Periodico di Matematica (IV) Vol. VI (2) giugno 2024, pp. 7-22

Dall'intuizione alla scoperta

L'ordine del Caos

Sofia La Franca*

*Liceo Classico Torquato Tasso; sofialf700@gmail.com

DOI : 10.53159 /PdM(IV).v6n2.132

Sunto: *Si propone una comprensione della natura e dell'Universo attraverso lo studio di componenti della geometria non euclidea quali il numero aureo e i frattali e la loro implicita presenza nei più grandi capolavori architettonici e naturali. Tale visione sarà arricchita da riflessioni basate sulla filosofia classica, in particolare la filosofia platonica.*

Parole Chiave: *Frattali, numero aureo, filosofia*

Abstract: *It aims to understand nature and the Universe through the study of components of non-Euclidean geometry such as the golden number and fractals and their implicit presence in the greatest architectural and natural masterpieces. This vision will be enriched by reflections based on classical philosophy, in particular Platonic philosophy.*

Keywords: *Fractals, golden number, philosophy*

1 – I frattali: una dimensione frazionaria

Si definisce frattale uno schema in cui una figura è ripetuta infinite volte su scala decrescente, dunque è dotata di omotetia interna. L'ideatore della teoria unificata sui frattali è stato Benoit Mandelbrot, il quale per definire tali strutture geometriche ha formulato il seguente sistema:

$$z_{n+1} = z_n^2 + z_c,\ z_0 = 0$$

Dove z_{n+1}, z_n e z_c sono numeri complessi e dove z_c è costante, applicando ripetutamente il medesimo procedimento.

Nonostante l'ingente lavoro sviluppato da Mandelbrot, bisogna sicuramente citare Hausdorff, suo predecessore, il quale introduce la nozione di dimensione frattale, conosciuta anche come dimensione di Hausdorff-Besicovič, poiché quest'ultimo ha sviluppato molti degli strumenti di calcolo necessari.

1.1 – Due poli attrattivi

Nel caso z_c sia nullo, si possono verificare 3 situazioni:

1. i punti che distano 1 dall'origine, ossia stanno su una circonferenza di r=1, non subiscono trasformazioni (poiché $z_{n+1}=z_n$, se $z_n=1$);
2. i punti che distano meno di 1 dall'origine, ossia sono all'interno della circonferenza di r=1, si muovono verso l'origine (poiché $z_{n+1}<z_n$, se $z_n<1$);
3. i punti che distano più di uno dall'origine, ossia esterni alla circonferenza di r=1, si muovono verso l'infinito (poiché $z_{n+1}>z_n$, se $z_n>1$).

In questo modo si vengono a definire due "poli attrattivi", verso lo zero e verso l'infinito.

Nel caso in cui $z_c \neq 0$, il risultato varia in base ai valori:

1. per certi valori di zc, continuando ad applicare l'equazione, i punti del piano si allontanano, per cui si dice che il percorso è "imprevedibile", i punti sono detti "di fuga";
2. per certi valori di zc, i punti si riversano verso l'interno e non "fuggono", creando le forme intricate dalla bellezza unica, denominate frattali. In questo caso il percorso è prevedibile e punti sono "prigionieri".

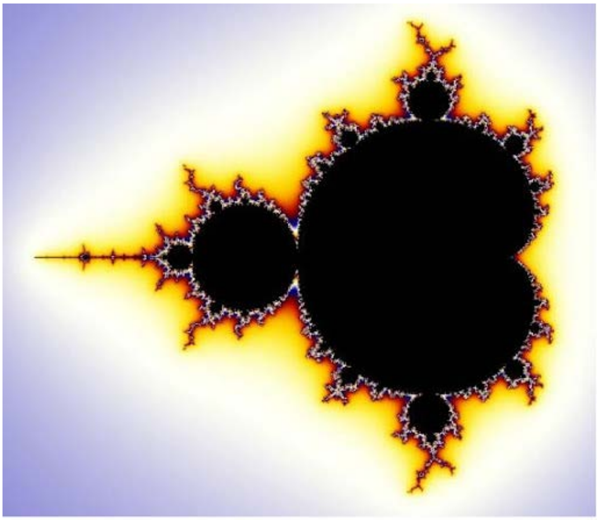

Fig. 1 - L'insieme di Mandelbrot

1.2 – Gli insiemi di Julia

Gli insiemi dei due punti hanno i rispettivi nomi di insieme di fuga e insieme prigioniero. Sorge dunque spontanea la domanda:

1) Qual è il "limite" che separa l'insieme di fuga dall'insieme prigioniero?

La risposta a tale domanda è data da un teorema dimostrato da Mandelbrot stesso:

> *Se un punto si trova ad una distanza maggiore o uguale a due unità dall' origine, allora è destinato all'infinito; se invece si trova ad una distanza minore a due unità dall'origine, allora è un punto prigioniero.*

Tale "limite" è chiamato insieme di Julia o, in maniera più precisa, insiemi di Julia (ossia una famiglia di insiemi dipendenti dal parametro z_c) e può essere connesso o disconnesso, quando presenta discontinuità nella figura.

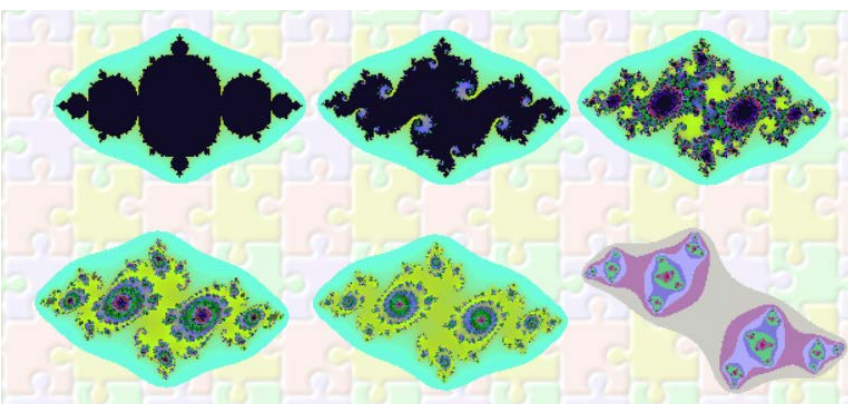

Fig. 2 - Insiemi di Julia

2 – Lo studio del Caos

I frattali per la loro natura complessa rientrano nella teoria del Caos. I Greci lo chiamavano χάος, la cui radice etimologica indica il vuoto, ma ciò non significa che debba essere interpretato come "privo di"; anzi, nella teogonia esiodea caos è il primo essere generato: ἐγένετο. Con la dottrina di Anassagora assume una formulazione teorica capace di adattarsi al naturalismo greco, ossia la materia informe plasmata dall'intelletto divino (νοῦς), che in Platone prende il nome di Demiurgo. Secondo la filosofia platonica il Demiurgo non è "il creatore" ma "l'artefice divino", quindi colui che apporta ordine alla sostanza. Sempre appartenente a tale filosofia è il mito della caverna, per cui gli uomini possono solo vedere l'ombra degli oggetti, il riflesso della verità. Quest'idea è applicabile, ad esempio, alla felce "ideale" e reale, di cui si tratterà più approfonditamente nel paragrafo 4.

2.1 – Il modello del Caos

La visione degli antichi si rivela però limitata; infatti, negli anni '60 nasce convenzionalmente la teoria del Caos, attraverso cui si comprende che il Caos ha in sé un modello, un ordine, e non deve essere arbitrariamente concepito come una matassa da srotolare, bensì da comprendere nella sua forma prima. Uno degli elementi tra i più noti di una così vasta teoria è il pendolo doppio, il cui comportamento è particolarmente sensibili alle condizioni iniziali.

I frattali svolgono un ruolo essenziale nella teoria del Caos, poiché costituiscono i suddetti attrattori strani. Un attrattore, un insieme a cui tende un sistema dinamico (ad esempio il pendolo), si dice strano se ha una dimensione che oscilla in una dimensione non-intera, frazionaria, frattale appunto.

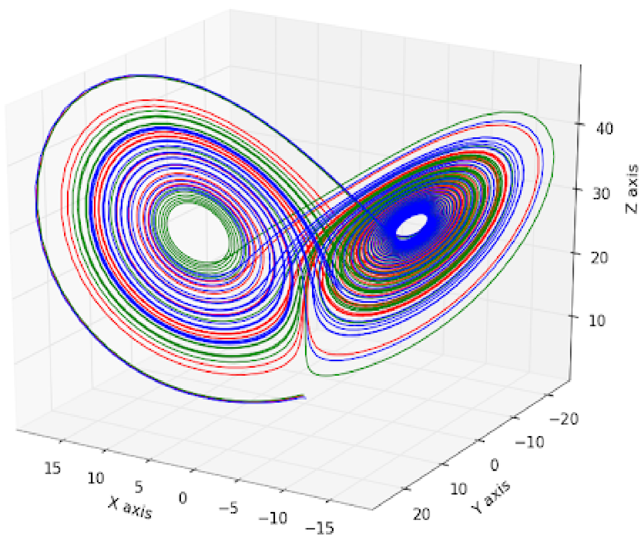

Fig. 3- Attrattore di Lorentz

3 – La polvere di Cantor

La polvere di Cantor rientra tra i modelli più noti di frattali ed è antecedente alla teoria di Mandelbrot. Preso l'intervallo [0,1] per ogni passo, dopo averlo diviso in tre parti uguali, si sottrae la sezione centrale dell'intervallo, ossia l'insieme aperto. Data la sua natura frattalica la dimensione non è intera, bensì oscilla tra un insieme di punti (dimensione 0) e una linea (dimensione 1). Per il primo passaggio (p=1) si individuano tre parti mediante i punti 1/3 e 2/3, in seguito si elimina la parte centrale e si rimane con due intervalli [0, 1/3]U[2/3, 1]. Tale procedimento può essere applicato all'infinito, fino a formare appunto la polvere da cui prende il nome tale frattale. Formalmente si afferma che per p che tende a infinito l'insieme C è costituito dagli estremi ottenuti ad ogni passaggio p; di conseguenza saranno sempre presenti infiniti punti.

Fig. 4 - La polvere di Cantor

4 – La natura a somiglianza dei frattali

Per Platone il mondo delle idee non si interseca con la Natura, regno della realtà sensibile e in costante mutamento. La natura diventa così subordinata dell'idea, un'immagine riflessa e imprecisa. Tale sembra anche l'essenza dei frattali, i quali si ripetono nelle strutture materiali con la differenza di essere determinati da una fine. Si prendano in analisi il cavolo romano, il cavolfiore, la dalia, il girasole, la felce.

Fig. 5- Confronto fra una felce “ideale” e una reale

4.1 – L’isola di von Koch

In natura si possono ritrovare i frattali “imperfetti”, in quanto la loro ricorsività è limitata, come già esposto, nelle ramificazioni di rami e radici, nelle coste frastagliate, nei fiocchi di neve che nel mondo delle idee si realizzano nella curva di Koch, la quale poi ripetuta più volte costituisce l’isola di von Koch (vedi figura 6, immagine 4).

Partendo da un triangolo equilatero, ogni lato si suddivide in tre parti, ovviamente più si ripeterà il processo più la forma sarà dettagliata.

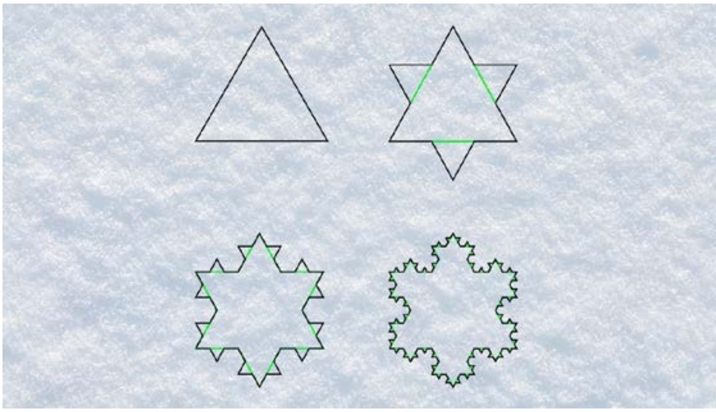

Fig. 6 - La curva di von Koch

La sua dimensione è ~ 1,26 che otteniamo dal seguente ragionamento:

$4^{1/D} = 3 \Rightarrow \log_3 4$

Calcolata la dimensione (D), conoscendo come calcolare l'area del triangolo $L^2/4\ \sqrt{3}$ (dove L è il lato), possiamo instituire un rapporto di autosomiglianza:

$$\frac{L^2}{(\log_3 4)} = \frac{\frac{L^2}{4}\sqrt{3}}{A}$$

Segue il ricavo dell'Area (A):

$$A = (\log_3 4)^2 \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \sim 1{,}26 \frac{L^2}{4}\sqrt{3}$$

Per il perimetro (P) si procede ricordando che tale successione è divergente e ogni volta aumenta di 4/3, dunque partendo dal triangolo equilatero (vedi figura 5, immagine 1)

P=3L, alla seconda ripetizione p= 3(L/3+ L/3+ L/3+ L/3) = 3(4/3L) e così via. Generalizzando per n, si ottiene

3(4/3L)n (L)

Il numero ottenuto D indica la relazione tra i numeri di elementi costituenti e le loro dimensioni, una bellezza nascosta come in 1,26 anche in altri numeri irrazionali.

5 – Il numero aureo: una bellezza nascosta

Prendiamo un segmento e dividiamolo in due parti, tali che il rapporto tra la sua parte maggiore (a) e la sua parte minore (c) sia uguale al rapporto tra l'intero segmento (c) e la sua parte maggiore.

(a+b) / a = a / b = φ = 1,6180339887…= ~137,5°

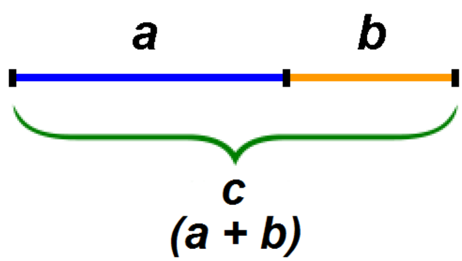

Fig. 7- Il rapporto φ rappresentato visivamente

Il rapporto ottenuto è definito rapporto aureo, per secoli ne è stata percepita l'armoniosità, e può essere descritto anche attraverso la Sequenza di Fibonacci:

1+2=3;3+2=5;3+5=8;5+8=13 ecc…

Possiamo intuire la formazione di tale serie, formata da una successione di numeri, ognuno tale da essere la somma dei due che lo precedono. Nella natura da noi osservabile si scorge la Sezione Aurea come un flusso, un movimento in itinere, che si moltiplica seguendo la logica geometrico-matematica ordinata.

Alcuni esempi sono presentati da: il cavolo romano, l'andamento filiforme del Nautilus pompilius, le code degli Hippocampi.

Fig. 8 - Nautilus pompilius.

Fig. 9 - Il cavolo romano.

Il cavolo romano, oltre a possedere la struttura ricorsiva del frattale (già esaminata in precedenza), conta sempre un numero di rosette uguale a un numero della Sequenza di Fibonacci. Le foglie sono disposte secondo l'angolo aureo, il quale si dimostra ottimale nella crescita deli vegetali, come anche il cavolfiore.

6 – Il numero aureo in architettura

Il numero aureo prende il nome di φ dallo scultore greco Fidia, il quale supervisionò i lavori per la costruzione del Partenone di Atene, alla cui costruzione parteciparono Ictino, Callicrate e Mnesicle. In tale tempio si possono ritrovare rettangoli aurei nella facciata come nelle statue.

La Sezione Aurea fu scoperta da Ippaso di Metaponto ed era già stata nominata nel libro VI degli *Elementi* di Euclide, secondo tale definizione:

Una linea retta è divisa secondo la proporzione estrema e media quando l'intera linea sta alla parte maggiore così come la maggiore sta alla minore.

Una definizione che corrisponde a quella data nel paragrafo 4.

I rapporti aurei ritornano nel Canone di Policleto, in cui la testa è 1/8 dell'intero corpo e il piede 1/7.

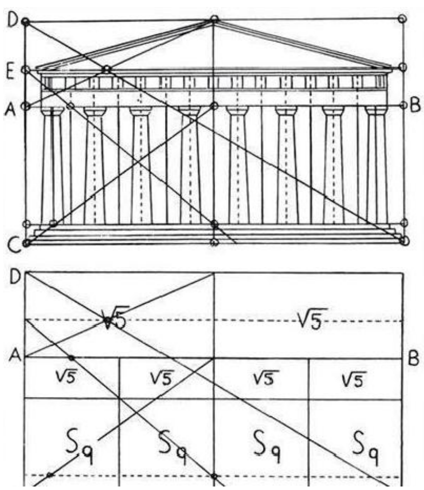

Fig. 10 - Il Partenone

La Sezione Aurea si rivela in numerosi templi di cui Atene è l'archetipo, riconfermandosi ancora una volta un esempio per tutta l'antichità. Si prenda in considerazione il tempio della Segesta elima. Ancora una volta il mondo dell'idee, in questo caso la perfezione dei modelli matematici, si proietta in un mondo di materia, nei petali di un fiore come nelle opere, attraverso cui gli antichi cercavano la connessione con il divino, una "coincidenza" alquanto affascinante.

7 – Il DNA: il "divino" in ognuno di noi

La sezione trasversale del DNA coincide con il decagono regolare, ossia esattamente 10 volte il triangolo aureo. La molecola di DNA è lunga 34 angstrom e larga 21 per ogni ciclo della sua struttura, due numeri che tra di loro sono in rapporto aureo. La spirale, simbolo di dinamismo ed elasticità, ricorre nelle galassie e nelle conchiglie.

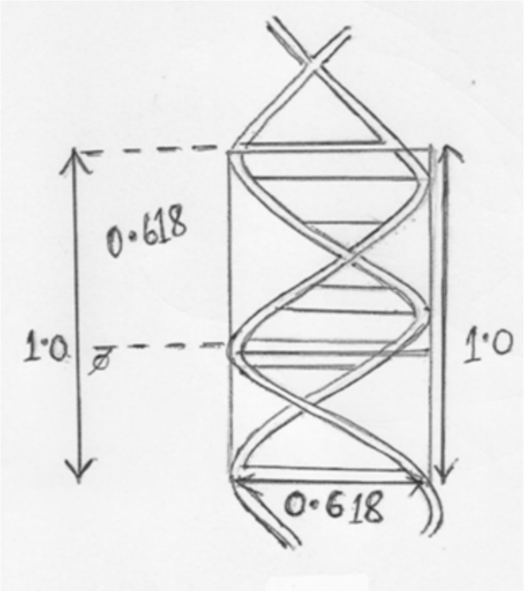

Fig. 11 - Il numero aureo nel DNA

8 – L'Universo frattale: una nuova idea, una vecchia intuizione

Il fisico Luciano Pietronero ha proposto un'interpretazione frattale dell'Universo. È infatti applicabile la proprietà di auto-somiglianza non tra le singole galassie ma considerando gli ammassi galattici.

In un solido frattale la massa decresce al crescere del volume, poiché presenta al suo interno diversi spazi vuoti. Questo porta a ipotizzare che diverse regioni dello spazio, in base alla massa e alla densità, si espandono in maniera disomogenea.

Una teoria sicuramente con i suoi dubbi, che tuttavia ci porta a riflettere su quanto i frattali abbiano influenzato la scienza e di come delle semplici intuizioni filosofiche trovino la loro massima realizzazione nelle scienze, proiettando e concretizzandone le idee. Un'idea rivoluzionaria che cela in sé un'aspirazione più grande: trovare una "teoria del tutto".

Una nuova idea da trovare, ma rifacendosi alle intuizioni degli antichi, continuare ad alimentare la scintilla scatenata con la filosofia e proiettarla nella scienza.

Bibliografia

AMPOLO C., GIGLIO R., MAGNETTO A., PARRA M. C. (2019). Centro Ettore Majorana. Le Mostre. Blackett- San Domenico – Wigner San Francesco, pp 39-50.

COLESANTI A. I Frattali, https://web.math.unifi.it/users/muge/promat/frattali/frattali.htm

COLONNESE M., TURCO R. - Geometria frattale: tra filosofia e necessità, https://www.rudimathematici.com/blocknotes/pdf/RMNC.pdf