LE FUNZIONI ESPONENZIALI

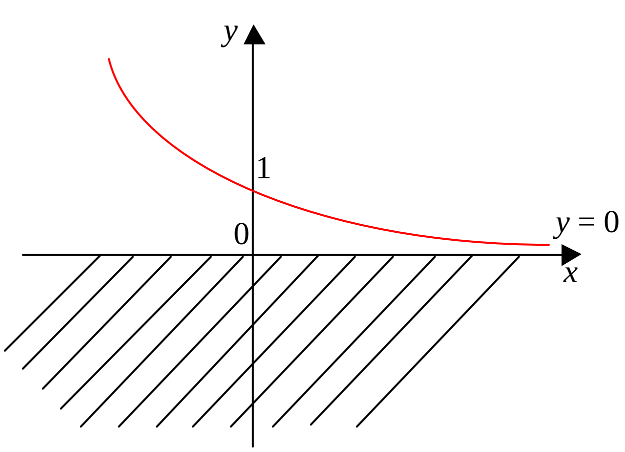
INTRODUZIONE

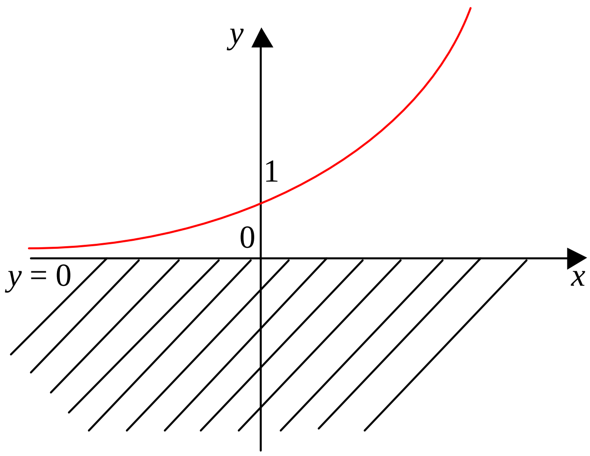
Osserviamo, in primo luogo, che le funzioni esponenziali sono della forma $y = a^x$ con a costante positiva diversa da 1 (il caso $a = 1$ è banale per cui non sarà oggetto del nostro studio).
Si possono allora verificare i seguenti due casi (si raccomanda di analizzare i due casi parallelamente e di effettuarne la lettura in senso verticale):

I CASO $\boxed{0 < a < 1}$

II CASO $\boxed{a > 1}$

In entrambi i casi la funzione $y = a^x$ si può studiare per punti e constatare che essa presenta i seguenti andamenti





È facile verificare che:

Poiché le funzioni esponenziali, come si evince dai due grafici precedenti, sono definite su tutto l'asse reale, il loro campo di esistenza coincide con il campo di esistenza dell'esponente

I caso: $x = 0 \Rightarrow y = a^0 = 1 \Rightarrow A = (0, 1)$

II caso: $x = 0 \Rightarrow y = a^0 = 1 \Rightarrow A = (0, 1)$

Le funzioni non presentano intersezioni con l'asse delle x

Le funzioni sono sempre positive indipendentemente dal loro esponente

I caso:

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0^+$$

($y = 0$ è un *asintoto orizzontale destro*)

II caso:

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0^-$$

($y = 0$ è un *asintoto orizzontale sinistro*)

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$$

I caso: La funzione è sempre decrescente

II caso: La funzione è sempre crescente

La regola di derivazione delle funzioni esponenziali verrà illustrata negli esempi che seguono

Osserviamo, infine, che, nel nostro studio, ci occuperemo esclusivamente delle funzioni esponenziali aventi per base il numero di *Nepero* $e > 1$.

$$y = e^{x^2-1}$$

CAMPO DI ESISTENZA.

Poiché la funzione data è esponenziale ed il suo esponente è un polinomio, essa risulta definita su tutto l'asse reale, cioè:

$$\boxed{C.E. = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\}}$$

INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

Per determinare l'intersezione della funzione con gli assi cartesiani occorre risolvere, come di consueto, i seguenti due sistemi:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = e^{x^2-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = e^{-1} = \dfrac{1}{e} \cong 0{,}36 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = \left(0, \frac{1}{e}\right)}$$

è il punto di intersezione della funzione con l'asse y

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = e^{x^2-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ e^{x^2-1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ mai \end{cases}$$

perché, come si evince dai due grafici sopra riportati, le funzioni esponenziali, indipendentemente dall'esponente, <u>non</u> intersecano mai l'asse delle x

SEGNO DELLA FUNZIONE.

Anche in questo caso, per lo studio del segno della funzione, occorre risolvere la disequazione:

$$y > 0$$

Ne segue:

$y > 0 \;\Rightarrow\; e^{x^2-1} > 0 \;\Rightarrow$ *sempre* perché, come si evince dai due grafici introduttivi, le funzioni esponenziali, indipendentemente dai loro esponenti e dalle loro basi, sono sempre situate al di sopra dell'asse x. Ne segue:

\+ +

$\boldsymbol{y > 0}$

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

Calcoliamo ora i limiti della funzione esponenziale assegnata ricordando le regole riportate nella nota introduttiva.

Risulta, pertanto:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} y} = \lim_{x\to+\infty}\left(e^{x^2-1}\right) = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2\right)} = e^{+\infty} = \boxed{+\infty}$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} y} = \lim_{x\to-\infty}\left(e^{x^2-1}\right) = e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2\right)} = e^{+\infty} = \boxed{+\infty}$$

Ne segue che, per $x \to \pm\infty$, la $y \to +\infty$: dunque la funzione non ha asintoti orizzontali.

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Ricordando che:

$$D\left(e^{f(x)}\right) = e^{f(x)} \cdot f'(x)$$

si ottiene:

$$D\left(e^{x^2-1}\right) = e^{x^2-1} \cdot D\left(x^2-1\right) = e^{x^2-1} \cdot (2x) = 2x \cdot e^{x^2-1}$$

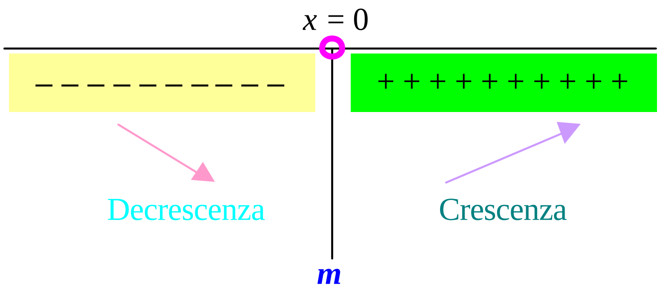
Per determinare i punti di massimi e di minimo della funzione, bisogna sempre risolvere la disequazione:

$$D(y) > 0$$

cioè:

$$2x \cdot e^{x^2-1} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x > 0 \\ e^{x^2-1} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ sempre \end{cases} \Rightarrow \boxed{x > 0}$$

Ne segue che la derivata prima è positiva per $x > 0$, cioè:



Per $x = 0$, valore in cui la derivata prima si annulla, la funzione presenta un *minimo* m.

$$x = 0 \Rightarrow y = e^{0-1} = e^{-1} = \frac{1}{e} \cong 0{,}36$$

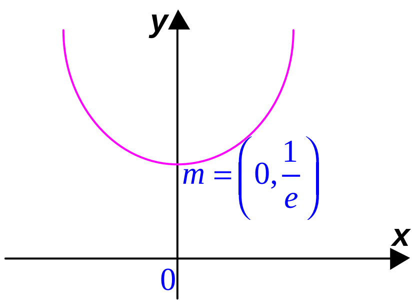
Dunque $\boxed{m = \left(0, \frac{1}{e}\right)}$ è il *punto di minimo*, ovvero $m \equiv A$.

***Osservazioni*.**

1. Ogni funzione esponenziale è definita dove è definito il suo esponente.
2. Le funzioni esponenziali sono sempre positive.
3. Nello studio della derivata prima è sufficiente andare a studiare la derivata dell'esponente.

IL GRAFICO.

Unendo tutte le informazioni ottenute, si avrà il seguente grafico della funzione:



$$y = e^{x^3+1}$$

Campo di Esistenza.

Poiché la funzione data è ancora esponenziale ed il suo esponente è un polinomio, essa risulta definita su tutto l'asse reale, cioè:

$\boxed{C.E. = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\}}$

Intersezioni con gli Assi.

$\begin{cases} x = 0 \\ y = e^{x^3+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = e \cong 2{,}71 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = (0, e)}$ è il punto di intersezione della funzione con l'asse y

$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = e^{x^3+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ e^{x^3+1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ mai \end{cases} \Rightarrow$ non ci sono intersezioni con l'asse delle x

Segno della Funzione.

Anche in questo caso, per lo studio del segno della funzione, occorre risolvere la disequazione:

$$y > 0$$

Ne segue:

$y > 0 \Rightarrow e^{x^3+1} > 0 \Rightarrow$ *sempre* perché è una funzione esponenziale, cioè:

+ +

$y > 0$

Limiti agli Estremi del Campo di Esistenza.

Risulta:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} y} = \lim_{x\to+\infty}\left(e^{x^3+1}\right) = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+1)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3)} = e^{+\infty} = \boxed{+\infty}$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} y} = \lim_{x\to-\infty}\left(e^{x^3+1}\right) = e^{\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+1)} = e^{\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3)} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = \boxed{0}$$

Ne segue che, per $x \to -\infty$, la $y \to 0$: dunque la retta $y = 0$, ovvero l'asse x, è un *Asintoto Orizzontale sinistro* (la funzione, cioè ci tende solo da sinistra).

$\boxed{A.O.S.: y = 0}$

Studio del Segno della Derivata Prima.

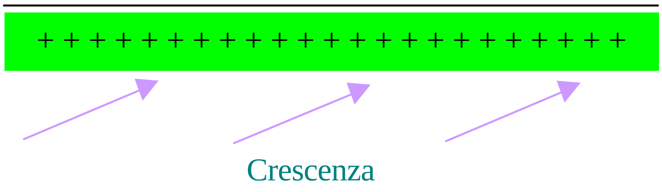
Si ha:

$$D\left(e^{x^3+1}\right) = e^{x^3+1} \cdot D\left(x^3+1\right) = e^{x^3+1} \cdot \left(3x^2\right) = 3x^2 \cdot e^{x^3+1}$$

da cui:

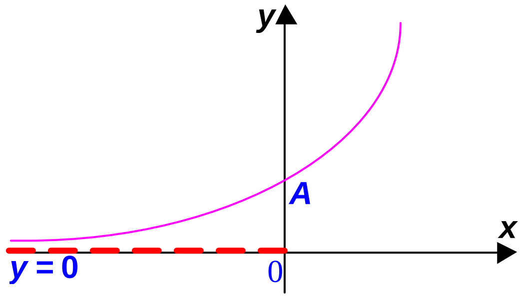
$$3x^2 \cdot e^{x^3+1} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 > 0 \\ e^{x^3+1} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sempre\ (\text{è un quadrato}) \\ sempre\ (\text{è una funzione esponenziale}) \end{cases}$$

Ne segue che la derivata prima è sempre positiva, cioè la funzione è sempre crescente ovvero non ha né massimi né minimi:



IL GRAFICO.

Unendo tutte le informazioni ottenute, si avrà il seguente grafico della funzione:



$$y = e^{\frac{x}{x+1}}$$

Campo di Esistenza.

Anche questa funzione è esponenziale ma il suo esponente è una frazione, motivo per cui essa risulta definita su tutto l'asse reale tranne che nei punti in cui il denominatore della frazione si annulla, cioè:

$\boxed{C.E.} = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1\} = \boxed{\{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < -1, -1 < x < +\infty\}}$

Ne segue subito che la retta $x = -1$ è un asintoto verticale per la funzione assegnata.

$\boxed{A.V.: x = -1}$

Intersezioni con gli Assi.

$\begin{cases} x = 0 \\ y = e^{\frac{x}{x+1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = e^{\frac{0}{0-1}} = e^0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = (0,1)}$ è il punto di intersezione della funzione con l'asse y

$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = e^{\frac{x}{x+1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ e^{\frac{x}{x+1}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ mai \end{cases} \Rightarrow$ non ci sono intersezioni con l'asse delle x

Segno della Funzione.

Si ha:

$y > 0 \Rightarrow e^{\frac{x}{x+1}} > 0 \Rightarrow$ *sempre* in quanto si tratta di una funzione esponenziale, cioè:

\+ +

$y > 0$

Limiti agli Estremi del Campo di Esistenza.

Risulta:

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} y} = \lim_{x \to +\infty} \left(e^{\frac{x}{x+1}} \right) = e^{\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)} = e^{\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{x} \right)} = e^1 = \boxed{e}$$

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} y} = \lim_{x \to -\infty} \left(e^{\frac{x}{x+1}} \right) = e^{\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)} = e^{\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x}{x} \right)} = e^1 = \boxed{e}$$

Ne segue che, per $x \to \pm\infty$, la $y \to e$: dunque la retta $y = e$ è un *Asintoto Orizzontale* sia *destro* che *sinistro* (la funzione, cioè ci tende sia da destra che da sinistra).

$\boxed{A.O.: y = e}$

Studio del Segno della Derivata Prima.

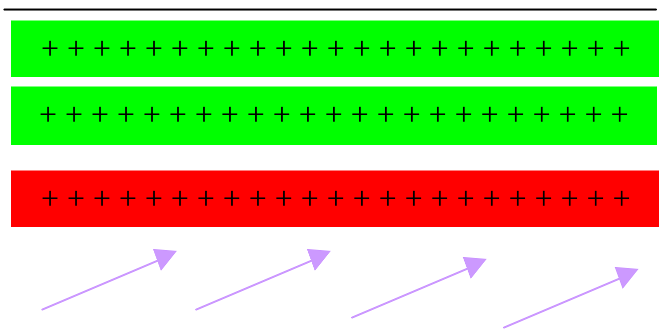
Si ottiene:

$$D\left(e^{\frac{x}{x+1}} \right) = e^{\frac{x}{x+1}} \cdot D\left(\frac{x}{x+1} \right) = e^{\frac{x}{x+1}} \cdot \left(\frac{1 \cdot (x+1) - x \cdot 1}{(x+1)^2} \right) = e^{\frac{x}{x+1}} \cdot \left(\frac{x+1-x}{(x+1)^2} \right) = e^{\frac{x}{x+1}} \cdot \frac{1}{(x+1)^2}$$

da cui:

$$e^{\frac{x}{x+1}}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}>0 \Rightarrow \begin{cases} e^{\frac{x}{x+1}}>0 \\ \dfrac{1}{(x+1)^2}>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sempre\ (in\ quanto\ funzione\ esponenziale) \\ sempre\ (in\ quanto\ il\ denominatore\ è\ un\ quadrato) \end{cases}$$

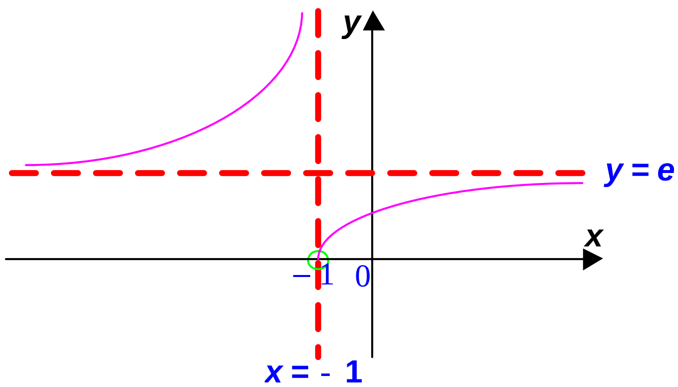
Ne segue che la derivata prima è sempre positiva, cioè la funzione è sempre crescente (chiaramente all'interno del campo di esistenza), ovvero non esistono né massimi né minimi.



Crescenza

IL GRAFICO.

Unendo tutte le informazioni ottenute ed osservando che per $x = -1$ la funzione presenta un buco in quanto non è definita, si avrà il seguente grafico:



$$y=e^{\frac{x-1}{x^2}}$$

Campo di Esistenza.

Poiché si tratta ancora di una funzione esponenziale con esponente frazionario, si ha:

$\boxed{C.E.} = \{x\in\mathbb{R}: x^2 \neq 0\} = \{x\in\mathbb{R}: x \neq 0\} = \boxed{\{x\in\mathbb{R}: -\infty < x < 0,\ 0 < x < +\infty\}}$

Ne segue subito che la retta $x = 0$, ovvero l'asse delle y, è un asintoto verticale per la funzione assegnata.

$\boxed{A.V.: x = 0}$

Intersezioni con gli Assi.

Si osservi in primo luogo che non ci possono essere intersezioni con l'asse y, in quanto tale retta è un asintoto verticale per la funzione che, quindi, non è definita per $x = 0$. È inutile, pertanto, risolvere il primo dei due soliti sistemi!!!

Inoltre, essendo una funzione esponenziale, essa non ha neanche intersezione con l'asse delle x. Dunque la funzione data non interseca nessuno dei due assi cartesiani.

Segno della Funzione.

Si ha:

$y > 0 \Rightarrow e^{\frac{x-1}{x^2}} > 0 \Rightarrow$ *sempre* in quanto si tratta di una funzione esponenziale, cioè:

\+ +

$y > 0$

Limiti agli Estremi del Campo di Esistenza.

Risulta:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} y} = \lim_{x\to+\infty}\left(e^{\frac{x-1}{x^2}}\right) = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x^2}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x^2}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)} = e^0 = \boxed{1}$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} y} = \lim_{x\to-\infty}\left(e^{\frac{x-1}{x^2}}\right) = e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x-1}{x^2}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x^2}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right)} = e^0 = \boxed{1}$$

Ne segue che, per $x \to \pm\infty$, la $y \to 1$: dunque la retta $y = 1$ è un *Asintoto Orizzontale* sia *destro* che *sinistro* (la funzione, cioè ci tende sia da destra che da sinistra).

$\boxed{A.O.: y = 1}$

Studio del Segno della Derivata Prima.

Si ottiene:

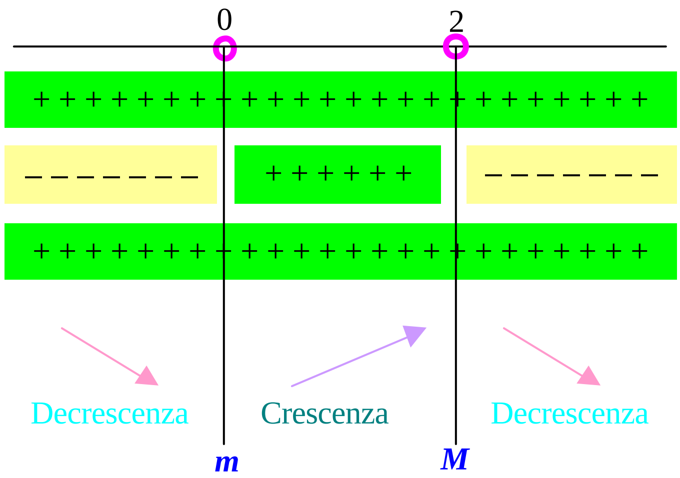
$$D\left(e^{\frac{x-1}{x^2}}\right) = e^{\frac{x-1}{x^2}}\cdot D\left(\frac{x-1}{x^2}\right) = e^{\frac{x-1}{x^2}}\cdot\left(\frac{1\cdot x^2-(x-1)\cdot 2x}{x^4}\right) = e^{\frac{x-1}{x^2}}\cdot\left(\frac{x^2-2x^2+2x}{x^4}\right) = e^{\frac{x-1}{x^2}}\cdot\frac{-x^2+2x}{x^4}$$

da cui:

$$e^{\frac{x-1}{x^2}} \cdot \frac{-x^2+2x}{x^4} > 0 \Rightarrow \begin{cases} e^{\frac{x-1}{x^2}} > 0 \\ \frac{-x^2+2x}{x^4} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sempre\ (in\ quanto\ funzione\ esponenziale) \\ \begin{cases} -x^2+2x>0 \\ x^4>0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-2x<0 \\ sempre \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x-2)<0 \\ sempre \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} sempre\ (in\ quantofunzione\ esponenziale) \\ \begin{cases} 0<x<2 \\ sempre \end{cases} \end{cases}$$

cioè:



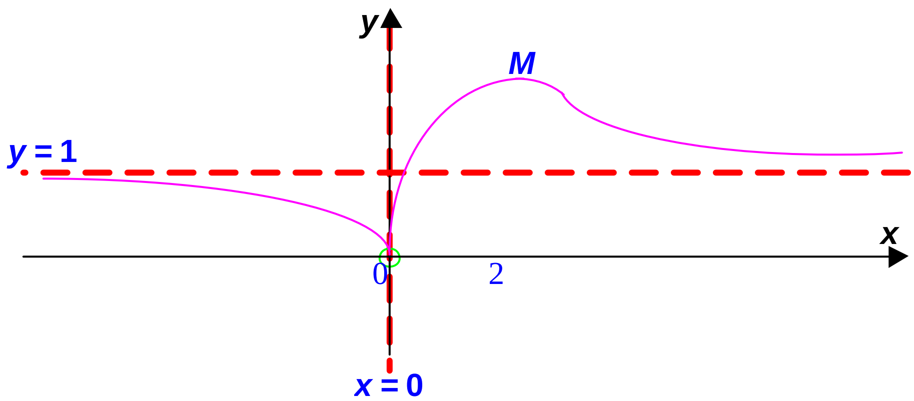
Osserviamo innanzitutto che il minimo non esiste perché in $x = 0$ abbiamo già detto che la funzione non è definita.
Pertanto si ha:

$$x = 2 \Rightarrow y = e^{\frac{2-1}{2^2}} = e^{\frac{1}{4}} \cong 1{,}28$$

Dunque $\boxed{M = \left(2, e^{\frac{1}{4}}\right)}$ è il *punto di Massimo* per la funzione.

IL GRAFICO.

Unendo tutte le informazioni ottenute, si avrà il seguente grafico della funzione:



$$y = e^{\frac{x^2}{x-1}}$$

CAMPO DI ESISTENZA.

Poiché si tratta ancora di una funzione esponenziale con esponente frazionario, si ha:

$\boxed{C.E.} = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\} = \boxed{\{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < 1,\ 1 < x < +\infty\}}$

Ne segue subito che la retta $x = 1$ è un asintoto verticale per la funzione assegnata.

$\boxed{A.V.: x = 1}$

INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

$\begin{cases} x = 0 \\ y = e^{\frac{x^2}{x-1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = e^{\frac{0}{0-1}} = e^0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = (0,1)}$ è il punto di intersezione della funzione con l'asse y

$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = e^{\frac{x^2}{x-1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ e^{\frac{x^2}{x-1}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ mai \end{cases} \Rightarrow$ non ci sono intersezioni con l'asse delle x

SEGNO DELLA FUNZIONE.

Si ha:

$y > 0 \Rightarrow e^{\frac{x^2}{x-1}} > 0 \Rightarrow$ *sempre* in quanto si tratta di una funzione esponenziale, cioè:

\+ +

$y > 0$

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

Risulta:

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} y} = \lim_{x \to +\infty}\left(e^{\frac{x^2}{x-1}}\right) = e^{\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}\right)} = e^{\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{x^2}{x}\right)} = e^{\lim_{x \to +\infty}(x)} = e^{+\infty} = \boxed{+\infty}$$

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} y} = \lim_{x \to -\infty}\left(e^{\frac{x^2}{x-1}}\right) = e^{\lim_{x \to -\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}\right)} = e^{\lim_{x \to -\infty}\left(\frac{x^2}{x}\right)} = e^{\lim_{x \to -\infty}(x)} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = \boxed{0}$$

Ne segue che, per $x \to -\infty$, la $y \to 0$: dunque la retta $y = 0$, ovvero l'asse x, è un *Asintoto Orizzontale sinistro* (la funzione, cioè ci tende solo da sinistra).

$\boxed{A.O.S.: y = 0}$

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Si ottiene:

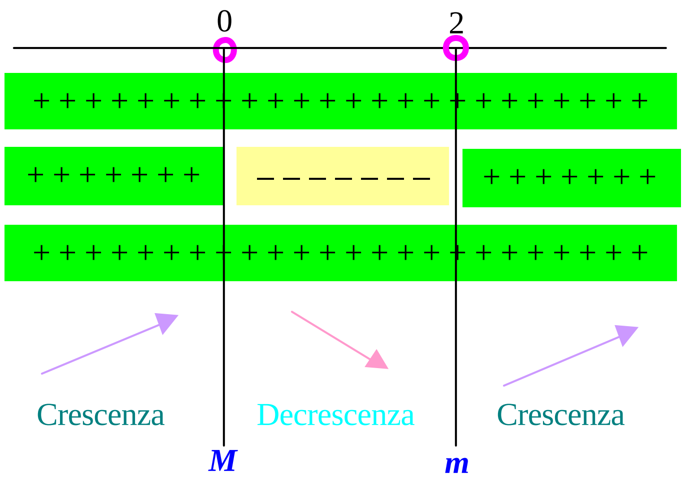
$$D\left(e^{\frac{x^2}{x-1}}\right) = e^{\frac{x^2}{x-1}} \cdot D\left(\frac{x^2}{x-1}\right) = e^{\frac{x^2}{x-1}} \cdot \left(\frac{2x(x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2}\right) = e^{\frac{x^2}{x-1}} \cdot \left(\frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2}\right) = e^{\frac{x^2}{x-1}} \cdot \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

da cui:

$$e^{\frac{x^2}{x-1}}\cdot\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}>0 \Rightarrow \begin{cases} e^{\frac{x^2}{x-1}}>0 \\ \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sempre\ (in\ quanto funzione esponenziale) \\ \begin{cases} x^2-2x>0 \\ (x-1)^2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x-2)>0 \\ sempre \end{cases} \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} sempre\ (in\ quanto funzione\ esponenziale) \\ \begin{cases} x<0,\ x>2 \\ sempre \end{cases} \end{cases}$$

cioè:



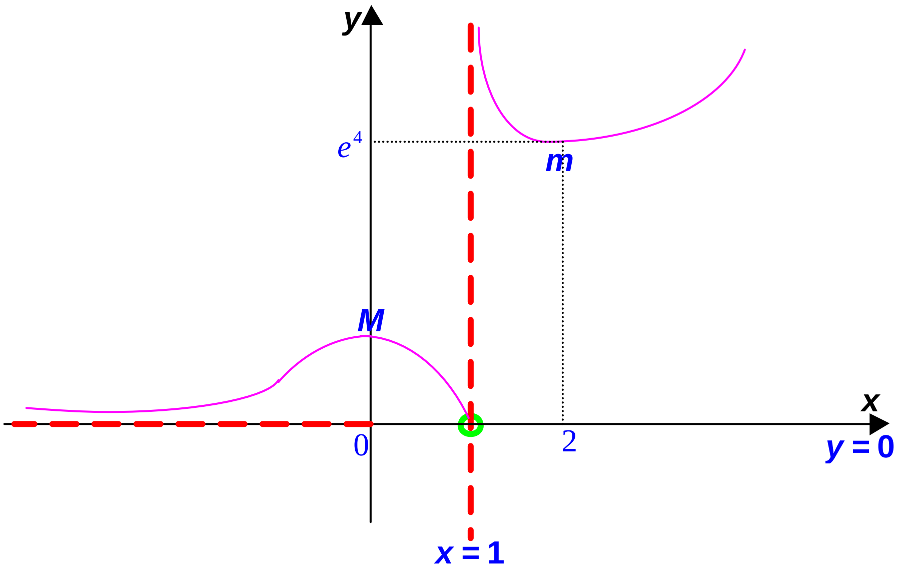
$x = 0 \Rightarrow y = 1$

$x = 2 \Rightarrow y = e^{\frac{2^2}{2-1}} = e^4 \cong 54{,}6$

Dunque, $\boxed{M = (0,1) \equiv A}$ è il *punto di Massimo* per la funzione ed $\boxed{m = (2, e^4)}$ è il suo *punto di minimo*.

Il Grafico.

Unendo tutte le informazioni ottenute, si avrà il seguente grafico della funzione:



$$y = x^2 e^{-x+2}$$

CAMPO DI ESISTENZA.

Poiché si tratta ancora di una funzione esponenziale, avente per esponente un polinomio, moltiplicata per un altro polinomio, si ha:

$$\boxed{C.E. = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\}}$$

INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = x^2 e^{-x+2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \cdot e^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = (0,0) \equiv O}$$ è il punto di intersezione della funzione con l'asse y

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = x^2 e^{-x+2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 e^{-x+2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \begin{cases} x^2 = 0 \\ e^{-x+2} = 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ mai \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \boxed{A = (0,0) \equiv O}$ è il punto di intersezione della funzione con l'asse x

Dunque l'unico punto di intersezione della funzione con gli assi cartesiani è proprio l'origine.

SEGNO DELLA FUNZIONE.

Si ha:

$$y > 0 \Rightarrow x^2 e^{-x+2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 > 0 \\ e^{-x+2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sempre \ (in \ quanto un \ quadrato) \\ sempre \ (in \ quanto funzione esponenziale) \end{cases}$$

+ +
+ +

$$y > 0$$

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

Risulta:

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} y} = \lim_{x \to -\infty} \left(x^2 e^{-x+2}\right) = \lim_{x \to -\infty} x^2 \cdot e^{\lim\limits_{x \to -\infty}(-x+2)} = (+\infty) \cdot (+\infty) = \boxed{+\infty}$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} y} = \lim_{x \to +\infty} \left(x^2 e^{-x+2}\right) = \lim_{x \to +\infty} x^2 \cdot e^{\lim\limits_{x \to +\infty}(-x+2)} = (+\infty) \cdot e^{-\infty} = (+\infty) \cdot 0 = \boxed{f.i.}$$

Senza addentrarci troppo nei calcoli dei limiti, ricordiamo semplicemente che, per $x \to \pm\infty$, le esponenziali tendono a zero più velocemente di tutte le potenze che, a loro volta, tendono a zero più velocemente delle logaritmiche. Ne segue, allora, che il limite per $x \to +\infty$ è pari al valore della funzione più veloce, ovvero, nel caso specifico, dell'esponenziale. Dunque:

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} y} = \lim_{x \to +\infty} \left(x^2 e^{-x+2}\right) = \boxed{0}$$

Pertanto, per $x \to +\infty$, la $y \to 0$: dunque la retta $y = 0$ è un *Asintoto Orizzontale destro* (la funzione, cioè ci tende solo da destra mentre a sinistra tende ad infinito).

$\boxed{A.O.D.: y = 0}$

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Ricordando che:

$$D\left[f(x)\cdot g(x)\right]=D\left[f(x)\right]\cdot g(x)+f(x)\cdot D\left[g(x)\right]$$

si ottiene:

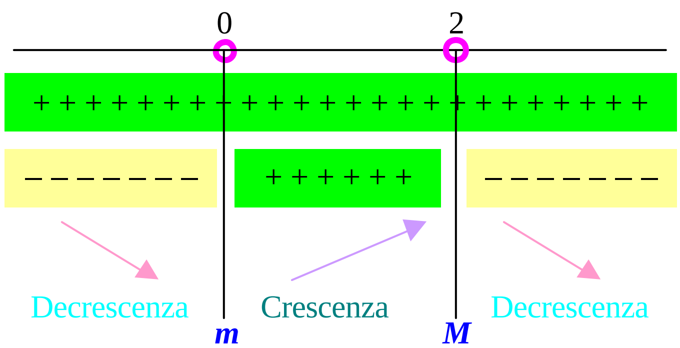
$$D\left(x^2e^{-x+2}\right)=2x\cdot e^{-x+2}+x^2\cdot e^{-x+2}\cdot(-1)=2xe^{-x+2}-x^2e^{-x+2}=e^{-x+2}\left(2x-x^2\right)$$

da cui:

$$e^{-x+2}\left(2x-x^2\right)>0\Rightarrow\begin{cases}e^{-x+2}>0\\2x-x^2>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}sempre\ (in\ quanto funzione esponenziale)\\x^2-2x<0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}sempre\ (in\ quanto funzione esponenziale)\\x(x-2)<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}sempre\ (in\ quanto funzione esponenziale)\\0<x<2\end{cases}$$

cioè:



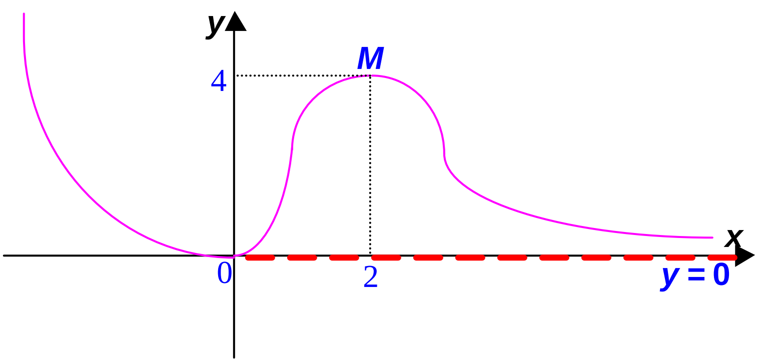
$x=0\Rightarrow y=0\equiv A\equiv O$

$x=2\Rightarrow y=2^2\cdot e^{-2+2}=4\cdot e^0=4\cdot 1=4$

Dunque, $\boxed{m=(0,0)\equiv O}$ è il *punto di minimo* per la funzione ed $\boxed{M=(2,4)}$ è il suo *punto di Massimo*.

IL GRAFICO.

Unendo tutte le informazioni ottenute, si avrà il seguente grafico della funzione:



$$y = \frac{x+1}{x} e^{-2x}$$

CAMPO DI ESISTENZA.

Questa volta siamo di fronte ad una funzione esponenziale, avente per esponente sempre un polinomio, ma la funzione stessa è moltiplicata per una frazione, motivo per cui risulta definita su tutto l'asse reale tranne che nei punti in cui il denominatore della frazione si annulla, cioè:

$\boxed{C.E.} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \boxed{\{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < 0,\ 0 < x < +\infty\}}$

Ne segue subito che la retta $x = 0$, ovvero l'asse y, è un asintoto verticale per la funzione assegnata.

$\boxed{A.V.: x = 0}$

INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

Osserviamo in primo luogo che non ci possono essere intersezioni con l'asse y, in quanto tale retta è un asintoto verticale per la funzione che, quindi, non è definita per $x = 0$. È inutile, pertanto, risolvere il primo dei due soliti sistemi!!!

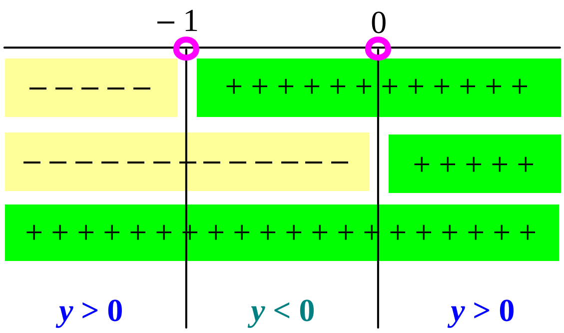
$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = \frac{x+1}{x} e^{-2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{x+1}{x} e^{-2x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \begin{cases} \frac{x+1}{x} = 0 \\ e^{-2x} = 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1 = 0 \\ mai \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ mai \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \boxed{A = (-1, 0)}$ è il punto di intersezione della funzione con l'asse x

SEGNO DELLA FUNZIONE.

Si ha:

$$y > 0 \Rightarrow \frac{x+1}{x} e^{-2x} > 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{x} > 0 \\ e^{-2x} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ x > 0 \\ sempre \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > 0 \\ sempre\ (in\ quanto funzione esponenziale) \end{cases}$$



LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

Risulta:

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} y} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{x} e^{-2x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right) \cdot e^{\lim_{x\to-\infty}(-2x)} = (1)\cdot\left(e^{+\infty}\right) = \boxed{+\infty}$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} y} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x} e^{-2x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right) \cdot e^{\lim_{x\to+\infty}(-2x)} = (1)\cdot\left(e^{-\infty}\right) = \frac{1}{e^{\infty}} = \boxed{0}$$

Pertanto, per $x \to +\infty$, la $y \to 0$: dunque la retta $y = 0$ è un *Asintoto Orizzontale destro* (la funzione, cioè ci tende solo da destra mentre a sinistra tende ad infinito).

$\boxed{A.O.D.: y = 0}$

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Risulta:

$$D\left(\frac{x+1}{x}\cdot e^{-2x}\right)=\left[\frac{1\cdot x-(x+1)\cdot 1}{x^2}\right]\cdot e^{-2x}+\frac{x+1}{x}\cdot\left[e^{-2x}\cdot(-2)\right]=\left(\frac{x-x-1}{x^2}\right)\cdot e^{-2x}-2\cdot\frac{x+1}{x}\cdot e^{-2x}=$$

$$=\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot e^{-2x}-\frac{2x+2}{x}\cdot e^{-2x}=e^{-2x}\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{2x+2}{x}\right)=e^{-2x}\left(\frac{-1-(2x+2)\cdot x}{x^2}\right)=$$

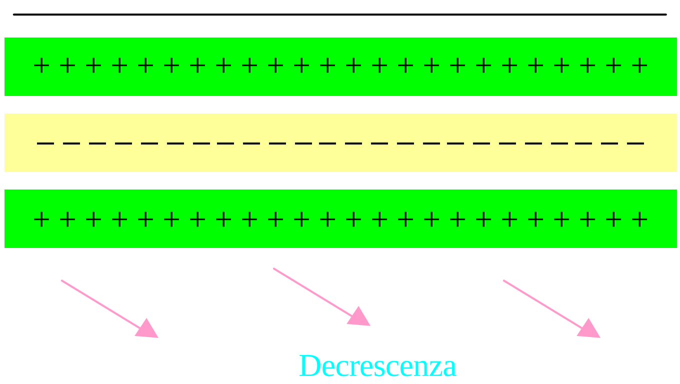
$$=e^{-2x}\left(\frac{-1-2x^2-2x}{x^2}\right)=e^{-2x}\left(\frac{-2x^2-2x-1}{x^2}\right)$$

da cui:

$$e^{-2x}\left(\frac{-2x^2-2x-1}{x^2}\right)>0 \Rightarrow \begin{cases} e^{-2x}>0 \\ \dfrac{-2x^2-2x-1}{x^2}>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sempre\ (in\ quanto funzione esponenziale) \\ -2x^2-2x-1>0 \\ x^2>0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} sempre\ (in\ quanto funzione esponenziale) \\ 2x^2+2x+1<0 \\ sempre\ (in\ quanto è\ un\ quadrato) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sempre \\ mai\ (\Delta<0) \\ sempre \end{cases}$$

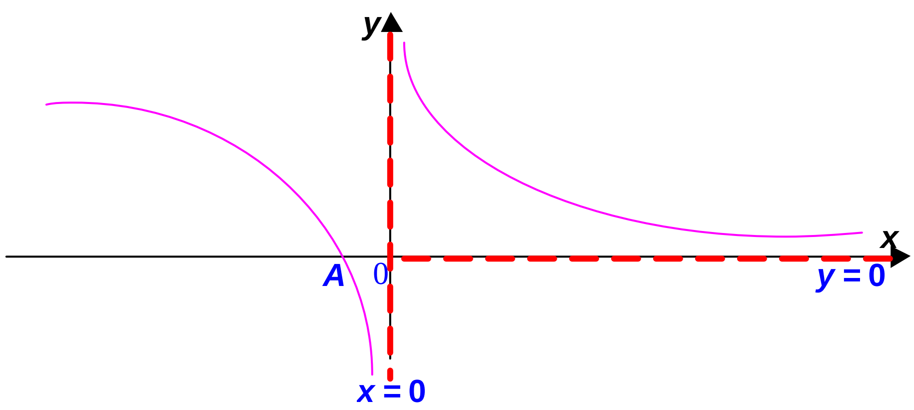
cioè:



Dunque la funzione è sempre decrescente, ovvero non ci sono né massimi né minimi.

IL GRAFICO.

Unendo tutte le informazioni ottenute, si avrà il seguente grafico della funzione:



ESERCIZI PROPOSTI

Studiare le seguenti funzioni esponenziali:

$y=e^{-4x+2x^2}$

$y=e^{x-2}$

$y=e^{x^2+x+1}$

$y=e^{\frac{x}{x-1}}$

$y=e^{\frac{x^2-x}{x+1}}$

$y=e^{\frac{x-1}{2-x}}$

$y=xe^{-\frac{1}{x}}$

$y=x^2e^{-2x}$

$y=x^4e^{-\frac{x^2}{2}}$

$y=(x-2)e^{-2x}$

$y=(x^2+x)e^x$

$y=(x-1)^2e^{-x}$

$y=\frac{x+1}{x+5}e^x$

$y=\frac{e^{2x}}{x}$