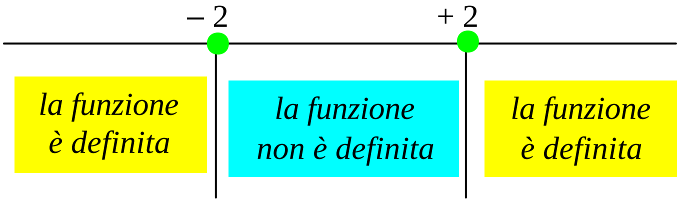
LE FUNZIONI IRRAZIONALI

$$y=\sqrt{x^2-4}$$

CAMPO DI ESISTENZA.

Poiché la funzione data è una irrazionale con <u>indice di radice pari</u>, il cui radicando è un polinomio, essa risulta definita solo per i valori della x per i quali il radicando è positivo, ovvero maggiore od uguale a zero, cioè:

$\boxed{C.E.} = \{x\in\mathbb{R}: x^2-4\geq 0\} = \{x\in\mathbb{R}: x\leq -2,\ x\geq +2\} = \boxed{\{x\in\mathbb{R}: -\infty < x\leq -2,\ +2\leq x<+\infty\}}$



INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

Le intersezioni della funzione con gli assi cartesiani si ottengono risolvendo, come di consueto, i seguenti due sistemi:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=\sqrt{x^2-4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\sqrt{-4} \end{cases} \Rightarrow \text{non esistono intersezioni tra la funzione e l'asse } y$$

Si osservi, infatti, che la radice di un numero negativo non esiste nel campo dei numeri reali.

$$\begin{cases} y=0 \\ 0=\sqrt{x^2-4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ \sqrt{x^2-4}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x^2-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x_{1,2}=\pm 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1,2}=\pm 2 \\ y=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{A=(-2,0)}$ e $\boxed{B=(+2,0)}$ sono le due intersezioni della funzione con l'asse x

Si osservi che, qualora si voglia eguagliare a zero un radicale, è sufficiente eguagliare a zero il suo radicando.

SEGNO DELLA FUNZIONE.

Anche in presenza di funzioni irrazionali, per lo studio del segno, occorre risolvere la disequazione:

$$y>0$$

Ne segue:

$y>0 \Rightarrow \sqrt{x^2-4}>0 \Rightarrow \forall x\in C.E.$

Si osservi che tutte le funzioni irrazionali con indice di radice pari sono sempre positive all'interno del campo di esistenza: per studiare la loro positività, infatti, bisognerebbe studiare la positività del radicando, cosa che già si fa nel determinare il campo di definizione della funzione.

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

Per il calcolo dei limiti delle funzioni irrazionali, sarà sufficiente determinare il limite del radicando, tenendo bene a mente, però, che, in generale, vale la seguente proprietà:

Se $y=\sqrt{f(x)}$, dove $f(x)$ è una qualunque funzione assegnata, allora risulta:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)\right]}$$

Nell'esempio quindi si ha:

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} y}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2-4}\right)=\sqrt{\lim_{x\to\pm\infty}\left(x^2-4\right)}=\sqrt{+\infty}=\boxed{+\infty}$$

Ne segue che, per $x\to\pm\infty$, la $y\to+\infty$: dunque la funzione <u>non</u> ha *Asintoti Orizzontali*.

Occorre, pertanto, vedere se la funzione ammette *Asintoti Obliqui* della forma $y = mx + q$.
Si ha:

$$m = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\frac{x^2-4}{x^2}}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2}}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{|x|}{|x|}\right) = \pm 1$$

Per $m = +1$ risulta:

$$q = \lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - mx\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4} - x\right) = +\infty - \infty \text{ che è una forma indeterminata}$$

Si può allora studiare il limite moltiplicando e dividendo la funzione per una stessa quantità, precisamente:

$$q = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-4} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)\left(\sqrt{x^2-4}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2-4}+x\right)}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2-4-x^2}{\sqrt{x^2-4}+x}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{-4}{\sqrt{x^2-4}+x}\right] = 0$$

in quanto il denominatore, per x che tende ad ∞, tende anch'esso ad ∞ ed i numeratore è, invece, un numero.

Si osservi che è stato possibile semplificare il numeratore e ridurlo alla forma $x^2 - 4 - x^2$ perché si trattava del prodotto di una somma per la sua differenza (cfr. sezione sui polinomi).

Per $m = -1$ risulta:

$$q = \lim_{x\to-\infty}\left[f(x) - mx\right] = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4} + x\right) = +\infty - \infty \text{ che è ancora una forma indeterminata}$$

Si può allora studiare il limite moltiplicando e dividendo la funzione per una stessa quantità, precisamente:

$$q = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4} + x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\left(\sqrt{x^2-4}+x\right)\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)}{\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2-4-x^2}{\sqrt{x^2-4}-x}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-4}{\sqrt{x^2-4}-x}\right] = 0$$

Ne segue che $m = \pm 1$ e $q = 0$, cioè vi sono due asintoti obliqui (la bisettrice del primo e terzo quadrante e la bisettrice del secondo e quarto quadrante).

$\boxed{A.Ob.: y = \pm x}$

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Ricordando che:

$$D\left(\sqrt{f(x)}\right) = D\left[f(x)\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\left[f(x)\right]^{\frac{1}{2}-1}\cdot D\left[f(x)\right] = \frac{D\left[f(x)\right]}{2\sqrt{f(x)}}$$

si ottiene:

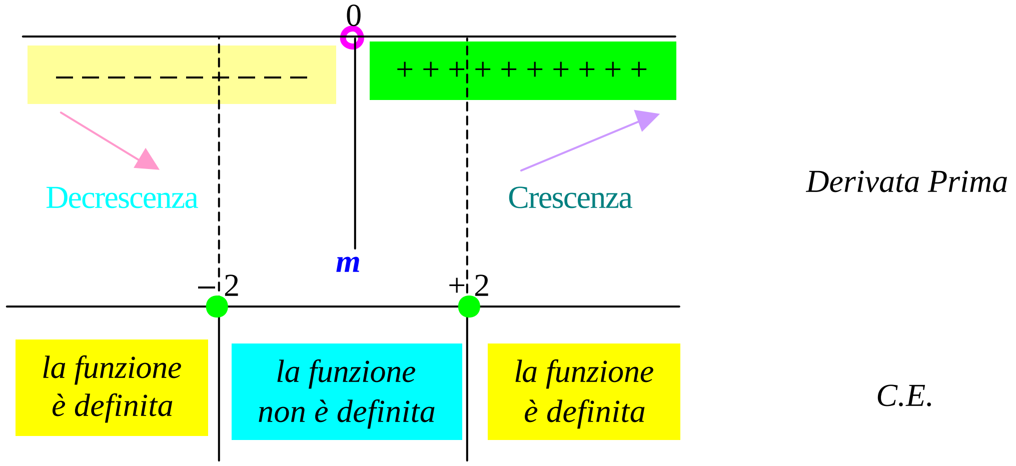
$$D\left(\sqrt{x^2-4}\right) = \frac{D\left(x^2-4\right)}{2\sqrt{x^2-4}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$$

Per determinare i punti di massimi e di minimo della funzione, bisogna sempre risolvere la disequazione:

$$D(y) > 0$$

cioè:

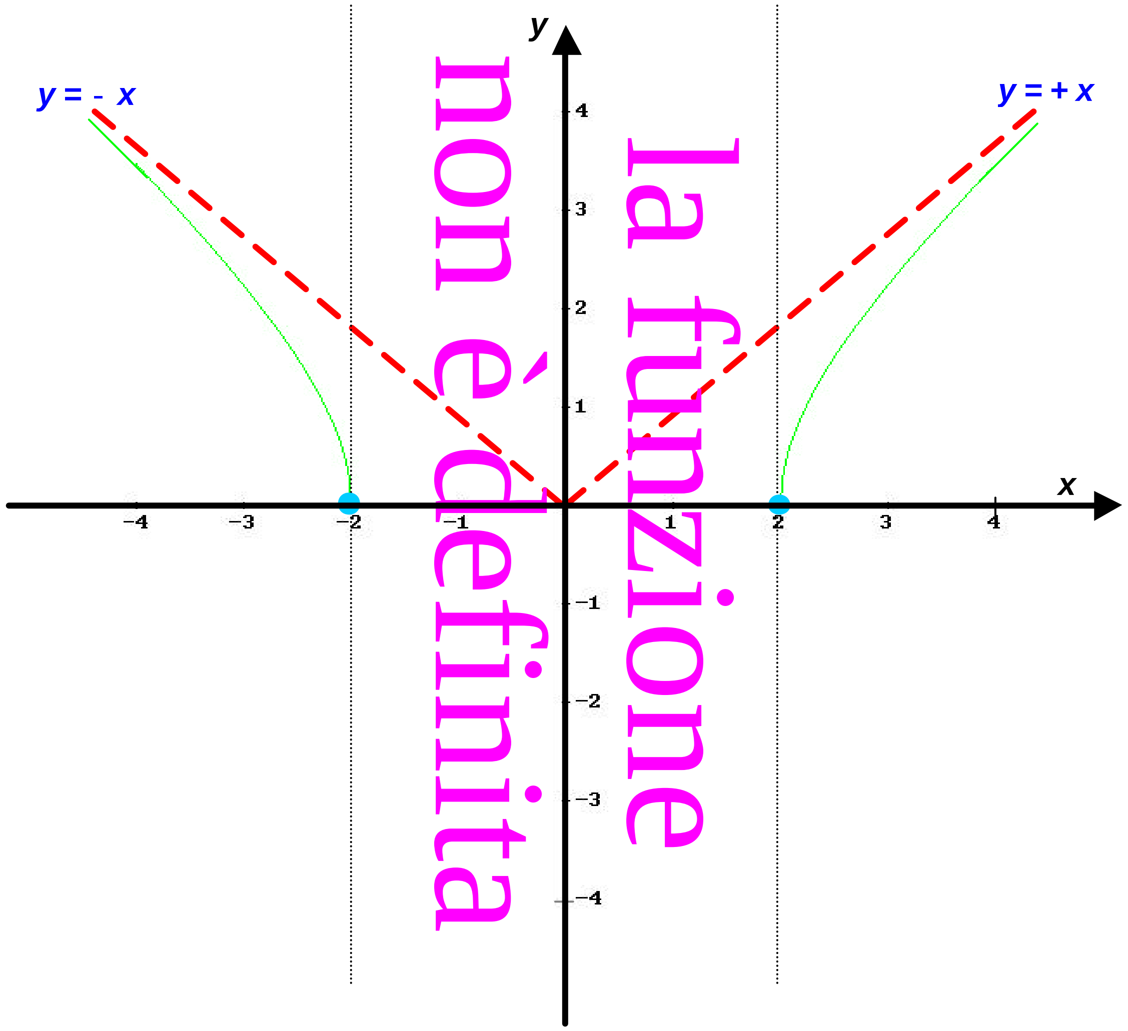
$$\frac{x}{\sqrt{x^2-4}} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \sqrt{x^2-4} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \forall x \in C.E. \end{cases}$$



Anche se dallo studio del segno della derivata prima emerge che la funzione ammette un minimo in $x = 0$, in realtà tale punto non esiste in quanto non appartiene all'insieme di definizione della funzione stessa.

IL GRAFICO.

Unendo tutte le informazioni ottenute, si avrà il seguente grafico della funzione:



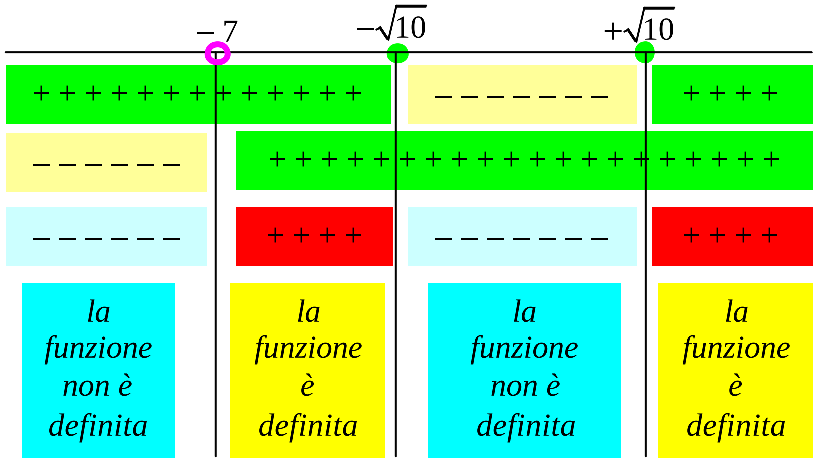
$$y=\sqrt{\frac{x^2-10}{x+7}}$$

Campo di Esistenza.

Anche in questo caso ci si trova di fronte ad una funzione irrazionale con indice di radice pari, il cui radicando è, però, una frazione. Pertanto risulta:

$$\boxed{C.E.}=\left\{x\in\mathbb{R}:\frac{x^2-10}{x+7}\geq 0,\,x+7\neq 0\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}:\begin{cases}x^2-10\geq 0\\ x+7>0,\,x\neq -7\end{cases}\right\}=$$

$$=\left\{x\in\mathbb{R}:\begin{cases}x\leq -\sqrt{10}\cong -3{,}16;\,x\geq +\sqrt{10}\cong +3{,}16\\ x>-7\end{cases}\right\}=\boxed{\left\{x\in\mathbb{R}:-7<x\leq -\sqrt{10},+\sqrt{10}\leq x<+\infty\right\}}$$



Ne segue che la retta di equazione $x = -7$ rappresenta un *Asintoto Verticale* per la funzione data.

$$\boxed{A.V.: x=-7}$$

Intersezioni con gli Assi.

$$\begin{cases}x=0\\ y=\sqrt{\frac{x^2-10}{x+7}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=\sqrt{-\frac{10}{7}}\end{cases}\Rightarrow$$ non esistono intersezioni tra la funzione e l'asse y

$$\begin{cases}y=0\\ 0=\sqrt{\frac{x^2-10}{x+7}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=0\\ \sqrt{\frac{x^2-10}{x+7}}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=0\\ \frac{x^2-10}{x+7}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=0\\ x^2-10=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=0\\ x_{1,2}=\pm\sqrt{10}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_{1,2}=\pm\sqrt{10}\\ y=0\end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{A=\left(-\sqrt{10},0\right)}$ e $\boxed{B=\left(+\sqrt{10},0\right)}$ sono le due intersezioni della funzione con l'asse x

Segno della Funzione.

$$y>0\Rightarrow\sqrt{\frac{x^2-10}{x+7}}>0\Rightarrow\frac{x^2-10}{x+7}>0\Rightarrow\forall x\in C.E.$$

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

Si ha:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} y} = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^2-10}{x+7}}\right) = \sqrt{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-10}{x+7}\right)} = \boxed{+\infty}$$

Ne segue che, per $x \to \pm\infty$, la $y \to +\infty$: dunque la funzione <u>non</u> ha *Asintoti Orizzontali*.
Si osservi, inoltre, che non è stato calcolato il lmite della funzione per x che tende a $-\infty$ in quanto in tale parte di piano essa non è definita.
Per il calcolo degli asintoti obliqui si ha:

$$m = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\sqrt{\frac{x^2-10}{x+7}}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\frac{x^2-10}{x^2(x+7)}}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\frac{x^2-10}{x^3+7x}}\right) = 0$$

Per $m = 0$ risulta:

$$q = \lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - mx\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^2-10}{x+7}} - 0\cdot x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^2-10}{x+7}}\right) = +\infty$$

Poiché $m = 0$ e $q = +\infty$, la funzione <u>non</u> ha neanche gli *Asintoti Obliqui*.

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Risulta:

$$D\left(\sqrt{\frac{x^2-10}{x+7}}\right) = \frac{D\left(\frac{x^2-10}{x+7}\right)}{2\sqrt{\frac{x^2-10}{x+7}}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-10}{x+7}}}\cdot\frac{2x\cdot(x+7)-1\cdot(x^2-10)}{(x+7)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-10}{x+7}}}\cdot\frac{2x^2+14x-x^2+10}{(x+7)^2} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-10}{x+7}}}\cdot\frac{x^2+14x+10}{(x+7)^2}$$

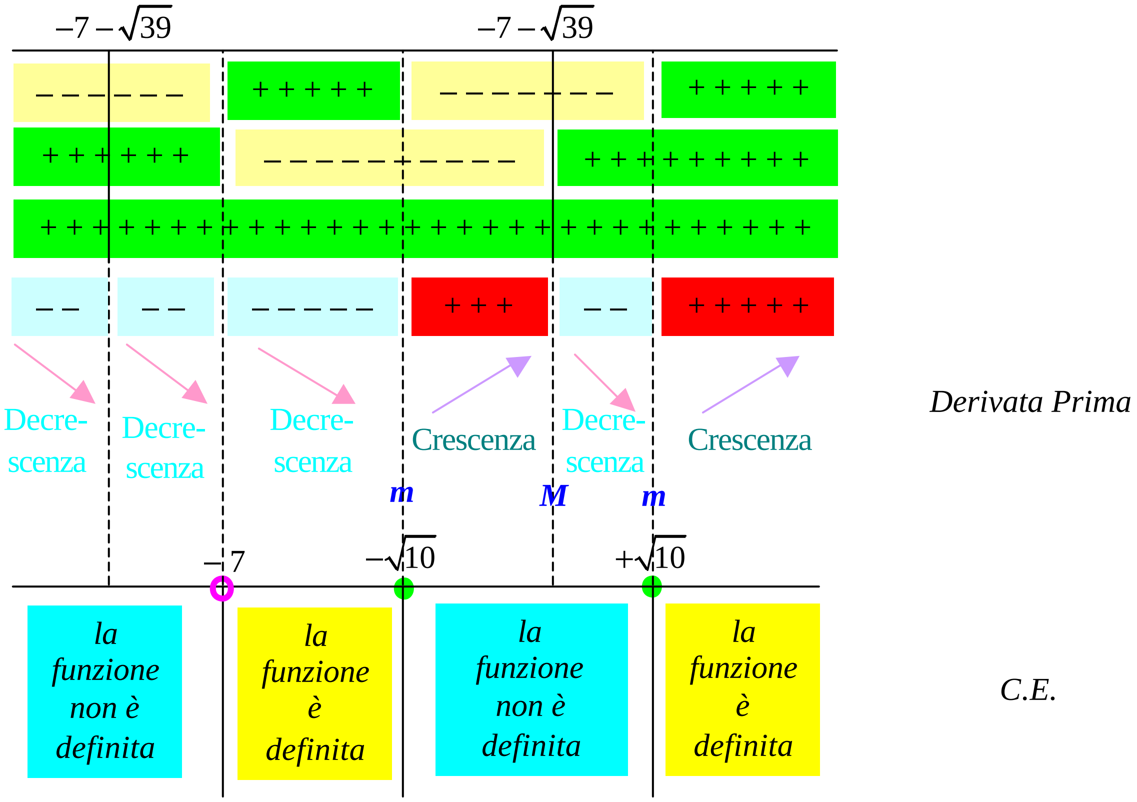
Per determinare i punti di massimi e di minimo della funzione, bisogna pertanto risolvere la seguente disequazione:

$$\frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-10}{x+7}}}\cdot\frac{x^2+14x+10}{(x+7)^2} > 0$$

Si osservi che si tratta di un prodotto: questo risulterà positivo se e solo se entrambi i suoi fattori saranno positivi o negativi; si supponga, ad esempio, che siano entrambi positivi, cioè:

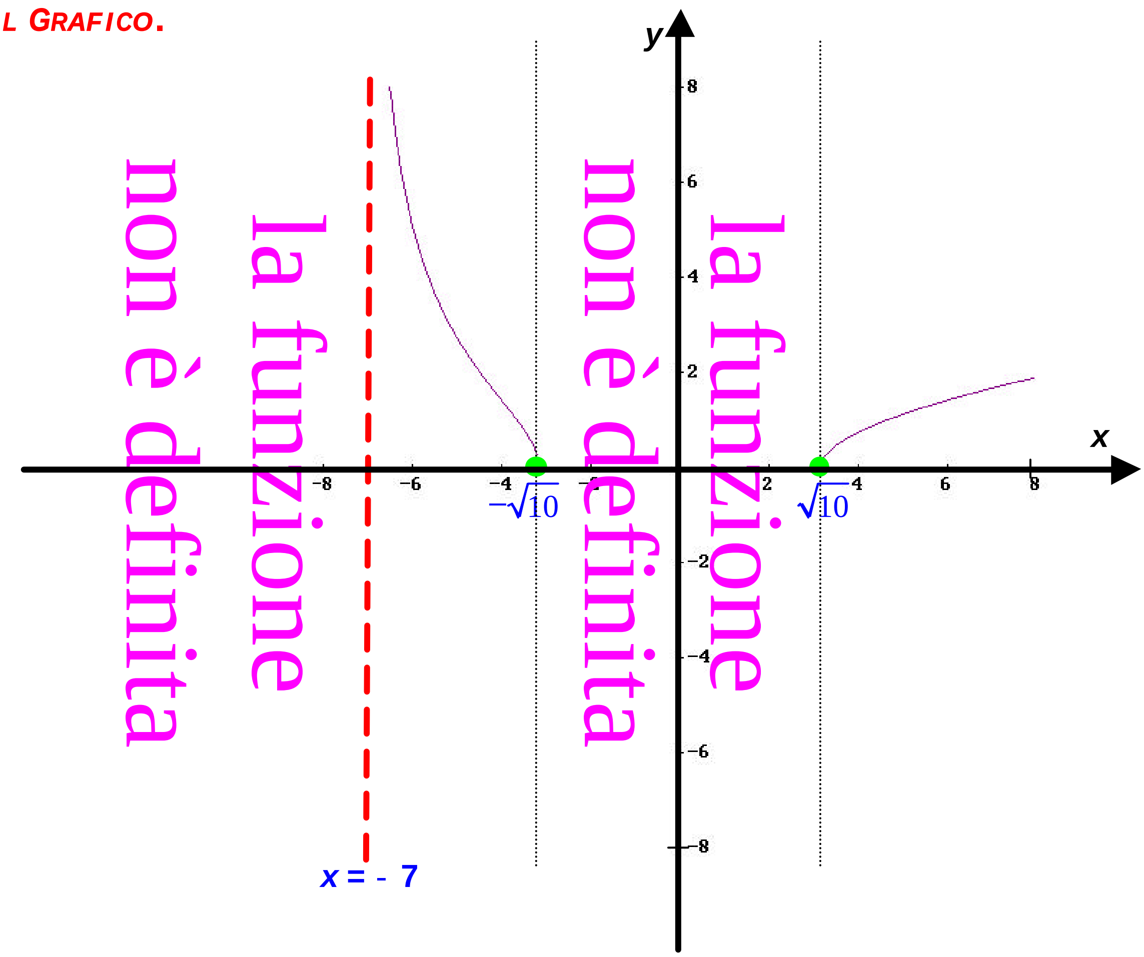
$$\frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-10}{x+7}}}\cdot\frac{x^2+14x+10}{(x+7)^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-10}{x+7}}} > 0 \\ \frac{x^2+14x+10}{(x+7)^2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{x^2-10}{x+7}} > 0 \\ x^2+14x+10 > 0 \\ (x+7)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x \in C.E \\ x^2+14x+10 > 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \forall x \in C.E \\ x < -7-\sqrt{39} \cong -13{,}24;\ x > -7+\sqrt{39} \cong -0{,}75 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$



Dall'unione dei due grafici (segno della derivata prima e campo di esistenza) ne segue che il massimo non appartiene all'insieme di esistenza e che i due minimi coincidono esattamente con i punti di intersezione della funzione con l'asse delle x.

IL GRAFICO.



$$y=\sqrt{\left(\frac{x+1}{x^2+4}\right)^3}$$

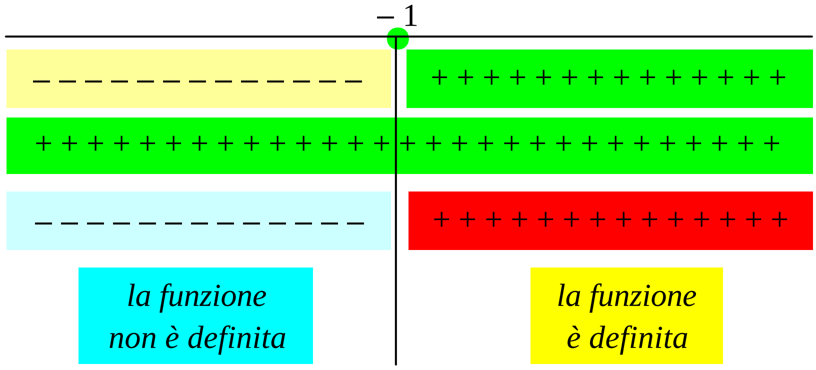
CAMPO DI ESISTENZA.

Risulta:

$$\boxed{C.E.}=\left\{x\in\mathbb{R}:\left(\frac{x+1}{x^2+4}\right)^3\geq 0,\, x^2+4\neq 0\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}:\frac{x+1}{x^2+4}\geq 0,\, x^2+4\neq 0\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}:\begin{cases}x+1\geq 0\\ x^2+4>0\end{cases}\right\}=$$

$$=\left\{x\in\mathbb{R}:\begin{cases}x\geq -1\\ \forall x\in\mathbb{R}\end{cases}\right\}=\boxed{\{x\in\mathbb{R}:-1\leq x<+\infty\}}$$

Si ricordi che x^2 + 4, come somma di quadrati, è sempre diverso da zero; ne segue, quindi, che la funzione non ha asintoti verticali.



INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

$$\begin{cases}x=0\\ y=\sqrt{\left(\frac{x+1}{x^2+4}\right)^3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=\sqrt{\frac{1}{64}}=0{,}125\end{cases}\Rightarrow\boxed{A=\left(0,\frac{1}{\sqrt{64}}\right)}$$

$$\begin{cases}y=0\\ 0=\sqrt{\left(\frac{x+1}{x^2+4}\right)^3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=0\\ \sqrt{\left(\frac{x+1}{x^2+4}\right)^3}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=0\\ \left(\frac{x+1}{x^2+4}\right)^3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=0\\ \frac{x+1}{x^2+4}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=0\\ x+1=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}y=0\\ x=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=0\end{cases}\Rightarrow\boxed{B=(-1,0)}$$

SEGNO DELLA FUNZIONE.

$$y>0\Rightarrow\sqrt{\left(\frac{x+1}{x^2+4}\right)^3}>0\Rightarrow\left(\frac{x+1}{x^2+4}\right)^3>0\Rightarrow\frac{x+1}{x^2+4}>0\Rightarrow\forall x\in C.E.$$

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

Si ha:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} y} = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\left(\frac{x+1}{x^2+4}\right)^3}\right) = \sqrt{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x^2+4}\right)^3} = \boxed{0}$$

Ne segue che, per $x \to \pm\infty$, la $y \to 0$: dunque la retta di equazione $y = 0$, cioè l'asse x, è un *Asintoto Orizzontale* per la funzione.

$$\boxed{A.O.: y = x}$$

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Risulta:

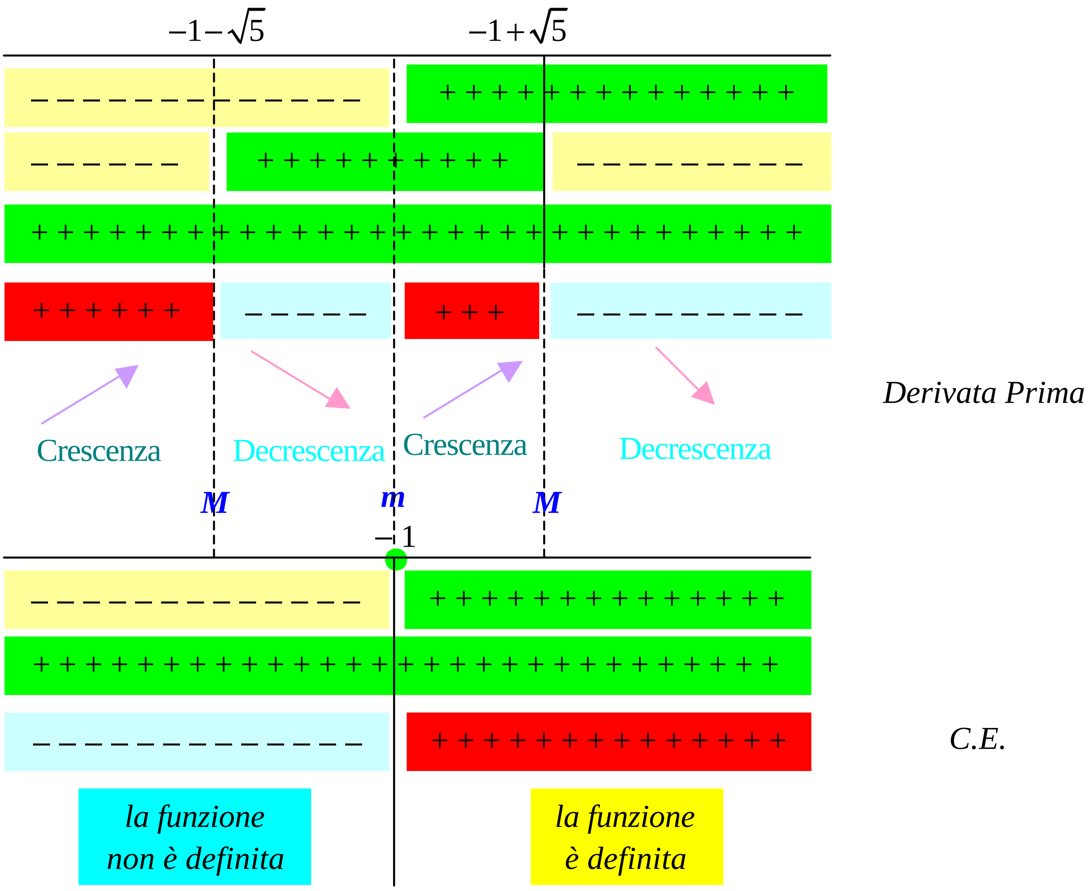
$$D\left(\sqrt{\left(\frac{x+1}{x^2+4}\right)^3}\right) = D\left(\frac{x+1}{x^2+4}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{x+1}{x^2+4}\right)^{\frac{3}{2}-1}\cdot D\left(\frac{x+1}{x^2+4}\right) = \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{x+1}{x^2+4}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{(x^2+4)-2x\cdot(x+1)}{(x^2+4)^2} =$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\sqrt{\frac{x+1}{x^2+4}}\cdot\frac{x^2+4-2x^2-2x}{(x^2+4)^2} = \frac{3}{2}\cdot\sqrt{\frac{x+1}{x^2+4}}\cdot\frac{-x^2-2x+4}{(x^2+4)^2}$$

Per determinare i punti di massimi e di minimo della funzione, bisogna pertanto risolvere la seguente disequazione:

$$\frac{3}{2}\cdot\sqrt{\frac{x+1}{x^2+4}}\cdot\frac{-x^2-2x+4}{(x^2+4)^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2+4}} > 0\\ \dfrac{-x^2-2x+4}{(x^2+4)^2} > 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2+4}} > 0\\ -x^2-2x+4 > 0\\ (x^2+4)^2 > 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\forall x \in C.E\\ x^2+2x-4 < 0\\ \forall x \in \mathbb{R}\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\forall x \in C.E\\ -1-\sqrt{5} \cong -3{,}23 < x < -1+\sqrt{5} \cong 1{,}23\\ \forall x \in \mathbb{R}\end{cases}$$

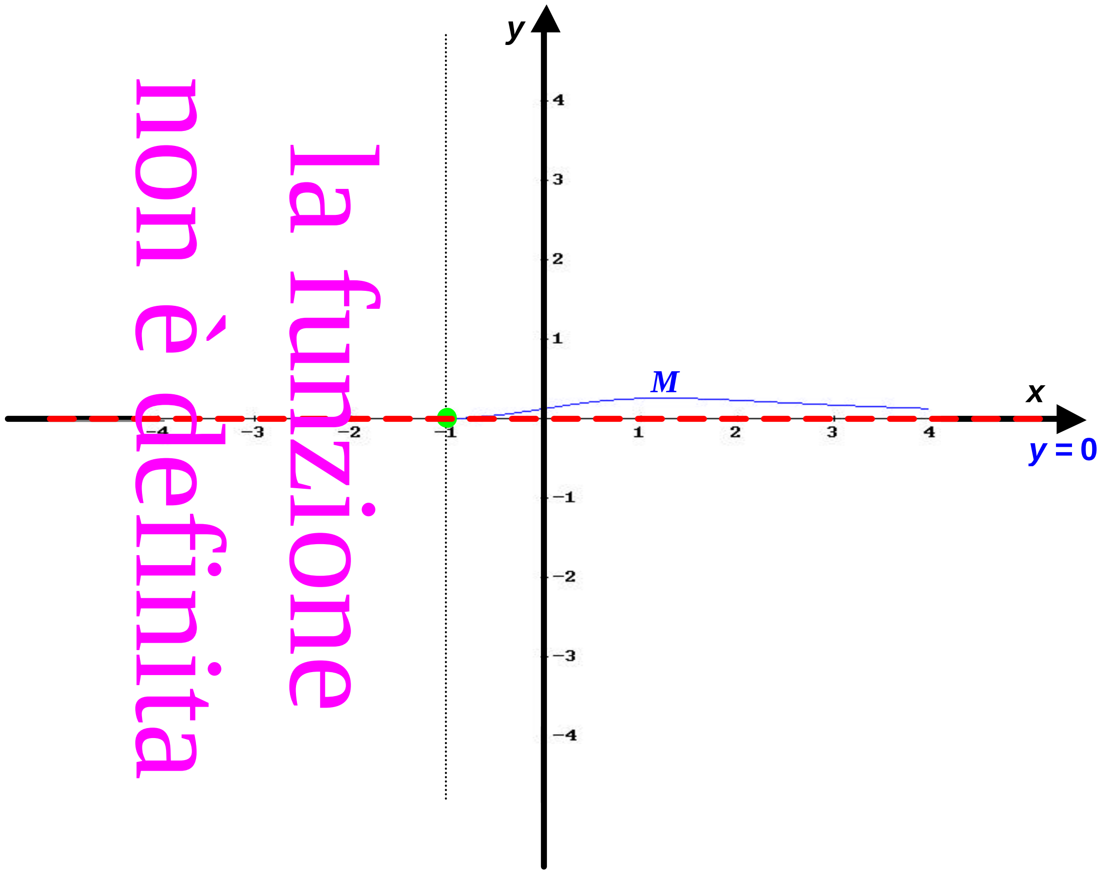


Dall'unione dei due grafici (segno della derivata prima e campo di esistenza) ne segue che solo uno dei due massimi appartiene all'insieme di esistenza e che il minimo coincide esattamente con il punto di intersezione della funzione con l'asse delle x.

Per $x=-1+\sqrt{5}$ risulta:

$$y=\sqrt{\left(\frac{-1+\sqrt{5}+1}{\left(-1+\sqrt{5}\right)^2+4}\right)^3}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{1+5+2\sqrt{5}+4}\right)^3}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{10+2\sqrt{5}}\right)^3}=\frac{\sqrt{\sqrt{5^3}}}{\sqrt{\left(10+2\sqrt{5}\right)^3}}\cong 0{,}25$$

IL GRAFICO.



$$y=\sqrt{\frac{x^2+2}{x^2-1}}$$

CAMPO DI ESISTENZA.

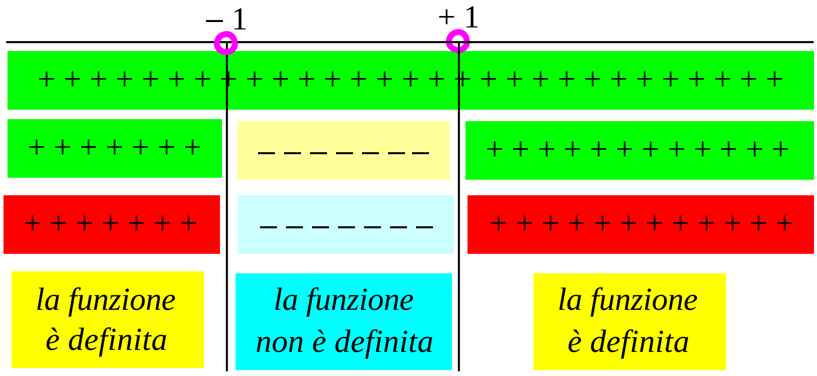
Risulta:

$$\boxed{C.E}=\left\{x\in\mathbb{R}:\frac{x^2+2}{x^2-1}\geq 0, x^2-1\neq 0\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}:\frac{x^2+2}{x^2-1}\geq 0, x^2-1\neq 0\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}:\begin{cases}x^2+2\geq 0\\ x^2-1>0\end{cases}\right\}=$$

$$=\left\{x\in\mathbb{R}:\begin{cases}\forall x\in\mathbb{R}\\ x<-1, x>+1\end{cases}\right\}=\boxed{\{x\in\mathbb{R}:-1<x<+\infty, 1<x<+\infty\}}$$

Si ricordi che $x^2 + 2$ è sempre positivo; inoltre, poiché il denominatore della frazione si annulla per $x = \pm 1$, ne segue che la funzione ha due *Asintoti Verticali*.

$\boxed{A.V.: x = +1, x = -1}$



INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

$$\begin{cases}x=0\\ y=\sqrt{\dfrac{x^2+2}{x^2-1}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=\sqrt{-2}\end{cases}\Rightarrow \text{non ci sono intersezioni con l'asse } y$$

$$\begin{cases}y=0\\ 0=\sqrt{\dfrac{x^2+2}{x^2-1}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=0\\ \sqrt{\dfrac{x^2+2}{x^2-1}}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=0\\ \dfrac{x^2+2}{x^2-1}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=0\\ x^2+2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=0\\ mai\end{cases}\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ non ci sono intersezioni neanche con l'asse x

SEGNO DELLA FUNZIONE.

$$y>0\Rightarrow\sqrt{\frac{x^2+2}{x^2-1}}>0\Rightarrow\frac{x^2+2}{x^2-1}>0\Rightarrow\forall x\in C.E.$$

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

Si ha:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} y} = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^2+2}{x^2-1}}\right) = \sqrt{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)} = \boxed{1}$$

Ne segue che, per $x \to \pm\infty$, la $y \to 1$: dunque la retta di equazione $y = 1$ è un *Asintoto Orizzontale* per la funzione.

$$\boxed{A.O.: y = 1}$$

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

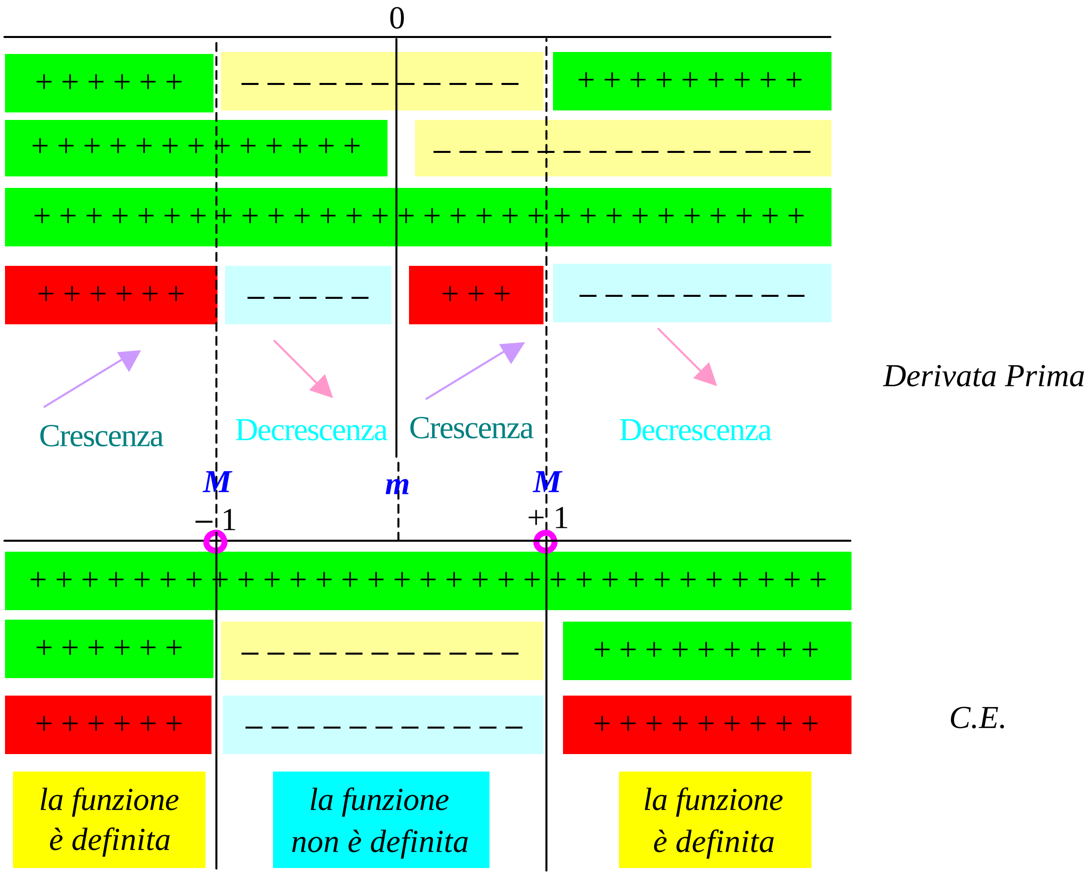
Risulta:

$$D\left(\sqrt{\frac{x^2+2}{x^2-1}}\right) = \frac{D\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)}{2\sqrt{\frac{x^2+2}{x^2-1}}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2+2}{x^2-1}}}\cdot\frac{2x\left(x^2-1\right)-2x\cdot\left(x^2+2\right)}{\left(x^2-1\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2+2}{x^2-1}}}\cdot\frac{2x^3-2x-2x^3-4x}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2+2}{x^2-1}}}\cdot\frac{-6x}{\left(x^2-1\right)^2}$$

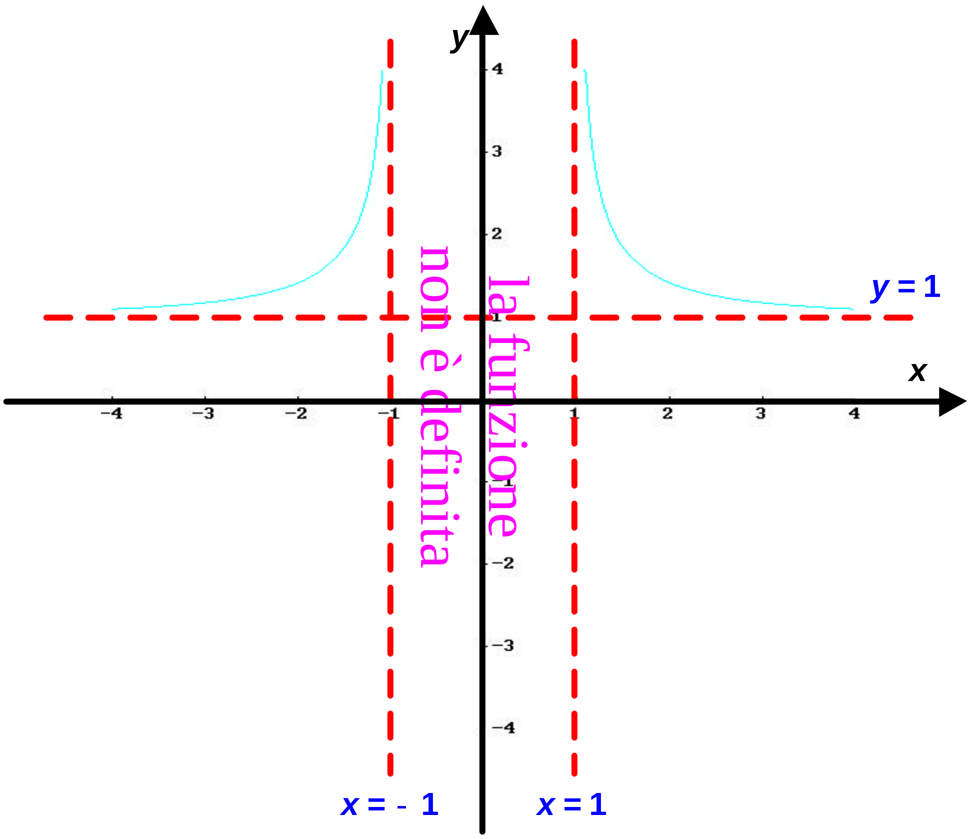
Per determinare i punti di massimi e di minimo della funzione, bisogna pertanto risolvere la seguente disequazione:

$$\frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2+2}{x^2-1}}}\cdot\frac{-6x}{\left(x^2-1\right)^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{x^2+2}{x^2-1}} > 0 \\ \frac{-6x}{\left(x^2-1\right)^2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{x^2+2}{x^2-1}} > 0 \\ -6x > 0 \\ \left(x^2-1\right)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x \in C.E \\ x < 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$



Dall'unione dei due grafici (segno della derivata prima e campo di esistenza) ne segue che il minimo non appartiene al campo di esistenza così come i due massimi, $x = -1$ ed $x = +1$, che annullano il denominatore della funzione.

IL GRAFICO.

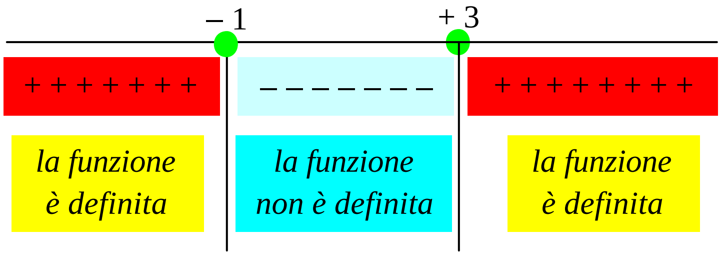


$$y = x - 2 - \sqrt{x^2 - 2x - 3}$$

CAMPO DI ESISTENZA.

Risulta:

$\boxed{C.E.} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x - 3 \geq 0\} = \boxed{\{x \in \mathbb{R} : -\infty < x \leq -1,\ 3 \leq x < +\infty\}}$



INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

$\begin{cases} x = 0 \\ y = x - 2 - \sqrt{x^2 - 2x - 3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 - \sqrt{-3} \end{cases}$ $\Rightarrow$ non ci sono intersezioni con l'asse y

$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = x - 2 - \sqrt{x^2 - 2x - 3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x - 2 - \sqrt{x^2 - 2x - 3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \sqrt{x^2 - 2x - 3} = x - 2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 2x - 3 = (x-2)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 2x - 3 = x^2 - 4x + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 2x - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \dfrac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow$

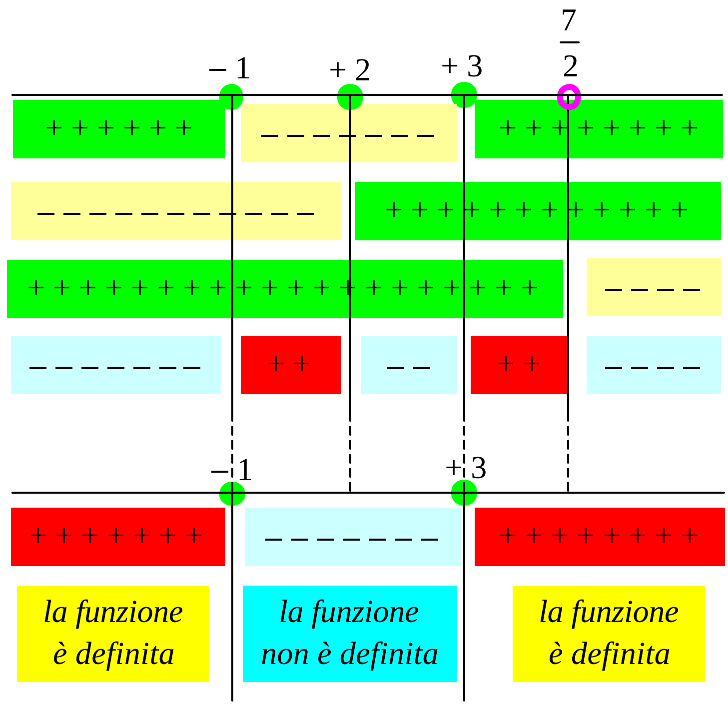
$\Rightarrow \boxed{B = \left(\frac{7}{2}, 0\right)}$

SEGNO DELLA FUNZIONE.

$y > 0 \Rightarrow x - 2 - \sqrt{x^2 - 2x - 3} > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 2x - 3} < x - 2$

che è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \\ x^2 - 2x - 3 < (x-2)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x \in C.E. \\ x \geq 2 \\ x^2 - 2x - 3 < x^2 - 4x + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x \in C.E. \\ x \geq 2 \\ 2x - 7 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x \in C.E. \\ x \geq 2 \\ x < \dfrac{7}{2} \end{cases}$$



Anche se dal primo grafico, relativo allo studio del segno, risulta che la funzione data è positiva per $-1 \leq x \leq 2$ e $3 \leq x < \frac{7}{2}$, dal secondo grafico, relativo al campo di esistenza, segue che per $-1 \leq x \leq 2$ la funzione non è definita. Quindi:

$$y > 0 \Leftrightarrow 3 \leq x < \frac{7}{2}$$

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

Si ha:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} y} = \lim_{x\to+\infty}\left(x-2-\sqrt{x^2-2x-3}\right) = +\infty-\infty$$ che è una forma indeterminata

Ma allora è possibile calcolare il limite moltiplicando e dividendo la funzione per una stessa quantità, precisamente:

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty}\left(x-2-\sqrt{x^2-2x-3}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(x-2-\sqrt{x^2-2x-3}\right)\left(x-2+\sqrt{x^2-2x-3}\right)}{x-2+\sqrt{x^2-2x-3}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(x-2)^2-\left(\sqrt{x^2-2x-3}\right)^2}{x-2+\sqrt{x^2-2x-3}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-4x+4-x^2+2x+3}{x-2+\sqrt{x^2-2x-3}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2x+7}{x-2+\sqrt{x^2-2x-3}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2x+7}{x-2+\left(x^2-2x-3\right)^{\frac{1}{2}}}\right) \cong \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2x}{x+\sqrt{x^2}}\right) \cong \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2x}{2x}\right) = \boxed{-1}$$

Ne segue che, per $x \to +\infty$, la $y \to -1$: dunque la retta di equazione $y = -1$ è un *Asintoto Orizzontale Destro* per la funzione.

$\boxed{A.O.: y = -1}$

Si consideri ora il caso in cui la $x \to -\infty$. Risulta:

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty}\left(x-2-\sqrt{x^2-2x-3}\right) = -\infty - \infty = -\infty$$

cioè la funzione non ha asintoti orizzontali sinistri. In tal caso, allora, bisogna andare a vedere se esistono quelli obliqui $y = mx + q$. Si ha:

$$m = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-2-\sqrt{x^2-2x-3}}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-2}{x} - \frac{\sqrt{x^2-2x-3}}{x}\right) =$$

$$= 1 - \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2-2x-3}}{x}\right) = 1 - \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^2-2x-3}{x^2}}\right) = 1+1 = 2$$

$$q = \lim_{x\to-\infty}\left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(x-2-\sqrt{x^2-2x-3}-2x\right) = -\lim_{x\to-\infty}\left(x+2+\sqrt{x^2-2x-3}\right) =$$

$$= -\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\left(x+2+\sqrt{x^2-2x-3}\right)\left(x+2-\sqrt{x^2-2x-3}\right)}{x+2-\sqrt{x^2-2x-3}}\right) = -\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{(x+2)^2-\left(\sqrt{x^2-2x-3}\right)^2}{x+2-\sqrt{x^2-2x-3}}\right) =$$

$$= -\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+4x+4-x^2+2x+3}{x+2-\sqrt{x^2-2x-3}}\right) = -\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{6x+7}{x+2-\sqrt{x^2-2x-3}}\right) =$$

$$= -\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{6+\frac{7}{x}}{1+\frac{2}{x}+\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}}\right) = -3$$

cioè la retta di equazione $y = -x - 3$ è un *Asintoto Obliquo Sinistro* per la funzione.

$\boxed{A.Ob.: y = -x - 3}$

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Risulta:

$$D\left(x-2-\sqrt{x^2-2x-3}\right) = D(x) + D(-2) + D\left(-\sqrt{x^2-2x-3}\right) = 1 + 0 - \frac{1}{2\sqrt{x^2-2x-3}}\cdot(2x-2) =$$

$$= 1 - \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x-3}} = 1 - \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-3}} = \frac{\sqrt{x^2-2x-3}-x+1}{\sqrt{x^2-2x-3}}$$

Pertanto bisogna risolvere la seguente disequazione irrazionale:

$$\frac{\sqrt{x^2-2x-3}-x+1}{\sqrt{x^2-2x-3}} > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2-2x-3} - x + 1 > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2-2x-3} > x-1$$

Prima di procedere alla risoluzione di tale disequazione occorre verificare il campo di esistenza della frazione e dei suoi componenti, precisamente deve essere:

$$\sqrt{x^2-2x-3} > 0,\ x^2-2x-3 \neq 0 \Rightarrow x < -1,\ x > +3,\ x \neq -1,\ x \neq +3$$

Ne segue ora che, all'interno di questo insieme di definizione, è possibile risolvere la disequazione mediante i seguenti due sistemi:

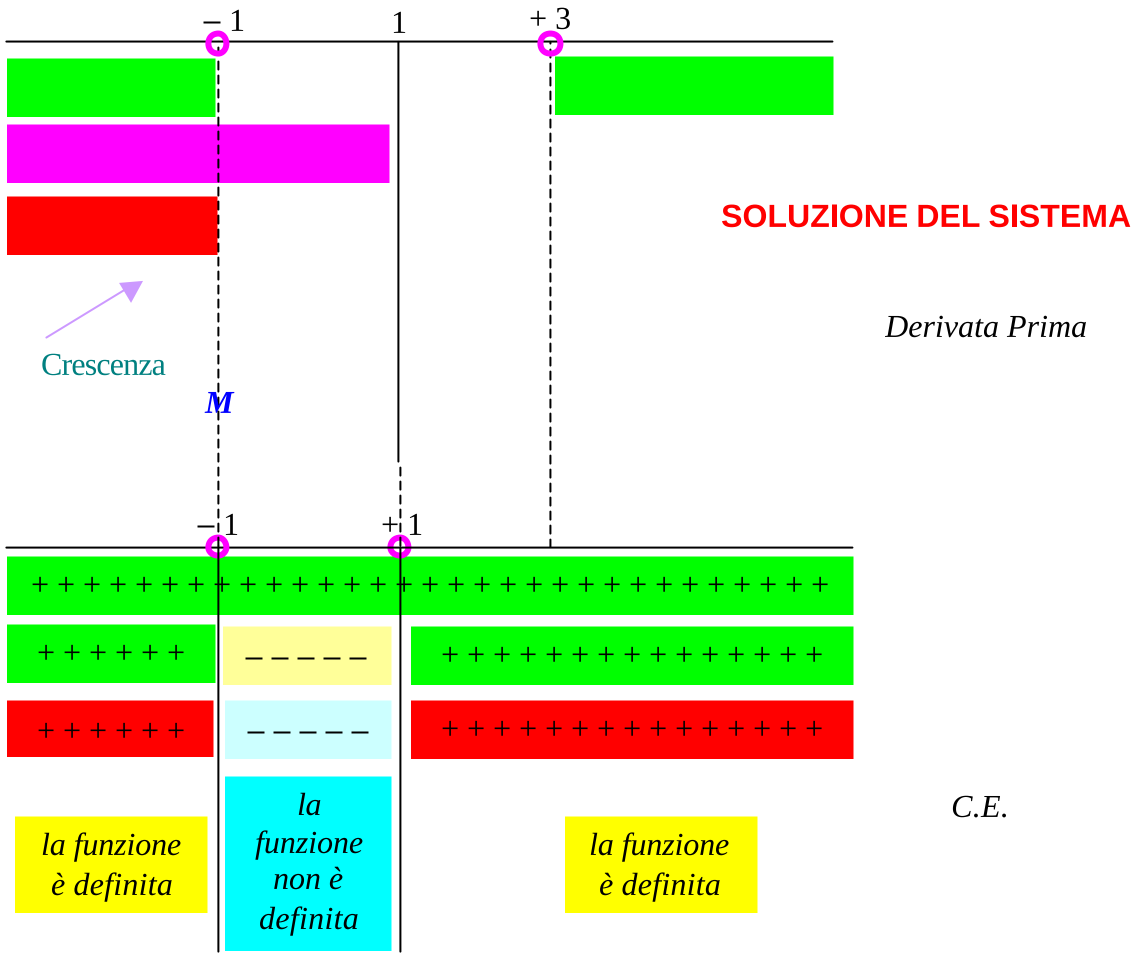
$$\sqrt{x^2-2x-3} > x-1 \Rightarrow \begin{cases} x^2-2x-3 \geq 0 \\ x-1 < 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x^2-2x-3 > (x-1)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x < -1, x > +3 \\ x < 1 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 2x - 3 > x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -1, x > +3 \\ x < 1 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x \geq 1 \\ -2 > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x < -1, x > +3 \\ x < 1 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x \geq 1 \\ mai \end{cases}$$

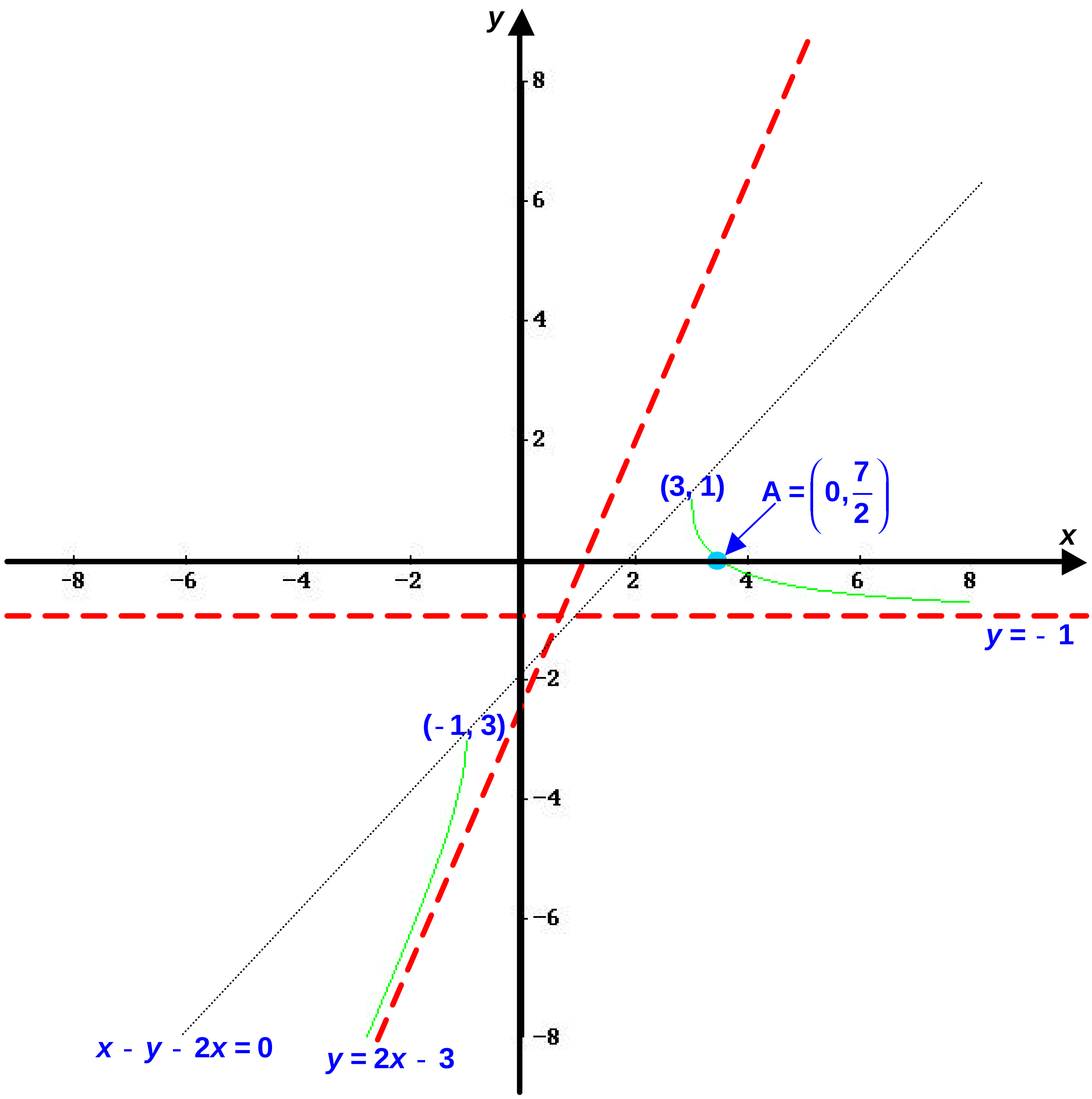
Poiché il secondo sistema non ha soluzioni, dal momento che la sua seconda equazione non è mai soddisfatta, ne segue che la derivata prima sarà positiva se e solo se è soddisfatto il primo sistema, cioè:

$$\frac{\sqrt{x^2 - 2x - 3} - x + 1}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x < -1, x > +3 \\ x < 1 \end{cases}$$



Dall'unione dei due grafici (segno della derivata prima e campo di esistenza) ne segue che la funzione è crescente per $x < -1$ e decrescente altrove, sempre chiaramente all'interno del campo di esistenza. Inoltre per $x = -1$ la funzione non è definita per cui il massimo non esiste.

IL GRAFICO.



$$y = \sqrt[3]{x^3 - 1}$$

Campo di Esistenza.

Poiché la funzione data è una irrazionale con <u>indice di radice dispari</u>, il suo insieme di definizione coincide esattamente con il campo di esistenza del radicando, cioè:

$\boxed{C.E.} = \boxed{\{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\}}$

Intersezioni con gli Assi.

Le intersezioni della funzione con gli assi cartesiani si ottengono risolvendo, come di consueto, i seguenti due sistemi:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt[3]{x^3 - 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt[3]{-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\sqrt[3]{1} = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = (0, -1)}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = \sqrt[3]{x^3 - 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \sqrt[3]{x^3 - 1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^3 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ (x-1)(x^2 + x + 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x - 1 = 0 \ oppure x^2 + x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \ oppure \ mai \ \ (\Delta < 0) \end{cases} \Rightarrow \boxed{B = (1, 0)}$$

Si osservi che, trattandosi di una radice cubica, è sempre possibile portare il segno negativo fuori del simbolo di radice.

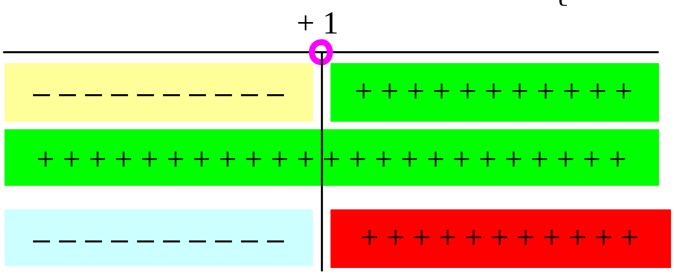
Segno della Funzione.

Anche in questo caso, per lo studio del segno, occorre risolvere la disequazione:

$$y > 0$$

Ne segue:

$$y > 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x^3 - 1} > 0 \ \Rightarrow \ x^3 - 1 > 0 \ \Rightarrow (x-1)(x^2 + x + 1) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 > 0 \\ x^2 + x + 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$



cioè:

$y > 0 \Leftrightarrow x > +1$

Si osservi che il segno di tutte le funzioni irrazionali con indice di radice dispari coincide con il segno del radicando.

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

Per il calcolo dei limiti di questa classe di funzioni, sarà sufficiente, come per quelle con indice di radice pari, determinare il limite del radicando, tenendo, però, sempre bene a mente la seguente regola generale:

Se $y=\sqrt{f(x)}$, dove $f(x)$ è una qualunque funzione assegnata, allora risulta:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{f(x)}=\sqrt[3]{\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)]}$$

Nell'esempio quindi si ha:

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} y}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-1}\right)=\sqrt[3]{\lim_{x\to\pm\infty}\left(x^3-1\right)}=\sqrt[3]{\pm\infty}=\boxed{\pm\infty}$$

Ne segue che, per $x\to\pm\infty$, la $y\to\pm\infty$: dunque la funzione non ha *Asintoti Orizzontali*.

Occorre ora vedere se essa presenta *Asintoti Obliqui* $y = mx + q$. Si ha:

$$m=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt[3]{x^3-1}}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{\frac{x^3-1}{x^3}}\right)=\sqrt[3]{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-1}{x^3}\right)}=\sqrt[3]{1}=1\ \Rightarrow m=1$$

$$q=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-1}-x\right)=\infty-\infty\ \text{ che è una forma indeterminata}$$

Per calcolare tale limite bisogna cercare di razionalizzare la radice cubica moltiplicando e dividendo per un'opportuna quantità in modo tale che il numeratore sia proprio la differenza di due cubi. Ricordando, quindi, che:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \qquad [\textit{cfr. polinomi}]$$

e ponendo, nel caso in esame, $a=\sqrt[3]{x^3-1}$ e $b = x$, ne segue:

$$q=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\left(\sqrt[3]{x^3-1}-x\right)\left(\sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^2}+x\sqrt[3]{x^3-1}+x^2\right)}{\sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^2}+x\sqrt[3]{x^3-1}+x^2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-1-x^3}{\sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^2}+x\sqrt[3]{x^3-1}+x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-1}{\sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^2}+x\sqrt[3]{x^3-1}+x^2}\right)=0\ \Rightarrow q=0$$

Dunque, la retta di equazione $y = x$ è un *Asintoto Obliquo*.

$\boxed{A.O.: y = x}$

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Ricordando che:

$$D\left(\sqrt[3]{f(x)}\right)=D[f(x)]^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\cdot[f(x)]^{\frac{1}{3}-1}\cdot D[f(x)]=\frac{D[f(x)]}{3\sqrt[3]{[f(x)]^2}}$$

si ottiene:

$$D\left(\sqrt[3]{x^3-1}\right)=\frac{D\left(x^3-1\right)}{3\sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^2}}\cdot\frac{3x^2}{\left(x^3-1\right)^2}$$

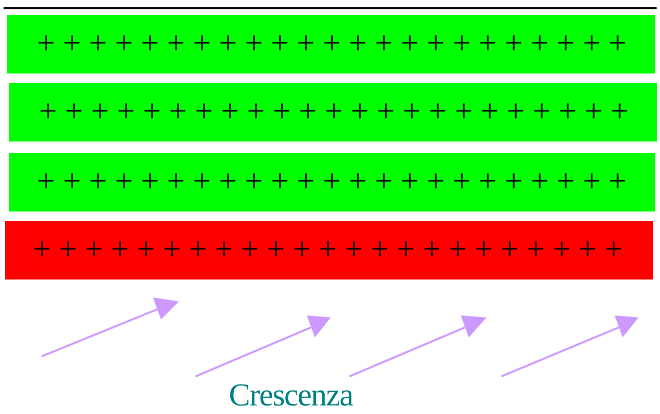
Per determinare i punti di massimi e di minimo della funzione, bisogna sempre risolvere la disequazione:

$$D(y) > 0$$

cioè:

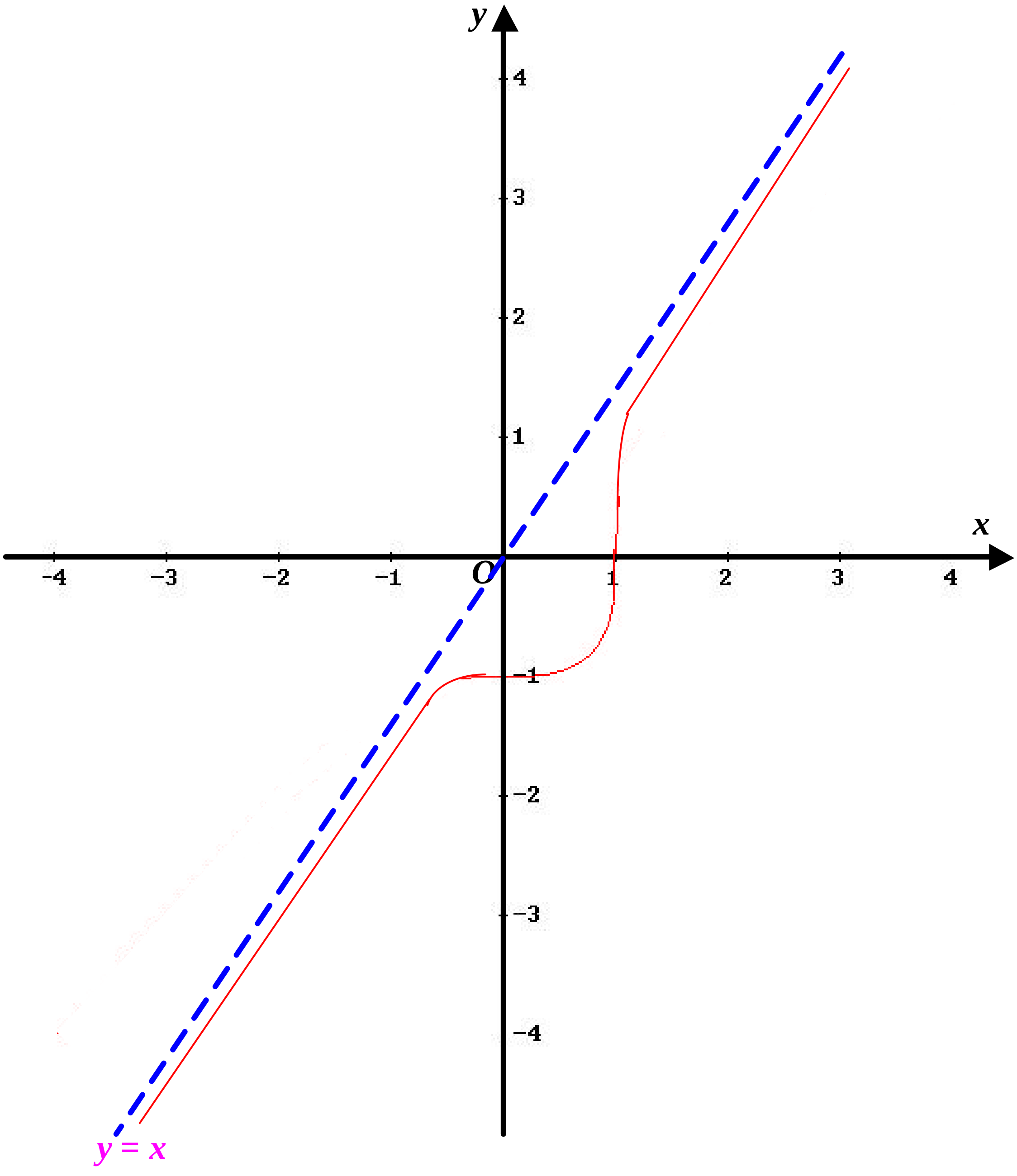
$$\frac{1}{3\sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^2}}\cdot\frac{3x^2}{\left(x^3-1\right)^2}>0 \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{1}{3\sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^2}}>0\\[2ex] \dfrac{3x^2}{\left(x^3-1\right)^2}>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^2}>0\\ 3x^2>0\\ \left(x^3-1\right)^2>0\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\forall x\in\mathbb{R}\;\; (\textit{il radicando è un quadrato e quindi sempre positivo})\\ \forall x\in\mathbb{R}\\ \forall x\in\mathbb{R}\end{cases}$$



Dunque la funzione è sempre crescente e non ammette quindi né massimi né minimi.

Il Grafico.



$$y = \sqrt[3]{\frac{x^2+2}{x^2-1}}$$

Campo di Esistenza.

In questo caso, l'indice di radice è sempre dispari ma il radicando è una frazione, per cui risulta:

$\boxed{C.E.} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pm 1\} = \boxed{\{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < -1,\ -1 < x < +1,\ +1 < x < +\infty\}}$

Ne segue che per $x = \pm 1$ la funzione presenta due *Asintoti Verticali*.

$\boxed{A.V.: x = -1, x = +1}$

Intersezioni con gli Assi.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt[3]{\dfrac{x^2+2}{x^2-1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt[3]{-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\sqrt[3]{2} = -1{,}25 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = \left(0, -\sqrt[3]{2}\right)}$$

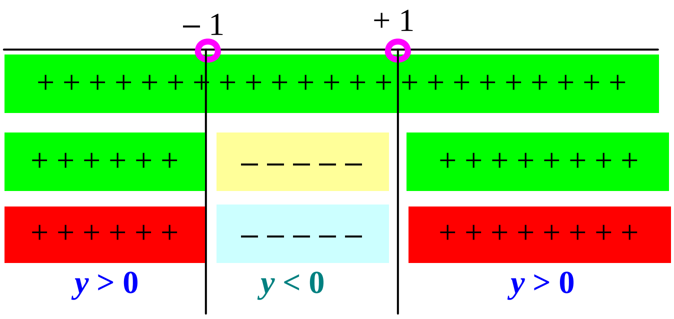
$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = \sqrt[3]{\dfrac{x^2+2}{x^2-1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \sqrt[3]{\dfrac{x^2+2}{x^2-1}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x^2+2}{x^2-1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2+2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ mai \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ non ci sono intersezioni con l'asse x

Segno della Funzione.

Si ha:

$$y > 0 \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{x^2+2}{x^2-1}} > 0 \Rightarrow \frac{x^2+2}{x^2-1} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2+2 > 0 \\ x^2-1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ x < -1, x > +1 \end{cases}$$



cioè:

$y > 0 \Leftrightarrow x < -1, x > +1$

Limiti agli Estremi del Campo di Esistenza.

Risulta:

$$\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} y} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\sqrt[3]{\frac{x^2+2}{x^2-1}} \right) = \sqrt[3]{\lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2+2}{x^2-1} \right)} = \sqrt[3]{1} = \boxed{1}$$

Ne segue che, per $x \to \pm\infty$, la $y \to 1$: dunque la retta di equazione $y = 1$ è un *Asintoto Orizzontale*.

$\boxed{A.O.: y = 1}$

Studio del Segno della Derivata Prima.

Si ottiene:

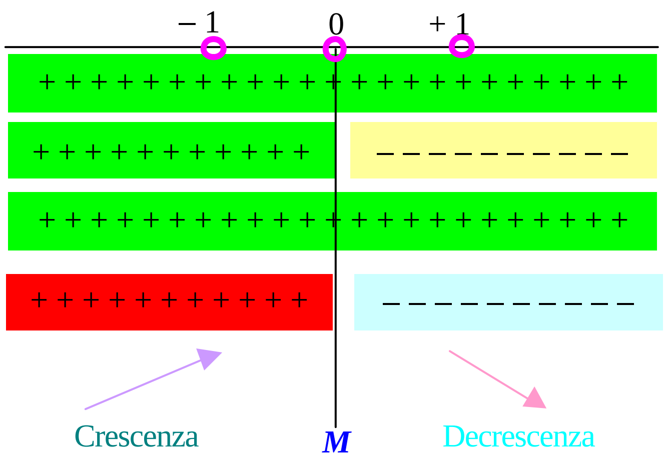
$$D\left(\sqrt[3]{\frac{x^2+2}{x^2-1}}\right)=\frac{D\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)}{3\sqrt[3]{\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)^2}}\cdot\frac{2x\left(x^2-1\right)-2x\left(x^2+2\right)}{\left(x^2-1\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{3\sqrt[3]{\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)^2}}\cdot\frac{2x^3-2x-2x^3-4x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{1}{3\sqrt[3]{\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)^2}}\cdot\frac{-6x}{\left(x^2-1\right)^2}$$

da cui si ricava:

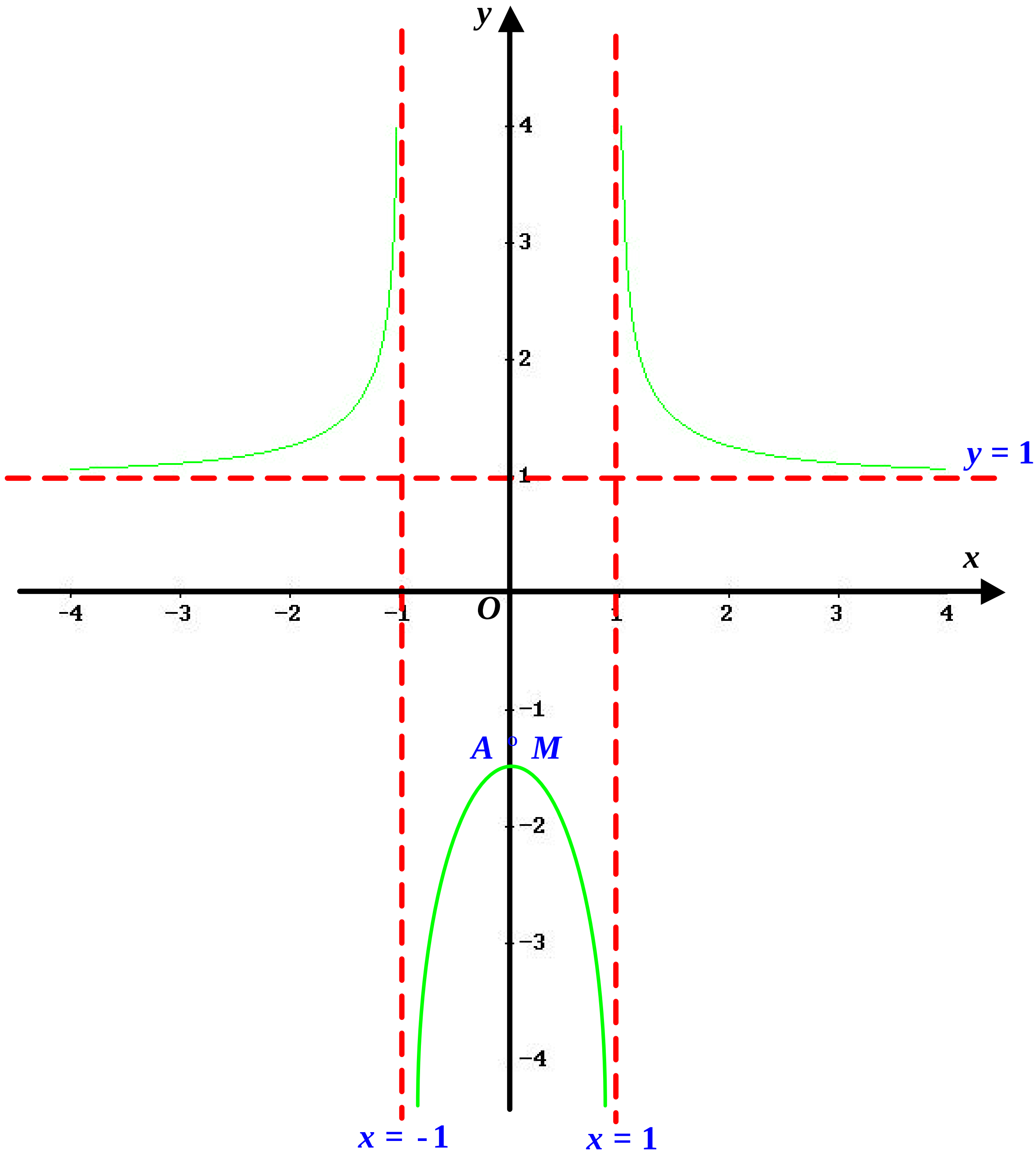
$$\frac{1}{3\sqrt[3]{\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)^2}}\cdot\frac{-6x}{\left(x^2-1\right)^2}>0\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{3\sqrt[3]{\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)^2}}>0\\[2ex]\dfrac{-6x}{\left(x^2-1\right)^2}>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt[3]{\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)^2}>0\\-6x>0\\\left(x^2-1\right)^2>0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\forall x\in\mathbb{R}\ \ (\textit{il radicando è un quadrato e quindi sempre positivo})\\x<0\\\forall x\in\mathbb{R}\end{cases}$$



Dunque il punto di massimo della funzione, ottenuto per $x = 0$, coincide esattamente con il punto A di intersezione della funzione con l'asse y delle ordinate.

IL GRAFICO.



$$y=\sqrt[3]{\frac{x+7}{x^2-1}}$$

Campo di Esistenza.

$\boxed{C.E.}=\{x\in\mathbb{R}: x^2-1\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R}: x\neq \pm 1\}=\boxed{\{x\in\mathbb{R}: -\infty<x<-1,\ -1<x<+1,\ +1<x<+\infty\}}$

Ne segue che per $x=\pm 1$ la funzione presenta due *Asintoti Verticali*.

$\boxed{A.V.: x=-1,\ x=+1}$

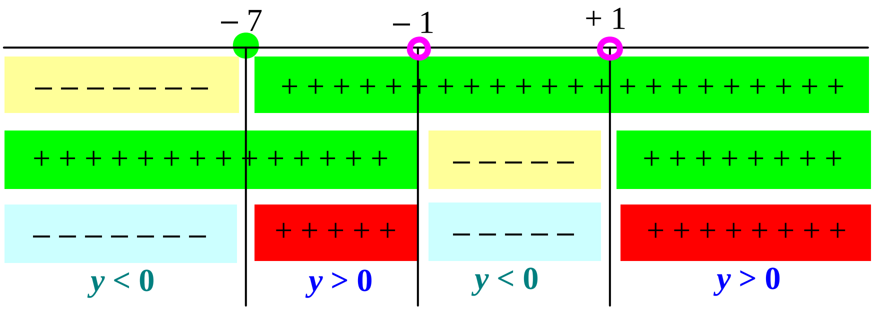
Intersezioni con gli Assi.

$$\begin{cases} x=0 \\ y=\sqrt[3]{\frac{x+7}{x^2-1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\sqrt[3]{-7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-\sqrt[3]{7}=-1{,}91 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A=\left(0,-\sqrt[3]{7}\right)}$$

$$\begin{cases} y=0 \\ 0=\sqrt[3]{\frac{x+7}{x^2-1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ \sqrt[3]{\frac{x+7}{x^2-1}}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ \frac{x+7}{x^2-1}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x+7=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=-7 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B=(-7,0)}$$

Segno della Funzione.

$$y>0 \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{x+7}{x^2-1}}>0 \Rightarrow \frac{x+7}{x^2-1}>0 \Rightarrow \begin{cases} x+7>0 \\ x^2-1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-7 \\ x<-1, x>+1 \end{cases}$$



cioè:

$y>0 \Leftrightarrow -7<x<-1,\ 1<x<+\infty$

Limiti agli Estremi del Campo di Esistenza.

Risulta:

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} y}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{\frac{x+7}{x^2-1}}\right)=\sqrt[3]{\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x+7}{x^2-1}\right)}=\boxed{0}$$

Ne segue che, per $x\to\pm\infty$, la $y\to 0$: dunque la retta di equazione $y=0$, ovvero l'asse x, è un *Asintoto Orizzontale*.

$\boxed{A.O.: y=0}$

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Si ottiene:

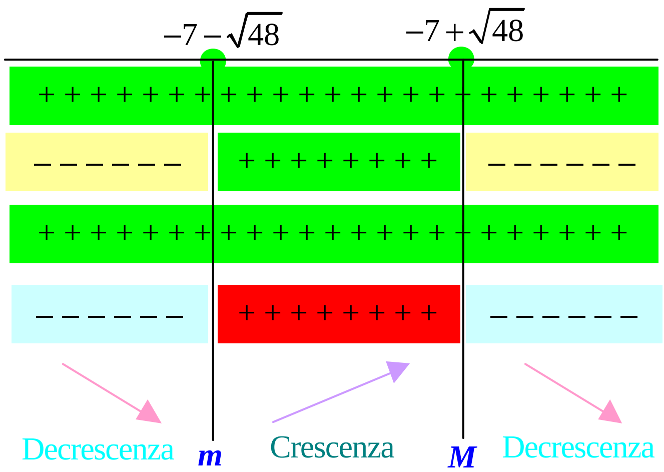
$$D\left(\sqrt[3]{\frac{x+7}{x^2-1}}\right)=\frac{D\left(\frac{x+7}{x^2-1}\right)}{3\sqrt[3]{\left(\frac{x+7}{x^2-1}\right)^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{\left(\frac{x+7}{x^2-1}\right)^2}}\cdot\frac{1\cdot\left(x^2-1\right)-2x\left(x+7\right)}{\left(x^2-1\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{3\sqrt[3]{\left(\frac{x+7}{x^2-1}\right)^2}}\cdot\frac{x^2-1-2x^2-14x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{1}{3\sqrt[3]{\left(\frac{x+7}{x^2-1}\right)^2}}\cdot\frac{-x^2-14x-1}{\left(x^2-1\right)^2}$$

da cui segue:

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{\left(\frac{x+7}{x^2-1}\right)^2}}\cdot\frac{-x^2-14x-1}{\left(x^2-1\right)^2}>0 \Rightarrow \begin{cases}\frac{1}{3\sqrt[3]{\left(\frac{x+7}{x^2-1}\right)^2}}>0\\ \frac{-x^2-14x-1}{\left(x^2-1\right)^2}>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sqrt[3]{\left(\frac{x+7}{x^2-1}\right)^2}>0\\ -x^2-14x-1>0\\ \left(x^2-1\right)^2>0\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\forall x\in\mathbb{R}\\ x^2+14x+1<0\\ \forall x\in\mathbb{R}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\forall x\in\mathbb{R}\\ -7-\sqrt{48}\cong-13{,}92<x<-7+\sqrt{48}\cong-0{,}07\\ \forall x\in\mathbb{R}\end{cases}$$



Ma allora risulta:

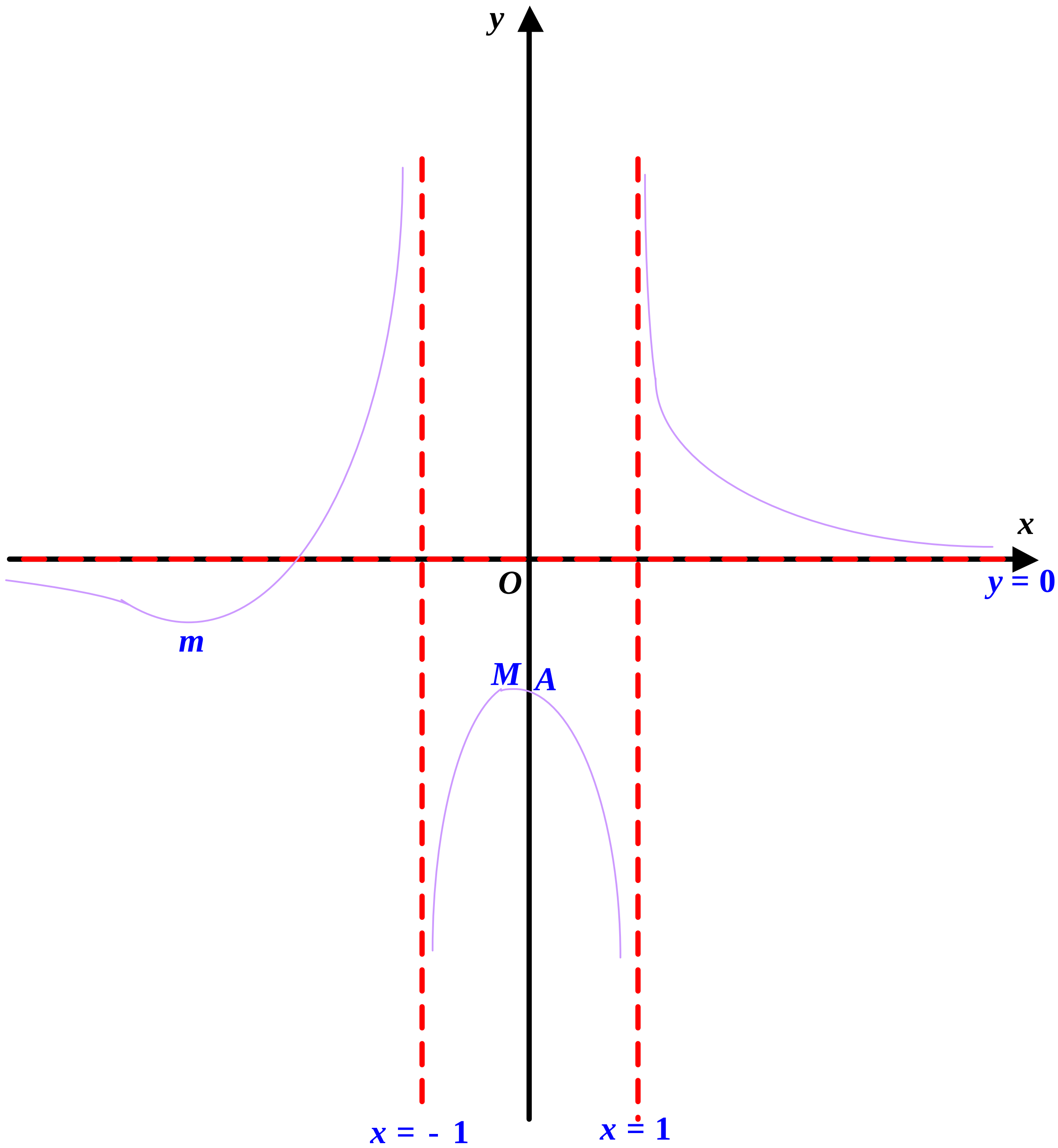
Punto di minimo

$$x=-7-\sqrt{48} \Rightarrow y=\sqrt[3]{\frac{-7-\sqrt{48}+7}{\left(-7-\sqrt{48}\right)^2-1}}=\sqrt[3]{\frac{-\sqrt{48}}{49+48+14\sqrt{48}-1}}=-\sqrt[3]{\frac{\sqrt{48}}{96+14\sqrt{48}}}\cong-0{,}32$$

Punto di massimo

$$x=-7+\sqrt{48} \Rightarrow y=\sqrt[3]{\frac{-7+\sqrt{48}+7}{\left(-7+\sqrt{48}\right)^2-1}}=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{48}}{49+48-14\sqrt{48}-1}}=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{48}}{96-14\sqrt{48}}}\cong-1{,}90$$

IL GRAFICO.



$$y=\sqrt[3]{\frac{(x+2)^2}{x+4}}$$

Campo di Esistenza.

$\boxed{C.E.} = \{x\in\mathbb{R}: x+4\neq 0\} = \{x\in\mathbb{R}: x\neq -4\} = \boxed{\{x\in\mathbb{R}: -\infty<x<-4,\ -4<x<+\infty\}}$

Ne segue che per $x=-4$ la funzione presenta un *Asintoto Verticale*.

$\boxed{A.V.: x=-4}$

Intersezioni con gli Assi.

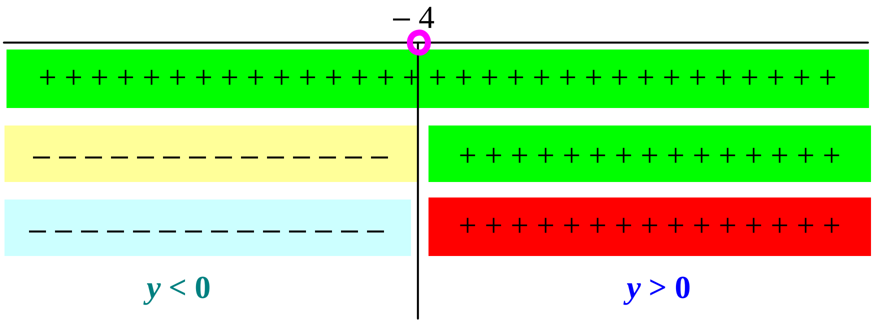
$$\begin{cases} x=0 \\ y=\sqrt[3]{\dfrac{(x+2)^2}{x+4}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\sqrt[3]{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A=(0,1)}$$

$$\begin{cases} y=0 \\ 0=\sqrt[3]{\dfrac{(x+2)^2}{x+4}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ \sqrt[3]{\dfrac{(x+2)^2}{x+4}}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ \dfrac{(x+2)^2}{x+4}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ (x+2)^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x+2=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=-2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B=(-2,0)}$$

Segno della Funzione.

$$y>0 \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{(x+2)^2}{x+4}}>0 \Rightarrow \frac{(x+2)^2}{x+4}>0 \Rightarrow \begin{cases} (x+2)^2>0 \\ x+4>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x\in\mathbb{R} \\ x>-4 \end{cases}$$



cioè:

$y>0 \Leftrightarrow -4<x<+\infty$

Limiti agli Estremi del Campo di Esistenza.

Risulta:

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} y} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{\frac{(x+2)^2}{x+4}}\right) = \sqrt[3]{\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{(x+2)^2}{x+4}\right)} = \sqrt[3]{\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+4+4x}{x+4}\right)} = \boxed{\pm\infty}$$

Ne segue che, per $x \to \pm\infty$, la $y \to \pm\infty$: dunque la funzione non ha *Asintoti Orizzontali*.
Proviamo ora a veder se essa possiede asintoti obliqui della forma $y = mx + q$.
Si ha:

$$m = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}\cdot\sqrt[3]{\frac{(x+2)^2}{x+4}}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\sqrt[3]{\frac{(x+2)^2}{x^3(x+4)}}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\sqrt[3]{\frac{x^2+4x+4}{x^4+4x^3}}\right] = 0$$

Poiché $m = 0$ è inutile calcolarsi q, in quanto si avrebbe:

$$q = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - mx\right] = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - 0\cdot x\right] = \lim_{x\to\infty}\left[f(x)\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\sqrt[3]{\frac{(x+2)^2}{x+4}}\right] = \infty$$

Si osservi, quindi, che per $m = 0$ ci si riconduce al calcolo del limite della funzione di partenza, già calcolato nello studiare gli asintoti orizzontali.
Dunque la funzione data non ha né asintoti orizzontali né quelli obliqui.

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Si ottiene:

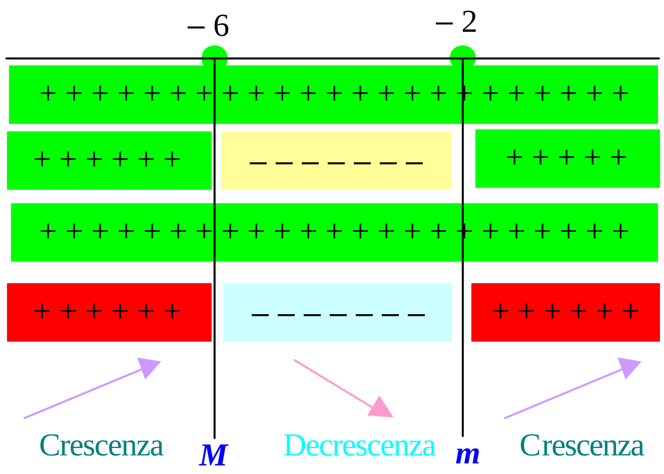
$$D\left(\sqrt[3]{\frac{(x+2)^2}{x+4}}\right) = \frac{D\left(\frac{(x+2)^2}{x+4}\right)}{3\sqrt[3]{\left[\frac{(x+2)^2}{x+4}\right]^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{\left[\frac{(x+2)^2}{x+4}\right]^2}}\cdot\frac{2\cdot(x+2)(x+4) - 1\cdot(x+2)^2}{(x+4)^2} =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{\left[\frac{(x+2)^2}{x+4}\right]^2}}\cdot\frac{2x^2+12x+16-x^2-4x-4}{(x+4)^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{\left[\frac{(x+2)^2}{x+4}\right]^2}}\cdot\frac{x^2+8x+12}{(x+4)^2}$$

da cui segue:

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{\left[\frac{(x+2)^2}{x+4}\right]^2}}\cdot\frac{x^2+8x+12}{(x+4)^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{3\sqrt[3]{\left[\frac{(x+2)^2}{x+4}\right]^2}} > 0 \\ \dfrac{x^2+8x+12}{(x+4)^2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{\left[\frac{(x+2)^2}{x+4}\right]^2} > 0 \\ x^2+8x+12 > 0 \\ (x+4)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ x^2+8x+12 > 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ x < -6, x > -2 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$



Ma allora risulta:

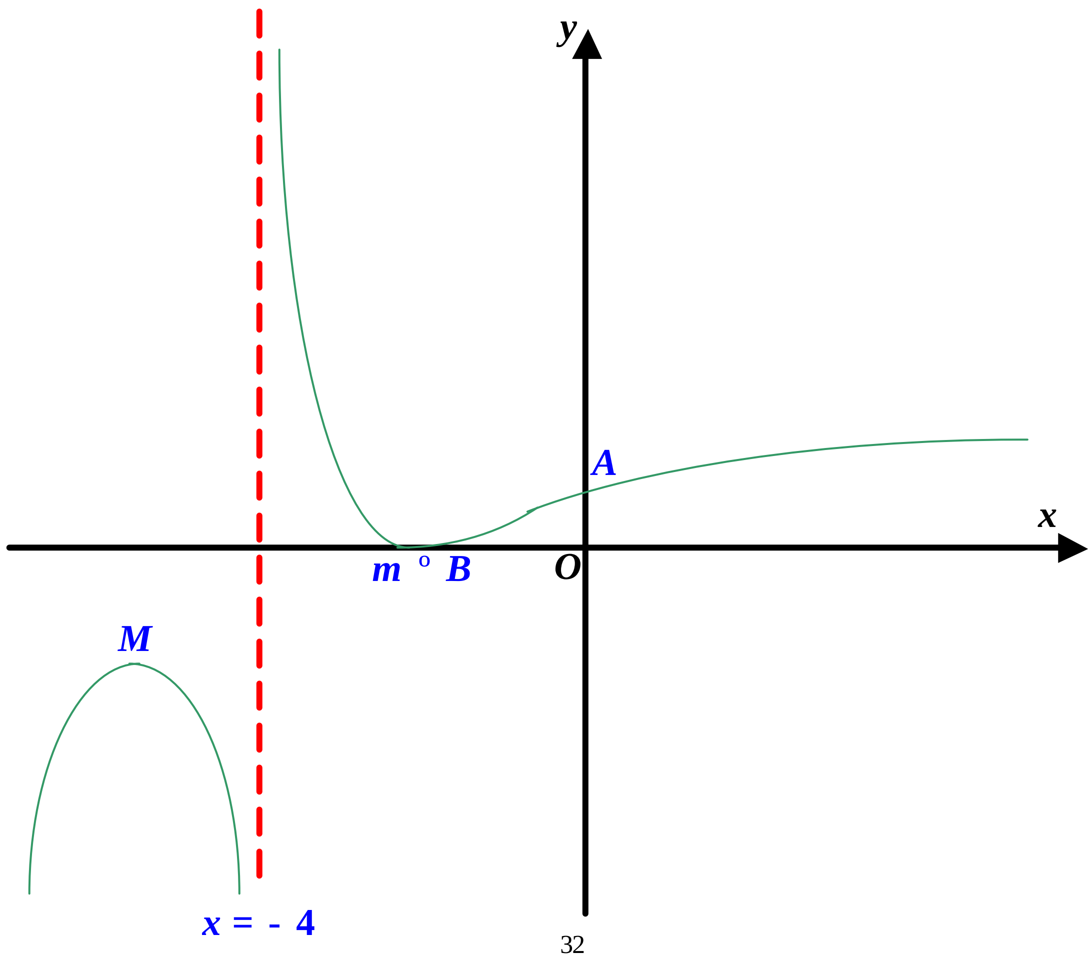
Punto di massimo

$x = -6 \Rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{(-6+2)^2}{-6+4}} = \sqrt[3]{\frac{16}{-2}} = -\sqrt[3]{8} = -2$

Punto di minimo

$x = -2 \Rightarrow y = 0$ (il punto di minimo coincide con il punto B di intersezione della funzione con l'asse x)

IL GRAFICO.



ESERCIZI PROPOSTI

Studiare le seguenti funzioni irrazionali:

$$y=\sqrt{\frac{x-1}{x}}$$

$$y=\sqrt{\frac{x^3-1}{x}}$$

$$y=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2-4}$$

$$y=\frac{\sqrt{1-x}}{x+1}$$

$$y=x\cdot\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$y=\sqrt{\frac{x(x-1)}{(x-2)(x-3)}}$$

$$y=\frac{x}{\sqrt{x-1}}$$

$$y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$$

$$y=\frac{x+1}{\sqrt{x}}$$

$$y=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$$

$$y=x\cdot\sqrt{4x-x^2}$$

$$y=\sqrt{x^3-2x^2-3x}$$

$$y=\frac{x}{2-\sqrt{x^2-5}}$$

$$y=x\cdot\sqrt{1-x^2}$$

$$y=2\sqrt{x+1}-x$$

$$y=x-\sqrt{4-x}$$

$$y=x-\sqrt{x^2-1}$$

$$y=\sqrt{\frac{x+2}{x}}$$

$$y=\sqrt{\frac{x^2-1}{x-2}}$$

$$y=2\sqrt{x}-x$$

$$y=\sqrt{3-2x}-2x$$

$$y=\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}$$

$$y=\sqrt{\frac{1}{x}+x}$$

$$y=\sqrt{x^2-6x+7}$$

$$y=\frac{\sqrt{4x^2-3}}{x+5}$$

$$y=\frac{\sqrt{x^2-9}-1}{x}$$

$$y=\frac{3}{5}\cdot\sqrt{25-x^2}$$

$$y=\sqrt{3+x^2}-x$$

$$y=\sqrt{\frac{x+1}{4-x^2}}$$

$$y=\sqrt[3]{x^3-x^2}$$

$$y=\sqrt[3]{3x^2-x^3}$$

$$y=\sqrt[3]{\frac{x^2-1}{x^2+2}}$$

$$y=\sqrt[3]{(x+4)^2}-2$$

$$y=\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$$

$$y=\sqrt[3]{x+x^2}+1$$

$$y=\frac{x}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$$