Periodico di Matematica (IV) Vol. VI (1) marzo 2024, pp. 7-20

Un'estensione di un teorema di Feynman mediante la tassellazione isometrica

Silvano Rossetto * Giovanni Vincenzi **

*Centro Morin, Paderno del Grappa (Italy); rossetto49@gmail.com
** Dipartimento di Matematica Univ. Salerno (Italy); vincenzi@unisa.it

DOI : 10.53159 / PdM(IV).v6n1.128

Sunto: *In questo lavoro proveremo un'estensione di un famoso teorema di Feynman usando la tassellazione isometrica del piano. Alcune proprietà dei numeri esagonali centrati verranno evidenziate.*

Parole Chiave*: Teorema di Feynman, Tassellazioni, Numeri esagonali centrati.*

Abstract: *In this paper, we will prove an extension of a famous theorem of Feynman by using the isometric tessellation. Certain properties of central hexagonal numbers will be pointed out.*

Keywords: *Feynman's theorem, Tassellations, Central exagonal numbers.*

1 - Introduzione

Il ragionamento visivo sta diventando un campo interdisciplinare crescente nella logica, nella filosofia e nelle scienze cognitive, ed è di notevole interesse anche nel campo dell'insegnamento (Barwise, Etchemendy, 1991; Coxeter, 1969; Giaquinto, 2008; Rivera, 2011).

In questo contesto un esempio molto significativo prende spunto dal seguente teorema di Feynman rappresentato nella seguente Figura.

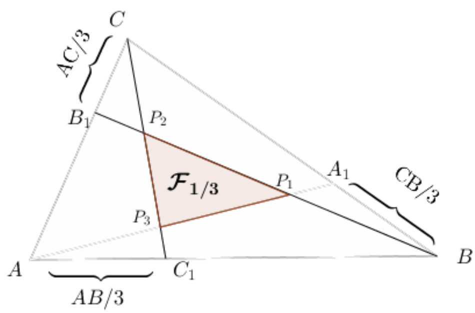


Figura 1: Configurazione di Feynman. L'area del triangolo $\mathcal{F}_{1/3} = P_1P_2P_3$ è un settimo di quella del triangolo ABC.

Tra le varie dimostrazioni di questo teorema quella che appare più semplice, in quanto non prevede calcoli, è basata sull'attenta analisi di una figura immersa in un tassellamento del piano (vedi Figura 2) e sulle seguenti osservazioni:

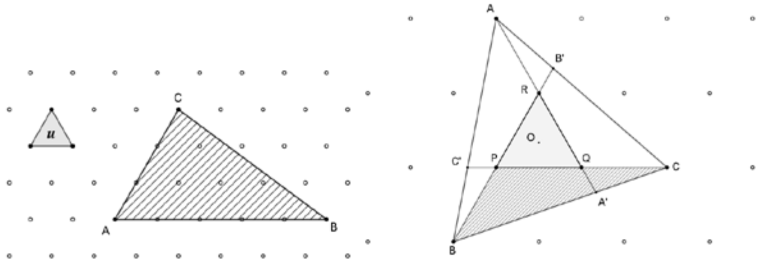


Figura 2: A sinistra, si nota che l'area di un triangolo sulla griglia isometrica è pari al prodotto *AB* x *AC* x *u*. A destra, l'area del triangolo equilatero *ABC*= 3*PBC*+*PQR*=3(1x2) *u* +*u*=7*u*

Osservazione 1: Ogni triangolo è affinemente equivalente e ad un qualunque altro triangolo ([2] Coxeter 1969, Sec.13.5).

Osservazione 2: In una trasformazione affine il rapporto tra segmenti e il rapporto delle aree, rimane invariato.

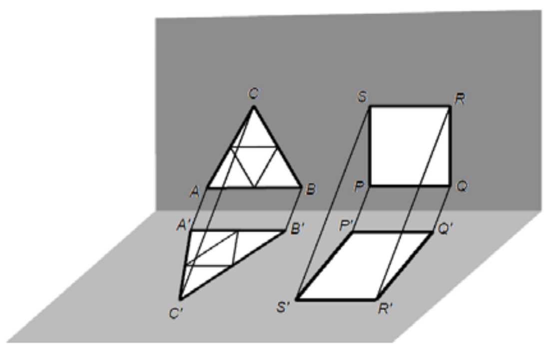


Figura 3 – Affinità parallela di un triangolo equilatero e di un quadrato

Ciò che maggiormente sorprende del risultato di Feynman è che il rapporto tra l'area del triangolo di partenza e quello centrale che compare nella configurazione, non dipende dalla scelta del triangolo ed è un numero intero, precisamente il numero 7.

A questo punto, la domanda più naturale è: che succede alla configurazione di Feynman se su ciascun lato di ABC si stacca un segmento che invece di essere 1/3 del lato l ha una lunghezza pari a $t \times l$ con $t \in [0, 1]$?

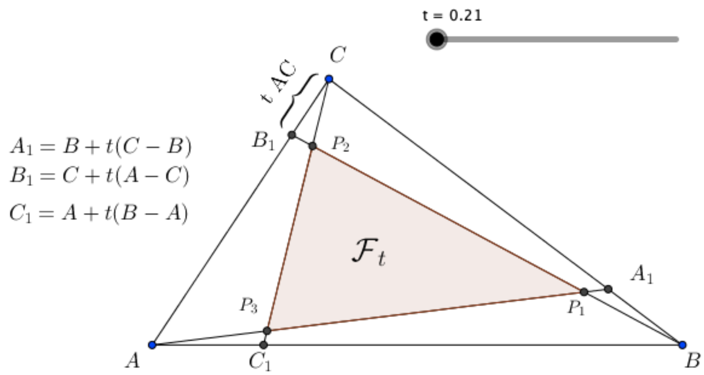


Figura 4 Configurazione generalizzata del triangolo di Feynman. Quanto vale *ABC*/$\mathcal{F}_t$?

Lo scopo di questo articolo è illustrare un metodo elementare basato sulla tassellazione isometrica del piano per provare il seguente risultato:

Teorema *Se il rapporto tra i segmenti staccati su ciascun lato di un triangolo è un numero razionale a/b, allora il rapporto tra le aree del triangolo inziale e quello generato dalla partizione è un numero razionale.*

La nota vuole proporre agli insegnanti qualche spunto di attività con gli studenti che intrecci, con metodi elementari e con una modalità esplorativa, argomenti di geometria, di algebra e di combinatoria. Come ulteriore stimolo si lascerà un problema aperto.

2 – Dimostrazione del teorema

Per le Osservazioni 1 e 2, possiamo restringere la nostra analisi ai triangoli equilateri.

Per questioni di simmetria, senza ledere la generalità possiamo supporre che $\frac{b}{a} < \frac{1}{2}$ sia un numero razionale minore di 1/2. Allora esistono n ed i interi positivi tali che:

$$\frac{b}{a} = \frac{n-i}{2n} . \qquad (1)$$

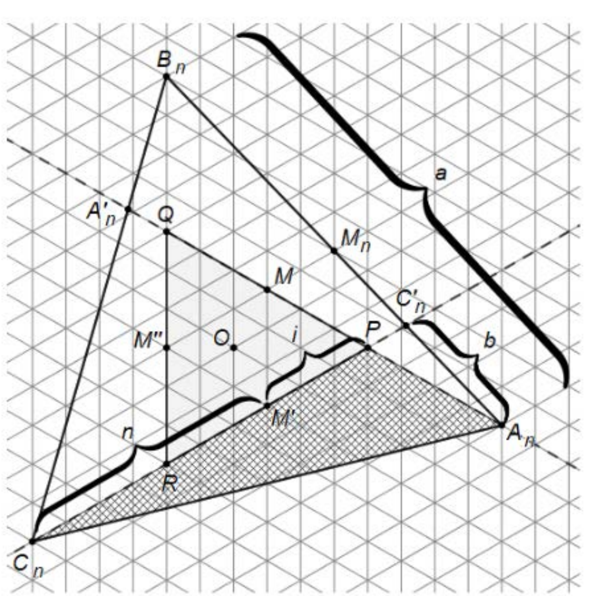


Figura 5 – Ripartizione del triangolo $A_nB_nC_n$ con coefficiente b/a e corrispondente griglia isometrica: $A_nC'_n = \frac{b}{a} \times A_nC_n$

Iniziamo con i seguenti tre passi:

1) Si disegni su una griglia isometrica un triangolo equilatero *PQR* di lato *2i*.

2) Si prolunghi ordinatamente ogni lato di PQR, e da ciascun punto medio si stacchi su di esso un segmento di lunghezza n: $A_nM = C_nM' = B_nM'' = n$
3) Si osservi che il rapporto $\frac{A_nC'_n}{A_nB_n} = \frac{b}{a}$. Infatti dal teorema di Talete $\frac{A_nM}{A_nP} = \frac{A_nM_n}{A_nC'_n}$; inoltre
$A_nM = n,\ MP = i$ e $A_nP = A_nM - MP$,

per cui vale la relazione $\frac{n-i}{n} = \frac{2(n-i)}{2n} = \frac{2A_nC'_n}{A_nB_n}$.

D'altra parte dalla Eq. (1) abbiamo $\frac{b}{a} = \frac{n-i}{2n}$, per cui

$$\frac{b}{a} = \frac{A_nC'_n}{A_nB_n}.$$

Da ciò segue che il triangolo PQR è il triangolo centrale associato alla partizione di tipo Feynman del triangolo $AnBnCn$ secondo un coefficiente di ripartizione pari a

$$\frac{A_nC'_n}{A_nB_n} = \frac{b}{a}.$$

Calcoliamo ora il rapporto delle aree dei triangoli $AnBnCn$ e PQR rispetto al triangolo di base della griglia isometrica e ai due parametri n ed i.

$$\frac{[A_nB_nC_n]}{[PQR]} = \frac{3\times(PA_n \times PC_n) + PR^2}{PR^2}$$

$$= \frac{3(n+i)(n-i) + (2\cdot i)^2}{(2\cdot i)^2} = \frac{3n^2 + i^2}{4\cdot i^2}. \tag{2}$$

D'altra parte dalla (1) abbiamo che $\frac{n}{n-i} = \frac{a}{2b}$, per cui

$$2n\cdot b = a\cdot n - a\cdot i; \quad a\cdot n - 2n\cdot b = a\cdot i; \quad n(a-2b) = a\cdot i$$

$$n = \frac{a \cdot i}{a - 2b} . \tag{3}$$

Sostituendo ad n l'espressione (3) in (2), si ottiene:

$$\frac{3n^2 + i^2}{4i^2} = \frac{3\left(\frac{ai}{a-2b}\right)^2 + i^2}{4i^2} = \frac{3a^2 + (a-2b)^2}{4(a-2b)^2} = T(a,b) . \tag{4}$$

Possiamo quindi concludere che ogni ripartizione regolare del triangolo equilatero ABC (Figura 5) per la quale $AB = \frac{a}{b} AC'$, determina un triangolo PQR tale che il rapporto delle aree dei due triangoli è un numero razionale. La dimostrazione è conclusa. □

Come esempio di applicazione del teorema precedente, si fa notare che nel caso del triangolo equilatero, con $AB = a = 3$ e $AC' = b = 1$, abbiamo la classica configurazione di Feynman (vedi Fig. 6):

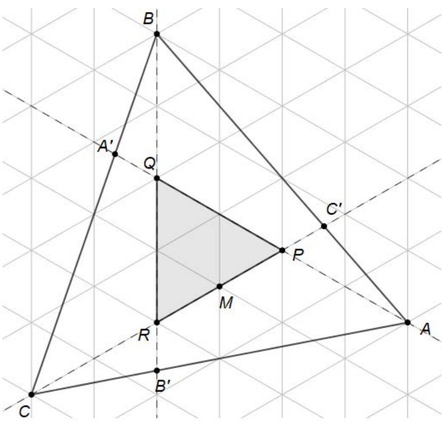


Figura 6 La configurazione di Feynman nella tassellazione isometrica.

In questo caso il rapporto delle aree si ottiene come segue:

$$T(3,1)=\frac{3\cdot 3^2+(3-2\cdot 1)^2}{4(3-2\cdot 1)^2}=\frac{27+1}{4}=7\,.$$

Evidenziamo inoltre che dalla formula (4) per le partizioni di tipo Feynman un triangolo ABC con rapporto del tipo $1/a$, con a numero dispari: a = 1, 3, 5, 7, il rapporto tra l'area del triangolo ABC e quella del triangolo centrale associato alla partizione produce numeri esagonali centrati consecutivi Hex(1)=1, Hex(2)=7, Hex(3)=19, Hex(4)=37, … . Per approfondimenti sui numeri esagonali centrati vedi (Rossetto, Vincenzi, 2022a).

3 –Approfondimenti

Per il lettore che vuole approfondire questo tipo di argomenti, si evidenzia che esistono ulteriori estensioni del teorema di Feynman. Una di queste, in forma molto generale è espressa dalla formula di Routh, la cui dimostrazione però non appare semplice (Coxeter, 1969, p. 211).

Per illustrarla, sia ABC un triangolo, e siano CC_1, BB_1 e AA_1 tre ceviane di ABC

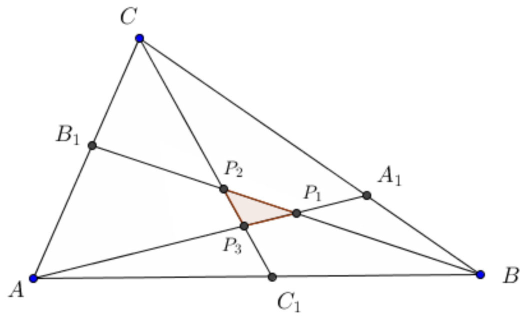


Figura 7. $P_1P_2P_3$ è generato da tre ceviane. La sua area si può esprimere in funzione dell'area di ABC e dei rapporti λ, μ, ν.

Posti $\frac{CA_1}{A_1B}=\lambda$, $\frac{BC_1}{C_1A}=\mu$ e $\frac{AB_1}{B_1C}=\nu$ si ha che il rapporto $\mathcal{T}(\lambda,\mu,\nu)$ delle aree tra ABC e il triangolo centrale $P_1P_2P_3$ che si viene a generare è:

[Formula di Routh]

$$\mathcal{T}(\lambda,\mu,\nu)=\frac{(\lambda\mu\nu-1)^2}{(\lambda\mu+\lambda+1)(\mu\nu+\mu+1)(\nu\lambda+\nu+1)}ABC\,.$$

Il metodo della tassellazione, è stato recentemente utilizzato per estendere il risultato di Feynman ai quadrati (Rossetto,Vincenzi, 2022b). In particolare, si può provare che:

> *Il rapporto tra le aree del quadrato di base e quello derivato da una sua partizione (di tipo Feynman) con rapporto razionale è un numero razionale.*

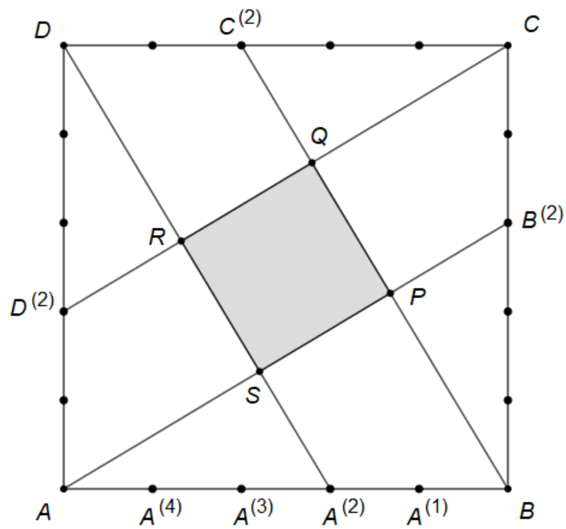


Figura 8 – Ripartizione di un quadrato *ABCD* di tipo Feynman con rapporto 2/5. Risulta *ABCD*/*PQRS*= 17/2

Anche nel caso dei quadrati emergono interessanti relazioni con i numeri esagonali centrati.

Si osservi inoltre che anche per gli esagoni regolari è possibile estendere il risultato di Feynman mediante il metodo della tassellazione con griglia isometrica e ottenere un risultato analogo a quello ottenuto per i triangoli e per i quadrati (Rossetto,Vincenzi, in progress 1).

Per quanto riguarda invece gli altri poligoni regolari, la tassellazione del piano non è possibile, e quindi una dimostrazione generale del teorema presentato in questa nota non sussiste. Tuttavia le partizioni di tipo Feynman, si possono considerare per ogni poligono regolare, e quindi, sorge in modo naturale la curiosità di capire che succede in questi altri casi. A tal proposito, uno studio analitico condotto con software matematico (DERIVE), prova ad esempio che nel caso degli ottagoni regolari il rapporto tra l'area di un ottagono e quella dell'ottagono generato da una sua partizione di tipo Feynman con rapporto razionale può essere irrazionale (Rossetto-Vincenzi, in progress 2).

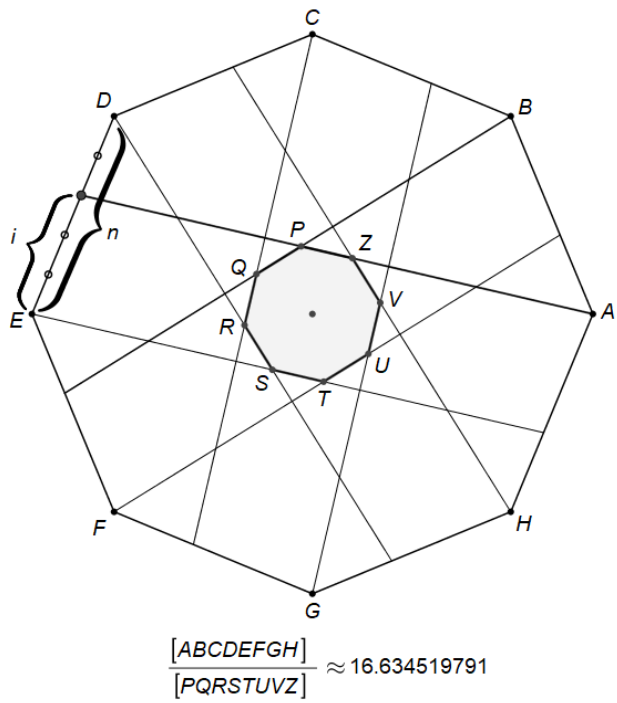


Figura 9 – Ripartizione di tipo Feynman con rapporto i/n di un ottagono ottenuta con Geogebra

Riferendoci alla Figura 9, possiamo anticipare che la formula che si ottiene è

$$\frac{[ABCDEF]}{[PQRSTUVZ]} = \frac{3n^2 + (n-i)^2}{i^2} + \frac{n^2}{i^2} 2\sqrt{2}$$

$$\rightarrow \frac{75+4}{9} + \frac{25}{9} 2\sqrt{2} \approx 16{,}634519791$$

come conferma il programma Geogebra (vedi dettagli della Figura 9).

Alla luce di queste considerazioni, lasciamo la seguente congettura:

> *Per ogni poligono regolare P_n con n diverso da 3,4,6, il rapporto tra le aree del poligono P_n di base e quello derivato da una sua partizione (di tipo Feynman) con rapporto razionale non è un numero razionale.*

Bibliografia

BARWISE J, ETCHEMENDY J. (1991). Visual information and valid reasoning, in *Visualizing in teaching and learning mathematics.* Zimmerman W, Cunningham S, editors, Washington, DC: Mathematical Association of America.

COXETER H.M.S. (1969). *Introduction to Geomerty* (Second Edition), John Wiley & Sons.

GIAQUINTO M. (2008). Visual thinking in mathematics, in *Philosophia Mathematica, 1 – 2009, Oxford University Press.*

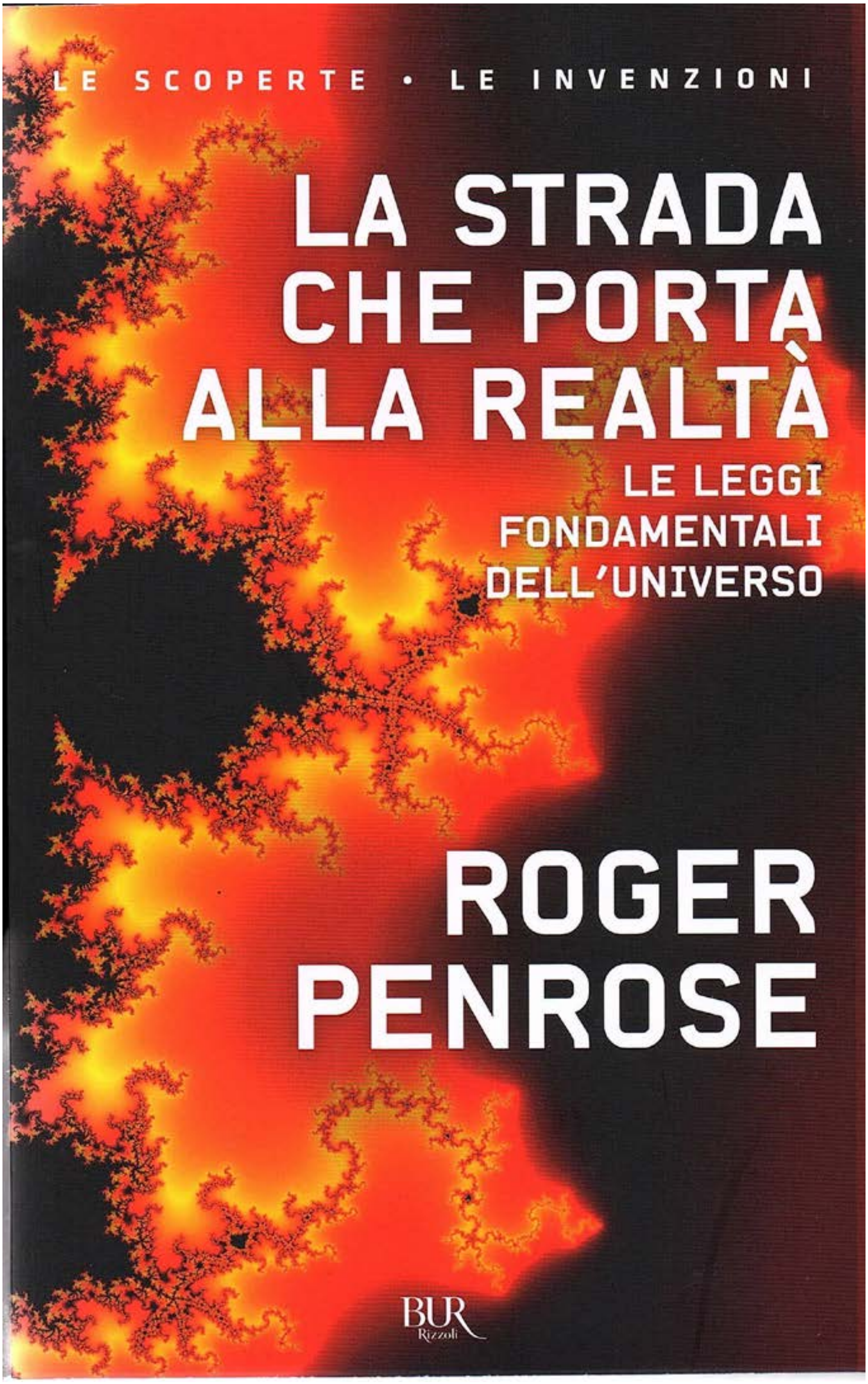
RIVERA F.D. (2011). Toward a visually-oriented school mathematics curriculum research, theory, practice, and issues. *Vol. 49. Dordrecht: Springer Science Business Media; 2011.*

ROSSETTO S. VINCENZI G. (2022a). Two Hidden Properties of Hex Numbers, in *The teaching of Mathematics,* 25, *pp. 21-29.*

ROSSETTO S., VINCENZI G. (2022b). Ripartizioni del quadrato e se-quenze numeriche. *Archimede 4/2022.*

ROSSETTO S, VINCENZI G., (in progress 1). Ripartizioni regolari dell'esagono e del triangolo.

ROSSETTO S, VINCENZI G. , (in progress 2), Ripartizioni di poligoni regolari e numeri irrazionali.


LE SCOPERTE • LE INVENZIONI
LA STRADA CHE PORTA ALLA REALTÀ
LE LEGGI FONDAMENTALI DELL'UNIVERSO
ROGER PENROSE
BUR Rizzoli