> cioè, in forma elettromagnetica (e che può essere misurata come  $\Delta H$ ). Il calore liberato (o assorbito) si configura come una condizione di maggiore (o minore) disordine in cui si viene a trovare l'energia, prima legata alle particelle che compongono il sistema. Quindi l'entropia totale del sistema si avvale di entrambi questi contributi ed è per questo che la grandezza termodinamica più idonea a descriverla è appunto l'energia di Gibbs. Diversamente, il concetto che il macrostato più probabile sia quello con un numero maggiore di microstati e quindi quello con un maggior disordine particellare (entropia in senso stretto) non può essere sempre verificato. In alcuni casi si cadrebbe in contraddizione quando si considerano eventi che determinano una riduzione di entropia ma che comunque raggiungono il macrostato più probabile.<sup>x</sup> In altre

---

<sup>23</sup> Nei processi endotermici il calore viene assorbito dal sistema, venendone da esso incorporato.

parole, se il macrostato più probabile deve essere quello con un numero maggiore di microstati allora un gas che subisce un raffreddamento a pressione costante non potrebbe avere un volume minore, dove il numero di microstati dello spazio delle fasi è minore, perché questo non potrebbe essere il macrostato più probabile. Il concetto di disordine entropico deve quindi, necessariamente, considerare anche il disordine energetico, preso meglio in considerazione dalla grandezza termodinamica entalpia.<sup>xi</sup> E quando si parla di macrostato più probabile bisogna intenderlo anche in riferimento al calore scambiato.<sup>xii</sup> Siamo praticamente indotti a considerare un contributo al numero complessivo di microstati che possa essere offerto anche da una sorta di "spazio delle fasi dell'energia".<sup>xiii</sup> Se l'energia termica viene ceduta dal sistema ( $\Delta H < 0$ ) il numero di microstati dell'energia aumenta. Se l'energia termica viene assorbita ( $\Delta H > 0$ ) il numero di microstati dell'energia diminuisce. Nel primo caso l'entropia particellare (entropia in senso stretto) del sistema diminuisce, mentre nel secondo caso aumenta.

La disponibilità di spazio da occupare sembra quindi essere strettamente necessaria per permettere un reale aumento di entropia del sistema. Dove andrebbe infatti a propagarsi il calore ceduto dal sistema se non esistesse uno spazio letteralmente infinito dove propagarsi?<sup>24</sup> Da questo punto di

---

<sup>24</sup> O da dove proverrebbe il calore nelle reazioni endotermiche se non esistesse uno spazio esterno (ambiente) al sistema medesimo?

vista l'entalpia (o meglio, la sua variazione  $\Delta H$ ) si configura come un aspetto complementare del "disordine" complessivo e cioè dell'entropia totale.

La semplificazione (cioè, la tendenza al disordine) dei sistemi dipende dalla possibilità che hanno di disgregarsi che dipende, a sua volta, dalla disponibilità di spazio aggiuntivo dove collocare i frammenti (anche i fotoni). I sistemi complessi (da una molecola ad un macro-corpo qualsiasi) hanno quindi tutti la tendenza a semplificarsi perché lo spazio nell'universo non manca, anzi aumenta molto velocemente (espansione dell'universo). La genesi continua dello Spazio - Tempo è la causa dei processi entropici che determina il verso con il quale scorre il tempo (dal passato al futuro tramite il presente, e non viceversa). L'invecchiamento, l'evoluzione dei viventi, la trasformazione delle rocce in terreno fertile, la nascita, la morte, ecc. sono eventi che non possono essere arrestati nel loro divenire ed invertiti nella loro direzione temporale, proprio a causa dell'entropia. A causa della disponibilità crescente di spazio.

## NOTE

<sup>i</sup> Il macrostato di un sistema costituito, ad esempio, da un gas è identificabile con i suoi parametri: pressione, temperatura e volume. Il microstato è invece descritto dalla posizione e dalla velocità delle molecole che lo costituiscono. Si dice poi macrostato ogni possibile configurazione di un sistema fisico rilevabile con strumenti macroscopici, e ad ognuno di essi corrisponde un numero (generalmente molto alto) di microstati. Consideriamo per semplificazione un gas costituito da  $N = 3$  molecole. Immaginiamo una scatola suddivisa in due scomparti tramite un setto. Dovendo disporre in essa le tre molecole abbiamo differenti possibili combinazioni con cui possiamo collocarle. Se  $N = 3$  i modi per poterle disporre sono otto. Infatti:

	A, B, C	C	A, B
B, C	A	A	B, C
A, C	B	B	A, C
A, B	C	A, B, C	

Ogni combinazione delle molecole prende il nome di microstato. Se A, B, C, ecc... sono molecole identiche, allora, una osservazione dall'esterno del sistema non ci permetterà di distinguerle l'una dall'altra. In tal modo, come evidenzia l'esempio visto sopra, tutti e tre i microstati che contengono due molecole a sinistra ed una a destra risultano indistinguibili, e rappresentano perciò lo stesso macrostato. La pressione di un gas, ad esempio, è data dagli urti delle molecole contro le pareti del recipiente e non ha importanza quale particolare molecola abbia urtato la parete. Se in un certo istante si sono verificati due urti di due molecole differenti, che chiamiamo A e B e che hanno la stessa velocità, sulle pareti C e D rispettivamente, cioè A urta C e B urta D, oppure nella combinazione inversa (A urta D e B urta C) non cambia nulla. La pressione esercitata dal gas sulle pareti del contenitore rimane invariata.

<sup>ii</sup> Cioè, verso la configurazione microscopica più probabile. Consideriamo un altro esempio numerico. Supponiamo di dover collocare sei palline tutte uguali all'interno di una scatola suddivisa in due scomparti. Le combinazioni con cui possiamo disporre le palline sono diverse. Ad esempio, possiamo metterne una nello scompartimento di sinistra e le altre cinque a destra, o viceversa, o anche sei da un lato e nessuna dall'altro, o qualunque altra possibilità ci venga in mente. La tabella che segue considera tutte le combinazioni possibili.

n = 6		
Sinistra (A)	Destra (n-A)	N = C <sub>n,A</sub>
0	6	1
1	5	6
2	4	15
3	3	20
4	2	15
5	1	6
6	0	1

Si osserva chiaramente che il maggior numero di combinazioni possibili corrisponde al caso in cui le palline sono suddivise esattamente a metà nei due scomparti, tre a sinistra e tre a destra.

Nelle situazioni con più palline notiamo che:

- i macrostati in cui le palline sono divise a metà nei due scomparti sono quelli più probabili;

- la differenza tra il caso in cui le palline sono divise a metà e quello in cui si ha una sola pallina in uno dei due scomparti aumenta all'aumentare del numero delle palline disponibili.

Più alto è il numero di palline e più accentuata è questa tendenza. Nel caso di un gas, con un numero di molecole dell'ordine di grandezza del numero di Avogadro, lo scarto tra il macrostato più probabile e quello in cui si ha una sola molecola a destra o a sinistra è enorme. Quest'ultimo caso diventa così poco probabile che di fatto non si verifica mai.

iii Il numero di microstati non dipende soltanto dal numero di molecole che compongono il gas ma anche dalla loro energia cinetica. Inoltre, il loro numero non dipende solo dallo spazio fisico disponibile per le molecole ma dall'intero spazio delle fasi accessibile al sistema, ossia anche dallo spazio degli impulsi. Tuttavia, le molecole, in generale, potranno occupare un volume maggiore quando aumenta l'energia cinetica che possiedono a condizione che dispongano di altro spazio in grado di essere occupato; quindi, quando il volume fisico (delle coordinate) può aumentare liberamente. In tal caso aumenta anche il numero di possibili posizioni occupate dalle molecole medesime e l'intero spazio delle fasi accessibile. Se invece diminuisce la loro energia cinetica diminuirà di conseguenza anche il numero complessivo delle posizioni occupabili. Se però consideriamo un gas chiuso in un cilindro, dotato di pistone mobile, che funziona da termos (quindi un sistema isolato solo

termicamente), un aumento della pressione sul gas ottenuto spingendo il pistone ne ridurrà il volume ma questo non determinerà una diminuzione di entropia ma al contrario un suo aumento dato che essa dipende dal volume dell'ensemble statistico nello spazio delle fasi (individuato dalle coordinate e dai momenti coniugati) e non soltanto dal volume occupato nello spazio delle coordinate. In altri termini potremmo dire che l'insieme di Gibbs si arricchisce di ulteriori stati verificandosi un aumento della densità di probabilità:  $\rho(p, q, t)$ , dove  $(p, q)$  è un'abbreviazione per  $(q_1 \dots q_{n_v} p_1 \dots p_n)$ , definita in modo tale che misuri il numero di punti rappresentativi che al tempo  $t$  sono contenuti nel volume infinitesimo  $(dq_1 \dots dq_{n_v} dp_1 \dots dp_n)$  centrato intorno al punto  $(q_1 \dots q_{n_v} p_1 \dots p_n)$ . Lo spazio delle coordinate diminuisce ma aumenta però lo spazio degli impulsi perché aumenta la velocità quadratica media delle particelle in quanto l'energia meccanica fornita tramite pistone ha fatto aumentare l'energia cinetica complessiva delle stesse. Nel caso di un sistema chiuso il calore può abbandonare il sistema medesimo riducendo lo spazio delle velocità e conseguentemente quello delle coordinate. Quindi la sua entropia diminuisce. Se il sistema chiuso assorbe calore aumenta l'energia cinetica media delle sue particelle e, quindi, il volume delle coordinate comincerà ad aumentare prima ancora che quello delle velocità. Se però il volume fosse bloccato dall'esterno accadrà il contrario: aumenterà inizialmente lo spazio delle velocità in modo tale da ottenere un aumento temporaneo di entropia del sistema. Ma visto che il sistema è chiuso e non isolato la cessione di calore all'ambiente riporterà l'entropia totale al valore precedente.

<sup>iv</sup>L'entropia configurazionale deriva dalla presenza nel cristallo di una serie di difetti che ne influenzano, peraltro, le proprietà fisico - chimiche (resistenza meccanica, la plasticità, la conduttività elettrica e la reattività chimica, ecc.). I colori di molte pietre preziose sono dovuti alla presenza di impurezze atomiche nelle strutture cristalline. In un cristallo perfetto tutti gli atomi occuperebbero le corrette posizioni reticolari nella struttura cristallina. Un tale cristallo perfetto potrebbe esistere solo allo zero assoluto (0 K). Al di sopra di tale temperatura tutti i cristalli risultano "imperfetti". Tutti i solidi manifestano una tendenza termodinamica ad acquisire difetti, introducendo elementi di disordine in una struttura altrimenti perfetta e, quindi, ne aumentano l'entropia. Introdurre un difetto nel reticolo cristallino è un evento che ha una certa probabilità di verificarsi e quindi si verifica. L'energia libera di Gibbs di un solido che contiene difetti aumenta per contributi ricevuti dall'entalpia e dall'entropia del campione. Essendo l'entropia una misura del disordine del sistema, e

dato che qualunque solido in cui alcuni degli atomi non occupano i loro siti reticolari possiede entropia superiore a quella di un cristallo perfetto, ne consegue che la presenza dei difetti contribuisce con un termine negativo all'energia libera di Gibbs. La formazione dei difetti è in generale un processo endotermico (nel qual caso  $H$  risulta più elevata in presenza dei difetti), ma poiché  $T > 0$ , l'energia libera di Gibbs avrà un minimo a concentrazione dei difetti diversa da zero e la loro formazione sarà spontanea. Inoltre, al crescere della temperatura, il minimo di  $G$  si sposta verso concentrazioni superiori di difetti. Un esempio di difetto di un solido cristallino è dato da un centro cromatico, costituito da un elettrone situato in un vuoto anionico. Il colore si manifesta grazie all'eccitazione dell'elettrone nel contesto localizzato degli ioni che lo circondano, e i suoi livelli energetici quantizzati rassomigliano a quelli di un elettrone racchiuso in una scatola sferica.

<sup>v</sup> L'integrale da  $A$  a  $B$  lungo una qualsiasi trasformazione reversibile viene considerato, per definizione, come variazione di entropia denotata con la lettera  $S$ :  $\int_A^B \frac{dQ}{T} = S_B - S_A = \Delta S$ . Se però la temperatura è costante indipendentemente dallo scambio di calore nel corso della trasformazione possiamo affidarci alla formula semplificata:  $\Delta S = \frac{Q}{T}$ . La variazione di entropia è quindi sempre associata ad uno scambio di calore del sistema con l'ambiente. Il maggiore o minore disordine acquisito dal sistema ne è una diretta conseguenza. A conferma di ciò si noti come, nell'esempio del sistema isolato che viene compresso per il lavoro esercitato su di esso dall'ambiente, nel momento in cui il sistema torna ad espandersi lo stesso compie lavoro sull'ambiente che (in un gas perfetto) equivale al lavoro subito. In questo caso, non verificandosi scambi di calore con l'ambiente, il bilancio entropico risulta, come già detto, in parità.

<sup>vi</sup> In una trasformazione adiabatica, nella quale il calore scambiato con l'ambiente esterno è nullo ( $Q = 0$ ) e il sistema non è espandibile o comprimibile, la spontaneità della stessa dipende dalla eterogeneità densimetrica del sistema considerato (vedi nota n.8). Vale a dire dal non raggiunto equilibrio macrostatico del sistema. Cioè, ancora, se il sistema presenta disuniforme distribuzione di materia ed energia da un punto all'altro di esso. In tal caso si possono verificare trasformazioni adiabatiche che complessivamente comportano un bilancio in pareggio del calore scambiato all'interno del sistema ed il raggiungimento di un equilibrio finale per quanto riguarda la densità delle componenti particellari.

---

vii Nelle trasformazioni endoergoniche si assiste all'assorbimento di energia da parte del sistema che subisce la trasformazione. In questi casi le trasformazioni sono spontanee solo se l'aumento di entropia subito dal sistema, quindi il suo TΔS (della equazione di Gibbs - Helmholtz), è  $> 0$  e  $>$  di  $\Delta H$ . Solo così, infatti, può aversi un  $\Delta G < 0$ . Diversamente, la trasformazione, alla temperatura T, non avverrà. Si può osservare come la spontaneità della trasformazione (indicata dal suo  $\Delta G$ ) è sempre legata alla maggiore disponibilità di spazio dove le particelle del sistema, adesso dotate di maggiore energia cinetica, possono muoversi.

viii Ad esempio, l'energia cinetica fa muovere un corpo e questi per muoversi ha bisogno di spazio. Ad un corpo che si muove viene infatti associata una energia cinetica. Il calore si propaga da una sorgente in ogni direzione e per far questo ha bisogno di spazio per farlo. Ci riscaldiamo al sole grazie al fatto che il calore ha attraversato lo spazio che separa noi dalla nostra stella. L'energia chimica di legame non ha bisogno di spazio per manifestarsi. Noi sappiamo però che c'è perché si libera sotto forma di calore o luce nel momento delle reazioni chimiche. L'energia potenziale gravitazionale non ha bisogno di spazio per manifestarsi. In ogni momento e posizione assunta all'interno di un campo gravitazionale siamo sottoposti ad una forza che ci tira verso il centro di massa del corpo attrattivo. Solo quando precipitiamo in un campo gravitazionale l'energia gravitazionale si manifesta, ma sotto forma di energia cinetica che appunto ha bisogno di spazio per manifestarsi.

ixFanno eccezione alla regola le trasformazioni adiabatiche. Tuttavia, esse rappresentano situazioni di non equilibrio di un sistema isolato. Un sistema isolato può scambiare solo lavoro con l'ambiente esterno e ciò equivale alla variazione della sua energia interna U, così come vuole il primo principio della termodinamica:  $\Delta U = -W$ . Quindi il sistema, se è espandibile e/o comprimibile, può svolgere un lavoro sull'ambiente esterno o subirlo. In questi casi si assiste ad una variazione contemporanea di tutte e tre le variabili: P, V e T. Se il sistema non è espandibile o comprimibile, come ad esempio un termos, le variazioni adiabatiche interne possono rappresentare solo fasi di instabilità iniziale del sistema stesso. I sistemi perfettamente isolati sono realtà piuttosto particolari e difficili da realizzare. È infatti richiesto un certo sforzo tecnologico per impedire che, nel tempo, si verifichi anche solo un piccolo scambio di calore.

<sup>x</sup> Potrebbe essere questo il caso di un sistema rappresentato da un gas che si raffredda a pressione costante, riducendo il proprio volume. In questo esempio se consideriamo il macrostato finale, in cui si ritrova il sistema strettamente considerato, esso è caratterizzato da un minor disordine complessivo corrispondente ad un numero minore di microstati. Tuttavia, tale macrostato finale è certamente quello più probabile. È evidente che i microstati di equilibrio sono poco numerosi perché non è stata considerata l'entropia dell'energia acquisita con gli scambi termici durante la trasformazione. Prendendo in considerazione tale disordine quello complessivo cresce di molto e tutto rientra nella logica che vede favoriti i processi in cui l'entropia aumenta.

<sup>xi</sup> L'entalpia associata ad un sistema chimico-fisico rappresenta il contenuto termico del sistema medesimo, cioè una forma di energia "ordinata" intrappolata nel sistema. La variazione di entalpia subita dal sistema (calore scambiato) rappresenta invece una forma di energia "disordinata" che occupa lo spazio circostante il sistema.

<sup>xii</sup> Così in una reazione esotermica il macrostato più probabile viene raggiunto con una diminuzione del contenuto termico di un sistema (la sua entalpia) ed il calore ceduto occuperà un maggior volume di spazio. In una reazione endotermica il macrostato più probabile verrà raggiunto con un aumento del contenuto termico del sistema, ma ciò farà aumentare la sua entropia che causerà una maggiore distribuzione spaziale delle componenti elementari del sistema medesimo (il calore si converte in energia cinetica e quindi disordine). Analogo discorso si può fare nel caso in cui ad essere emesso o assorbito non sia il calore ma la luce come nelle reazioni fotochimiche (bioluminescenza, fotosintesi, ecc.).

<sup>xiii</sup> Bisognerebbe, insomma, considerare per l'energia un aumento dello spazio delle coordinate, a scapito di quello delle velocità delle componenti particellari del sistema, quando l'energia termica viene liberata dal sistema ed un processo inverso quando l'energia viene assorbita dal sistema. In quest'ultimo caso essa contribuisce ad aumentare l'energia cinetica del sistema medesimo e quindi la ritroviamo come contributo dello spazio delle velocità delle sue componenti, cosa che ne fa aumentare il numero dei microstati e quindi l'entropia. L'emissione di energia da parte del sistema comporta invece una riduzione dello spazio delle velocità delle sue componenti e una conseguente riduzione dei microstati e quindi dell'entropia.

---

## Bibliografia

Halliday, D et Alii. (2009). *Fondamenti di fisica*. Bologna: Zanichelli.

L. Gratton, Il secondo principio della termodinamica e la cosmologia, *La Fisica nella Scuola*, 14 (1981)

S. Bergia, L'apparente contrasto tra la seconda legge della termodinamica e la generazione d'ordine nell'universo in espansione, *Ulisse* (<http://ulisse.sissa.it>), SISSA – Trieste (1997)

Silvestroni, P. (1980). *Fondamenti di Chimica*. Roma: Veschi

## Sitografia

<http://pcfarina.eng.unipr.it/dispense01/notaro130901/notaro130901.htm>

<https://digilander.libero.it/steve.little/Articoli/Bergia-1997.pdf>

<https://it.wikipedia.org/wiki/Diamante#:~:text=I%20diamanti%20hanno%20origine%20nel,i%20150%20e%20i%20225%20km.>

[https://elearning.unito.it/dstf/pluginfile.php/74082/mod\\_resource/content/2/2%20primo%20principio.pdf](https://elearning.unito.it/dstf/pluginfile.php/74082/mod_resource/content/2/2%20primo%20principio.pdf)

<https://www.chimica-online.it/download/grafite.htm>

<https://www.chimica-online.it/fisica/compressione-ed-espansione-adiabatica.htm>

<https://www.youmath.it/lezioni/fisica/termodinamica/3616-entropia-variazione-di-entropia.html>

<https://www.youmath.it/lezioni/fisica/termodinamica/3617-teorema-di-clausius.html>

<https://www.roma1.infn.it/~sciortif/didattica/FISICATEORICA/FISICATEORICA/postulatistatmech.pdf>



## *Profili biografici degli autori*

**Franco Francia** (La Spezia) - [franco.francia40@virgilio.it](mailto:franco.francia40@virgilio.it)

Iscritto prima a fisica presso l'università di Pisa, ha conseguito la laurea presso l'università di Ferrara e insegnato matematica presso l'istituto tecnico di Fivizzano e successivamente presso il liceo "G.Mazzini" di La Spezia. Il prof. Dionisio Gallarati, avendo conosciuto le questioni di matematica trattate dal Francia, gli offrì la propria collaborazione finalizzata alla realizzazione di un articolo che fu pubblicato successivamente su «Archimede»: *Insiemi di punti materiali* - «Archimede», N.1 anno 1985 casa editrice Le Monnier. *Reti di rette e circonferenze* è un ulteriore articolo, prodotto con la collaborazione del prof. Dionisio Gallarati, pubblicato sul «Periodico di matematiche», Organo della Matesis, del luglio- settembre 1996.

**Giuliano Laccetti (Napoli)** - [giuliano.laccetti@gmail.com](mailto:giuliano.laccetti@gmail.com)

Maturità Classica. Laurea in Fisica. Ordinario Università di Napoli Federico II. Autore di oltre cento articoli scientifici pubblicati su Riviste, Libri, Conferenze Internazionali. Responsabile di Progetti di Ricerca locali, nazionali, europei. Interessi di studio e ricerca: Software Matematico e Software Scientifico; Calcolo Parallelo, Distribuito, su Grid, su Cloud; Calcolo ad Alte Prestazioni (HPC); Algoritmi per architetture ibride (CPU+GPU); Machine Learning e AI; Internet-of-Things. Presidente Comitato Scientifico Associazione politico-culturale "e-Laborazione". Si interessa di politica universitaria e della ricerca; di autonomia e regionalismo differenziato. Su entrambi i macrotemi ha tenuto svariate conferenze, e ha pubblicato decine di articoli su quotidiani e riviste. E' appassionato di anni 60, libri, calcio, sport professionistici

americani, film western, fantascienza, serie TV poliziesche e giudiziarie americane.

**Sofia La Franca - [sofialf700@gmail.com](mailto:sofialf700@gmail.com)**

È studentessa del II anno del Liceo Classico di Salerno ed è appassionata di Matematica e dei suoi intrecci con la cultura Classica. Ha recentemente vinto il Premio MatEleatica 2024, con un Poster sui Frattali, distinguendosi tra oltre venti proposte di altri studenti e docenti di ogni ordine e grado, appassionati degli intrecci tra Matematica, lettere, arti e Storia. È stata invitata a tenere una relazione nell'ambito della XVII edizione del premio Morelli, che si è tenuto a Castellammare a fine Maggio.

**Enrico D'Amora - [enricochiara4@gmail.com](mailto:enricochiara4@gmail.com)**

Laureato (laurea triennale) in matematica presso l'Università degli studi di Salerno. Attualmente, è prossimo alla laurea magistrale presso la stessa università e discuterà una tesi sulle frazioni continue e le equazioni diofantee. Durante il suo percorso di studi è stato tutor per il corso "Matematica Discreta" del corso di laurea in informatica.

**D'Angelo Giuseppe - [sitdang010762@gmail.com](mailto:sitdang010762@gmail.com)**

Laureato in Scienze Agrarie, ha conseguito l'abilitazione all'esercizio professionale di Agronomo e l'abilitazione all'insegnamento in Scienze Naturali. Docente a tempo indeterminato presso il liceo Scientifico Statale "Leonardo" di Giarre (CT). Ha collaborato saltuariamente con la rivista scientifica «Coelum Astronomia», nella quale ha pubblicato recentemente l'articolo *Il paradosso di olbers: un metodo per conoscere il numero di stelle che popolano l'universo*, e con il «Periodico di Matematica» con l'articolo: *Se le calotte polari si sciogliono.....* È autore di varie pubblicazioni su diverse altre riviste («La Chimica nella Scuola», «La tecnica della Scuola», «Linx Magazine») e del saggio *Lo Spazio*

*Polisimmetrico* - prima edizione Ed. Book Sprint (cod ISBN 978-88-6823-1729). È autore di varie pubblicazioni su diverse altre riviste («La Chimica nella Scuola», «La tecnica della Scuola», «Linx Magazine», «ArteScienza», «La Ricerca») e di alcuni saggi.