Periodico di Matematica (IV) Vol. VI (2) giugno 2024, pp. 23-32

Un'estensione del metodo di Erone per le approssimazioni delle radici cubiche

Enrico D'Amora*

*Università degli studi di Salerno, Salerno, corso di laura in Matematica; enricochiara4@gmail.com

DOI : 10.53159 /PdM(IV).v6n2.133

Sunto: *In matematica sono stati sviluppati numerosi metodi per l'approssimazione della radice quadrata, tra i quali si distingue il metodo di Erone, che utilizza un algoritmo di natura geometrica. Tale metodo, può essere esteso al caso delle radici cubiche.*

Parole Chiave: *Erone, algoritmo, radici.*

Abstract: *In mathematics, numerous methods for approximating the square root have been developed, among which is the method of Heron, which uses a geometricalgorithm. This method, can be extended to the case of cubic roots.*

Keywords: *Heron, algorithm, roots.*

1 –Metodo di Erone per radici quadrate

La costruzione geometrica del metodo di Erone è descritta nell'articolo di Mauro Saita Algoritmo di Erone. Sia $k > 1$, sicostruisce un quadrato di lato $\sqrt{k}$e al primo step si prende un puntox$_0 > \sqrt{k}$, per poter costruire un rettangolo di dimensioni x_0 e$\frac{k}{x_0}$. Vedere figura 1.

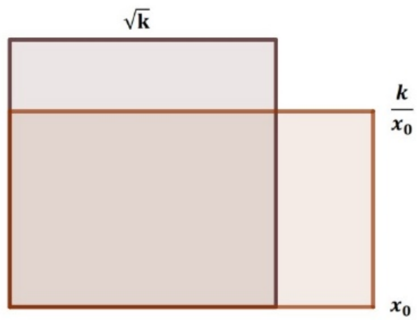

Fig. 1 - Rappresentazione del rettangolo equivalente al quadrato di area k.

Successivamente, si considera x_1 la media aritmetica tra x_0 e$\frac{k}{x_0}$, e si costruisce un nuovo rettangolo di lati x_1 e $\frac{k}{x_1}$.Risulta dunque che $x_1=\frac{1}{2}\left(x_0+\frac{k}{x_0}\right)$. Vedi figura 2.

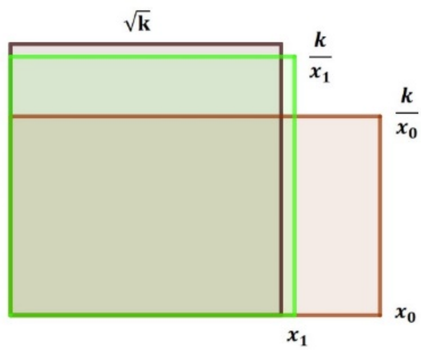

Fig. 2 - Seconda approssimazione del quadrato iniziale mediante un rettangolo (verde) equivalente.

Possiamo costruire allo stesso modo un nuovo rettangolo, prendendo $x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{k}{x_1}\right)$, cioè la media aritmetica tra x_1 e $\frac{k}{x_1}$. Le nuove dimensioni dunque saranno x_2 e $\frac{k}{x_2}$. Vedere figura 3.

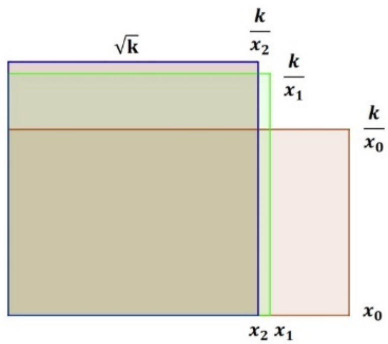

Fig. 3 -Terza approssimazione: il rettangolo (blu) di lati x_2 e $\frac{k}{x_2}$ si confonde col quadrato iniziale.

Si noti come i rettangoli che stiamo costruendo si avvicinano sempre di più al quadrato iniziale. Già al terzo step il rettangolo (blu) sembra sovrapposto al quadrato di lato $\sqrt{k}$. Iterando il procedimento, giungiamo alla scrittura della seguente successione:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{k}{x_n}\right), \\ x_0 = \alpha \end{cases}$$

È possibile dimostrare che:

1. I termini della successione sono positivi;
2. La successione è strettamente decrescente;
3. $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{k}$.

Una possibile dimostrazione è proposta da Stefano Finzi Vita (2013) nella nota *Le successioni definite per ricorrenza e l'algoritmo di Erone per approssimare* $\sqrt{2}$. L'idea di base è che se la successione risulta essere strettamente decrescente e limitata, allora per il teorema delle successioni monotone essa converge. Inoltre, tale limite dovrà essere un punto fisso.

2 – Metodo di Erone per radici cubiche

Seguendo il ragionamento proposto precedentemente, ci si potrebbe chiedere se il metodo funziona anche per le radici cubiche, e se in tal caso il metodo è suscettibile di una rappresentazione visiva così come nel caso della radice quadrata. In primo luogo, cerchiamo di sviluppare una successione il cui limite è la radice cubica di un numero. Procediamo quindi prima per via geometrica, costruendo parallelepipedi anziché rettangoli.

Partiamo da un cubo di spigoli $\sqrt[3]{k}$ e al primo step prendiamo un punto$x_0 > \sqrt[3]{k}$, per costruire un parallelepipedo di dimensioni x_0, x_0 e $\frac{k}{{x_0}^2}$ (figura 4).

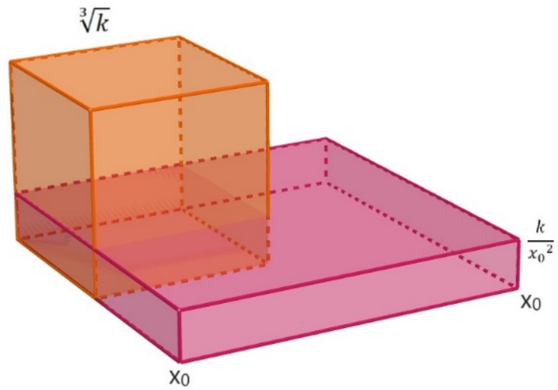

Fig. 4 - Rappresentazione del parallelepipedo equivalente al cubo di volume k.

Successivamente, si considera x_1 la media aritmetica tra x_0, x_0e$\frac{k}{x_0^2}$, e si costruisce un nuovo parallelepipedo di spigoli x_1,x_1 e $\frac{k}{x_1^2}$. Risulta dunque che $x_1 = \frac{1}{3}\left(2x_0 + \frac{k}{x_0^2}\right)$. Vedi figura 5.

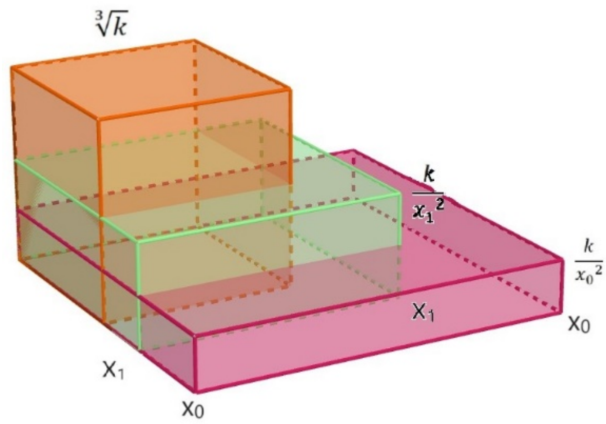

Fig. 5-Seconda approssimazione del cubo iniziale mediante un parallelepipedo (verde) equivalente.

Costruiamo allo stesso modo un nuovo parallelepipedo, di spigoli x_2, x_2 e $\frac{k}{{x_2}^2}$, dove $x_2 = \frac{1}{3}\left(2x_1 + \frac{k}{{x_1}^2}\right)$, cioè la media aritmetica tra x_1, x_1 e $\frac{k}{{x_1}^2}$. Vedere figura 6.

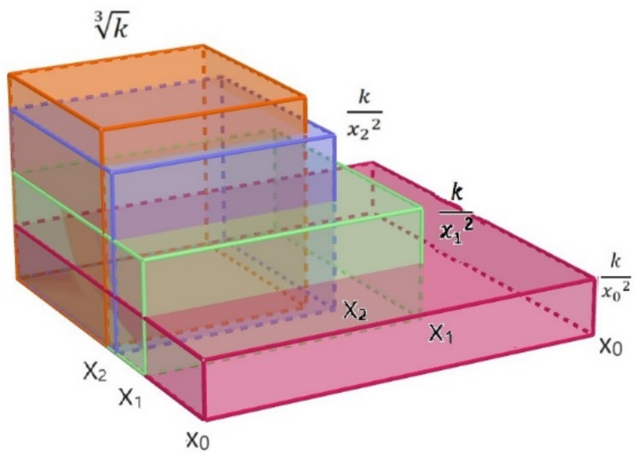

Fig. 6 - Terza approssimazione: il parallelepipedo (blu) di spigoli x_2, x_2 e $\frac{k}{{x_2}^2}$ si avvicina al cubo.

Si nota che i parallelepipedi siffatti si avvicinano sempre di più al cubo iniziale.

Iterando il procedimento, giungiamo alla scrittura della seguente successione:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{k}{{x_n}^2}\right), \\ x_0 = \alpha \end{cases}$$

Lo scopo è dimostrare che, come per le radici quadrate:

1. I termini della successione sono positivi;
2. La successione è strettamente decrescente;
3. $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt[3]{k}$.

Il punto 1 è semplice, poiché si parte da un $x_0 > 0$ e i successivi termini si costruiscono come media aritmetica di termini positivi.

Per gli altri duepunti, prendiamo ke cerchiamo di dimostrare che $x_{n+1} \geq \sqrt[3]{k}$.A differenza del caso precedente, in cui si poteva utilizzare la relazione $a^2 + b^2 \geq 2ab$, in questo caso non è immediato utilizzare un passaggio algebrico. Possiamo allora ragionare analiticamente e mostrare che

$$2x_n + \frac{k}{{x_n}^2} \geq 3\sqrt[3]{k}.$$

Consideriamo la parte a sinistra come una funzione sostituendo x_n con x e calcoliamo la sua derivata. Allora il risultato sarà:

$$\left(2x + \frac{\mathrm{k}}{x^2}\right)' = 2 - \frac{2\mathrm{k}}{x^3},$$

da cui si ricava che il punto di minimo è proprio $(\sqrt[3]{k}, 3\sqrt[3]{k})$.

A supporto di quanto detto si veda la figura 7.

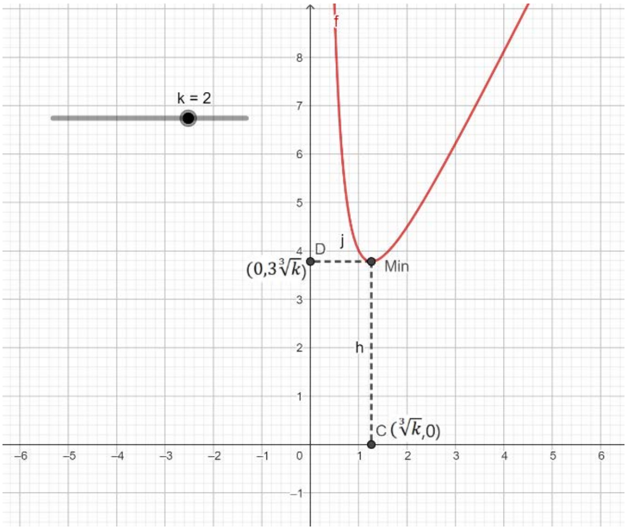

Fig. 7 - Punto di minimo della funzione $2x + \frac{k}{x^2}$.

Ora basta dimostrare che la successione è decrescente, cioè

$$x_n > \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{k}{{x_n}^2}\right).$$

Sviluppando i calcoli si giunge alla conclusione che la disuguaglianza $x_n > \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{k}{{x_n}^2}\right)$si verifica se e solo se ${x_n}^3 > k$, che abbiamo visto essere vero.

Per concludere applichiamo il teorema delle successioni monotone: la successione è decrescente e si mantiene sempre al di sopra di $\sqrt[3]{k}$, dunque converge ad un certo L $\geq \sqrt[3]{k}$. Ma per $n \to \infty$, da $x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{k}{{x_n}^2}\right)$, si ha che

$$3L=2L+\frac{k}{L^2},$$

cioè L=$\sqrt[3]{k}$.

3 –Conclusioni

Nonostante l'utilizzo delle conoscenze analitiche per giungere ad una dimostrazione completa, da un punto di vista didattico non è da sottovalutare la costruzione geometrica che ha portato a definire la successione. È noto che sin dall'antichità i matematici utilizzavano argomentazioni geometriche per dimostrare risultati numerici. Un esempio di ciò si trova nel *Menone* di Platone (IV secolo a.C.), dove viene descritta la costruzione di un quadrato con un'area doppia rispetto a quella di un quadrato precedentemente costruito.Successivamente, Euclide (300 a.C.) ha racchiuso in una raccolta di 13 libri, gli *Elementi*, tutte le conoscenze geometriche dell'epoca, delle quali gran parte sono studiante ancora oggi nelle scuole.

L'importanza della visualizzazione in matematica è stata dimostrata anche scientificamente: secondo un articolo diBoaler et al. (2016) intitolato *Seeing as Understanding: The Importance of Visual Mathematics for our Brain and Learning,* contrariamente alla credenza comune che la matematica visiva sia solo per studenti di livello inferiore, evidenze neuroscientifiche dimostrano come la visualizzazione matematica attivi diverse aree del cervello, migliorando la comprensione e l'apprendimento.

Per concludere, si osservi che la dimostrazione esposta si potrebbe estendere al caso di una qualunque radice n-esima.

In tal caso, però, non si ha un supporto geometrico, data l'impossibilità di rappresentare figure in dimensioni superiori alla terza.

Il lettore si può cimentare e dimostrare che per la seguente successione definita ricorsivamente

$$\begin{cases} x_{s+1} = \frac{1}{\mathrm{n}}\left((n-1)x_s + \frac{k}{{x_s}^{(n-1)}}\right), \\ x_0 = \alpha \end{cases}$$

valgono le seguenti proprietà:

1. I termini della successione sono positivi;
2. La successione è strettamente decrescente;
3. $\lim_{s\to\infty} x_s = \sqrt[n]{k}$.

Sebbene questa formula fosse conosciuta da Newton, che l'ha riportata nel suo lavoro *Method of Fluxions* pubblicato postumo nel 1736, e poi è stata ripresa da altri matematicicome illustrato nell'articolo *A Note on Machine Method for Root Extraction* di Gadtia&Padhan (2022), il diverso contributo di questo articolo risiede in un approccio di tipo geometrico, che semplifica la comprensione del processo iterativo, ed è quindi più fruibile da un punto di vista didattico.

Ringraziamenti

Desidero esprimere la mia gratitudine al Professore Giovanni Vincenzi (Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Salerno) per il suo costante supporto e i preziosi consigli durante la stesura di questo articolo.

Bibliografia

BOALER J., CHEN L., WILLIAMS C., CORDERO M. (2016). Seeing as Understanding: The Importance of Visual Mathematics for our Brain and Learning. «*Journal of Applied and Computational Mathematics*». *DOI: 10.4172/2168-9679.1000325.*

FINZI V.F. (2013).Le successioni definite per ricorrenza e l'algoritmo di Erone per approssimare $\sqrt{2}$. In: *https://lc.cx/TparYO*

GADTIA S., PADHAN S.K. (2022). A Note on Machine Method for Root Extraction. «*Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática*». DOI: 10.5269/bspm.42530.

SAITA M. (n.d.). Algoritmo di Erone. In: *https://lc.cx/N5nJCm*