CAPITOLO VII

DERIVATE

1. GENERALITA'

Definizione 1.1)

La *derivata* è un operatore che ad una funzione f associa un'altra funzione e che obbedisce alle seguenti regole:

(1) $D\left(a_0x^n\right) = \left(a_0x^n\right)' = na_0x^{n-1}$ *derivata di un monomio*

ESEMPI

$D\left(3x^2\right) = 2\cdot 3\cdot x^{2-1} = 6x$

$D\left(5x^4\right) = 4\cdot 5\cdot x^{4-1} = 20x^3$

$D\left(-4x^3\right) = 3\cdot(-4)\cdot x^{3-1} = -12x^2$

(2) $D\left(a_0x\right) = a_0$ *derivata di un monomio con n* = 1

ESEMPI

$D(7x) = 1\cdot 7\cdot x^{1-1} = 7x^0 = 7\cdot 1 = 7$, $D(10x) = 10$, $D(3x) = 3$

(3) $D(x) = 1$ *derivata di un monomio con* $a_0 = 1 = n$

(4) $D(c) = 0$ *derivata di una costante*

ESEMPI

$D(4) = 0$, $D(10) = 0$, $D(25) = 0$

(5) $D\left(x^n\right) = nx^{n-1}$ *derivata di un monomio con* $a_0 = 1$

Più in generale risulta:

(5.1) $D\left(x^a\right) = a\,x^{a-1}$ (a *reale qualsiasi*)

Ricordando le regole delle potenze:

$a)\ a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

$b)\ a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

$c)\ a^{-\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}$

seguono varie proprietà applicate nei seguenti

ESEMPI

$D\left(x^3\right) = 3x^{3-1} = 3x^2$, $D\left(x^5\right) = 5x^{5-1} = 5x^4$, $D\left(x^8\right) = 8x^{8-1} = 8x^7$, $D\left(x^{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\, x^{\sqrt{2}-1}$,

$D\left(x^{1+\sqrt[3]{2}}\right) = \left(1+\sqrt[3]{2}\right) x^{\sqrt[3]{2}}$

Se $a = \dfrac{1}{n}$ allora si ha:

$$D\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}}}$$

che si può scrivere, in modo più semplice, come segue:

(6) $D\left(\sqrt[n]{x}\right) = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ *derivata della radice n-esima*

ESEMPI

$D\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^{2-1}}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $D\left(\sqrt[3]{x}\right) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^{3-1}}} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $D\left(\sqrt[5]{x}\right) = \dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^{5-1}}} = \dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$

Più in generale si ottiene:

(7) $D\left[\sqrt[n]{f(x)}\right] = \dfrac{f'(x)}{n\sqrt[n]{\left[f(x)\right]^{n-1}}}$ *derivata della radicen-esima di una funzione*

ESEMPI

$$D\left(\sqrt{x^3-4x+2}\right) = \frac{\left(x^3-4x+2\right)'}{2\sqrt{\left(x^3-4x+2\right)^{2-1}}} = \frac{3x^2-4}{2\sqrt{x^3-4x+2}}$$

$$D\left(\sqrt[3]{4x^3+6x^2-5}\right) = \frac{\left(4x^3+6x^2-5\right)'}{3\sqrt[3]{\left(4x^3+6x^2-5\right)^{3-1}}} = \frac{12x^2+12x}{3\sqrt[3]{\left(4x^3+6x^2-5\right)^2}} = \frac{4x^2+4x}{\sqrt[3]{\left(4x^3+6x^2-5\right)^2}}$$

$$D\left(\sqrt[5]{5x+3}\right) = \frac{(5x+3)'}{5\sqrt[5]{(5x+3)^{5-1}}} = \frac{5}{5\sqrt[5]{(5x+3)^4}} = \frac{1}{\sqrt[5]{(5x+3)^4}}$$

(8) $D\left[a\,f(x) \pm b\,g(x)\right] = a\,D\,f(x) \pm b\,D\,g(x)$ *derivata della somma (o differenza) e linearità*

ESEMPI

$$D\left(5x^4+3x^2+7x+6\right) = 5D\left(x^4\right)+3D\left(x^2\right)+7D\,(x)+6D\,(1) = 20x^3+6x+7$$

$$D\left(6x^3-2x^2+4x-6\right) = 6D\left(x^3\right)-2D\left(x^2\right)+4D\,(x)-6D\,(1) = 18x^2-4x+4$$

$$D\left(-4x^3+7x\right) = -4D\left(x^3\right)+7D\,(x) = -12x^2+7$$

(9) $D\left[f(x)g(x)\right] = \left[f(x)g(x)\right]' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ *derivata del prodotto*

ESEMPI

$$D\left[\left(x^2-1\right)(5x+2)\right] = \left(x^2-1\right)'(5x+2)+\left(x^2-1\right)(5x+2)' = 2x\,(5x+2)+\left(x^2-1\right)5 =$$

$$= 10x^2+4x+5x^2-5 = 15x^2+4x-5$$

$$D\left[(2x+3)\left(x^2+2x\right)\right] = (2x+3)'\left(x^2+2x\right)+(2x+3)\left(x^2+2x\right)' = 2\left(x^2+2x\right)+(2x+3)(2x+2) =$$

$$= 2x^2+4x+4x^2+4x+6x+6 = 6x^2+14x+6$$

$$D\left[\left(3x^3+4x+1\right)\left(3x^2+4\right)\right] = \left(3x^3+4x+1\right)'\left(3x^2+4\right)+\left(3x^3+4x+1\right)\left(3x^2+4\right)' =$$

$$= \left(9x^2+4\right)\left(3x^2+4\right)+\left(3x^3+4x+1\right)6x = 27x^4+36x^2+12x^2+16+18x^4+24x^2+6x =$$

$$= 45x^4+72x^2+6x+16$$

(10) $D\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}, \quad g(x) \neq 0$ *derivata del quoziente*

ESEMPI

$$D\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = \frac{(x)'\left(x^2+1\right)-x\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{x^2+1-x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$D\left(\frac{x^3}{4-x}\right) = \frac{\left(x^3\right)'(4-x)-x^3(4-x)'}{(4-x)^2} = \frac{3x^2(4-x)-x^3(-1)}{(4-x)^2} = \frac{-2x^3+12x^2}{(4-x)^2}$$

$$D\left(\frac{1+x^2}{4+x^2}\right) = \frac{\left(1+x^2\right)'\left(4+x^2\right)-\left(1+x^2\right)\left(4+x^2\right)'}{\left(4+x^2\right)^2} = \frac{2x\left(4+x^2\right)-\left(1+x^2\right)2x}{\left(4+x^2\right)^2} =$$

$$= \frac{6x}{\left(4+x^2\right)^2}$$

(11) $D\,f\left[g(x)\right] = f'\,[.....]\,g'\,[.....] = f'\left[g(x)\right]g'(x)$ *derivata di funzioni composte*

<u>ESEMPI</u>

$$D\left(\sqrt{4x^2-3}\right) = \left[\left(4x^2-3\right)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2\sqrt{4x^2-3}}\left(4x^2-3\right)' = \frac{8x}{2\sqrt{4x^2-3}} = \frac{4x}{\sqrt{4x^2-3}}$$

$$D\left[\sqrt[5]{\left(2x^3+1\right)^2}\right] = \left[\sqrt[5]{\left(2x^3+1\right)^2}\right]' = \left[\left(2x^3+1\right)^{\frac{2}{5}}\right]' = \frac{2}{5}\left(2x^3+1\right)^{-\frac{3}{5}}\left[\left(2x^3+1\right)\right]' =$$

$$= \frac{2}{5\sqrt[5]{\left(2x^3+1\right)^3}}\,6x^2 = \frac{12x^2}{5\sqrt[5]{\left(2x^3+1\right)^3}}$$

$$D\left(\sqrt[3]{x^2-7x}\right) = \left[\left(x^2-7x\right)^{\frac{1}{3}}\right]' = \frac{1}{3}\left(x^2-7x\right)^{\frac{1}{3}-1}\left(x^2-7x\right)' = \frac{2x-7}{3\sqrt[3]{\left(x^2-7x\right)^2}}$$

$$D\left[\left(3x^2-x\right)^5\right] = 5\left(3x^2-x\right)^{5-1}\left(3x^2-x\right)' = 5\left(3x^2-x\right)^4\left(6x-1\right)$$

(12) $D\left[e^{f(x)}\right] = e^{f(x)}f'(x)$ *derivata di funzioni esponenziali*

<u>ESEMPI</u>

$$D\left(e^{x^2+5x+2}\right) = e^{x^2+5x+2}\left(x^2+5x+2\right)' = e^{x^2+5x+2}\left(2x+5\right)$$

$$D\left(e^{3x^3+7x}\right) = e^{3x^3+7x}\left(3x^3+7x\right)' = e^{3x^3+7x}\left(9x^2+7\right)$$

$$D\left(e^{\frac{x^3+3}{x^2+1}}\right) = e^{\frac{x^3+3}{x^2+1}}\left(\frac{x^3+3}{x^2+1}\right)' = e^{\frac{x^3+3}{x^2+1}}\left[\frac{3x^2\left(x^2+1\right)-\left(x^3+3\right)2x}{\left(x^2+1\right)^2}\right] = e^{\frac{x^3+3}{x^2+1}}\frac{x^4+3x^2-6x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$D\left(e^{\frac{2x^2+4x}{3x^2+5}}\right) = e^{\frac{2x^2+4x}{3x^2+5}}\left(\frac{2x^2+4x}{3x^2+5}\right)' = e^{\frac{2x^2+4x}{3x^2+5}}\left[\frac{4x\left(3x^2+5\right)-\left(2x^2+4x\right)6x}{\left(3x^2+5\right)^2}\right] =$$

$$= e^{\frac{2x^2+4x}{3x^2+5}}\frac{-24x^2+20x}{\left(3x^2+5\right)^2}$$

(13) $D\left[\ln f(x)\right] \;=\; \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ *derivata di funzioni logaritmiche*

ESEMPI

$$D\left[\ln\left(3x^2+2\right)\right] \;=\; \frac{1}{3x^2+2}\left(3x^2+2\right)^{|} \;=\; \frac{6x}{3x^2+2}$$

$$D\left[\ln\left(x^3-2x-1\right)\right] \;=\; \frac{1}{x^3-2x-1}\left(x^3-2x-1\right)^{|} \;=\; \frac{3x^2-2}{x^3-2x-1}$$

$$D\left[\ln\left(\frac{2x^2+4x}{3x^2+5}\right)\right] \;=\; \frac{3x^2+5}{2x^2+4x}\left(\frac{2x^2+4x}{3x^2+5}\right)^{|} \;=\; \frac{3x^2+5}{2x^2+4x}\;\frac{-24x^2+20x}{\left(3x^2+5\right)^2} \;=\; \frac{-24x^2+20x}{\left(2x^2+4x\right)\left(3x^2+5\right)}$$

Osservazione: riteniamo opportuno richiamare l'attenzione dello studente su alcune proprietà dei logaritmi che si riveleranno particolarmente utili soprattutto per lo studio di funzioni:

- $\log_a(b\cdot c) \;=\; \log_a b+\log_a c$ *con* $a,b>0$ *e* $a\neq 1$
- $\log_a\left(\dfrac{b}{c}\right) \;=\; \log_a b-\log_a c$ *con* $a,b,c>0$ *e* $a\neq 1$
- $\log_a\left(b^n\right) \;=\; n\log_a b$ *con* $a,b>0$ *e* $a\neq 1$ *e n intero positivo*
- $\log_a\left(\sqrt[n]{b}\right) \;=\; \dfrac{1}{n}\log_a b$ *con* $a,b>0$ *e* $a\neq 1$ *e n intero positivo*
- $\log_a a \;=\; 1$ *con* $a>0$ *e* $a\neq 1$
- $\log_a 1 \;=\; 0$ *con* $a>0$ *e* $a\neq 1$
- $\log_a 0 \;=\; -\infty$ *con* $a>0$ *e* $a\neq 1$
- $\log_b N \;=\; \dfrac{\log_a N}{\log_a b}$ *formula del cambio di base con N intero positivo*

Inoltre, sfruttando la definizione classica di logaritmo, è facile verificare l'equivalenza delle seguenti espressioni:

$$z \;=\; \log_a b\,; \qquad a^z \;=\; b\,; \qquad a^{\log_a b} \;=\; b\,;$$

In generale si è soliti indicare con *ln* o anche con *log* il logaritmo naturale o *Neperiano*, cioè in base *e*.

2. TABELLA DELLE DERIVATE PIU' COMUNI

Riportiamo qui di seguito una tabella riassuntiva delle derivate di alcune funzioni elementari, scrivendo a sinistra la funzione e, nella stessa linea, a destra, la sua derivata:

$y = c$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^n,\ n \in \aleph$	$y' = nx^{n-1}$
$y = x^a,\ a \in \Re\ e\ x > 0$	$y' = a\,x^{a-1}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = \sqrt[n]{x^m},\ n > m$	$y' = \dfrac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$
$y = sinx$	$y' = cosx$
$y = cosx$	$y' = -sinx$
$y = tgx$	$y' = \dfrac{1}{cos^2x} = 1 + tg^2x$
$y = ctgx$	$y' = -\dfrac{1}{sin^2x} = -1 - cotg^2x$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = a^x,\ a > 0$	$y' = a^x\ loga$
$y = x^x$	$y' = x^x\,(1 + lnx)$
$y = lnx,\ x > 0$	$y' = \dfrac{1}{x}$
$y = log_ax,\ x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$	$y' = \dfrac{1}{x}\ log_ae$
$y = arcsinx,\ -\dfrac{p}{2} < y < \dfrac{p}{2}$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = arccosx,\ 0 < y < p$	$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$y = arctgx \qquad y' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$y = arcctgx \qquad y' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Riportiamo adesso un elenco di derivate di funzioni elementari ottenuto dalla tabella precedente sostituendo alla variabile indipendente x una certa funzione $f(x)$ di cui si conosca la derivata ed applicando poi la regola di derivazione delle funzioni composte:

$$y = \left[f(x)^n \right] \qquad y' = n\left[f(x) \right]^{n-1} f'(x)$$

$$y = \sqrt{f(x)} \qquad y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

$$y = \sqrt[n]{\left[f(x) \right]^m} \qquad y' = \frac{m}{n\sqrt[n]{\left[f(x) \right]^{n-m}}}$$

$$y = sin\, f(x) \qquad y' = cos\, f(x) f'(x)$$

$$y = cos\, f(x) \qquad y' = -sin\, f(x) f'(x)$$

$$y = tg\, f(x) \qquad y' = \frac{1}{cos^2 f(x)} f'(x)$$

$$y = ctg\, f(x) \qquad y' = -\frac{1}{sin^2 f(x)} f'(x)$$

$$y = arcsin\, f(x) \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left[f(x) \right]^2}} f'(x)$$

$$y = arccos\, f(x) \qquad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-\left[f(x) \right]^2}} f'(x)$$

$$y = arctg\, f(x) \qquad y' = \frac{1}{1+\left[f(x) \right]^2} f'(x)$$

$$y = arcctg\, f(x) \qquad y' = -\frac{1}{1+\left[f(x) \right]^2} f'(x)$$

$$y = e^{f(x)} \qquad y' = e^{f(x)} f'(x)$$

$$y = a^{f(x)} \qquad y' = a^{f(x)}\, ln\, a\, f'(x)$$

$$y = ln\, f(x) \qquad y' = \frac{1}{f(x)} f'(x)$$

$$y = \log_a f(x) \qquad y' = \frac{1}{f(x)} \log_a e \, f'(x)$$

$$y = [f(x)]^{g(x)} \qquad y' = [f(x)]^{g(x)} \left[g'(x) \log f(x) + \frac{g(x)}{f(x)} f'(x) \right]$$