

# LE FUNZIONI RAZIONALI FRATTE

$$y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$

### CAMPO DI ESISTENZA.

Poiché la funzione data è una razionale fratta, essa risulta definita su tutto l'asse reale tranne che nei punti in cui il denominatore della frazione si annulla, cioè:

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pm 2\} = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < -2, -2 < x < +2, +2 < x < +\infty\}$$

Proprio in corrispondenza di quei valori della  $x$  che annullano il denominatore della funzione si ottengono gli *Asintoti Verticali*.

Nel caso in esame, quindi, è già possibile asserire che le rette  $x = -2$  ed  $x = +2$  costituiscono i due asintoti verticali della funzione assegnata.

$$A.V.: x = -2, x = +2$$

### INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

Le intersezioni della funzione con gli assi cartesiani si ottengono risolvendo, come di consueto, i seguenti due sistemi:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{x^2}{x^2 - 4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A = (0, 0) \text{ è il punto di intersezione della funzione con l'asse } y$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = \frac{x^2}{x^2 - 4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2}{x^2 - 4} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_{1,2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow B = C = (0, 0) = A$  sono le due intersezioni della funzione con l'asse  $x$

Ne segue che la funzione data interseca gli assi cartesiani esclusivamente nell'origine.

### SEGNO DELLA FUNZIONE.

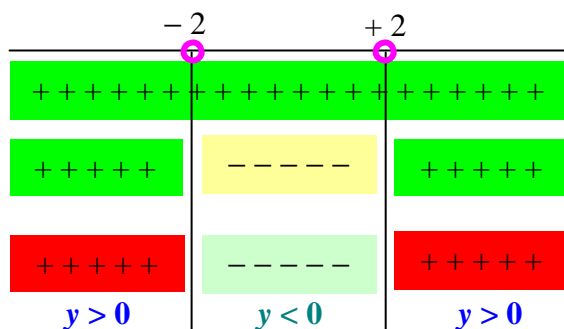
Anche in questo caso, per lo studio del segno della funzione, occorre risolvere la disequazione:

$$y > 0$$

Ne segue:

$$y > 0 \Rightarrow \frac{x^2}{x^2 - 4} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 > 0 \\ x^2 - 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \text{ (sitratta di unquadrato: è sempre positivo)} \\ x < -2, x > +2 \end{cases}$$

da cui:



### LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

Per il calcolo dei limiti delle funzioni polinomiali, occorre ricordare che, in generale, vale la seguente proprietà:

Se  $y = \frac{P_1(x)}{P_2(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \dots + b_{m-1}x + b_m}$ , dove  $P_1(x)$  e  $P_2(x)$  sono due polinomi nella variabile  $x$ , rispettivamente di grado  $n$  ed  $m$ , e  $P_2(x) \neq 0$ , allora risulta:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{P_1(x)}{P_2(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [P_1(x)]}{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [P_2(x)]} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0} & \text{se } n = m \\ b_0 & \\ 0 & \text{se } n < m \\ \infty & \text{se } n > m \end{cases}$$

Risulta allora possibile, in virtù di quanto sopra esposto, calcolare i limiti agli estremi del campo di esistenza di tutte le funzioni razionali fratte.

Nell'esempio si ha:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x^2}{x^2 - 4} \right) = \frac{1}{1} = 1$$

Ne segue che, per  $x \rightarrow \pm\infty$ , la  $y \rightarrow +1$ : dunque la retta  $y = 1$  è un *Asintoto Orizzontale*.

**A.O.:  $y = 1$**

### STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Ricordando che:

$$D \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{D[f(x)]g(x) - f(x)D[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

si ottiene:

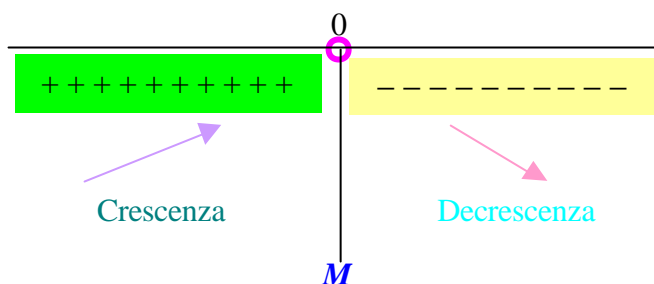
$$D \left( \frac{x^2}{x^2 - 4} \right) = \frac{D(x^2)(x^2 - 4) - x^2 D(x^2 - 4)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x(x^2 - 4) - x^2(2x)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x^3 - 8x - 2x^3}{(x^2 - 4)^2} = -\frac{8x}{(x^2 - 4)^2}$$

Per determinare i punti di massimi e di minimo della funzione, bisogna sempre risolvere la disequazione:

$$D(y) > 0$$

cioè:

$$-\frac{8x}{(x^2 - 4)^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} -8x > 0 \\ (x^2 - 4)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x < 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$



In  $x = 0$ , quindi, la funzione ha un *Massimo*  $M$ . L'ordinata corrispondente ad  $x = 0$  è già stata calcolata facendo l'intersezione con l'asse delle  $y$ .

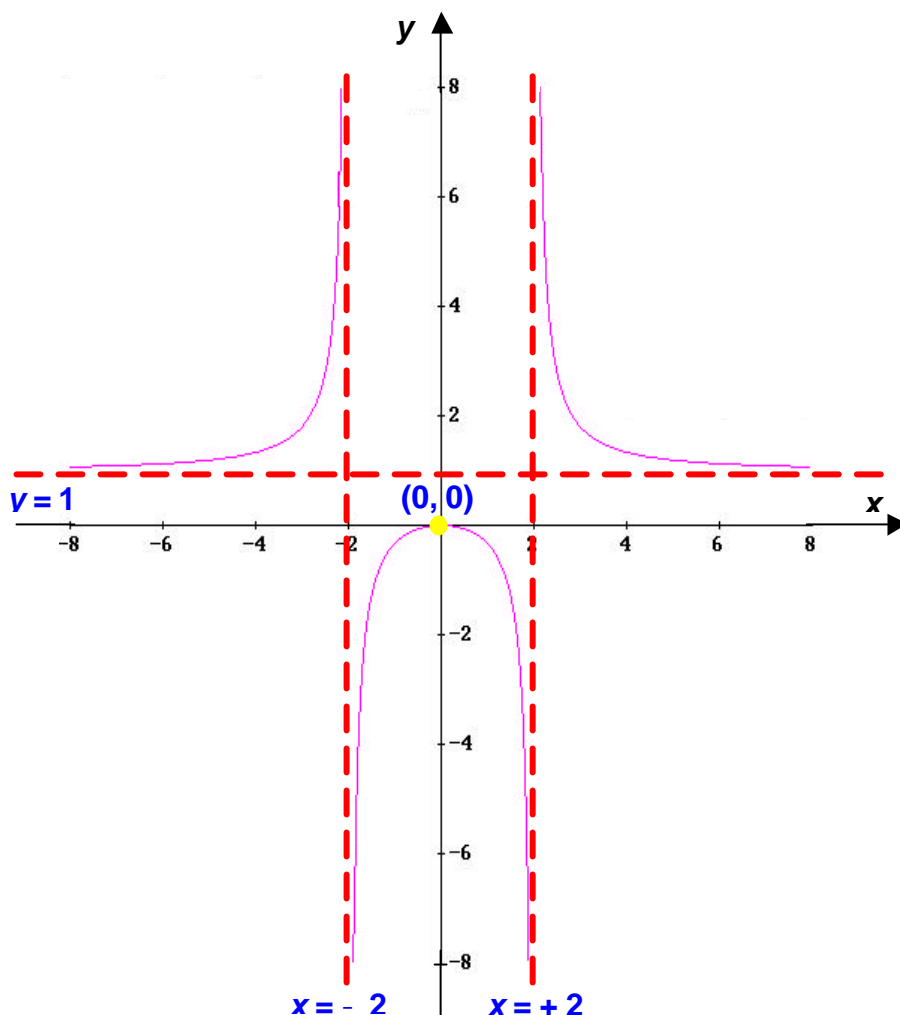
Dunque  $M = (0, 0)$  è il *punto di Massimo*.

### Osservazioni.

1. Una frazione si annulla se e solo se si annulla il suo numeratore: per determinare, quindi, i valori della variabile  $x$  per i quali una frazione è uguale a zero basta uguagliare a zero il suo numeratore.
2. Dalla formula generale della derivata di un quoziente, segue che il denominatore della funzione derivata prima sarà sempre un quadrato, cioè una quantità sempre positiva: per studiare il segno della derivata prima, quindi, è sufficiente studiare la positività del numeratore.

### **IL GRAFICO.**

Unendo tutte le informazioni ottenute, si avrà il seguente grafico della funzione:



$$y = \frac{x+1}{x-3}$$

**CAMPO DI ESISTENZA.**

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : x - 3 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 3\} = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < 3, 3 < x < +\infty\}$$

Ne segue subito che la retta  $x = 3$  è un asintoto verticale per la funzione assegnata:

$$A.V.: x = 3$$

**INTERSEZIONI CON GLI ASSI.**

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{x+1}{x-3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow A = \left(0, -\frac{1}{3}\right) \text{ è il punto di intersezione della funzione con l'asse } y$$

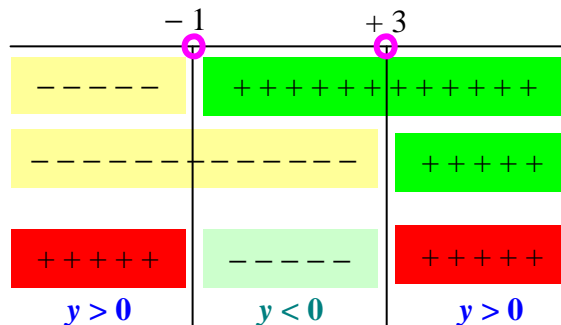
$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = \frac{x+1}{x-3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{x+1}{x-3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x+1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow B = (-1, 0)$  è l'intersezione della funzione con l'asse  $x$

**SEGNO DELLA FUNZIONE.**

Si ha:

$$y > 0 \Rightarrow \frac{x+1}{x-3} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > 3 \end{cases}$$



Quindi:

$$y > 0 \text{ per } -\infty < x < -1, 3 < x < +\infty$$

**LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.**

Poiché anche in questo caso il numeratore ed il denominatore della frazione hanno lo stesso grado (pari ad 1), il limite si ottiene facendo il rapporto dei coefficienti della  $x$  che figura al grado massimo sia al numeratore che al denominatore:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x+1}{x-3} \right) = \frac{1}{1} = 1$$

Ne segue che, per  $x \rightarrow \pm\infty$ , la  $y \rightarrow 1$ : dunque la retta  $y = 1$  è un *Asintoto Orizzontale*.

$$A.O.: y = 1$$

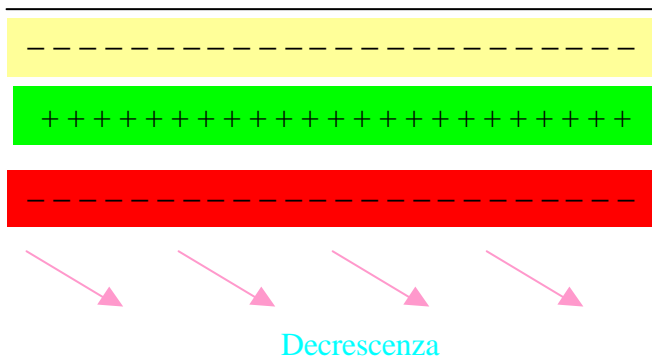
### STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Si ottiene:

$$D\left(\frac{x+1}{x-3}\right) = \frac{1 \cdot (x-3) - (x+1) \cdot 1}{(x-3)^2} = \frac{x-3-x-1}{(x-3)^2} = -\frac{4}{(x-3)^2}$$

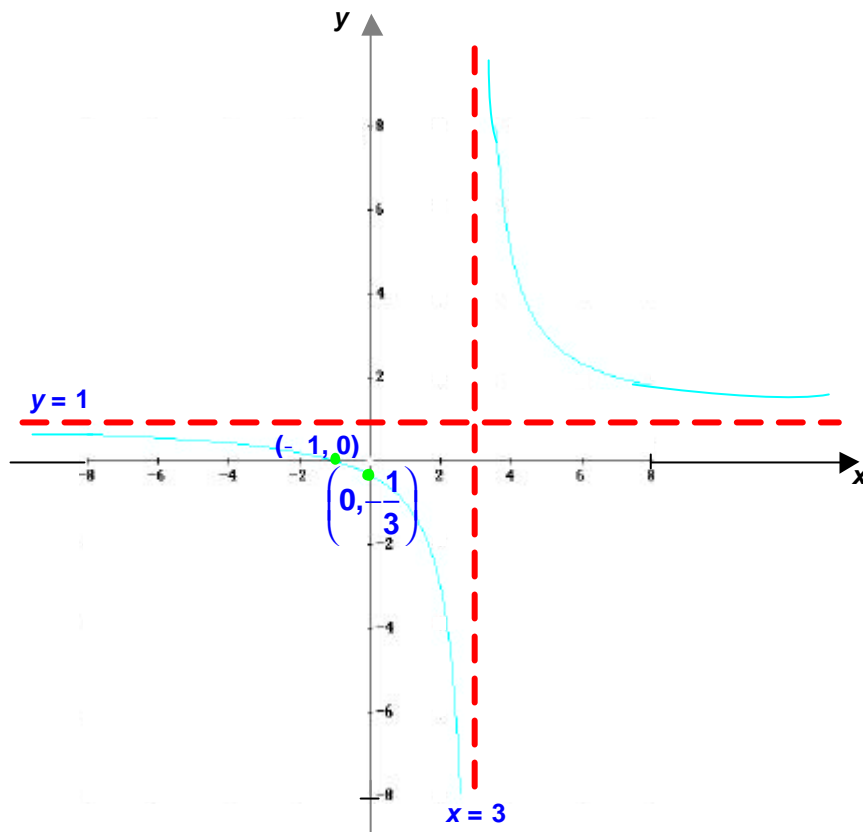
da cui:

$$-\frac{4}{(x-3)^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} -4 > 0 \\ (x-3)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{mai : è sempre negativo} \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$



Ne segue che la funzione è sempre decrescente per cui non ha né massimi né minimi.

### IL GRAFICO.



$$y = \frac{x^2 - 4}{x}$$

### CAMPO DI ESISTENZA.

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < 0, 0 < x < +\infty\}$$

Ne segue subito che la retta  $x = 0$ , cioè l'asse delle  $y$ , è un asintoto verticale per la funzione assegnata:

$$A.V.: x = 0$$

### INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

Si osservi in primo luogo che non ci possono essere intersezioni con l'asse  $y$ , in quanto tale retta è un asintoto verticale per la funzione. È inutile, quindi, risolvere il primo dei due sistemi!!!

Si considererà, pertanto, solo il secondo sistema:

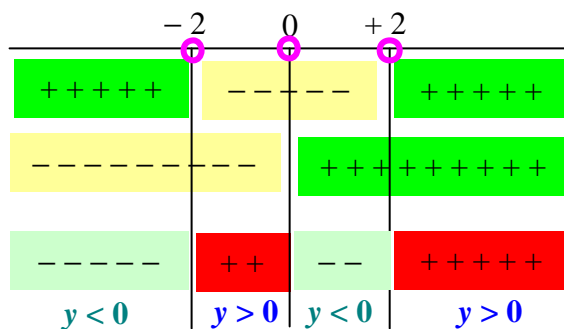
$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = \frac{x^2 - 4}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2 - 4}{x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_{1,2} = \pm 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \pm 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow A = (-2, 0)$  e  $B = (2, 0)$  sono le intersezioni della funzione con l'asse  $x$

### SEGNO DELLA FUNZIONE.

Si ha:

$$y > 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 4}{x} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -2, x > +2 \\ x > 0 \end{cases}$$



Quindi:

$$y > 0 \text{ per } -2 < x < 0, 2 < x < +\infty$$

### LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

In questo caso, poiché il grado del numeratore (pari a 2) è maggiore di quello del denominatore (pari ad 1), si ha:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x^2 - 4}{x} \right) = \pm\infty$$

Ne segue che, per  $x \rightarrow \pm\infty$ , la  $y \rightarrow \pm\infty$ : dunque la funzione non ha *Asintoti Orizzontali*.

In assenza di asintoti orizzontali, si può vedere, però, se esistono *Asintoti Obliqui*.

L'equazione di un asintoto obliquo è esattamente quella generale di una qualsiasi retta, cioè:

$$y = mx + q$$

dove:

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{f(x)}{x} \right) \quad \text{e} \quad q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx]$$

Nel caso in esame, quindi, si ha:

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{f(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x^2 - 4}{x} \cdot \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x^2 - 4}{x^2} \right) = 1$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x^2 - 4}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x^2 - 4 - x^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{-4}{x} \right) = -4 \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{1}{x} \right) = 0$$

Sostituendo ora i valori di  $m$  e  $q$  trovati nell'equazione generale della retta si ottiene l'equazione dell'astintoto obliquo, cioè:

$$y = mx + q = 1 \cdot x + 0 = x \Rightarrow y = x$$

$$\text{A.Ob.: } y = x$$

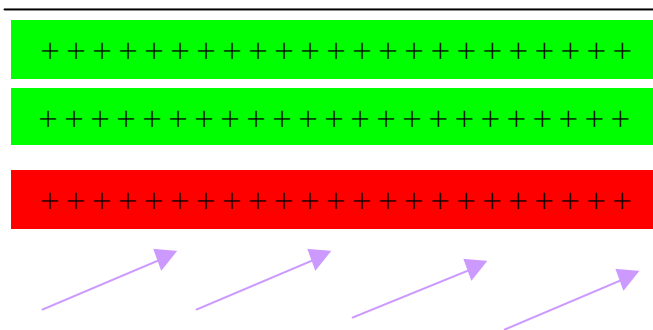
### STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Si ottiene:

$$D \left( \frac{x^2 - 4}{x} \right) = \frac{2x \cdot (x) - 1 \cdot (x^2 - 4)}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 + 4}{x^2} = \frac{x^2 + 4}{x^2}$$

da cui:

$$\frac{x^2 + 4}{x^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 4 > 0 \\ x^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \text{ (è la somma di due quadrati)} \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

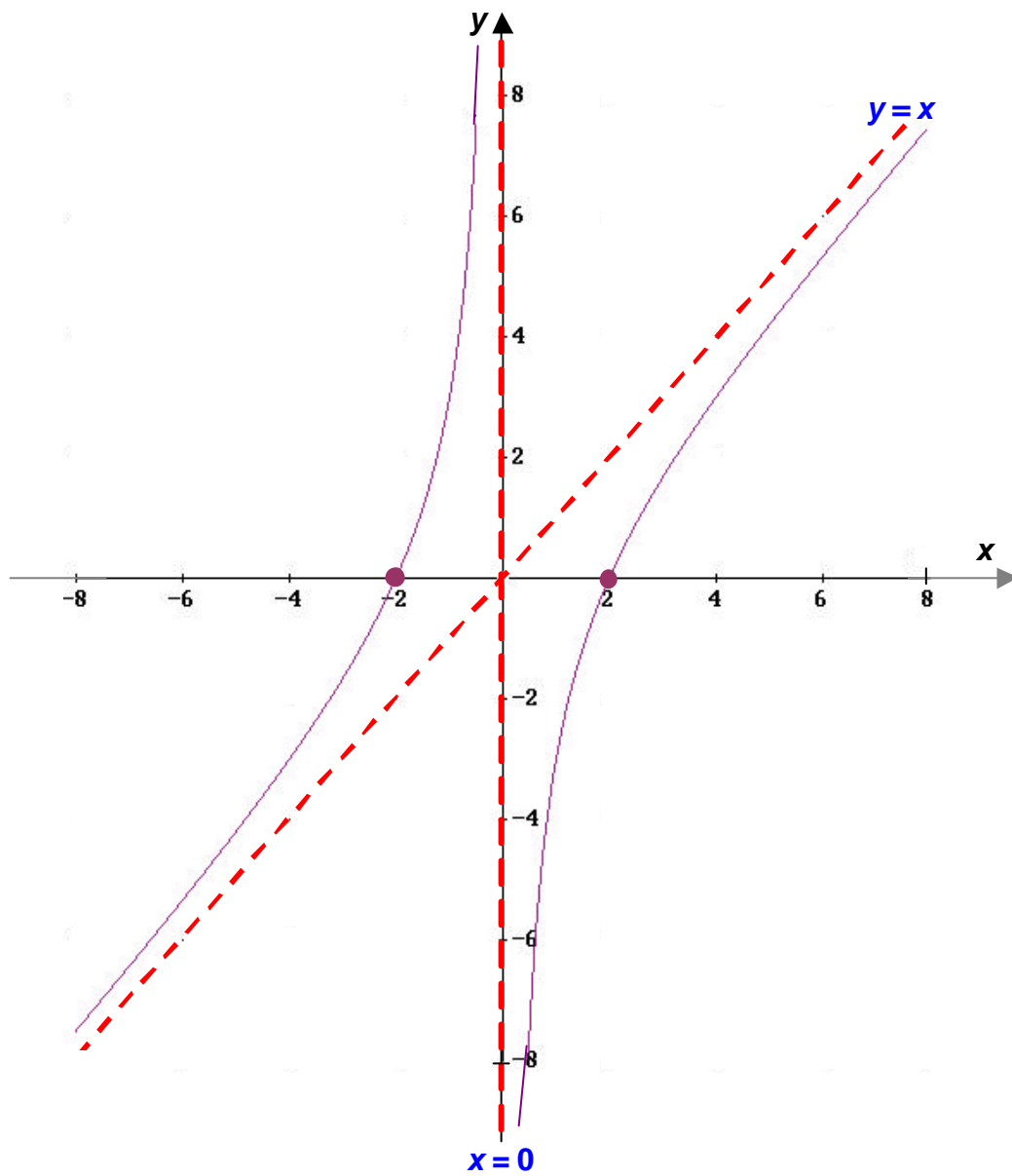


Crescenza

Ne segue che la funzione è sempre crescente: non esistono, cioè, né massimi né minimi.



**IL GRAFICO.**



$$y = \frac{x}{x^2 + 1}$$

**CAMPO DI ESISTENZA.**

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\}$$

La funzione non ha quindi asintoti verticali.

**INTERSEZIONI CON GLI ASSI.**

Si ha:

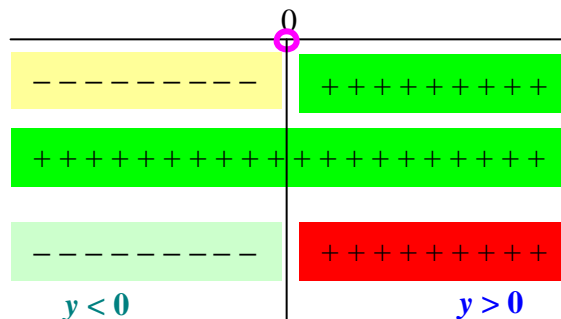
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{x}{x^2 + 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A = (0, 0)$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = \frac{x}{x^2 + 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{x}{x^2 + 1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow B = (0, 0) = A \text{ è l'intersezione della funzione con l'asse } x$$

**SEGNO DELLA FUNZIONE.**

Si ha:

$$y > 0 \Rightarrow \frac{x}{x^2 + 1} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 + 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$



Quindi:

$$y > 0 \text{ per } x > 0$$

**LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.**

In questo caso, poiché il grado del numeratore (pari ad 1) è minore di quello del denominatore (pari ad 2), si ha:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x}{x^2 + 1} \right) = 0$$

Ne segue che, per  $x \rightarrow \pm \infty$ , la  $y \rightarrow 0$ : dunque la retta  $y = 0$ , cioè l'asse delle  $x$ , rappresenta un *Asintoto Orizzontali* per la funzione.

$$A.O.: y = 0$$

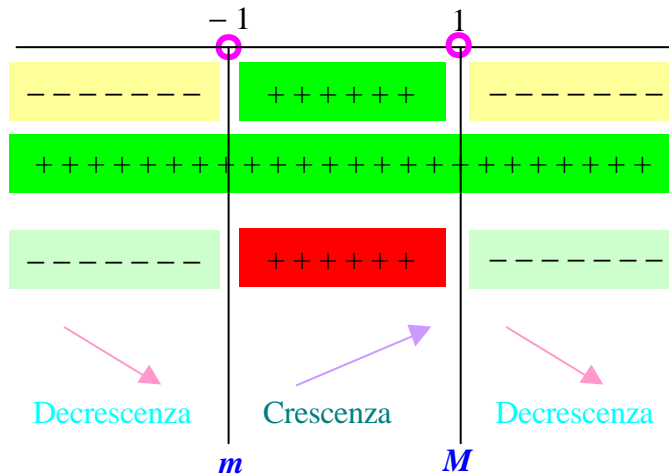
### STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Si ottiene:

$$D\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = \frac{1 \cdot (x^2+1) - x \cdot (2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

da cui:

$$\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} -x^2+1 > 0 \\ (x^2+1)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-1 < 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 < x < +1 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$



$$x = -1 \Rightarrow y = \frac{-1}{(-1)^2+1} = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2} = -0,5$$

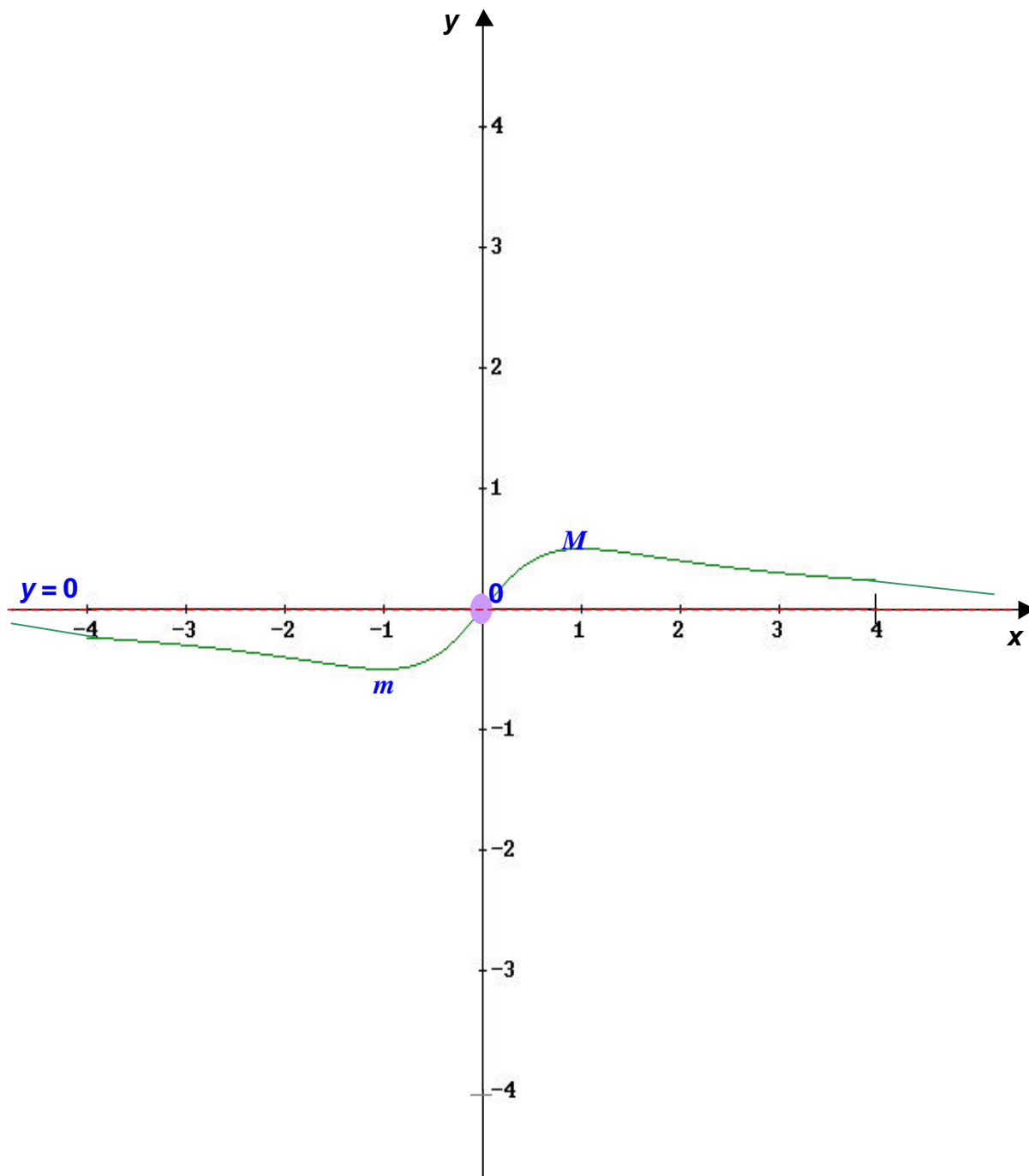
$$x = +1 \Rightarrow y = \frac{1}{(1)^2+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Dunque:

$$m = \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \text{ è il punto di minimo.}$$

$$M = \left(1, \frac{1}{2}\right) \text{ è il punto di Massimo.}$$

**IL GRAFICO.**



## ESERCIZI PROPOSTI

Studiare le seguenti funzioni razionali fratte:

$$y = \frac{1}{1+x^2}$$

$$y = 1 + \frac{1}{x^2}$$

$$y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

$$y = \frac{x^2-7x+10}{x-1}$$

$$y = \frac{x-1}{x+1}$$

$$y = \frac{3x+1}{x-1}$$

$$y = \frac{3-2x}{x}$$

$$y = \frac{x}{x^2-1}$$

$$y = \frac{x+4}{x-3}$$

$$y = \frac{x}{x^2-4}$$

$$y = \frac{1-2x}{x+2}$$

$$y = \frac{x^2-25}{x+1}$$

$$y = \frac{x^2-x-4}{x-1}$$

$$y = \frac{x^2+2x+25}{(1+x)^2}$$

$$y = \frac{x^2+x+1}{x^2-1}$$

$$y = \frac{x^2-x-4}{x-1}$$

$$y = \frac{3x-1}{2x+1}$$

$$y = \frac{1}{2+x} + \frac{1}{2-x}$$

$$y = \frac{1+x}{x^2}$$

$$y = \frac{x^3}{1-x^2}$$

$$y = \frac{x^2 - 10x + 21}{2x - 15}$$

$$y = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 1}$$

$$y = \frac{x}{1 + x^3}$$

$$y = \frac{x^3}{1 + x^3}$$

$$y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 6x + 8}$$

$$y = \frac{x^2 - 25}{x - 1}$$

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

$$y = \frac{x^2 - 1}{2x^2}$$

$$y = \frac{x}{3x^2 - 1}$$

$$y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - x}$$

$$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3$$

$$y = \frac{x}{x^3 - 1}$$

$$y = \frac{3x^2 - 7}{x^2 - 5x + 6}$$

$$y = \frac{x^3 - 2}{x^2 - 4}$$

$$y = 3x + \frac{1}{x^3}$$

$$y = \frac{4x}{x^2 + 1}$$

$$y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 5}$$

$$y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$$

$$y = \frac{12x^2 - 3x^3}{x^3 - 2x^2 + x}$$

$$y = \frac{x^3}{x^2 + 3x + 3}$$

$$y = \frac{x+1}{(x-1)(4x^2-1)}$$

$$y = x + \frac{2-3x}{x^2}$$

$$y = \frac{(x^2-4)^2}{(x-1)^3}$$

$$y = \frac{3x^2-4}{(x-2)^2(x+1)}$$

$$y = \frac{(x^2-1)^2}{x^3}$$