

Periodico di Matematica

**PER
L'INSEGNAMENTO SECONDARIO SUPERIORE**

**Anno XXXVIII - Serie IV – volume V (4)
dicembre 2023**

A cura di
Ferdinando CASOLARO – Franco EUGENI – Luca NICOTRA

Edizioni



AFSU

MATEMATICA - FISICA - INFORMATICA

PERIODICO DI MATEMATICA

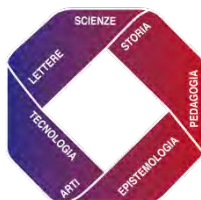
PER

L'INSEGNAMENTO SECONDARIO SUPERIORE

Fondato da Davide Besso nel 1886,
continuato da Aurelio Lugli e Giulio Lazzeri
e attualmente a cura di

Ferdinando Casolaro - Franco Eugeni - Luca Nicotra

Anno XXXVIII - Serie IV - Volume V (4)
Dicembre 2023



ACCADEMIA DI FILOSOFIA DELLE SCIENZE UMANE

Comitato Direttivo

Franco Eugeni
Ferdinando Casolaro
Giovanna Della Vecchia
Antonio Lungo
Antonio Maturo
Luca Nicotra
Renata Santarossa

Comitato Scientifico

Gian Italo Bischi (Urbino)
Giordano Bruno (Roma)
Mauro Cerasoli (L'Aquila)
Giuseppe Conti (Firenze)
Franco Francia (La Spezia)
Giangiacomo Gerla (Napoli)
Stefano Innamorati (L'Aquila)
Paolo Manca (Pisa)
Raffaele Mascella (Teramo)
Fabrizio Maturo (Caserta)
Mario Mandrone (Napoli)
Pietro Nastasi (Palermo)
Canio Noce (Salerno)
Nicla Palladino (Perugia)
Salvatore Rao (Napoli)
Ezio Sciarra (Chieti)
Salvatore Sessa (Napoli)
Massimo Squillante (Benevento)
Luca Tallini (Teramo)
Ugo Vaccaro (Salerno)
Giovanni Vincenzi (Salerno)

Copertina e progetto grafico

Luca Nicotra

Direzione e redazione

Direttore responsabile:

Luca Nicotra

Direttori di redazione:

Franco Eugeni
Via Lucania 1 l.
64026 Roseto degli Abruzzi (TE)
cell. 338 9644305

eugenif3@gmail.com.

Ferdinando Casolaro
Via Camaldolilli n. 1B
80128 Napoli- cell. 347 1960693

ferdinando.casolaro@unina.it

Luca Nicotra
Via Michele Lessona 5
00134 Roma- cell. 340 5065616
luca.nicotra1949@gmail.com.

Segreteria di redazione:

Giovanna Della Vecchia (Napoli)

giovanna.dellavecchia@gmail.com

Rivista di proprietà di:

Accademia di Filosofia delle
Scienze Umane - Zona Industriale
Colleranese - 65021 Giulianova
(TE) C.F. 91053660675

Copyright © 2023 Edizioni AFSU -
UniversItalia-Teramo, Roma -
ISSN Online: 2612-6745

® Reg. Versione online n.695/2019
del 19 luglio 2019 e Versione
cartacea n.695/2021 del 3 giugno
2021 Tribunale di Teramo.

Tutti i diritti riservati.

ISBN 978-88-3293-743-5

Gli scritti apparsi sulla Rivista
possono essere pubblicati altrove
purché se ne dichiari la fonte.

Il Periodico di Matematica, che rinasce dopo 100 anni, si propone, oggi, come allora, di orientare i propri obiettivi di ricerca alla didattica dell'astronomia, della fisica, della matematica, aggiungendo a queste discipline il moderno campo dell'informatica. La metodologia proposta sarà quella storico-fondazionale-divulgativa, con forte interesse nelle direzioni di studi elementari da un punto di vista superiore. I saggi pubblicati, vagliati dai Referee del Comitato scientifico, saranno valutati tenendo conto dei seguenti criteri:

- originalità nella stesura del lavoro e dell'apparato critico;
- significatività didattica del tema proposto;
- correttezza scientifica e rigore metodologico;
- proprietà di linguaggio e fluidità del testo;
- approfondito apparato di riferimenti bibliografici.

I *referee* restano anonimi per un anno. Le comunicazioni, i report, i pareri e tutti i dati dei *referee* sono trattati e gestiti dal Comitato Direttivo, preposto alla redazione.

Per essere inseriti nella mailing list di coloro che, via mail, riceveranno il *Periodico di Matematica*, occorre scrivere, inviando un mini-curriculum di poche righe, alla prof.ssa Giovanna Della Vecchia (Napoli) giovanna.dellavecchia@gmail.com. Tutti i lavori vanno inviati al prof. Franco Eugeni, (eugenif3@gmail.com) secondo il template word e le norme editoriali della Rivista scaricabili dal sito dell'A.F.S.U. (www.afsu.it/istruzioni-per-gli-autori/).

I profili biografici dei membri del Comitato Direttivo sono disponibili nel sito www.afsu.it.

«Periodico di Matematica» è una rivista trimestrale distribuita con Licenza Creative Commons Attribuzione - Non commerciale - Non opere derivate 4.0 Internazionale:



PEZZULLI

I pezzulli, seguendo una antica idea di Roberto Giannarelli attuata sin dai primi numeri di «Archimede» (1949) e di «La scienza per i Giovani» (1952), poi ripresa da Bruno de Finetti per il «Periodico di Matematiche», sono piccole pillole di saperi e riflessioni, atti a riempire spazi vuoti nel testo di una rivista (ad esempio la pagina pari, o metà della stessa, di fine lavoro se vuota).

AVVERTENZE PER I COLLABORATORI

Gli articoli devono essere redatti nella forma *camera ready*, con MS Word utilizzando il *template* scaricabile dal sito dell'AFSU:

https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2020/03/Template_Periodico-di-Matematica-18-02-2020.doc

rispettando le norme editoriali pubblicate nello stesso sito:

<https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2020/03/Principali-Norme-Editoriali-per-la-scrittura-degli-articoli-18-02-2020.pdf>

Le figure utilizzate devono essere in alta risoluzione (300 dpi).

SOSTENITORI AFSU

Ferdinando Casolaro (Napoli), Silvana D'Andrea (Roseto), Franco Francia (Pisa), Gianni Di Paolo (Teramo), Diana Le Quesne (Roseto), Franco Eugeni (Roseto), Antonio Maturo (Pescara), Antonio Napoletano (Ancona), Luca Nicotra (Roma), Marisa Quartiglia (Roseto), Renata Santarossa (Napoli), Ezio Sciarra (Pescara), Alberto Trotta (Salerno), Salvatore Sessa (Napoli).

AMICI AFSU

Ivano Casolaro (Napoli) Gianluca Eugeni (L'Aquila), Andrea Manente (Teramo), Enrico Massetti (Ascoli Piceno), Giovanni Grelli (S.Benedetto del Tronto), Francesco Pezzoli (Ascoli Piceno), Federico Verrigni (Pineto), Alessandro Vicerè (Roseto), Orfeo Zaffi (Penne - PE).

Finito di stampare nel mese di dicembre 2023 presso UniversItalia

Via di Passolombardo 421, 00133 Roma Tel. 06/2026342 -

e_mail: info@universitaliasrl.it-www.unipass.it.

INDICE

Franco Eugeni	7
<i>La geometria piana sul campo complesso</i>	
Gian Italo Bischi	31
<i>Funzioni iterate, sistemi dinamici e caos deterministico</i>	
Franco Francia	63
<i>Proprietà degli insiemi del V ordine contenenti punti dello spazio</i>	
Francesco Laudano, Mattia Laudano	83
<i>Il teorema del resto generalizzato</i>	
Bonaventura Paolillo	93
<i>Ricerca e prassi in Didattica della Matematica</i>	
Franco Eugeni	119
<i>“La verità in matematica. Da Gödel a Euclide” di Luca Nicotra</i>	
Luca Nicotra	125
<i>Un itinerario storicistico-didattico per l'introduzione del concetto di campo in fisica</i>	
<i>Profili biografici degli autori</i>	161



ArteScienza Anno X, N.20 , Dicembre 2023

http://www.assculturale-arte-scienza.it/Rivista%20ArteScienza/ArteScienza_N20/ArteScienza_N.20.pdf

La bellezza nell'opera dello scienziato di Luca Nicotra

I classici oggi a scuola di Aldo Onorati

Pagaiando con Pitagora di Paolo Severino Manca

Percorsi mentali e invenzione artistica di Anna Maria Dell'Agata

Riflessioni su una giornata di alta cultura ad Ascoli Piceno di Franco Eugeni

Piccoli schiavi, impietosi aguzzini di Antonio Castellani

Elettrosmog di Francesco Di Donato

Consapevoli confronti fra sensibilità differenti di Duilio Carpitella

Acqua fra arte e scienza di Maurizio Sisti

Il ciclo della violenza è davvero al declino? di Isabella De Paz e Ferdinando Gargiulo

La geometria piana sul campo complesso

Franco Eugeni*

* Già professore ordinario di Discipline Matematiche e di Filosofia della Scienza, Presidente dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane;

eugenif3@gmail.com



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v5n4.121

Sunto. *Lo scopo di questa nota è approfondire le nozioni metriche del piano affine complesso, inquadrandole anche in una visione n -dimensionale. Nella terza parte, senza andare oltre la dimensione due del piano, esaminiamo il processo di complessificazione, che pur presentandosi molto naturale, nasconde rapporti significativi allora che le proprietà di un piano affine complesso si vogliono rileggere in uno spazio affine reale 4-dimensionale. Concludendo siamo convinti di dare un contributo di carattere epistemologico per la comprensione della cosiddetta "complessificazione".*

Parole chiave. *Punti e rette complesse e coniugate –prodotto hermitiano – norma – fibrazioni dello spazio 3-dimensionale.*

Abstract. *The purpose of this note is to deepen the metric notions of the complex affine plane, also framing them in an n -dimensional view. In the third part, without going beyond dimension two of the plane, we examine the process of complexification, which, although very natural, hides significant relationships that can be reinterpreted in a real 4-dimensional affine space. In conclusion, we are making an epistemological contribution to the understanding of the so-called "complexification".*

Keywords. *Complex and conjugate points and lines -Hermitian product - norm - fibrations of 3-dimensional space.*

1 - La geometria piana affine sul campo complesso

Sia \mathbb{C} il campo dei numeri complessi. Consideri amo l'insieme \mathbb{C}^2 , quadrato cartesiano di \mathbb{C} , che chiameremo sostegno del piano affine complesso.

Chiamiamo punti complessi, le coppie ordinate di numeri complessi del tipo:

$$P = (x,y), P_1 = (x_1, y_1), \dots$$

dove $x = x' + ix''$, $y = y' + iy''$.

Chiameremo **vettori** le medesime coppie che indicheremo con:

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{OP}, \quad \mathbf{v} = \overrightarrow{OP_1}, \quad \mathbf{w} = \overrightarrow{OP_2},$$

I due punti $I(1,0)$ e $J(0,1)$ individuano due vettori speciali, che si dicono costituire una **base**, dati da:

$$\mathbf{i} = \overrightarrow{OI}, \quad \mathbf{j} = \overrightarrow{OJ}.$$

L'introduzione della base permette di scrivere per un generico vettore:

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{OP} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j}.$$

Il più generale legame tra punti e vettori nasce, appunto, dall'aver fissato una *base*. Se $P(x,y)$ e $P_1 = (x_1, y_1)$, sono due punti, il vettore \mathbf{u} individuato dal segmento orientato PP_1 , di estremi complessi sarà definito mediante la:

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{PP_1} := (x_1 - x) \mathbf{i} + (y_1 - y) \mathbf{j}$$

e in modo formale

$$\mathbf{u} = P_1 - P = Q - O, \quad \text{o anche,} \quad P_1 = P + \mathbf{u}.$$

La corrispondenza che, fissato $\mathbf{u} = u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j}$, ad ogni punto $P(x,y)$ associa il punto $P_1 = (x_1, y_1)$, di coordinate:

$$x_1 = x + u_1, \quad y_1 = y + u_2$$

si chiama *traslazione* di vettore \mathbf{u} .

Passando ora al formulario relativo alla geometria analitica del piano complesso, è ben chiaro che le nozioni affini rimangono inalterate ma con qualche questione in più da aggiungere. Così data ad esempio data una retta (r) di equazione:

$$(r) \quad a x + b y + c = 0$$

dove a, b, c, x, y sono in \mathbf{C} , sono inalterate tutte le formule note quali la cosiddetta *condizione di allineamento* di tre punti: dati infatti tre punti:

$$P = (x,y), P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2)$$

con P variabile e $P_1 \neq P_2$, la condizione suddetta può essere provata in diversi modi, specie ricorrendo al parallelismo dei vettori definiti dai segmenti orientati PP_1, P_1P_2 , che portano alla condizione :

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

che può scriversi nella forma più elegante:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Sviluppando, rispetto alla prima riga, si ottiene una equazione del tipo:

$$ax + by + c = 0,$$

con a, b, c, x, y in \mathbb{C} , $(a,b) \neq (0, 0)$, poiché da $a = y_2 - y_1$, $b = x_1 - x_2'$, risulta:

$$(a,b) = (0,0) \Leftrightarrow P_1 = P_2.$$

Diremo *effettiva* ogni equazione di 1° grado in due variabili con coefficienti delle incognite non entrambi nulli.

Dunque: *terne di punti allineati soddisfano una equazione di 1° grado in due variabili effettiva.*

Ma se quanto detto sopra è banale ed appare in tutti i testi, è anche impor-tante provare il viceversa¹ di quanto detto e cioè che: *ogni equazione di 1° grado in due variabili del tipo $ax + by + c = 0$, ed effettiva, ha come soluzioni terne di punti allineati.*

Infatti se i punti $P = (x,y)$, $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ sono soluzioni della equazione data si ha:

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ ax_1 + by_1 + c &= 0 \\ ax_2 + by_2 + c &= 0 \end{aligned}$$

affinchè il sistema omogeneo nelle incognite a,b,c abbia soluzioni (necessariamente non nulle per essere $(a,b) \neq (0, 0)$), occorre che sia:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ovvero le soluzioni del sistema, sono terne di punti allineati, ovvero punti di una retta. Concludendo:

In un riferimento cartesiano qualsiasi, ogni retta è rappresentata da una equazione lineare in due variabili effettiva, che è soddisfatta da tutti e soli i punti della retta, e viceversa ogni equazione lineare, in due variabili effettiva, rappresenta una retta come luogo dei punti le cui coordinate la soddisfino.

¹ Tale osservazione appare raramente, specie nei testi scolastici, Si veda M.Villa [2], vol. I, Cap.2, p.18.

Un vettore parallelo ad una data retta r di equazione:

$$a x + b y + c = 0$$

è il vettore di componenti

$$\mathbf{r} = (-b, a).$$

Rimangono così fisse le condizioni di parallelismo di due rette che si traducono nelle proporzionalità tra due vettori paralleli alle due rette. Così le incidenze si studiano al solito modo, in particolare la formula della retta per due punti, le nozioni di fascio di rette proprio ed improprio e così l'intero corpo solitamente detto della geometria affine del piano. Per queste nozioni si può consultare un qualsiasi libro di geometria analitica universitario², ma anche di Scuola Media Superiore.

Vi sono comunque nuove proprietà:

Teorema 1.- *Due punti complessi e coniugati si incontrano in una retta reale.*

Dati infatti i due punti $P = (a+ia', b+ib')$ e $\bar{P} = (a-ia', b-ib')$, la retta che li congiunge ha equazione:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a + ia' & b + ib & 1 \\ a - ia' & b - ib' & 1 \end{vmatrix} = 0$$

² Si veda , ad esempio, M.Villa [2] vol. I, Cap.1 e 2, pp.1-23.

Sostituendo alla 2° riga la somma della seconda con la terza, ed alla 3° riga la differenza della seconda con la terza, si ha la retta reale:

$$4i \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ a' & b' & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

Teorema 2.- *Due rette complesse e coniugate si incontrano in un punto reale.*

Il punto comune a due rette r , \bar{r} complesse e coniugate è dato dal sistema:

$$\begin{aligned} (r) \quad & (a+ia')x + (b+ib')y + (c+ic') = 0 \\ (\bar{r}) \quad & (a-ia')x + (b-ib')y + (c-ic') = 0 \end{aligned}$$

del tutto equivalente per somma e sottrazione a:

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ a'x + b'y + c' &= 0 \end{aligned}$$

avente per soluzione appunto , un punto reale.

Usualmente la parte metrica nei testi di geometria classici³ si affida ad un prodotto scalare, non canonico, entrato nell'uso, definito, a partire da due vettori:

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{OP} = (x, y) , \quad \mathbf{v} = \overrightarrow{OP_1} = (x_1, y_1)$$

dalla relazione

³ Vedasi ad esempio M.Villa [6] o G.Vaccaro [7].

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} := x x_1 + y y_1 \in \mathbb{C}$$

con conseguente norma (non canonica)

$$|\mathbf{u}|^2 = x^2 + y^2 \in \mathbb{C}$$

ne segue una “distanza non canonica” di due punti

$$\text{dist}(P, P_1)^2 = |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2.$$

Tale struttura pur essendo utile per esercizi stimolanti non è affatto in linea con la teoria generale della norma e del prodotto interno, che nel caso di spazi vettoriali sui complessi si sviluppa in altro modo. Richiamiamo queste nozioni nel successivo paragrafo.

Appaiono, con queste definizioni, interessanti anomalie. In particolar modo troviamo anomalie riguardo le rette di equazioni $y = ix$ ed $y = -ix$, dette *rette isotrope*, ed alle loro parallele. Ad esempio ciascuna di esse è perpendicolare a se stessa essendo $i^2 = -1$, due punti distinti su ciascuna di esse come $(1, i)$ (a, ai) sono a distanza nulla, avendosi:

$$d = (a-1)^2 + (ai-i)^2 = (a-1)^2 [1+i^2] = 0.$$

Ancora la circonferenza di raggio nullo e centro nell’origine è chiaramente il prodotto delle equazioni delle rette isotrope:

$$x^2 + y^2 = (y - ix)(y + ix) = 0.$$

Tuttavia se definiamo il prodotto scalare in altro modo, le cose cambiano. Dati ancora due vettori:

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{OP} = (x, y), \quad \mathbf{v} = \overrightarrow{OP_1} = (x_1, y_1)$$

Definiamo un nuovo prodotto, che chiameremo *prodotto hermitiano* che si definisce ponendo :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} := x \bar{x}_1 + y \bar{y}_1 \in \mathbb{R}.$$

Si prova facilmente che la quantità reale positiva $\|\mathbf{u}\|$, definita da :

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} := x \bar{x} + y \bar{y}$$

è una effettiva norma, detta *norma hermitiana*, che da luogo ad una diversa e più corretta geometria metrica del piano affine complesso.

Ne derivano nozioni metriche di misure di segmenti, ortogonalità, misure di angoli che non approfondiremo in questo contesto.

Nel paragrafo successivo chiariremo invece le differenze generali tra la nozione di norma, le sue connessioni con il prodotto interno in spazi vettoriali sui reali o sui complessi, di dimensione finita o infinita, nella forma più generale possibile.

2 - Spazi vettoriali normati e dotato di prodotto interno

La nozione di “*norma*” di un vettore, estende il concetto di “*lunghezza*” di un vettore dello spazio fisico intuitivo, a spazi vettoriali su reali o sui complessi di dimensioni finita o infinita. Naturalmente :

- la “lunghezza di un vettore sarà sempre un numero non negativo, con pochi vettori di lunghezza eventuale nulla;
- moltiplicare un vettore per un numero reale avrà l'effetto di moltiplicare la sua lunghezza per il modulo di esso;

dovrà evidenziarsi un chiaro legame con la nozione di prodotto scalare o più in generale di prodotto interno (anche hermitiano) e con la nozione di distanza.

Daremo per nota la definizione di spazio vettoriale⁴ su un campo K e la nozione di sottospazio e di lineare dipendenza e indipendenza.

Ricordiamo che un sottospazio può essere *generato* a partire da diversi suoi sotto-insiemi di vettori. Tra i possibili insiemi di generatori alcuni risultano più economici di altri: sono gli insiemi di vettori con la proprietà di essere linearmente indipendenti.

Un insieme di vettori linearmente indipendenti che generano il sottospazio è detto base del sottospazio.

⁴ Cfr. Eugeni F., M. Gionfriddo [1].

È noto che tutte le basi di uno spazio vettoriale di dimensione anche infinita, posseggono la stessa cardinalità (risultato di Felix Hausdorff). Tale cardinalità viene chiamata *dimensione di Hamel* dello spazio.

Si dimostra che ogni spazio vettoriale, che non sia il solo vettore nullo, possiede almeno una base; alcuni spazi hanno basi costituite da un numero finito di vettori, altri hanno basi costituite da insiemi infiniti. Per questi ultimi, ai fini della dimostrazione dell'esistenza di una base si deve ricorrere al *Lemma di Zorn*⁵ ovvero all'*assioma della scelta*.⁶

Da un punto di vista descrittivo occorre anche ricordare che a volte, in matematica, si presenta la necessità di ripetere una determinata costruzione, supponendo di poterla ripetere, un numero infinito di volte. In una tale situazione può essere necessario compiere delle scelte arbitrarie, talvolta in quantità infinita. In termini non formali, l'assioma della scelta assicura che, quando viene data una collezione di insiemi non vuoti, si

⁵ Il Lemma di Zorn asserisce che : se X è un insieme non vuoto su cui è definita una relazione d'ordine parziale tale che ogni sua catena possiede un maggiorante in X , allora X contiene almeno un elemento massimale. E' noto anche come Lemma di Kuratowski-Zorn poiché esso fu scoperto da Kazimierz Kuratowski nel 1922 e riscoperto indipendentemente da Max Zorn nel 1935.

⁶ L'assioma della scelta, come è stato dimostrato, assunto il sistema di assiomi di Zermelo-Fraenkel, per la teoria degli insiemi, è equivalente ad altri assiomi classici quali i seguenti: l'enunciato Lemma di Zorn, ma ancora il Teorema del buon ordinamento(su ogni insieme si può definire un buon ordinamento), l'assioma moltiplicativo (il prodotto cartesiano di una famiglia di insiemi non vuoti è non vuoto), Teorema di Hartogs (la relazione d'ordine standard sui cardinali è totale). In altre parole, assunto uno di essi, si provano gli altri.

può sempre costruire un nuovo insieme "scegliendo" un singolo elemento da ciascuno di quelli di partenza. Precisiamo che se il numero di insiemi della collezione di partenza è finito, l'assioma della scelta non è necessario, poiché gli altri assiomi della teoria degli insiemi sono atti a garantire la possibilità della scelta. Il problema si pone invece nel caso che la collezione sia costituita da un numero infinito di insiemi. In tal caso occorre introdurre nella teoria un assioma specifico, l'assioma della scelta asserente che: *data una famiglia finita o infinita non vuota di insiemi non vuoti, esiste una funzione che ad ogni insieme della famiglia fa corrispondere un suo elemento.*

Il problema di natura logica consiste nel cercare di comprendere se l'atto di compiere un'infinità di scelte arbitrarie sia o meno lecito. L'argomento è molto dibattuto. Dal punto di vista puramente logico è stato mostrato che supporre di poterlo fare non porta a contraddizioni – in altre parole, l'assioma della scelta, che garantisce la possibilità di compiere infinite scelte, è indipendente dagli altri assiomi generalmente usati in matematica. L'assioma della scelta, insieme alle sue molteplici riformulazioni equivalenti, permette di mostrare molte proprietà interessanti in svariate strutture della matematica.⁷

⁷ Alcuni risultati per i quali è indispensabile l'assioma della scelta sono i seguenti: Ogni funzione suriettiva ha un'inversa destra. Ogni campo ammette una chiusura algebrica, unica a meno di isomorfismi. Ogni anello unitario ammette ideali massimali. Il teorema di Tichonov (asserente che: il prodotto di una qualsiasi famiglia di spazi topologici compatti è compatto. Andrej Nikolaevič Tichonov, 1930). Altri sono risultati più profondi quali il teorema di Hahn-Banach

La distinzione più rilevante fra gli spazi vettoriali vede da una parte gli spazi di dimensione finita e dall'altra quelli di dimensione infinita.

Giova ricordare che ogni spazio vettoriale di dimensione finita n , sul campo K , è isomorfo a K^n , ovvero allo spazio vettoriale delle n -ple di elementi di K . Per quel che segue faremo riferimento solo a spazi vettoriali sul campo reale R o sul campo complesso C .

Un prodotto hermitiano in uno spazio vettoriale V su C , è una operazione binaria esterna di $V \times V$ in C , che a due vettori \mathbf{u}, \mathbf{v} di V associano il numero complesso indicato con $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, che quali che siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ in V ed a in C , sono soddisfatti gli assiomi seguenti:

$$1.- \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}$$

$$2.- (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$$

$$3.- (a\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = a(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$$

$$4.- \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \in R^+ \cup \{0\}, \text{ con } \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \neq 0, \text{ se } \mathbf{u} \neq 0.$$

Inoltre, come si prova⁸ è anche:

$$5.- \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$$

$$6.- \mathbf{u} \cdot (a\mathbf{v}) = \bar{a}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$$

Si chiama spazio di Banach è uno spazio vettoriale sui reali o sui complessi, sul quale è definita una norma tale che

⁸ Cfr. B. Pini, Secondo corso di Analisi Matematica Parte prima, Coop. Libreria Univ., Bologna, 1972.

ogni successione di Cauchy sia convergente (abbia cioè un limite) a un elemento dello spazio.

Si chiama spazio pre-hilbertiano uno spazio vettoriale sui reali o sui complessi, con prodotto interno. Uno spazio pre-Hilbertiano si dice hilbertiano se la norma indotta è completa. Uno spazio di Hilbert soddisfa all'identità del parallelogramma.

Esempio 1 - Supponiamo di avere uno spazio vettoriale di dimensione n sui complessi e sia $\{ e_i \}$, $i = 1, 2, \dots, n$, una base. Dati due vettori⁹: $x = x_i e_i$, $y = y_j e_j$, e posto:

$$e_i \cdot e_j = h_{ij} \in \mathbb{C}$$

Risulta

$$x \cdot y = (x^i e_i) \cdot (y^j e_j) = h_{ij} x^i \bar{y}^j$$

che è la forma più generale del prodotto hermitiano usato nel 1° paragrafo. La restrizione del prodotto hermitiano al caso reale si chiama *prodotto scalare* di V su \mathbb{R} , ed essendo in tale caso $\bar{y}^j = y^j$, si ha la classica espressione del prodotto scalare in V su \mathbb{R} .

Abbiamo premesso questa nozione e questo esempio in quanto utile per in esempio di norma.

⁹ In questo esempio usando la notazione degli indici in alto e in basso (notazione di Einstein) sotto- tendiamo la sommatoria rispetto all'indice alto- basso.,

Una semi-norma su uno spazio vettoriale V sul campo reale o complesso, è una applicazione $\|\cdot\|$ di V nei reali \mathbb{R} , tale che:

- 1.- $\|x\| \geq 0, \forall x \in V$;
- 2.- $\|a x\| = |a| \|x\|, \forall a \in \mathbb{R}, \forall x \in V$ (omogeneità);
- 3.- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in V$. (disuguaglianza triangolare), se inoltre:
- 4.- $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$, allora la semi-norma si dice

norma.

Si dimostra ancora:

5.- Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Dati $x, y \in V$, spazio vettoriale sui complessi e dotato di prodotto hermitiano si ha:

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|$$

Esempio 2 - Consideriamo l'insieme delle funzioni reali di variabili reali:

$L^p = \{f \text{ t. c. } f(x), \forall x [a, b] \text{ di } \mathbb{R}, \text{ è t. c. } f(x)^p \text{ è sommabile}\}$
 costituito dalle funzioni reali di variabili reali $f(x)$ su un intervallo $[a, b]$ di potenza p -sima sommabile nel senso di Lebesgue, p intero positivo. La norma $\|f\|$ di una funzione f di L^p , è la funzione $\|f\|$ che in x è data da:

$$\|f\| (x) = \left[\int_a^b f(x)^p dx \right]^{1/p}$$

Spazio semi-normato che prende il nome di spazio hielbertiano funzionale. In questo spazio ci sono funzioni non nulle a norma nulla come, ad esempio, la funzione che in $[a, b]$ vale 0 tranne che per un numero finito di punti dove vale 1

Un caso interessante particolare è dato dall'insieme delle successioni di numeri reali o complessi:

$$[\ell]^p = \left\{ a = \{a_i\}, i = 1, 2, \dots, n, \text{ t. c. } \left[\sum_1^\infty |a_i|^p \right]^{1/p} < +\infty \right\}$$

$$\|a\| = \left[\sum_1^\infty |a_i|^p \right]^{1/p}$$

Spazio normato che prende il nome di spazio hielbertiano numerico.

Uno spazio vettoriale dotato di norma è anche uno spazio metrico. Infatti la distanza tra due vettori si può definire ponendo:

$$d(x,y) := \|x - y\|, \forall x, y \in V$$

ed è facile esercizio provare le tre classiche proprietà di positività, simmetria e diseuguaglianza triangolare. Pertanto uno spazio vettoriale sui Reali o complessi dotato di norma , è anche uno spazio vettoriale topologico.

Due differenti norme possono essere equivalenti secondo la seguente:

Definizione. - Dato uno spazio vettoriale X, due norme $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ su X si dicono equivalenti se esistono due costanti positive C1 e C2 tali che per ogni $x \in X$ risulta:

$$C_1 \|x\|_1 < \|x\|_2 < C_2 \|x\|_1 .$$

Proposizione. Se V è uno spazio vettoriale normato sui reali o sui complessi, di dimensione finita, allora tutte le norme definite su di esso sono fra loro equivalenti, ed inducono la stessa topologia, detta topologia euclidea, che è anche completa.¹⁰

Inoltre:

Teorema di Weierstrass. Uno spazio vettoriale V normato sui reali o sui complessi, ha dimensione finita, se e solo se da ogni successione $\{x_n\} \subset X$ limitata è possibile estrarre una sottosuccessione convergente in V .

Si noti che uno spazio vettoriale V sui reali o sui complessi dotato di prodotto interno $x \cdot y$ (scalare o hermitiano) è di conseguenza normato, ponendosi $\|x\|^2 := x \cdot x$, per ogni x di V .

Da notare che in generale non è vero il viceversa in quanto:

Teorema.¹¹ Condizione necessaria e sufficiente a che uno spazio vettoriale normato sui complessi sia dotato di prodotto interno è che in esso sia valida per ogni x, y di V la seguente identità vettoriale:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 \|x\|^2 + 2 \|y\|^2$$

(regola del parallelogramma).

Nel qual caso è definibile un prodotto hermitiano, che induce la norma di partenza, ponendo:

¹⁰ Sarebbe a dire che ogni successione di vettori soddisfacenti le condizioni di Cauchy sono convergenti.

¹¹ Per la prova, peraltro ricostruibili, vedasi a d Esempio B. Pini [4].

$$x \cdot y = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 + i \|x + y\|^2 + i \|x - y\|^2.$$

Nel caso reale il prodotto scalare si riduce a:

$$4 x \cdot y = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 .$$

3 - Il piano affine ampliato e complessificato e la sua immagine in \mathbb{R}^4

Chiameremo piano affine ampliato e complessificato $A^2(\mathbb{C})$ o anche piano proiettivo complesso, l'insieme delle terne ordinate (t, x, y) di numeri complessi non tutti nulli e definiti a meno di un fattore complesso. Il legame tra $A^2(\mathbb{C})$ ed \mathbb{C}^2 , nasce dall'identificazione dei punti di $A^2(\mathbb{C})$, con $t \neq 0$, chiamati **punti propri** di $A^2(\mathbb{C})$, con i punti $P(x,y)$ di \mathbb{C}^2 , mediante le relazioni :

$$x = x/t \quad , \quad y = y/t.$$

I punti di $A^2(\mathbb{C})$, con $t = 0$, cioè del tipo $(0, r, s)$, li chiameremo **punti impropri**, ciascuno geometricamente rappresentato dalla direzione della retta (o di una sua qualsiasi parallela) di \mathbb{C}^2 , di equazioni:

$$x = r u \quad , \quad y = s u$$

L'insieme di tutti i punti impropri, è caratterizzato dall'equazione:

$$t = 0$$

che prende il nome di *equazione della retta impropria*.

Si chiama, altresì, *retta propria* di $A^2(\mathbf{C})$, una retta (r) di \mathbf{C} alla quale si sia aggiunto un punto improprio, esattamente quello che definisce la direzione della stessa (r) . La definizione è giustificata anche dal fatto che l'equazione di una retta (r) , scritta in forma omogenea, ha un significato ben più generale, in quanto, l'equazione:

$$a x + b y + c t = 0$$

è soddisfatta sia dagli ordinari punti propri $(1, x', y')$ con $ax' + by' + c \equiv 0$, sia dal punto improprio $(0, b, -a)$ definente la direzione della stessa retta. Inoltre, nella forma omogenea, si può includere anche il caso $a = b = 0$, (che era il caso escluso nelle rette proprie di \mathbf{C}^2) che fornisce l'equazione della retta impropria.

Vogliamo ora passare all'esame di una ovvia applicazione che fornisce una immagine del Piano affine complesso nell' \mathbf{R}^4 reale, esame che risulta tutt'altro che banale.

Dato un punto qualsiasi $P(x, y) = P(x' + ix'', y' + i y'')$ del piano, fissiamo l'attenzione su una applicazione naturale:

$$f: \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{R}^4$$

definita ponendo:

$$f(x' + ix'', y' + i y'') = (x', x'', y', y'')$$

l'applicazione essendo chiaramente biettiva nella corrispondenza tra punti.

Vogliamo ora comprendere quali sono le immagini delle rette di \mathbf{C}^2 in \mathbf{R}^4 .

Sia data una retta di \mathbf{C}^2 di equazione $y = m x$, con $m = m' + im''$. Si ha:

$y' + i y'' = (m' + im'')(x' + ix'') = (m'x' - m''x'') + i(m''x' + m'x'')$
quindi l'immagine di una retta di \mathbf{C}^2 in \mathbf{R}^4 è data dal sistema:

$$y' = m'x' - m''x'' \quad , \quad y'' = m''x' + m'x''$$

dunque: *ad una retta di \mathbf{C}^2 corrisponde un piano di \mathbf{R}^4 che taglia sullo spazio improprio S_∞ , di \mathbf{R}^4 di equazione $t = 0$, la retta di equazioni¹²:*

$$\begin{aligned} y' &= m'x' - m''x'' \\ y'' &= m''x' + m'x'' \\ t &= 0. \end{aligned}$$

È evidente che tale corrispondenza non è biettiva esistendo piani di \mathbf{R}^4 non provenienti¹³ da rette di \mathbf{C}^2 .

Proviamo che: *due rette di \mathbf{C}^2 del tipo $y = mx$, $y = nx$, con $m \neq n$, hanno per immagine due piani di \mathbf{R}^4 , che tagliano sullo spazio improprio S_∞ di equazione $t = 0$, due rette sghembe.*

Infatti posto $n = n' + i n''$ le due rette sul piano $t = 0$ portano al sistema (1):

¹² In \mathbf{R}^4 una equazione è l'equazione di uno spazio o iperpiano, due equazioni indipendenti rappresentano un piano e tre equazioni indipendenti rappresentano una retta.

¹³ È sufficiente considerare il piano $y' = ax' - b x''$, $y'' = c x' + dx''$ non verificanti le due condizioni $a = d$, $b = c$.

$$\begin{aligned} y' &= m'x' - m''x'' & y' &= n'x' - n''x'' \\ y'' &= m''x' + m'x'' & y'' &= n''x' + n'x'' \end{aligned}$$

per il quale si richiede la soluzione non nulla. Tale sistema è equivalente al sistema (2):

$$\begin{aligned} (m' - n')x' - (m'' - n'')x'' &= 0 \\ (m'' - n'')x' - m' - n'x'' &= 0 \end{aligned}$$

Poiché $m \neq n$ implica

$$(m' - n')^2 + (m'' - n'')^2 \neq 0$$

il sistema (2) ha la sola soluzione nulla e quindi anche il sistema (1) ha la sola soluzione nulla.

Dunque le rette sullo spazio improprio S_∞ di \mathbf{R}^4 di equazioni:

$$y' = m'x' - m''x'', \quad y'' = m''x' + m'x'', \quad t = 0$$

al variare di m formano una famiglia $R(m)$ di rette a due a due sghembe.

La retta di \mathbf{C}^2 di equazione $x = 0$ ha come immagine in \mathbf{R}^4 il piano $x' = x'' = 0$ che taglia sullo spazio improprio una retta r^* che è sghemba con le rette della famiglia $R(m)$.

Infatti il sistema:

$$x' = x'' = 0, \quad y' = m'x' - m''x'', \quad y'' = m''x' + m'x'', \quad t = 0$$

equivale al sistema:

$$x' = x'' = y' = y'' = t = 0$$

privo di soluzione non nulla.

Considero ora la famiglia $R^*(m) = R(m) \cup \{r^*\}$ che è una fibrazione del piano improprio in rette in quanto:

a.- le rette di $R^*(m)$ sono a due a due sghembe;

b.- per ogni punto dello spazio improprio di R^4 passa una retta di $R^*(m)$.

Infatti fissato comunque un punto $P = (0, a', a'', b', b'')$ su $t = 0$, proviamo che esiste una retta del sistema $R^*(m)$, che passa per esso.

Considero la retta generica del sistema ridotto $R(m)$

$$y' = m'x' - m''x'', \quad y'' = m''x' + m'x'', \quad t = 0$$

Il passaggio per P , conduce alle condizioni:

$$m'a' - m''a'' = b', \quad m''a' + m'a'' = b''$$

sistema di due equazioni nelle incognite m', m'' . Quando $(a')^2 + (a'')^2 \neq 0$, ha soluzione unica. Se invece è $a' = a'' = 0$, la retta per $P(0,0,0,b',b'')$ è la retta di equazione $x' = x'' = t = 0$ che è proprio la retta aggiunta ad $R(m)$ per avere $R^*(m)$.

Concludendo: Le immagini delle rette di C^2 in R^4 sono tutti e soli i piani di R^4 , passanti per le rette improprie della assegnata fibrazione $R^*(m)$.

4 - Conclusioni

La conclusione che si trae da questa breve nota è che la geometria del piano complesso allora che si legga nella rappresentazione reale è ben complicata.

Varrebbe la pena di andare a studiare altri luoghi classici, riletti nella geometria del piano complesso e reinterpretati nello spazio reale quadridimensionale. Inoltre anche sostituendo all' \mathbb{R}^4 il corpo dei quatrenioni potremmo avere altre chiavi di lettura. Ancora potremmo esaminare il piano quaternariale ampliato e vedere la sua immagine nell' \mathbb{R}^8 . Saranno queste problematiche di prossimi lavori!

Bibliografia

[1] F.Eugeni-M.Gionfriddo (1994). *Appunti del Corso di Algebra e Geometria*, Pescara Edizioni CUSL. Reperibile in www.afsu.it/Matematica/Geo-metria/

[2] Per la voce : "[Spazio normato](#)", si veda [Encyclopaedia of Mathematics](#), Springer e European Mathematical Society.

[3] S. Lang, *Algebra lineare*, Torino, Bollati Boringhieri, 1992, [ISBN 88-339-5035-2](#)

[4] B. Pini, *Secondo corso di Analisi Matematica Parte prima*, Coop. Libreria Univ. Bologna, 1972.

[5] [W. Rudin](#), *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1970-[ISBN 0-07-054234-1](#).

[6] M.Villa (1965), *Lezioni di Geometria*, CEDAM, Padova.

[7] G. Vaccaro, *Lezioni di geometria*, 2 voll., Libreria Eredi Virgilio Veschi, Roma, 1960-61

[8] E. W. Weisstein, [Spazio normato](#), su [MathWorld](#), Wolfram Research.

Funzioni iterate, sistemi dinamici e caos deterministico

Gian Italo Bischi*

*Professore Ordinario di Metodi matematici dell'economia e delle scienze attuariali e finanziarie presso la Facoltà di Economia dell'Università di Urbino "Carlo Bo"; gian.bischi@uniurb.it



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v5n4.122

Sunto: *In questo articolo si illustra in modo didattico e operativo come ottenere dinamiche caotiche mediante l'applicazione ripetuta (o iterazione) di semplici funzioni non lineari. Nel contempo vengono introdotti termini e concetti che caratterizzano la teoria dei sistemi dinamici, attraverso il loro sviluppo storico e utilizzando rappresentazioni grafiche sia per sistemi dinamici discreti unidimensionali e bidimensionali.*

Parole Chiave: *Sistemi dinamici discreti, Non linearità, Caos, Attrattori.*

Abstract: *This paper illustrates, in a didactic and operational way, how to obtain chaotic dynamics by repeated application (or iteration) of simple nonlinear functions. At the same time, terms and concepts that characterize the theory of dynamical systems are introduced, through their historical development and using graphical representations for both one-dimensional and two-dimensional discrete dynamical systems.*

Keywords: *Discrete dynamical systems, Nonlinearity, Chaos, Attractors.*

1 - Introduzione

Il concetto di caos deterministico si presenta come un ossimoro: “caos” significa assenza di regole, irregolarità, imprevedibilità, mentre l’aggettivo “deterministico” significa regolare, prevedibile, e viene riferito a fenomeni ordinati e pianificabili. La scoperta del caos deterministico, nell’ambito della teoria matematica dei sistemi dinamici non lineari, spezza questa dicotomia, in quanto ci mostra come si possano generare successioni di numeri apparentemente casuali mediante l’applicazione ripetuta (iterazione) di semplici funzioni, anche di quelle che si studiano nelle scuole medie superiori. L’irregolarità delle sequenze così generate, unitamente al fatto che modifiche anche impercettibili del valore da cui inizia il processo iterativo possono causare cambiamenti notevoli nei valori successivi (la cosiddetta sensitività rispetto alle condizioni iniziali), se da una parte diminuiscono la capacità di fare previsioni sul comportamento asintotico dei modelli dinamici non lineari, dall’altra suggeriscono che fenomeni del mondo reale che evolvono in modo apparentemente casuale potrebbero essere simulati matematicamente mediante l’iterazione di semplici schemi deterministici. Questo ha destato la curiosità anche dei non addetti ai lavori, tanto che la cosiddetta “teoria del caos” è recentemente entrata, anche se talvolta in maniera un po’ impropria, in settori esterni alla letteratura scientifica, dai testi di divulgazione della scienza ai romanzi, dalla pittura al cinema ai salotti culturali.

Anche se Henri Poincaré descrive in modo chiaro il fenomeno del caos deterministico a fine Ottocento, studiando il problema di tre corpi che interagiscono attraverso la forza di gravità, i suoi risultati sono probabilmente troppo avanzati

per i suoi tempi, e non suscitano subito l'interesse che meritano. Un decisivo contributo alla diffusione e crescente popolarità di questo settore della matematica arriva negli anni Settanta grazie alla pubblicazione degli articoli del matematico e meteorologo americano Edward Lorenz (1963) e poi con l'articolo del fisico e studioso di biologia Robert May (1976) che ha mostrato come comportamenti caotici possono essere ottenuti mediante l'applicazione ripetuta di semplici funzioni di una variabile. Questo conduce, a partire dagli anni Ottanta, alla pubblicazione di tanti libri e articoli, sia specialistici che divulgativi, dedicati al fenomeno del caos deterministico e le sue implicazioni, sia dal punto di vista dei modelli matematici che descrivono sistemi reali che si evolvono nel tempo (la turbolenza nei fluidi, il fluttuare irregolare dei prezzi nei mercati finanziari, le variazioni annuali del numero d'insetti di un ecosistema, i mutamenti nelle condizioni atmosferiche...) sia dal punto di vista filosofico ed epistemologico. Anche la stampa non specializzata si è occupata spesso di questioni relative a fenomeni non lineari tipici della teoria dei sistemi complessi, ma raramente nelle pubblicazioni di carattere divulgativo è possibile trovare, in forma sufficientemente esauriente, esempi che illustrino, concretamente e operativamente, come possano insorgere comportamenti caotici. Questo potrebbe indurre a ritenere che i modelli matematici usati per descrivere dinamiche caotiche siano necessariamente governati da un sistema complicato di parametri e variabili, e di conseguenza che il loro studio richieda non solo l'uso di potenti computer ma anche di conoscenze e metodi matematici molto avanzati. Ciò è certamente vero in molti casi, ma è anche vero che è possibile osservare comportamenti caotici, capirne il si-

gnificato, l'importanza, le cause, la natura e "toccarne con mano" le principali proprietà che li caratterizzano, partendo da modelli molto semplici in cui compare una sola variabile dinamica e un solo parametro.

Scopo di questo articolo è mostrare come l'evoluzione dei fenomeni caotici può essere studiata mediante l'applicazione ripetuta (o "iterazione") di semplici funzioni non lineari, per esempio funzioni algebriche di secondo grado, cioè quelle che gli studenti incontrano nelle aule di scuola. Nonostante la loro semplicità, questi modelli consentono di studiare molti dei fenomeni tipici della non linearità (si vedano, ad esempio, May (1976) e alcuni testi rivolti a insegnanti e studenti, quali il volume di Bischi, Carini, Gardini e Tenti (2004)) seguendo la scia dell'appassionato appello che Robert M. May nel 1976 rivolgeva agli insegnanti di matematica dalle pagine della rivista «*Nature*», dove caldeggiava l'introduzione nei corsi di matematica elementare del procedimento di iterazione di semplici funzioni, ritenendo che l'intuizione degli studenti potesse trarre alimento da certe stravaganze evidenziabili mediante semplici equazioni non lineari, in modo da mostrare come una semplice funzione non lineare potesse essere iterata anche solo "a mano" o col semplice ausilio di una calcolatrice tascabile portando alla scoperta di risultati, a dir poco, sorprendenti.

2 - Iterare funzioni

Ogni studente di scuola media superiore incontra, nel corso dei propri studi di matematica, il concetto di funzione reale di variabile reale: dato un numero x (variabile indipendente) preso da un certo dominio, l'applicazione di una funzione

produce come risultato un unico numero, $y = f(x)$, detto immagine di x mediante f . Se al risultato così ottenuto si applica di nuovo la stessa funzione f (ammesso che ciò sia possibile, ovvero se anche y appartiene al dominio della funzione) si ottiene un terzo numero $z=f(y)=f(f(x))=f^2(x)$. Si tratta di comporre la funzione f con se stessa, cioè applicare due volte la stessa funzione. Se anche z sta nel dominio di f nessuno ci impedisce di calcolare $f(z)=f^3(x)$ e così via. Si viene così a generare una successione infinita di valori: partendo dalla condizione iniziale (o punto seme della successione) x_0 : ogni valore successivo si ottiene in modo univoco (quindi perfettamente deterministico) dal valore precedente secondo lo schema *induttivo* (o iterativo) $x_{n+1} = f(x_n)$, che consiste nell'applicazione ripetuta della funzione prendendo ogni volta come ingresso il valore uscito dall'applicazione precedente.

Il caso più semplice consiste nell'iterare una funzione lineare, cioè nella forma $f(x)=ax$, dove a è una costante. In tal caso è facile calcolare i valori che si susseguono conoscendo solo il valore iniziale x_0 : $x_1 = ax_0$; $x_2=ax_1=a(ax_0)=x_0a^2$; ... $x_n=x_0a^n$. Si tratta di una successione esponenziale, detta anche progressione geometrica di ragione a . Si riesce quindi a calcolare direttamente l'elemento ennesimo della successione solo conoscendo il valore di partenza, e si può anche dedurre l'andamento asintotico, cioè per $n \rightarrow \infty$: se $-1 < a < 1$ allora x_n converge a 0, se $a > 1$ oppure $a < -1$ allora x_n diverge. Più precisamente, se $a > 0$ si ha una successione monotona (decrecente per $0 < a < 1$, crescente per $a > 1$) mentre se $a < 0$ l'andamento è di tipo oscillatorio, essendo in tal caso a^n positivo per n pari e negativo per n dispari. Nel caso particolare $a=-1$ si ottiene un andamento oscillatorio fra i valori x_0 (per n pari) e $-x_0$ (per n dispari) e si

dice che la successione ha un andamento ciclico di periodo 2 (perchè ogni due iterazioni si ottiene il medesimo valore).

Per un qualunque valore del parametro a è facile generare questa successione, usando una calcolatrice tascabile, partendo da un dato valore iniziale e moltiplicando per il fattore a quante volte si vuole. Premendo ripetutamente un tasto della calcolatrice si possono facilmente iterare anche altre funzioni, ad esempio la funzione $f(x)=\sqrt{x}$: partendo da $x_0=3$ e spingendo il tasto “radice quadrata” si ottiene $x_1=\sqrt{3} \cong 1.732$ e poi, spingendo ancora lo stesso tasto, $x_2=\sqrt{x_1} \cong 1.316$ e quindi valori decrescenti che si avvicinano sempre più al valore limite 1, che costituisce l'estremo inferiore per la successione generata; partendo invece da $x_0=0.5$ si ottiene $x_1=\sqrt{0.5} \cong 0.707$ e poi valori crescenti che si avvicinano sempre più (per difetto) all'estremo superiore 1 (si veda la figura 1, in cui sull'asse delle ascisse viene riportato l'indice n che conta le iterazioni, sull'asse delle ordinate i corrispondenti valori x_n). È ovvio che partendo da $x_0=1$ si ottiene una successione perfettamente costante: $x_n=1$ per ogni n . Si dice allora che $x=1$ è un punto fisso, o di equilibrio: se da lì si parte, lì si resta. In questo caso diciamo anche che si tratta di un equilibrio attrattivo, nel senso che se la condizione iniziale viene presa in un suo intorno la successione generata si avvicinerà sempre di più ad esso. Anche $x=0$ è un punto fisso, ma ogni piccolo spostamento da esso, ottenuto prendendo un punto seme x_0 positivo e piccolo, genera una successione crescente che si allontana definitivamente dal punto fisso, per andare poi a convergere all'altro equilibrio, $x=1$.

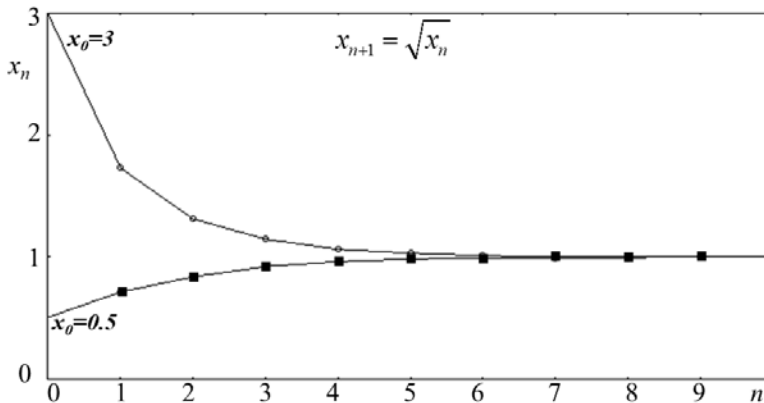


Fig. 1

In base a questa definizione possiamo affermare che nel caso delle funzioni lineari $f(x) = ax$ descritte sopra $x=0$ è l'unico punto di equilibrio, che risulta essere attrattivo se $-1 < a < 1$, repulsivo se $a < -1$ oppure $a > 1$.

Lo studio dei possibili comportamenti delle successioni generate mediante l'applicazione ripetuta di una funzione può essere utile nella descrizione matematica di fenomeni reali che evolvono nel tempo. Infatti, se vogliamo studiare come cambia lo stato di un sistema nei periodi successivi di tempo $t = 0, 1, \dots, n, \dots$, e se la variabile x_n viene interpretata come misura dello stato del sistema nell'intervallo di tempo $t=n$, allora la funzione f assume il significato di operatore di avanzamento del tempo (o legge di evoluzione). Lo schema iterativo $x_{n+1} = f(x_n)$ diventa allora un modello dinamico, nel senso che permette di calcolare lo stato del sistema in un certo periodo di tempo conoscendo lo stato nel periodo precedente. Se, come nel caso della funzione lineare $f(x)=ax$, si riesce a esprimere direttamente lo stato x_n a partire dalla condizione iniziale x_0 allora si dice che il modello dinamico è stato risolto in modo e-

splicito. Questo è ciò che accade, ad esempio, nel calcolo degli interessi in banca. Se oggi una somma di x_0 euro viene depositata in banca a un tasso di interesse fisso del 3%, tra un anno avremo, oltre al capitale iniziale x_0 , anche gli interessi maturati, cioè $x_1 = x_0 + r x_0 = (1+r)x_0$, dove $r = 3/100 = 0.03$ è il tasso di interesse. Dopo due anni avremo $x_2 = x_1 + r x_1 = (1+r)^2 x_0$, e così via. In altre parole, la legge di evoluzione del conto in banca è $x_n = (1+r)x_{n-1}$, una tipica legge lineare, la cui soluzione è la progressione geometrica $x_n = x_0(1+r)^n$. Quindi un impiegato di banca non avrebbe alcuna difficoltà a fornire una risposta chiara al cliente che gli chiedesse: se oggi deposito 1000 euro al 3% quanto avrò fra 10 anni?

Nel caso della funzione non lineare $f(x) = \sqrt{x}$, considerata sopra, abbiamo $x_1 = x_0^{1/2}$; $x_2 = x_1^{1/2} = x_0^{1/2^2}$; ... $x_n = x_0^{1/2^n}$ che tende a 1 se n va all'infinito. In effetti eravamo riusciti a intuire quale fosse il comportamento asintotico della successione generata anche in modo "sperimentale", ovvero iterando con la calcolatrice: partendo da qualunque $x_0 > 0$ si va sempre a convergere a 1, proprietà che si esprime dicendo che si tratta di un *attrattore* globalmente attrattivo.

Attraverso questi semplici esempi siamo probabilmente in grado di apprezzare la seguente affermazione di Pierre Simon de Laplace (1776), riferita alle leggi dei moti planetari, diventata il manifesto del determinismo:

Lo stato attuale del sistema della natura consegue evidentemente da quello che era all'istante precedente e se noi immaginassimo un'intelligenza che a un istante dato comprendesse tutte le relazioni fra le entità di questo universo, essa potrebbe conoscere le rispettive posizioni, i moti e le disposi-

zioni generali di tutte quelle entità in qualunque istante del futuro.

Ovviamente Laplace sapeva che la conoscenza delle diverse entità (quelle che ora chiamiamo variabili di stato) ad un certo istante non può essere ottenuta con infinita precisione, essendo il frutto di processi di misura. Tuttavia, come spesso si assume in base a regole di buon senso, Laplace considerava ovvio il fatto che una piccola incertezza nei valori delle condizioni iniziali avesse altrettanto piccole conseguenze nell'evoluzione del sistema, e quindi il calcolo dello stato futuro risultasse di poco alterato.

Ma con le funzioni non lineari la situazione può diventare molto più complicata, anche utilizzando uno dei più semplici esempi di non linearità, come l'elevamento al quadrato, per esempio $x_{n+1} = f(x_n) = x_n^2 - b$. In questo caso, se volessimo calcolare direttamente x_{10} in funzione di x_0 occorrerebbe calcolare un polinomio completo di grado 1024: infatti $x_1 = x_0^2 - b$ è di grado 2; $x_2 = x_1^2 - b = (x_0^2 - b)^2 - b = x_0^4 - 2bx_0 + b^2 - b$ di grado $2^2=4$, $x_3 = x_2^2 - b = (x_0^4 - 2bx_0 + b^2 - b)^2 - b$ di grado $2^3 = 8$ e così via fino a $2^{10} = 1024$.

In altre parole, il calcolo è perfettamente deterministico, e semplice, ad ogni iterazione, ma per conoscere ad esempio x_{50} occorre calcolare la funzione 49 volte, ed è difficile a priori sapere come andrà a finire. Facciamo qualche "esperimento numerico", ad esempio utilizzando una calcolatrice tascabile (tasto x^2 e poi si sottrae il parametro costante b). Con $b=0$ è facile rendersi conto che ci sono due punti fissi: $x=0$ (attraente) e $x=1$ (repulsivo) e l'iterazione converge a 0 se $x_0 \in (-1,1)$ altrimenti diverge a + infinito.

Se $b=1$ ci sono ancora due punti fissi, anche se non sono subito evidenti: in generale i punti fissi si possono calcolare imponendo la condizione di equilibrio $x_{n+1}=x_n$, cioè risolvendo l'equazione $x=f(x)$, che nel nostro caso diventa $x=x^2-1$, da cui si ottengono le soluzioni $(1-\sqrt{5})/2$ e $(1+\sqrt{5})/2$. Prendendo condizioni iniziali vicine a questi valori ci si può subito rendere conto che entrambi sono equilibri repulsivi e che, a seconda delle condizioni iniziali scelte, le successioni generate divergono oppure continuano ad oscillare avvicinandosi sempre più ad un ciclo periodico di periodo due, dato dall'alternarsi dei valori $\{-1,0\}$ (figura 2). In effetti, iniziando l'iterazione da uno di quei due valori, ad esempio $x=0$, si ottiene una sequenza perfettamente periodica: $x_1 = x_0^2 - 1 = -1$; $x_2 = x_1^2 - 1 = (-1)^2 - 1 = 0$; invece, partendo da $x_0 = 2$ si ottiene $x_1 = 2^2 - 1 = 3$; $x_2 = 3^2 - 1 = 8$ e poi valori sempre più grandi.

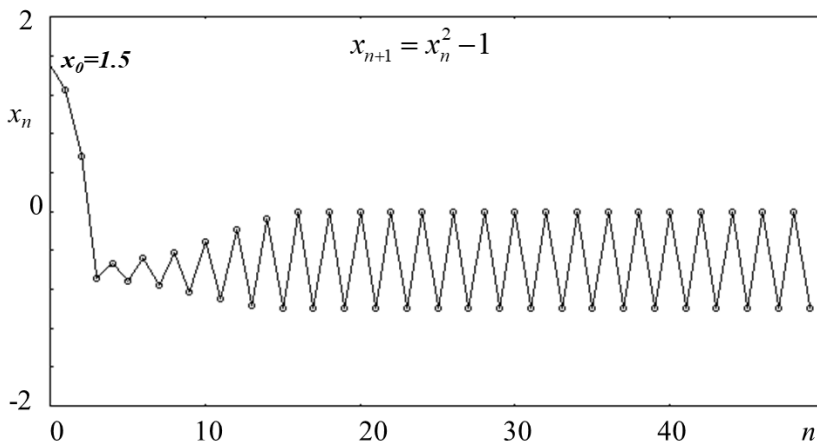


Fig. 2

3 - Il caos deterministico

Le cose sono ancor più complicate ponendo $b=2$. In questo caso, partendo dalla condizione iniziale $x_0=0.5$, si ottiene un andamento oscillatorio ma (almeno apparentemente) non periodico (figura 3). L'andamento ottenuto risulta talmente irregolare che se non conoscessimo il procedimento con cui l'abbiamo generato potremmo pensare che sia stato ottenuto prendendo una sequenza di valori estratti a caso nell'intervallo $[-2,2]$.

C'è poi un altro problema, legato all'effetto di una piccola variazione della condizione iniziale. Nella figura 3 in basso è rappresentata la traiettoria che si ottiene modificando leggermente la condizione iniziale, precisamente prendendo $x_0=0.499$ anziché $x_0=0.5$. Come si può facilmente notare, questa differenza dello 0.2% produce dapprima dei valori quasi uguali nel corso delle prime 10 iterazioni, ma poi i valori che si susseguono si discostano sempre di più da quelli della prima successione, fino a perdere ogni correlazione fra i valori delle due sequenze. Questa è l'essenza del caos deterministico.

Considerando il fatto che in un sistema reale (della fisica, biologia o scienze sociali) non esiste la possibilità di effettuare misure infinitamente precise, si deduce che la capacità di effettuare previsioni mediante modelli dinamici non lineari in regime caotico è piuttosto limitata.

Ed è proprio questa proprietà a creare stupore: pur essendo lo schema iterativo così semplice e perfettamente deterministico (ogni valore è ottenuto calcolando il quadrato del precedente e sottraendo 2) risulta molto difficile ottenere due sequenze identiche, in quanto minime differenze fra le condi-

zioni iniziali possono anche essere introdotte a causa della precisione limitata con cui vengono rappresentati i numeri.

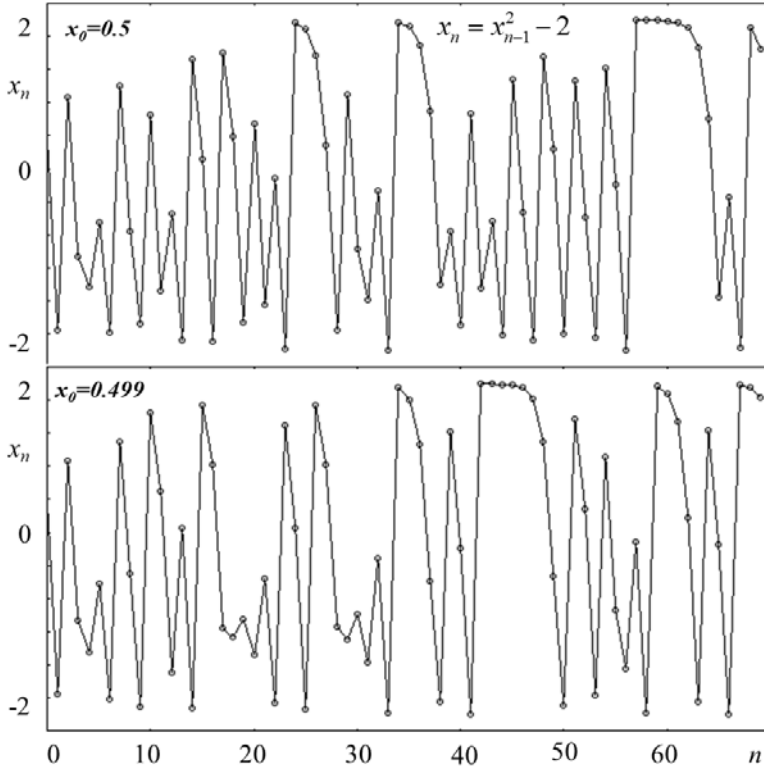


Fig. 3

Siamo quindi ben lontani dalla visione di Laplace, che comunque è vera nel caso di sistemi dinamici lineari, e anche non lineari purché lontani dai regimi di comportamento caotico. Infatti, in condizioni di convergenza a un punto di equilibrio stabile (come in figura 1) o a un ciclo periodico (come in figura 2) piccole perturbazioni non comportano grandi conseguenze nel comportamento del sistema nel lungo periodo.

Questo è ciò che ci si aspetta in ogni sistema che evolve in modo regolare: se lo stato di un sistema viene leggermente perturbato ci aspettiamo che il conseguente cambiamento che si osserverà nell'evoluzione successiva del sistema sia anch'esso piccolo, o per lo meno proporzionale alla perturbazione introdotta. Invece Poincaré (1908) scriveva:

Una causa piccolissima che sfugga alla nostra attenzione determina un effetto considerevole che non possiamo mancare di vedere, e allora diciamo che l'effetto è dovuto al caso. Se conoscessimo esattamente le leggi della natura e la situazione dell'universo all'istante iniziale, potremmo prevedere esattamente la situazione dello stesso universo in un istante successivo. Ma se pure accadesse che le leggi naturali non avessero più alcun segreto per noi, anche in tal caso potremmo conoscere la situazione iniziale solo approssimativamente. Se questo ci permettesse di prevedere la situazione successiva con la stessa approssimazione, non ci occorrerebbe di più e dovremmo dire che il fenomeno è stato previsto. Ma non è sempre così; può accadere che piccole differenze nelle condizioni iniziali ne producano di grandissime nei fenomeni finali. Un piccolo errore nelle prime produce un errore enorme nei secondi. La previsione diviene impossibile ...

La rivoluzione scientifica provocata dalla scoperta del caos deterministico comincia però a manifestarsi solo negli anni Sessanta, quando il meteorologo Edward Lorenz ritrova questi risultati studiando modelli dinamici costituiti da equazioni differenziali, che venivano risolte numericamente per descrivere i movimenti di masse d'aria nell'atmosfera. Secondo il racconto riportato nel libro divulgativo *Chaos* di James Gleick (1987) Lorenz scoprì accidentalmente il comportamento caotico delle soluzioni nel 1961, quando analizzando lunghe sequenze di numeri che rappresentavano gli andamenti delle variabili utilizzate per le previsioni del tempo, un giorno provò a ripetere una di queste simulazioni iniziando però da

un valore intermedio ricopiato dai tabulati ottenuti in precedenza. Lorenz si accorse che la nuova sequenza ottenuta differiva in modo significativo dalla precedente, fino a non percepire più alcuna somiglianza fra le due. All'inizio pensò a un malfunzionamento del computer, ma poi si rese conto che il problema era legato al fatto che non aveva immesso le condizioni iniziali con sufficiente precisione: il computer utilizzava nei calcoli numeri con sei cifre decimali, mentre i risultati venivano stampati con tre cifre decimali soltanto, e Lorenz aveva utilizzato questa precisione ridotta per ripetere le simulazione numerica.

Lorenz si appassionò a questo fenomeno, e lo ricollegò agli studi di Poincaré, che citò nel suo articolo *Deterministic Nonperiodic Flow* del 1963. Comunque l'attenzione dei non specialisti fu attratta soprattutto dal titolo della sua comunicazione in un convegno del 1972: *Does the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas? (Il battito di ali di una farfalla in Brasile può provocare un tornado in Texas?)*. Dopo questo efficace titolo, il termine "effetto farfalla" (butterfly effect) è diventando un'espressione ricorrente per indicare il fenomeno della dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali.

Ovviamente il fatto che il caos deterministico sia stato osservato proprio nel contesto delle previsioni meteorologiche ha favorito la sua diffusione e popolarità anche fra i non specialisti, tanto che lo troviamo sempre più spesso citato nei quotidiani, al cinema, nei romanzi, a teatro. Come esempio riportiamo le parole di Ian Malcom, il matematico protagonista del popolare romanzo *Jurassic Park* di Michael Crichton (1990):

I computer vennero costruiti verso la fine degli anni 40, perché matematici come John Von Neumann, il massimo matematico della sua generazione, pensavano che avendo a disposizione una macchina capace di gestire contemporaneamente molte variabili, si sarebbe stati in grado di fare previsioni meteorologiche a lungo termine. [...]. La teoria del caos manda all'aria tutto questo, non si può prevedere il tempo se

non per pochi giorni. [...] Tutto il denaro speso per previsioni meteorologiche a lungo termine - circa mezzo miliardo di dollari negli ultimi decenni - è buttato via. È un'impresa vana quanto cercare di trasformare il piombo in oro. Oggi gli sforzi degli alchimisti ci fanno ridere, ma generazioni future guarderanno noi e rideranno nello stesso modo.

Ovviamente il fenomeno dell'effetto farfalla non è nuovo, tutti constatiamo come nella realtà piccoli eventi possono avere enormi ripercussioni. Fatto evidenziato anche da tanti storici, scrittori, poeti. Un esempio di particolare efficacia e chiarezza lo troviamo nel seguente brano di Edgar Allan Poe, tratto da *Il mistero di Marie Rogêt* (1842):

Per quanto riguarda l'ultima parte della supposizione, si dovrà considerare che la più insignificante differenza nei fatti delle due vicende potrebbe dar luogo ai più importanti errori di calcolo, facendo divergere radicalmente le due sequenze dei fatti; proprio come in aritmetica un errore che in sé non ha valore, alla fine, moltiplicandosi da un punto all'altro del procedimento, produce un risultato lontanissimo dal vero.

La vera novità consiste nell'aver inglobato questo concetto all'interno di un settore della matematica e di aver mostrato che comportamenti apparentemente caotici possono essere generati anche da modelli dinamici molto semplici e perfettamente deterministici.

4 - Un metodo grafico per iterare funzioni

Per capire meglio il comportamento qualitativo delle successioni generate dall'iterazione di una funzione, senza ricor-

rere a calcoli numerici, si può utilizzare un comodo metodo grafico basato sulla conoscenza della curva che rappresenta la funzione sul piano cartesiano. Infatti, l'esistenza e la stabilità dei punti di equilibrio possono essere facilmente dedotti mediante la rappresentazione del grafico della funzione iterata, e lo studio delle modificazioni nella forma del grafico, indotte da variazioni dei valori di eventuali parametri presenti nell'espressione della funzione, può fornire importanti indicazioni su eventuali drastici cambiamenti negli andamenti delle successioni generate. Tali cambiamenti sono spesso chiamati biforcazioni, e rappresentano uno di principali temi nello studio dei sistemi dinamici.

Consideriamo il grafico di una generica funzione $y=f(x)$, come in figura 4, e sovrapponiamo ad esso il grafico della bisettrice $y=x$. Per calcolare $x_1 = f(x_0)$ seguiamo l'usuale metodo per ottenere l'immagine di un punto mediante una funzione: prendiamo la condizione iniziale x_0 sull'asse delle ascisse, tracciamo un segmento verticale fino a incontrare il grafico della funzione, e poi procediamo in orizzontale fino all'asse delle ordinate per ottenere x_1 . Per procedere nell'iterazione occorre ora riportare x_1 sull'asse delle ascisse, in quanto dovrà diventare il nuovo argomento della funzione per ottenere $x_2 = f(x_1)$. Questo può essere ottenuto sfruttando la presenza della bisettrice, che essendo il luogo di equazione $y=x$ permette di riportare x_1 sull'asse orizzontale mediante uno spostamento orizzontale verso destra e poi uno verticale verso il basso, usando la bisettrice come punto di svolta (figura 4). Ora siamo pronti a ripetere lo stesso procedimento per ottenere $x_2=f(x_1)$ e così via. Si può notare l'inutilità dei segmenti tratteggiati, cioè del segmento orizzontale che congiunge il grafico della fun-

zione con l'asse delle ordinate, che viene subito ripercorso all'indietro verso la bisettrice, e i segmenti verticali tra il grafico e l'asse delle ascisse. Questo permette di ottenere un'ulteriore semplificazione: si può usare la bisettrice come unico asse di riferimento, prendendo direttamente su di essa la condizione iniziale e muovendosi in verticale fino al grafico, poi in orizzontale verso la bisettrice, poi di nuovo in verticale fino al grafico ecc. I punti toccati sulla bisettrice sono i punti della successione generata. Tutto ciò viene fatto in modo grafico, senza effettuare calcoli. Questa costruzione viene anche chiamata diagramma a scala o a ragnatela, nome più appropriato quando vengono iterate funzioni decrescenti, come nel pannello a destra nella figura 4.

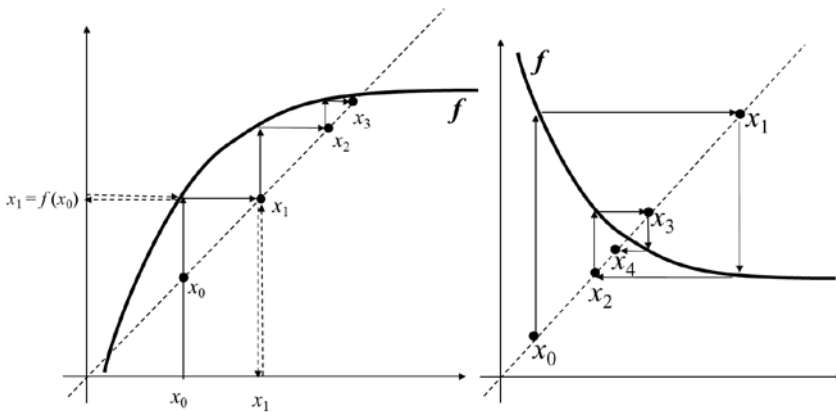


Fig. 4

Applichiamo ora questo metodo alla funzione $f(x)=x^2-b$, le cui iterazioni sono state studiate nel paragrafo precedente. Il suo grafico è una parabola convessa, simmetrica rispetto all'asse delle ordinate e con vertice in $(0,-b)$, si veda fig.5. Nella

figura di sinistra, ottenuta con il valore del parametro $b=0$, sono rappresentate, mediante il diagramma a scala, due traiettorie: una inizia da $x_0=0.7$ e converge al punto di equilibrio attrattivo $p^*=0$, l'altra inizia da $x_0=-1.1$ e, dopo aver "scavalcato" il punto di equilibrio repulsivo $q^*=1$ diverge a $+\infty$. Disegnando alcuni diagrammi a scala ci rendiamo facilmente conto che i due equilibri si comportano diversamente, nel senso che da una condizione iniziale in un intorno di q^* la traiettoria si allontana da esso, mentre partendo da una condizione iniziale vicina a p^* la traiettoria generata gli si avvicina asintoticamente. La differenza fra i due equilibri si può capire osservando la pendenza con cui il grafico della funzione attraversa la bisettrice in corrispondenza dei punti fissi: in q^* la pendenza è superiore a quella della bisettrice, cioè il coefficiente angolare della retta tangente al grafico è maggiore di 1, e quindi in un intorno del punto fisso $q^*=f(q^*)$ si comporta come una funzione lineare di ragione maggiore di 1 (una progressione geometrica espansiva) essendo $f(x)=2x$ e quindi $f'(1)=2$. Applicando lo stesso ragionamento all'equilibrio p^* (dove la pendenza è addirittura 0) possiamo dire che l'approssimazione lineare della funzione in un suo intorno si comporta come una progressione geometrica contrattiva, essendo il coefficiente angolare della tangente minore di uno in valore assoluto. Un discorso analogo può essere fatto nella situazione rappresentata nella figura di destra, ottenuta per $b=0.5$. In questo caso la pendenza della tangente nel punto fisso p^* è negativa e possiamo notare un diagramma a ragnatela convergente, ovvero una convergenza attraverso oscillazioni smorzate. In effetti, essendo $p^*=(1-\sqrt{3})/2$ la pendenza in esso è data da

$f(p^*)=2p^*= (1-\sqrt{3})$, quindi $-1 < f'(p^*) < 0$. Comunque in entrambe le situazioni presentate in fig.2 la stabilità di p^* è locale, in quanto si ha convergenza solo per le traiettorie che partono da condizioni iniziali prese sufficientemente vicine all'equilibrio. Una domanda spontanea che sorge è "quanto vicine?". Questo porta al concetto di bacino di attrazione definito come l'insieme dei punti che generano traiettorie convergenti a un dato attrattore. Nel nostro caso il bacino è delimitato a destra dal punto fisso repulsivo q^* e a sinistra dalla sua preimmagine, indicata con q_{-1}^* in figura 5, dove la preimmagine è definita come un punto tale che $f(q_{-1}^*) = q^*$ (linea tratteggiata in figura 5). Si hanno quindi due tipi di dinamiche asintotiche a seconda della condizione iniziale: se $x_0 \in]q_{-1}^*, q^*[$ allora la traiettoria converge all'equilibrio p^* , mentre se $x_0 > q^*$ oppure $x_0 < q_{-1}^*$ la traiettoria diverge. Entrambi i valori di equilibrio, così come la pendenza della tangente in essi, dipendono dal parametro b : se questo aumenta il grafico della funzione in corrispondenza del punto fisso p^* diventa via via più ripido, fino a che la pendenza raggiunge il valore -1 , cioè la tangente diventa perpendicolare alla bisettrice. Questo accade per $b = 3/4$, essendo $p^* = -1/2$ e $f'(-1/2) = -1$.

Se b aumenta ulteriormente il punto fisso p^* da attrattivo diventa repulsivo, e si dice che $b = 3/4$ costituisce un valore di biforcazione. Ma la perdita di attrattività di p^* non è l'unica conseguenza della biforcazione.

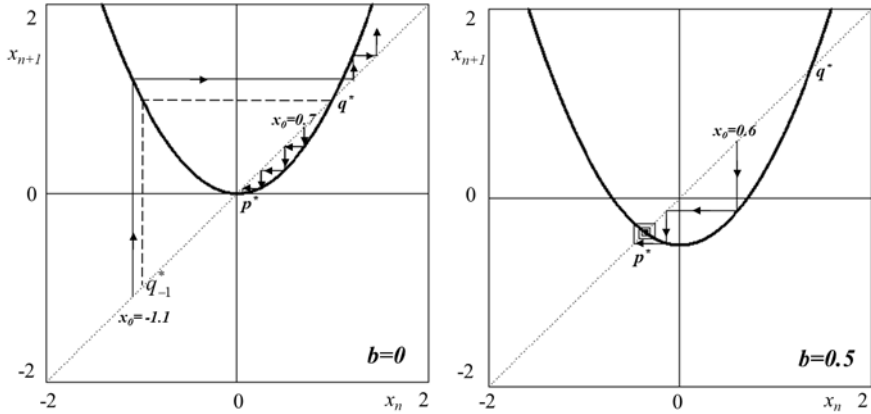


Fig. 5

Infatti, se esaminiamo il comportamento delle traiettorie per valori di b poco maggiori di $3/4$ e con condizione iniziale prossima a p^* ci rendiamo conto che la traiettoria si allontana da p^* oscillando, e tende asintoticamente a una oscillazione fra due punti periodici. Si veda ad esempio il pannello a sinistra nella figura 6, ottenuta per $b=1$, dove il ciclo periodico è costituito dai punti $\{-1,0\}$. Partendo da uno di questi due punti la traiettoria continua a saltellare tra essi, essendo $f(-1) = 0$ e $f(0) = -1$ e allo stesso ciclo di periodo due tende asintoticamente ogni traiettoria che parte da una condizione iniziale $x_0 \in]q^*, q_{-1}^*[$, esclusa $x_0 = p^*$, naturalmente. Questo tipo di biforcazione si chiama “biforcazione con raddoppio del periodo” o, più brevemente, “biforcazione flip”. Per capire meglio quello che accade, consideriamo la funzione composta $f^2(x) = f(f(x))$, il cui grafico è mostrato in figura 6 a destra. Poiché $f^2(x)$ è un polinomio di quarto grado, il suo grafico può avere fino a 4 intersezioni con la bisettrice, ossia quattro punti fissi, di cui due sono necessariamente gli stessi di $f(x)$, ossia q^* e p^* , mentre al-

tri punti fissi di $f^2(x)$ corrispondono ai punti periodici del ciclo, essendo $f^2(0) = f(f(0)) = f(-1) = 0$ e, analogamente, $f^2(-1) = -1$. In effetti, iterare la mappa $f^2(x)$ significa generare stati del sistema "a salti di 2", e quindi un ciclo di periodo 2 per la f rappresenta per la funzione f^2 un punto fisso.

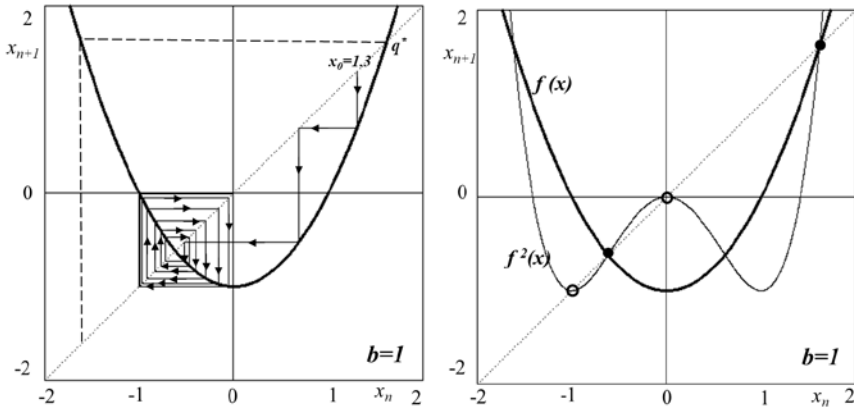


Fig. 6

Aumentando ulteriormente il parametro b anche la pendenza di f^2 in corrispondenza dei due punti periodici raggiungerà il valore -1 per $b=5/4$. (detti α e β i due punti periodici, la pendenza in essi sarà la stessa essendo, per la regola di derivazione delle funzioni composte, $f^{2'}(\alpha) = f'(f(\alpha))f'(\alpha) = f'(\beta)f'(\alpha)$ e anche $f^{2'}(\beta) = f'(f(\beta))f'(\beta) = f'(\alpha)f'(\beta)$). Questo produce un'altra biforcazione flip che fa diventare repulsivo il ciclo di periodo 2 con conseguente creazione di un ciclo attrattivo di periodo 4, formato da 4 punti fissi di f^4 , che diventa l'attrattore "di turno" (si veda figura 7 a sinistra, ottenuta per $b = 1.3$ e cancellando le prime 50 iterazioni, il cosiddetto "transitorio", in modo da vedere solo il ciclo finale). Analogamente,

aumentando ancora b , il ciclo 4 diventerà instabile lasciando il posto a un ciclo 8 attrattivo e così via. E' naturale chiedersi se si raggiungerà un ciclo di periodo massimo dopo il quale le biforcazioni di raddoppio periodo finiranno, o se i raddoppi continueranno all'infinito. Inoltre, come notato in precedenza, per $b=2$ le iterazioni sembrano non assestarsi mai su un ciclo periodico e il diagramma a ragnatela continua a ricoprire in modo apparentemente erratico il piano (figura 7 a destra).

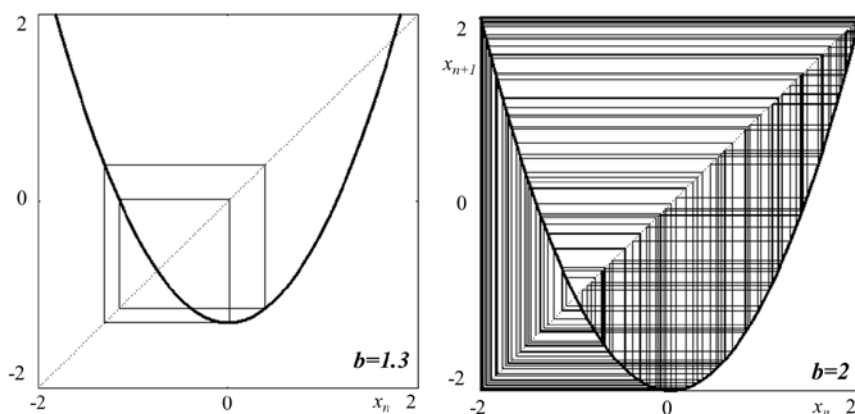


Fig. 7

5 - La geometria del caos e degli attrattori strani

Una funzione lineare $f(x)=ax$ può essere anche esaminata come una trasformazione che muta segmenti in altri segmenti, producendo contrazioni o allungamenti. Consideriamo ad esempio un segmento $s= AB$ rappresentato sull'asse delle ascisse dalla porzione di estremi x_A e x_B . La sua lunghezza è data da $\overline{AB}=(x_B-x_A)$. Applicando la trasformazione lineare $x'=ax$ a

tutti i punti di AB si ottiene un segmento di estremi $x'_A = ax_A$ e $x'_B = ax_B$. Notiamo che se $a > 0$ il segmento ottenuto è dato da $A'B'$ e ha lunghezza $\overline{A'B'} = (x'_B - x'_A) = a(x_B - x_A)$. Questo significa che il segmento risulta allungato (o dilatato) se $a > 1$, accorciato (o contratto) se $a < 1$, e la trasformazione viene chiamata, rispettivamente, *contrazione* e *dilatazione*. Se il coefficiente angolare $a < 0$ allora il segmento viene anche ribaltato, ossia l'immagine di x_B precede l'immagine di x_A , e il segmento trasformato risulta essere $B'A'$, di lunghezza $\overline{B'A'} = (x'_A - x'_B) = |a|(x_B - x_A)$, dove il simbolo $|a|$ indica il valore assoluto del coefficiente angolare. Ciò significa che per $-1 < a < 0$ la trasformazione lineare provoca un *ribaltamento e contrazione* del segmento, per $a < -1$ si ha un *ribaltamento con dilatazione*. Possiamo dedurre che l'applicazione ripetuta di una mappa lineare contrattiva porta alla successiva riduzione di un segmento fino a farlo collassare in un punto, mentre l'iterazione di una dilatazione lineare allunga sempre più il segmento facendolo crescere a dismisura.

Se invece consideriamo un'applicazione non lineare, come la parabola $y = x^2 - b$, questa agisce su un segmento allungandolo in certe zone e comprimendolo in altre, e se il segmento considerato include il vertice della parabola lo ripiega anche. Due punti in posizione simmetrica rispetto al vertice della parabola, ad esempio $x_A = -1$ e $x_B = 1$, vengono trasformati nello stesso punto, essendo $f(-1) = f(1) = 1 - b$. Questo può essere espresso dicendo che il segmento $AB = [-1, 1]$ viene ripiegato dalla funzione portando a coincidere i suoi estremi. Alla seconda iterazione tali azioni vengono di nuovo applicate e così via.

Avviene quindi che l'applicazione ripetuta della funzione di secondo grado su un segmento può essere vista come l'applicazione successiva di azioni di stiramento, piegamento, compressione. L'effetto combinato di queste azioni è possibile solo con mappe non lineari, in quanto, come abbiamo fatto notare sopra, una funzione lineare o dilata o contrae (ma non entrambe le cose contemporaneamente) e non può certo causare piegamenti.

L'essenza del caos risiede proprio nell'applicazione ripetuta di queste azioni geometriche. Spesso viene usata la metafora dell'azione geometrica che si esercita sull'impasto della sfoglia: infatti la principale caratteristica geometrica delle trasformazioni che generano successioni caotiche consiste in azioni combinate (e ripetute durante l'iterazione) di stiramento e ripiegamento (*stretching & folding*).

Consideriamo ora un esempio di trasformazione nel piano cartesiano, rappresentata da due funzioni che trasformano punti del piano in nuovi punti del piano mediante la legge $(x', y') = (f(x, y), g(x, y))$. Dato un punto del piano cartesiano, rappresentato dalla coppia di coordinate (x, y) , se ne genera un altro, (x', y') , applicando una trasformazione del piano in sé. Se poi al punto così ottenuto si applica di nuovo la stessa funzione si ottiene un terzo punto, e così via. Si ottiene così, in modo induttivo o iterativo una successione di punti del piano $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (f(x_n, y_n), g(x_n, y_n))$, dove il pedice n è in pratica un contatore di passi, o iterazioni, partendo dalla condizione iniziale (x_0, y_0) , detta anche punto seme o condizione iniziale.

È interessante chiedersi dove andrà a finire questa successione di punti, cioè il suo comportamento asintotico. Consideriamo ad esempio la trasformazione $(x_{n+1}, y_{n+1}) = T(x_n, y_n) =$

$(ax_n + y_n, b + x_n^2)$, dove a e b sono due parametri reali. Fissati i valori dei parametri a e b e dato un punto iniziale di coordinate (x_0, y_0) , i punti ottenuti mediante applicazioni successive della trasformazione T creano una nuvola di punti nel piano. Tali punti potrebbero convergere verso un punto di equilibrio, o un ciclo periodico (cioè una sequenza finita di punti del piano che si ripete) oppure annerire una regione del piano senza ripercorrere mai lo stesso punto, un cosiddetto attrattore caotico del piano.

Si può notare che applicando la trasformazione T ai due punti distinti si potrebbe ottenere lo stesso punto immagine: ad esempio con $a=0.5$ e $b=-2$ i punti $P_1=(-2,2)$ e $P_2=(2,0)$ vengono trasformati nello stesso punto: $T(P_1)=T(P_2)=(1,2)$. In altre parole, si tratta di una trasformazione del piano in grado di trasportare due punti distinti nello stesso punto. Da un punto geometrico questo può essere interpretato dicendo che la trasformazione “ripiega” il piano su se stesso fino a portare punti distinti a sovrapporsi. Proprio come quando si piega e si stira un fazzoletto. È per questo che gli attrattori caotici generati attraverso l’iterazione di una trasformazione come quella considerata assumono spesso una forma che richiama quella di veli ripiegati su se stessi, come quello mostrato in figura 8, ottenuto iterando la trasformazione T con parametri $a=-0.42$ e $b=-1.6$.

Partendo dalla condizione iniziale $(0,0)$ il punto successivo è $(0,-1.6)$ e poi da questo otteniamo $(-1.6,-1.6)$. I primi 10 punti generati in questo modo sono mostrati nel pannello di sinistra della figura 8. Essi si sparpagliano sul piano, muovendosi senza un ordine apparente. Inoltre, iniziando con una condizione iniziale di poco diversa da $(0,0)$, ad esempio $(0,$

0.01) ci si rende ben presto conto che la nuova successione differisce dalla precedente con uno scarto fra i corrispondenti punti ottenuti ben superiore.

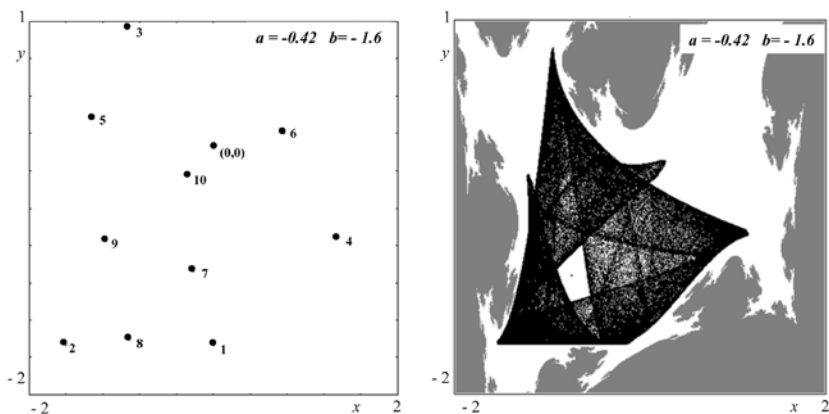


Fig. 8

Infatti, partendo dalla prima, dopo 30 iterazioni otteniamo $(x_{30}, y_{30}) = (-0.35, -1.18)$ mentre con la seconda condizione iniziale si ottiene $(x_{30}, y_{30}) = (1.14, -0.68)$, un evidente esempio di sensibilità rispetto alle condizioni iniziali.

Ma una ulteriore sorpresa arriva continuando a iterare, quando la nuvola inizialmente disordinata di punti inizia ad assumere, mano a mano che il numero di punti cresce, una forma ben definita, con contorni netti e una struttura geometrica simile a veli ripiegati, come mostrato nel pannello di destra di Figura 8, ottenuto continuando la successione di punti i cui passi iniziali sono mostrati nel pannello di sinistra fino a raggiungere centomila iterazioni (una questione di pochi se-

condi utilizzando un computer). Partendo da qualunque punto della zona bianca, preso come condizione iniziale, dopo pochi passi iniziali la successione di punti così ottenuta entra nella zona identificata dal velo ripiegato in figura e iterando si annerisce sempre di più la stessa identica forma. Si tratta pertanto di una struttura stabile, detta attrattore, che “cattura” tutte le traiettorie che iniziano da un dato bacino di attrazione, rappresentato appunto dalla regione bianca in figura. Le condizioni iniziali prese nella regione grigia generano invece successioni divergenti, ovvero punti che si allontanano indefinitamente e non tornano più indietro. Come si può vedere, il confine che separa i due bacini è molto frastagliato, con una struttura che mostrerebbe dettagli sempre più minuti se si considerassero ingrandimenti, con proprietà di autosimilarità (o omotetia interna) tipiche delle curve frattali, si vedano su questo punto i volumi di Mandelbrot citati nella bibliografia e l’enorme letteratura da questi generata.

Esistono altri tipi di attrattori, come un semplice punto di equilibrio, detto anche *punto fisso* in quanto prendendo su di esso la condizione iniziale le iterazioni non fanno altro che ripetere il medesimo punto, come accade per il punto di coordinate $(-0.7406, -1.0516)$ che sta al centro del “buco” dell’attrattore di figura 8. Quel punto fisso però è instabile, cioè partendo da una condizione iniziale non perfettamente coincidente con esso, sebbene vicinissima, la successione generata si allontanerà, come se ne venisse respinta. Simili equilibri sono anche detti repulsivi. Occorre cambiare i valori dei coefficienti della funzione per ottenerne uno attrattivo. Assegnando ai coefficienti a e b valori diversi (ma mantenendoli poi costanti durante il processo di iterazione) si possono otte-

nere diversi tipi di attrattori. Ad esempio, con $a=0.7$ e $b=-0.3$ si ottiene un punto di equilibrio stabile (figura 9, sinistra) verso il quale convergono tutte le successioni generate dalle condizioni iniziali contenute nel suo bacino di attrazione, rappresentato dalla regione bianca, mentre partendo da una condizione iniziale presa nella regione grigia la successione di punti che viene generata risulterà essere divergente.

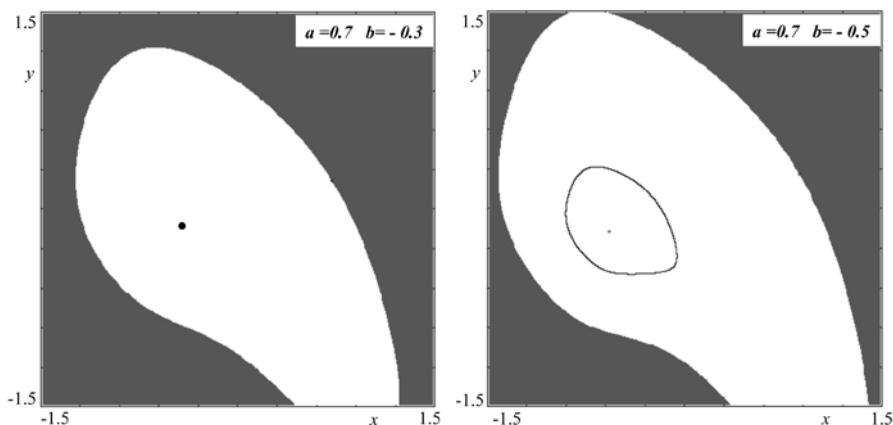


Fig. 9

È evidente che assegnando ai parametri valori diversi si ottengono diversi attrattori. I parametri diventano cioè delle manopole, o dei cursori, al cui variare si modifica la forma dell'attrattore di turno e del relativo bacino di attrazione. Talvolta si tratta di piccoli cambiamenti che non alterano le proprietà topologiche delle forme ottenute, altre volte invece piccole variazioni dei parametri possono provocare drastici cambiamenti di tali forme, e allora si dice che si verifica una biforcazione. Ad esempio, diminuendo il parametro b l'equilibrio perde stabilità e diventa repulsivo, con la simultanea compar-

sa di una curva chiusa che lo circonda verso la quale vengono attratte tutte le successioni che nascono nella regione bianca (pannello destro in figura 9, dove $b=-0.5$) che poi continuano a muoversi lungo quella curva indefinitamente. Diminuendo ancora il parametro b la curva si ingrandisce e cambia forma (Figura 10 a sinistra, ottenuta con $b=-0.7$). L'attrattore diventa poi un ciclo periodico di periodo 11 per $b=-0.75$, come mostrato nel pannello destro in figura 10. In questo caso, partendo da uno qualsiasi di quegli 11 punti ci si ritorna dopo esattamente 11 iterazioni, dopodiché la sequenza degli 11 valori si ripete indefinitamente, sempre uguale.

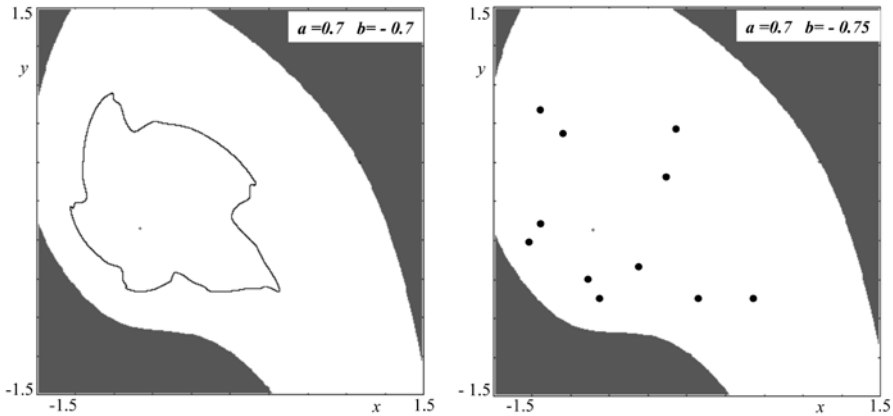


Fig. 10

Ma le sorprese non finiscono qui: muovendo ancora la “manopola b ” ci si “sintonizza” su attrattori via via differenti, a volte persino su più attrattori simultaneamente, ciascuno col suo bacino di attrazione. È quanto accade nelle situazioni mo-

strati in figura 11, ottenute con la stessa funzione esplorando diversi range di parametri.

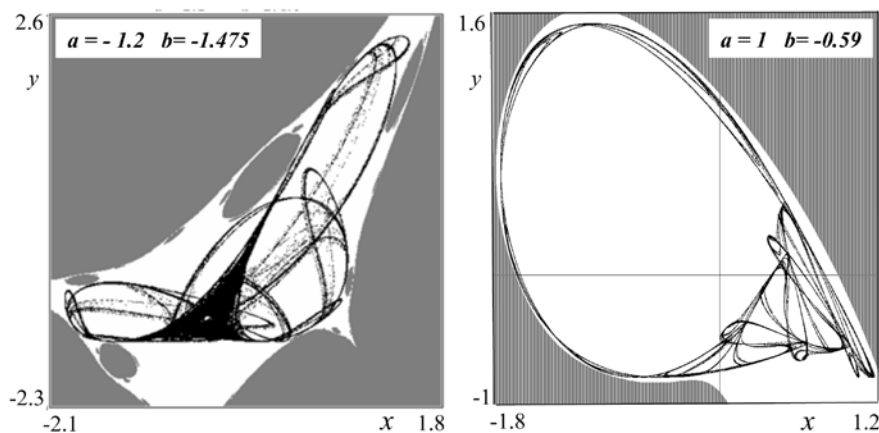


Fig. 11

6 - Conclusioni

In questo articolo abbiamo mostrato cosa significhi adottare un approccio sperimentale verso le proprietà matematiche delle successioni definite mediante formule ricorsive, ovvero generate induttivamente iterando una data funzione di una variabile, che trasforma punti della retta in altri punti della retta, o trasformazioni del piano cartesiano in sé. Si tratta di un modo stimolante, e per certi aspetti anche divertente, di ottenere oggetti matematici con curiose proprietà geometriche, che vanno poi studiate, interpretate e catalogate. Lo strumento che ci consente una simile esplorazione è una calcolatrice tascabile o un computer. Le forme e le qualità estetiche degli at-

trattori così ottenuti hanno stimolato la curiosità e la fantasia di tanti operatori che fossero in grado di scrivere o semplicemente utilizzare dei brevi programmi software in grado di eseguire gli esperimenti numerici sopra descritti.

Bibliografia

Alligood, K.T., Sauer, T.D., Yorke, J.A. (1997). *Chaos. An introduction to dynamical systems*. New York : Springer-Verlag,.

Bertuglia C.S., Vaio, F. (2003). *Non linearità, caos e complessità*, Torino: Bollati Boringhieri.

Bischi G.I., Carini R., Gardini L., Tenti P. (2004). *Sulle Orme del Caos. Comportamenti complessi in modelli matematici semplici*. Milano: Bruno Mondadori Editore.

Bischi G.I. (2008). " Dalle funzioni iterate al caos deterministico" «Nuova Secondaria», Editrice La Scuola, Brescia, n. 3, 15 novembre 2008, pp. 28-32.

Crichton M. (1990). *Jurassic Park*, Alfred A. Knopf (Ed. Italiana, Garzanti 1990)

Devaney R.L. (1990). *Caos e frattali. Matematica dei sistemi dinamici e applicazioni al calcolatore*. Addison Wesley Longman Italia.

Gleick J. (1987). *Chaos. The amazing science of the unpredictable*, Penguin. (trad. it. *Caos. La nascita di una nuova scienza*, Sansoni, Firenze, 1996).

Guckenheimer J., Holmes P. (1983). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Berlin: Springer.

Laplace, P. S. ([1776]-1820). *Théorie analytique des probabilités*. Paris: V. Courcier.

Lorenz E.N. (1963) "Deterministic non-periodic flow". «*Journal of the Atmospheric Sciences*», 20, 130-141.

Lorenz E.N. (1972) "Does the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas?" Articolo presentato al 139° meeting dell' American Association for the Advancement of Science.

May R.M. (1976) "Simple mathematical models with very complicated dynamics". «*Nature*»261, 459-467.

Mandelbrot B. (1987) *Gli oggetti frattali: forma, caso e dimensione*. Torino: Einaudi.

Mandelbrot B. (1982). *The Fractal Geometry of Nature*. New York: W.H. Freeman & Co.

Mira C., Gardini L., Barugola A. Cathala J.C. (1996). *Chaotic Dynamics in Two-Dimensional Noninvertible Maps*. Singapore: World Scientific,.

H.O. Peitgen, P.H. Richter (1987). *La bellezza dei frattali*. Torino: Bollati Boringhieri.

Peitgen, H.O., Jürgens, H., Saupe, D. (1992) "Chaos and Fractals. New Frontiers of Science", Springer-Verlag, New York.

Poincaré, H. (1908). *Science et Méthode*. Ed. It. da cui è tratto il passo citato: "Scienza e metodo", Einaudi 1997, pag.56.

Poe, E.A.(1842) "*The mystery of Marie Rogêt*", Ed. It. "I racconti del mistero e del raziocinio, Garzanti, 1989.

Ruelle D. (1992). *Caso e Caos*, Torino: Bollati Boringhieri.

Ruelle, D. and F. Takens (1971). "On the nature of turbulence". *Communications of Mathematical Physics* 20: 167-192.

Stewart, I. (2002). *Does God Play Dice: The New Mathematics of Chaos*. Second Edition, Blackwell Publishers Inc., Malden, MA.

Proprietà degli insiemi del V ordine contenenti punti dello spazio

Franco Francia*

*Docente attualmente in pensione; franco.francia40@virgilio.it



DOI: 10.53159 /PdM(IV).v5n4.123

Sunto: *L'articolo inizia considerando il caso di due coppie di punti. (A,B) e (C,D) appartenenti, rispettivamente, a due rette ortogonali del piano; successivamente viene esaminato il caso di due punti M e N , appartenenti ad una retta ortogonale ad un piano individuato da una terna di punti S,H,T . Nel primo caso le condizioni di perpendicolarità sono evidenziate utilizzando l'insieme completo di quarto grado il cui sostegno è A,B,C,D ; analogamente, nel secondo caso, le condizioni di perpendicolarità sono evidenziate esaminando l'insieme completo di quinto grado il cui sostegno è l'insieme di punti dello spazio: (M,N,S,H,T) . In entrambi i casi risulta evidente come gli insiemi dei punti materiali permettano di rappresentare sinteticamente, con facilità, la questione geometrica trattata.*

Parole Chiave: *Insiemi completi del V ordine nello spazio. Proiezione ortogonale di un punto. Insieme di punti materiali contenenti ortogonalità. Proprietà invariante degli insiemi completi.*

Abstract: *The article begins by considering the case of two pairs of points. (A,B) and (C,D) belonging, respectively, to two orthogonal lines in the plane; then the case of two points M and N , belonging to an orthogonal line to a plane*

identified by a triplet of points S,H,T , is examined. In the first case, the perpendicularity conditions are evidenced by using the complete set of fourth degree whose support is A,B,C,D ; similarly, in the second case, the perpendicularity conditions are evidenced by examining the complete set of fifth degree whose support is the set of points in space: (M, N, S, H, T) . In both cases, it is evident how the sets of material points make it easy to succinctly represent the under consideration geometric question.

Keywords: Complete sets of 5th order in space. Orthogonal projection of a point. Set of material points containing orthogonality. Invariant property of complete sets.

1 - Proiezioni ortogonali sulla retta

Nota 1. Ricordiamo che un punto materiale: $m \cdot P$, è rappresentato mediante un numero reale m , detto massa del punto, associato ad una lettera P , detta posizione del punto. Ricordiamo, inoltre, che il richiamo a TH.12 si riferisce al dodicesimo teorema (Francia, 2020).

Def. 1. Diciamo che due punti P e Q sono simmetrici rispetto ad un centro H se H è il punto medio di P e Q .

Def. 2. Siano A e B due punti della retta r che divide il piano π nei semipiani π^+ e π^- . I punti P e Q , appartenenti, rispettivamente, ai semipiani opposti π^+ e π^- , sono detti simmetrici rispetto a (A,B) se $d(P,A) = d(Q,A)$, $d(P,B) = d(Q,B)$.

TH. 1. Se i punti P e Q sono simmetrici rispetto a (A,B) , allora, sono simmetrici rispetto a qualsiasi altra coppia di punti (X,Y) di r , retta contenente A e B .

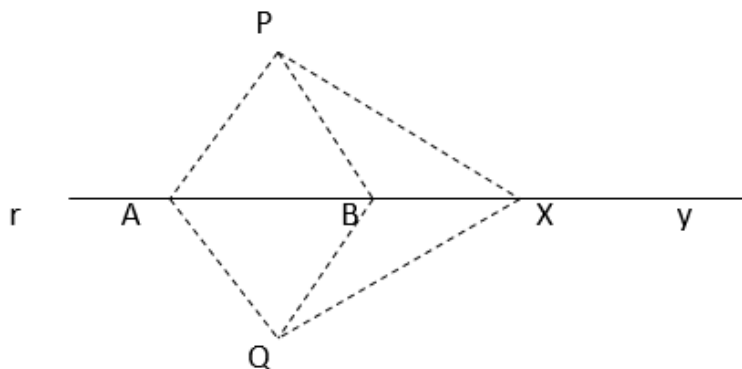


Fig. 1

Sia X un qualsiasi punto di r.

Essendo $d(A,B) = n$, $d(A,X) = s$, $d(B,X) = m$, l'insieme $I = (m A, -s B, n X)$ è completo pertanto, per la proprietà invariante del prodotto di un punto per l'insieme completo, si ha:

$$P \cdot I = Q \cdot I$$

Sviluppando si ottiene:

$$m[d(P,A)]^2 - s[d(P,B)]^2 + n[d(P,X)]^2 = m[d(Q,A)]^2 - s[d(Q,B)]^2 + n[d(Q,X)]^2. \quad (1)$$

Essendo P e Q simmetrici rispetto a (A,B) per la def.2 si ha:

$$d(P,A) = d(Q,A) , d(P,B) = d(Q,B) \quad (2)$$

Sostituendo la (2) nella (1) e semplificando si ha:

$$n [d(P,X)]^2 = n [d(Q,X)]^2.$$

Essendo X un qualsiasi punto di r risulta confermata la tesi: $d(P,X) = d(Q,X)$.

Analogamente si ha: $d(P,Y) = d(Q,Y)$.

Il precedente teorema permette di introdurre la seguente definizione:

Def. 3. Diciamo che due punti P e Q sono simmetrici rispetto ad una retta r se sono simmetrici rispetto a due qualsiasi punti di r .

Nota 2. Se P e Q sono simmetrici rispetto alla retta r , ogni punto di r è equidistante da P e Q . Richiamiamo la seguente definizione:

Def. 4. Due angoli congruenti e adiacenti sono detti "angoli retti".

TH. 2. I punti P e Q siano simmetrici rispetto alla retta r . Sia H l'intersezione di r con $[P,Q]$. Gli angoli \widehat{PHX} e \widehat{QHx} , appartenenti, rispettivamente, ai triangoli di vertici (P,H,X) e (Q,H,X) , con $X \in r$, sono retti.

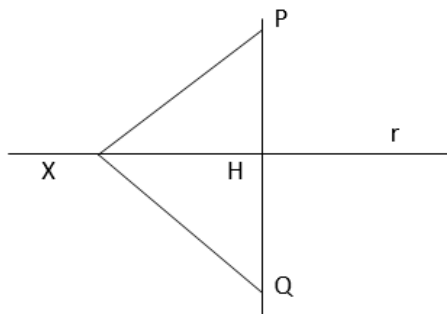


Fig. 2

I due triangoli $T(P,H,X)$ e $T(Q,H,X)$ hanno il lato $[X,H]$ in comune; inoltre, essendo P e Q simmetrici rispetto a H e X , risulta: $d(P,X) = d(Q,X)$, $d(P,H) = d(Q,H)$; i due triangoli, essendo congruenti, hanno i due angoli \widehat{PHX} e \widehat{QHX} congruenti e adiacenti; per la def. 4, sono detti angoli retti.

Def. 5. Sia P un punto sul semipiano π^+ con origine la retta r . Chiamiamo proiezione ortogonale di P su r il punto H , intersezione della retta r con il segmento $[P,Q]$, essendo Q il simmetrico di P rispetto a r .

TH. 3. Sia $J = (A,B,P,Q)$ un insieme contenente terne di punti non allineati del piano π . Sia $I = (m A, n B, u P, v Q)$ l'insieme completo con sostegno J . Se P e Q sono simmetrici rispetto a (A,B) , allora, le masse u e v dei punti materiali $u \cdot P$, $v \cdot Q$ sono eguali: $u = v = -\frac{m+n}{2}$ e si ha:

$I' = [2m A, 2n B, -(m+n) P, -(m+n) Q]$, insieme equivalente a $I^\circ = [2k A, 2 B, -(k+1) P, -(k+1) Q]$, essendo $k = \frac{m}{n}$.

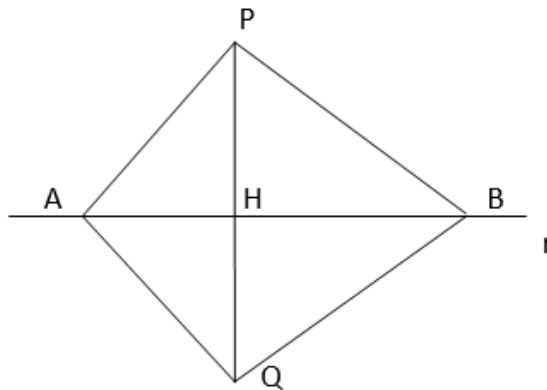


Fig. 3

1) Se P e Q sono simmetrici rispetto a A, B si ha:

$$d(A,P) = d(A,Q), d(B,P) = d(B,Q);$$

2) Se I è completo si ha:

$$P \cdot I = Q \cdot I$$

Sviluppando la 2) si ha:

$$\begin{aligned} m[d(P,A)]^2 + v[d(P,Q)]^2 + n[d(P,B)]^2 &= \\ = m[d(Q,A)]^2 + u[d(Q,P)]^2 + n[d(Q,B)]^2 \end{aligned}$$

Tenendo conto della 1), la precedente diviene:

$$v[d(P,Q)]^2 = u[d(Q,P)]^2 \text{ da cui risulta } u = v.$$

Posto $u = v = d$, l'insieme I diviene

$$I = (m A, n B, d P, d Q) \quad (3)$$

Poiché $m + n + 2 d = 0$, si ha: $d = -\frac{m+n}{2}$.

Sostituendo nella (3) e moltiplicando per 2 si ha la tesi:

$$I = [2m A, 2n B, -(m + n) P, -(m + n) Q].$$

Dividendo I per n e introducendo il parametro $K = \frac{m}{n}$, si ottiene l'insieme completo I° equivalente a I :

$$I^\circ = [2kA, 2B, -(k+1)P, -(k+1)Q]$$

Nota 3. L'eguaglianza delle masse dei punti materiali P e Q di I° : $-(k+1)P, -(k+1)Q$, è condizione necessaria (ma non sufficiente) per poter dedurre che P e Q sono simmetrici rispetto a A e B (condizione di ortogonalità).

Applicazione 1. L'insieme $J = (A, B, P)$ contiene terne di punti non allineati del piano π e si ha: $d(A, P) = 3\sqrt{2}$, $d(P, B) = 5$, $d(A, B) = 7$. Trovare la distanza $d(P, H)$ essendo H la proiezione ortogonale di P sulla retta r passante per A e B .

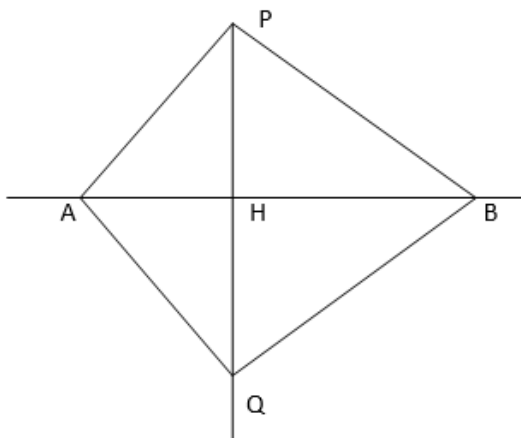


Fig. 4

Per individuare il punto H introduciamo il punto Q , simmetrico di P rispetto a (A, B) ; si ha: $d(A, Q) = d(A, P) = 3\sqrt{2}$, $d(B, Q) = d(B, P) = 5$. Affinché per l'insieme completo, con sostegno $J^\circ = (A, B, P, Q)$, sussistano le condizioni di ortogonalità per il TH.3, deve risultare:

$$I^\circ = [2k A, 2 B, - (k + 1)P, - (k + 1) Q]$$

Per calcolare K svolgiamo l'equazione $A \cdot I^\circ = B \cdot I^\circ$, si ha:
 $- (k + 1) [d(A,P)]^2 - (k + 1) [d(A,Q)]^2 + 2[d(A,B)]^2 = - (k + 1) [d(B,P)]^2 +$
 $- (k + 1) [d(B,Q)]^2 + 2k[d(A,B)]^2$
 $- (k + 1) 18 - (k + 1) 18 + 2 \cdot 49 = - (k + 1) 25 - (k + 1) 25 + 2 k$
 49 da cui $k = \frac{4}{3}$.

Sostituendo in I° , moltiplicando per 3, si ha l'equivalente
 $I = (8 A, 6 B, -7 P, -7 Q)$. Per trovare $d(P,H)$ utilizziamo il
 TH.12: $[I \cup (7 P, -7 Q)]^2 = (7 P, -7 Q)^2$ da cui:

$$(8 A, 6 B, -7 P, -7 Q, 7 P, -7 Q)^2 = (7 P, -7 Q)^2$$

$$(8 A, 6 B, -14 Q)^2 = (7 P, -7 Q)^2$$

$$48 [d(A,B)]^2 - 84 [d(B,Q)]^2 - 112 [d(A,Q)]^2 = -49 [d(P,Q)]^2$$

Svolgendo si ha: $d(P,Q) = 6$ e quindi

$$\frac{1}{2} d(P,Q) = d(P,H) = d(H,Q) = 3$$

2 - Proiezione ortogonale di un punto su un piano

Def. 6. Siano A,B,C tre punti non allineati del piano π . Diciamo che i punti P e Q , appartenenti, rispettivamente, a S^+ e S^- , semispazi con origine π , sono simmetrici rispetto a A,B,C se risulta:

$$d(P,A) = d(Q,A), \quad d(P,B) = d(Q,B), \quad d(P,C) = d(Q,C) \quad (4)$$

TH. 4. Sia $J = (A,B,C)$ un insieme ternario di punti non

allineati del piano π . Siano P e Q due punti simmetrici rispetto agli elementi di J . Un qualsiasi punto x di π , non allineato con coppie di elementi di J , è equidistante da P e Q : $d(P,X) = d(Q,X)$.

Sia X un qualsiasi punto del piano π , non allineato con coppie di punti di J . L'insieme $J'' = (A,B,C,X)$ è di sostegno all'insieme completo $I'' = (m A, n B, s C, t X)$. Per le proprietà degli insiemi completi si ha: $P \cdot I'' = Q \cdot I''$. Sviluppando si ha:

$$\begin{aligned} m [d(P,A)]^2 + n [d(P,B)]^2 + s [d(P,C)]^2 + t [d(P,X)]^2 = \\ = m [d(Q,A)]^2 + n [d(Q,B)]^2 + s [d(Q,C)]^2 + t [d(Q,X)]^2 \quad (5) \end{aligned}$$

Sostituendo le (4) nella (5) si ha: $t [d(P,X)]^2 = t [d(Q,X)]^2$ da cui $d(P,X) = d(Q,X)$.

Nota 4. Se X è allineato con una coppia di punti di J è sempre possibile trovare un punto $Y \in \pi$ non allineato con alcuna coppia di punti di J in modo che risulti $d(Y,P) = d(Y,Q)$. Scegliendo una terna di punti di (A,B,C,Y) le cui coppie non contengano X , per il TH.4, deve risultare $d(P,X) = d(Q,X)$.

Il precedente teorema permette di sostituire la def. 5 con la seguente:

Def. 7. Diciamo che i punti P e Q sono simmetrici rispetto ad un piano π se risultano equidistanti da ciascun elemento di una qualsiasi terna di punti di π .

TH.5. Siano P e Q due punti simmetrici rispetto al piano π . Sia H l'intersezione della retta r , passante per P e Q , con π . Se

X è un qualsiasi punto del piano π , i triangoli di vertici (P,H,X) e (Q,H,X) risultano rettangoli in H .

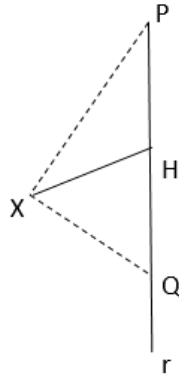


Fig. 5

Infatti, i due triangoli $T(J')$ e $T(J'')$, con $J' = (P,H,X)$ e $J'' = (Q,H,X)$, sono congruenti, essendo $d(P,X) = d(Q,X)$ e $d(P,H) = d(Q,H)$, e per avere il lato $[X,H]$ in comune. Conseguentemente, anche gli angoli \widehat{PHX} e \widehat{QHX} sono congruenti; inoltre, essendo adiacenti, sono rettangoli.

Def.8. Siano P e Q due punti simmetrici rispetto al piano π . Chiamiamo proiezione ortogonale del punto P (oppure Q) su π il punto di intersezione H della retta r , passante per P e Q , con π .

TH.6. Sia $J = (A,B,C,P,Q)$ un insieme contenente quaterne di punti non complanari. Sia $I = (m A, n B, s C, u P, v Q)$ l'insieme completo con sostegno J . Se P e Q sono simmetrici rispetto a (A,B,C) , allora le masse u e v dei punti materiali $u \cdot P, v \cdot Q$ sono eguali: $u = v$.

Essendo $h = \frac{m}{s}$, $K = \frac{n}{s}$, l'insieme I risulta equivalente a

$$I^* = [2h A, 2 K B, 2 C, - (h + k + 1) P, - (h + k + 1) Q].$$

Se P e Q sono simmetrici rispetto a (A, B, C) si ha:

$$d(A, P) = d(A, Q), d(B, P) = d(B, Q), d(C, P) = d(C, Q) \quad (6)$$

Se I è completo si ha:

$$P \cdot I = Q \cdot I \quad (7)$$

da cui:

$$\begin{aligned} m[d(P, A)]^2 + n[d(P, B)]^2 + s[d(P, C)]^2 + v[d(P, Q)]^2 = \\ = m[d(Q, A)]^2 + n[d(Q, B)]^2 + s[d(Q, C)]^2 + u[d(Q, P)]^2 \end{aligned}$$

Tenendo conto della (6), la precedente diviene: $v[d(P, Q)]^2 = u[d(Q, P)]^2$ pertanto si ha: $v = u$. Posto $u = v = t$, l'insieme I diviene: $I = (m A, n B, s C, t P, t Q)$;

Inoltre, la completezza di I implica: $m + n + s + t + t = 0$ da cui si ha:

$$t = -\frac{1}{2}(m+n+s). \text{ Sostituendo la } t \text{ nell'insieme } I \text{ si ha:}$$

$$I = [m A, n B, s C, -\frac{1}{2}(m+n+s) P, -\frac{1}{2}(m+n+s) Q]:$$

moltiplicando I per $\frac{2}{s}$, si ottiene l'insieme I^* equivalente ad I :

$$\begin{aligned} I^* &= \left[\frac{2}{s} m A, \frac{2}{s} n B, \frac{2}{s} s C, -\frac{1}{2} \frac{2}{s} (m+n+s) P, -\frac{1}{2} \frac{2}{s} (m+n+s) Q \right] \\ &= \\ &= \left[\frac{2m}{s} A, \frac{2n}{s} B, 2 C, -\left(\frac{m}{s} + \frac{n}{s} + 1\right) P, -\left(\frac{m}{s} + \frac{n}{s} + 1\right) Q \right] \end{aligned}$$

Posto $h = \frac{m}{s}$, $K = \frac{n}{s}$, sostituendo nella precedente, si ha la tesi:

$$I^* = [2h A, 2 K B, 2 C, - (h + k + 1) P, - (h + k + 1) Q] \quad (8)$$

Nota 5. L'eguaglianza delle masse dei punti materiali di I^* : $-(h+k+1) P, -(h+k+1) Q$, è condizione necessaria ma non sufficiente per poter dedurre che P e Q sono simmetrici rispetto a A e B .

Applicazione 2. Siano A, B, C tre punti del piano π , non allineati, e risulti: $d(A, B) = 6$, $d(B, C) = 2\sqrt{5}$, $d(A, C) = 4\sqrt{2}$. Sia P un punto del semispazio S^+ con origine π e risulti, $d(A, P) = 6$, $d(B, P) = 2\sqrt{6}$, $d(C, P) = 2\sqrt{5}$.

Sia H la proiezione ortogonale di P su π . Trovare: $d(P, H)$, $d(A, H)$.

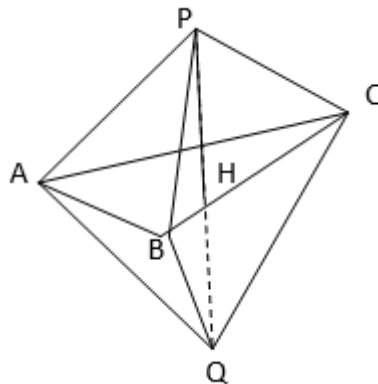


Fig. 6

Sia Q il punto simmetrico di P rispetto al piano π ; si ha:

$$a) \quad d(A, Q) = d(A, P) = 6, \quad d(B, Q) = d(B, P) = 2\sqrt{6}, \quad d(C, Q) = d(C, P) = 2\sqrt{5};$$

- b) l'insieme completo con sostegno $J = (A, B, C, P, Q)$,
 contenente i due punti simmetrici P e Q , è, per il
 c) TH.6: $I^* = [2hA, 2kB, 2C, - (h + k + 1) P, - (h + k + 1)Q]$.

Calcoliamo le masse h, k utilizzando la proprietà invariante del prodotto di un punto materiale per un insieme completo:

$$A \cdot I^* = B \cdot I^*, B \cdot I^* = C \cdot I^* \quad (9)$$

Si ha:

$$A \cdot I^* = 2k[d(A,B)]^2 + 2[d(A,C)]^2 - (h+k+1) [d(A,P)]^2 - (h+k+1) [d(A,Q)]^2 =$$

$$= 2k \cdot 36 + 2 \cdot 32 - 2 (h+k+1) \cdot 36 = -72h - 8$$

$$B \cdot I^* = 2h[d(A,B)]^2 + 2[d(B,C)]^2 - (h+k+1) [d(B,P)]^2 - (h+k+1) [d(B,Q)]^2 =$$

$$= 2h \cdot 36 + 2 \cdot 20 - 2 (h+k+1) \cdot 24 = 24h - 48k - 8$$

$$C \cdot I^* = 2h[d(A,C)]^2 + 2k[d(B,C)]^2 - (h+k+1) [d(C,P)]^2 - (h+k+1) [d(C,Q)]^2 =$$

$$= 2h \cdot 32 + 2k \cdot 20 - 2 (h+k+1) \cdot 20 = 24h - 40.$$

Sostituendo nella (9) e mettendo a sistema si ha:

$$\begin{cases} -72h - 8 = 24h - 48k - 8 \\ 24h - 48k - 8 = 24h - 40 \end{cases} \quad \text{da cui } k = \frac{2}{3}, h = \frac{1}{3}$$

Sostituendo K e h nell'insieme I , dividendo per 2, si ha:

$$I^* = (A, 2B, 3C, -3P, -3Q)$$

Utilizzando ancora la proprietà invariante del prodotto:

$P \cdot I^* = A \cdot I^*$, calcoliamo

$$\begin{aligned} d(P,Q): [d(P,A)]^2 + 2[d(P,B)]^2 + 3 [d(P,C)]^2 - 3[d(P,Q)]^2 = \\ = 2[d(A,B)]^2 + 3 [d(A,C)]^2 - 3 [d(A,P)]^2 - 3[d(A,Q)]^2 \text{ da cui} \\ 36 + 2 \cdot 24 + 3 \cdot 20 - 3 \cdot [d(P,Q)]^2 = 2 \cdot 36 + 3 \cdot 32 - 3 \cdot 36 - 3 \cdot 36 \\ 3 \cdot [d(P,Q)]^2 = 36+48 +60 +108+108 -72 - 96 = 192. \end{aligned}$$

Essendo $[d(P,Q)]^2 = 64$, $d(P,Q) = 8$ si ha $d(P,H) = 4$. La distanza $d(A,H)$ è proprio il cateto del triangolo rettangolo in H di vertici (A,P,H) pertanto si ha:

$$[d(A,H)]^2 = [d(A,P)]^2 - [d(P,H)]^2 = 20, \quad d(A,H) = 2\sqrt{5} .$$

Applicazione 3. Sia V il vertice di una piramide la cui base è il triangolo $T(A,B,C)$ di lati: $d(A,B) = \sqrt{241}$, $d(B,C) = 10$, $d(A,C) = 3\sqrt{29}$. Gli spigoli della piramide sono: $d(A,V) = 15$, $d(B,V) = 14$, $d(C,V) = 6\sqrt{6}$. Sia P un punto interno a (A,V) e risulti: $d(V,P) / d(P,A) = 2$. Trovare le distanze $d(H,V)$, $d(H,B)$, $d(H,C)$ essendo H la proiezione ortogonale di P sul piano π individuato dai punti V,B,C .

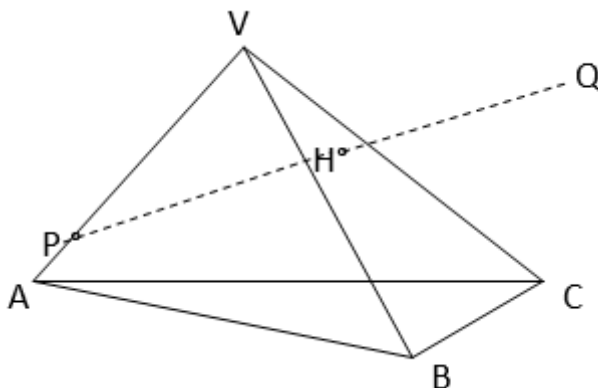


Fig. 7

Mediante l'insieme completo $I' = (2A, -3P, V)$, si ha:

$$d(P, V) = 10, \quad d(A, P) = 5.$$

Essendo $B \cdot I' = P \cdot I'$ e $C \cdot I' = P \cdot I'$ calcoliamo le distanze $d(P, B)$ e $d(P, C)$:

$$\begin{cases} 2[d(B, A)]^2 - 3[d(B, P)]^2 + [d(B, V)]^2 = 2[d(P, A)]^2 + [d(P, V)]^2 \\ 2[d(C, A)]^2 - 3[d(C, P)]^2 + [d(C, V)]^2 = 2[d(P, A)]^2 + [d(P, V)]^2 \end{cases}$$

da cui

$$d(B, P) = 4\sqrt{11}, \quad d(C, P) = 14.$$

Consideriamo la piramide di vertice P la cui base è il triangolo $T(V, B, C)$;

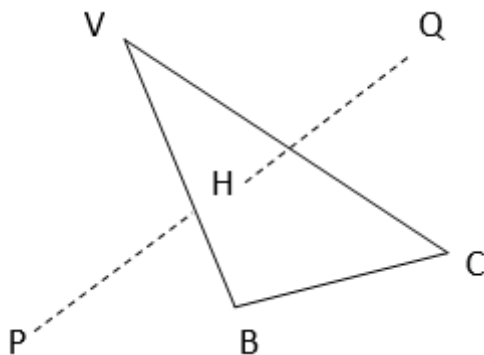


Fig. 8

sia Q il simmetrico di P rispetto a B, C, V . Per il TH.6, l'insieme completo avente sostegno (V, B, C, Q, P) è:

$$I = [2h B, 2K C, 2V, -(h+k+1)P, -(h+k+1)Q]$$

con $h, K \in R$. Ricorrendo ai dati a disposizione:

$$d(P, V) = 10, d(B, V) = 14, d(C, V) = 6\sqrt{6}, d(B, C) = 10, d(B, P) = 4\sqrt{11}, d(C, P) = 14, \quad (10)$$

calcoliamo le masse di I . Essendo I completo si ha:

$$V \cdot I = C \cdot I, B \cdot I = C \cdot I \quad (11)$$

Indicando con X un qualsiasi punto V, B, C , si ha:

$$X \cdot I = 2h [d(X, B)]^2, 2K [d(X, C)]^2, 2[d(X, V)]^2, -(h+k+1)[d(X, P)]^2, -(h+k+1)[d(X, Q)]^2.$$

Poiché $(h+k+1)[d(X, P)]^2 = (h+k+1)[d(X, Q)]^2$ possiamo sostituire nella precedente:

$$\begin{aligned} & - (h + k + 1) [d(X,P)]^2 - (h + k + 1)[d(X,Q)]^2 = \\ & = - 2 (h + k + 1) [d(X,P)]^2 \end{aligned}$$

da cui $X \cdot I = 2h [d(X,B)]^2, 2K [d(X,C)]^2, 2[d(X,V)]^2, - 2 (h + k + 1) [d(X,P)]^2$.

Sostituendo V,B,C nella precedente, si ha:

$$\begin{aligned} V \cdot I &= 2h [d(V,B)]^2 + 2K [d(V,C)]^2 - 2 (h + k + 1) [d(V,P)]^2 \\ B \cdot I &= 2K [d(B,C)]^2 + 2[d(B,V)]^2 - 2 (h + k + 1) [d(B,P)]^2 \\ C \cdot I &= 2h [d(C,B)]^2 + 2[d(C,V)]^2 - 2 (h + k + 1) [d(C,P)]^2 \end{aligned}$$

Sostituendo nelle (11) si ha:

$$\begin{cases} h[d(V,B)]^2 + k[d(V,C)]^2 - (h + k + 1)[d(V,P)]^2 = \\ = h[d(C,B)]^2 + [d(C,V)]^2 - (h + k + 1)[d(C,P)]^2 \\ k[d(B,C)]^2 + [d(B,V)]^2 - (h + k + 1)[d(B,P)]^2 = \\ = h[d(C,B)]^2 + [d(C,V)]^2 - (h + k + 1)[d(C,P)]^2 \end{cases}$$

Sostituendo le (10) si ha:

$$\begin{cases} 8h + 13k = 5 \\ 4h - 6k = 0 \end{cases} \quad \text{da cui } h = \frac{3}{10}, k = \frac{1}{5}$$

Un insieme completo equivalente a I è:

$$I = (6 B, 4 C, 20 V - 15 P, - 15 Q).$$

L'unione dei due insiemi I e I'' , essendo $I'' = (15 P, - 30 H, 15Q)$ l'equivalente di $(P, - 2H, Q)$, è un insieme completo e si ha:

$$I \cup I'' = (6 B, 4 C, 20 V - 30 H), \text{ equivalente di}$$

$$I''' = (3 B, 2 C, 10 V - 15 H).$$

Applicando il Th.12 a I''' si ha:

$$[I''' \cup (15H, -15 B)]^2 = (15H, -15 B)^2$$

da cui:

$$\begin{aligned} (-12 B, 2C, 10 V)^2 &= (15H, -15 B)^2 - 24 [d(B,C)]^2 - 120 [d(B,V)]^2 \\ &+ 20 [d(V,C)]^2 = -225 [d(B,H)]^2 \end{aligned}$$

da cui:

$$d(B,H) = 4\sqrt{6}.$$

Procedendo in modo analogo si calcola $d(H,C)$ e $d(H,V)$.

Esempio di un ulteriore procedimento per calcolare l'altezza di una piramide è contenuto nella seguente applicazione:

Applicazione 4. I vertici della base triangolare di una piramide siano A, B, C ; appartengano al piano π e risulti: $d(A,B) = 2\sqrt{10}$, $d(B,C) = 6$, $d(A,C) = 2\sqrt{13}$. Le distanze di A, B, C dal vertice P della piramide siano: $d(B,P) = \sqrt{17}$, $d(A,P) = 5$, $d(C,P) = \sqrt{29}$. Trovare $d(P,H)$ essendo H la proiezione ortogonale di P su π .

Posto $d(P,H) = z$, si ha:

$$\begin{aligned} [d(P,A)]^2 &= [d(A,H)]^2 + [d(H,P)]^2, \quad [d(P,B)]^2 = [d(B,H)]^2 + \\ [d(H,P)]^2, \quad [d(P,C)]^2 &= [d(C,H)]^2 + [d(H,P)]^2 \end{aligned}$$

da cui

$$[d(A,H)]^2 = 25 - z^2, \quad [d(B,H)]^2 = 17 - z^2, \quad [d(C,H)]^2 = 29 - z^2.$$

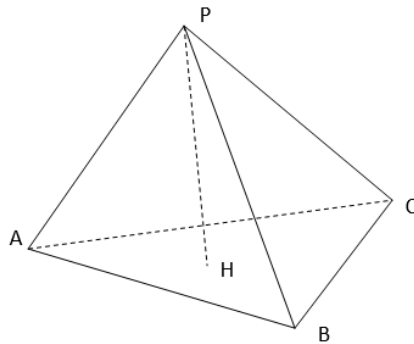


Fig. 9

L'insieme completo, avente sostegno $J = (A, B, C, H)$, è

$$I = [m A, n B, C, - (m + n + 1) H]$$

Per la proprietà invariante degli insiemi completi si ha

$$A \cdot I = B \cdot I = C \cdot I.$$

Sviluppando:

$$\begin{aligned} n [d(A, B)]^2 + [d(A, C)]^2 - (m + n + 1) [d(A, H)]^2 &= \\ = m [d(B, A)]^2 + [d(B, C)]^2 - (m + n + 1) [d(B, H)]^2 &= \\ = m [d(C, A)]^2 + n [d(C, B)]^2 - (m + n + 1) [d(C, H)]^2 & \end{aligned}$$

Sostituendo:

$$\begin{aligned} n 40 + 52 - (m + n + 1) [25 - z^2] &= m 40 + 36 - (m + n + 1) [17 - z^2] = \\ = m 52 + n 36 - (m + n + 1) [29 - z^2]. & \end{aligned}$$

Mettendo a sistema, si ha:

$$\begin{cases} n = 2 \\ -6m + 4n + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{da cui: } n = 2, m = \frac{3}{2}, m + n + 1 = \frac{9}{2}$$

Sostituendo in I e moltiplicando per 2 si ha:

$$I = (3 A, 4 B, 2 C, - 9 H)$$

Calcoliamo $d(A,H)$ mediante il TH.12:

$$[I \cup (9H, -9A)]^2 = (9H, -9A)^2 .$$

Sviluppando:

$$\begin{aligned} & -24 [d(A,B)]^2 + 8 [d(B,C)]^2 - 12 [d(A,C)]^2 = \\ & = -81 [d(H,A)]^2 [d(H,A)]^2 = 16 \text{ da cui } d(H,A) = 4. \end{aligned}$$

Essendo $[d(A,P)]^2 = [d(A,H)]^2 + [d(H,P)]^2$ si ha:

$$25 = 16 + [d(H,P)]^2 \text{ e quindi } d(H,P) = 3.$$

Bibliografia

Francia Franco (1985). Insiemi di punti materiali. «*Archimede*» N.1 .

Francia Franco (2019). Insiemi completi del terzo ordine. «*Periodico di Matematica*» (IV) , Vol. I (1-2). Edizioni AFSU.

Francia Franco (2020). Insiemi completi del quarto ordine. «*Periodico di Matematica*» (IV), Vol. II (2). Edizioni AFSU.

Francia Franco (2022). Proprietà degli insiemi completi del quarto ordine. «*Periodico di Matematica*» (IV), Vol. IV (3). Edizioni AFSU.

Francia Franco (2023). Insiemi del V ordine contenenti punti *dello spazio*. «*Periodico di Matematica*» (IV) , Vol. V (2). Edizioni AFSU.

Il Teorema del resto generalizzato

Francesco Laudano*, Mattia Laudano**

*Liceo M. Pagano, Campobasso; francesco.laudano@unimol.it

** studente c/o Università Federico II - Napoli; mattialaudano1@gmail.com



DOI: 10.53159 /PdM(IV).v5n4.124

Sunto: *In questo lavoro si mostra una semplice generalizzazione del teorema del resto dalla quale segue una naturale estensione del teorema di Ruffini. I risultati presentati sono utilizzati per risolvere alcuni quesiti olimpici.*

Parole Chiave: *Teorema del resto; Teorema di Ruffini; fattorizzazione di polinomi, quesiti olimpici.*

Abstract: *In this paper we show a simple generalization of the remainder theorem from which a natural extension of Ruffini's theorem follows. The results presented are used to solve some Olympic questions.*

Keywords: *remainder theorem; Ruffini's theorem; factorization of polynomials; Olympic questions.*

1 - Introduzione

Defendit numerus
Giovenale, Satire, II 46

L'insegnamento della matematica alle superiori prevede spesso dimostrazioni di teoremi geometrici mentre, al contrario, le dimostrazioni algebriche sono rare, probabilmente perché ritenute troppo astratte per gli studenti. Fa eccezione il teorema del resto (cf. Teorema del resto, p. 428, Bergamini and Barozzi, 2021; Corollary 1, p. 162, Mac Lane and Birkhoff, 1985) che si introduce fin dal primo anno delle superiori e consente di provare il cosiddetto teorema di Ruffini (cf. Teorema di Ruffini, p. 428, Bergamini and Barozzi, 2021; Corollary 2, p. 162, Mac Lane and Birkhoff, 1985), utilizzato per fattorizzare polinomi interi.

Il teorema del resto, probabilmente già noto a Cartesio (cf. Smith & Latham, 2007, p. 179), ci proviene soprattutto dal lavoro di Paolo Ruffini (1765–1822) (cf. Ruffini, p. 380-381), ed è molto usato nella matematica scolastica, tanto che nel 2016 Lorenzo Baglioni un ricercatore-youtuber italiano gli ha addirittura dedicato una canzone (Baglioni, 2016)!

Com'è ben noto, facendo riferimento, per semplicità, a polinomi con coefficienti razionali, il teorema del resto afferma che

Il resto della divisione di un polinomio $P(x)$ per il binomio $(x-c)$ coincide col numero $P(c)$.

In altre parole tale resto può essere determinato con una semplice sostituzione, senza eseguire la divisione tra polinomi, e quindi con una notevole riduzione nella complessità di calcolo.

Sorge spontaneo chiedersi se la stessa tecnica si possa applicare a polinomi di grado maggiore, ed è sorprendente la semplicità con la quale si può verificare che essa funziona anche per divisori del tipo (x^m-c) . Ad esempio, per determinare il resto della divisione del polinomio $P(x)=4x^{15}-15x^3-2x^2+8x-7$ per il binomio $D(x)=x^3-2$ è sufficiente sostituire x^3 con 2 in $P(x)$. In tal modo si ottiene il polinomio non nullo $R(x)=4\cdot 2^5-15\cdot 2-2x^2+8x-7=-2x^2+8x+91$. Pertanto si può concludere che x^3-2 non divide $4x^{15}-15x^3-2x^2+8x-7$.

In questo lavoro si mostra come è possibile estendere la tecnica della sostituzione a polinomi divisori generici e quindi si formula una generalizzazione del teorema del resto e conseguentemente del teorema di Ruffini. Infine si utilizzano queste estensioni per risolvere alcuni quesiti olimpici. Gli argomenti proposti sono abbastanza semplici da poter essere considerati noti, tuttavia non siamo riusciti a trovarli in testi classici di algebra. In tempi recenti la validità della tecnica utilizzata nell'esempio precedente è stata provata per polinomi a coefficienti su anelli generici (c.f. Theorem 2.7, p. 962, Laudano, 2019; e, più in generale, Theorem 2.5, p. 779, Cuida, Laudano, Martinez, 2020). Il teorema che segue costituisce un caso particolare dei teoremi sopra citati.

Teorema 1.1 (Teorema del resto generalizzato)

Sia $P(x)$ un polinomio a coefficienti razionali di grado $n>1$ e sia $D(x)=a_h x^h + a_{h-1} x^{h-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in Q[x]$ con $a_h \neq 0$ e $h \leq n$. Allora il resto $R(x)$ della divisione di $P(x)$ per $D(x)$ si può determinare sostituendo il polinomio $t(x) = a_h^{-1}(-a_{h-1} x^{h-1} - \dots - a_1 x - a_0)$ ad x^h in $P(x)$, ed iterando tale sostituzione nel

polinomio così ottenuto fino ad avere un polinomio di grado minore di h .

È opportuno osservare che l'iterazione menzionata nell'enunciato precedente costituisce un ciclo finito, in quanto il polinomio $t(x)$, che sostituisce x^h , ha grado minore di h . Quindi ad ogni iterazione dopo la sostituzione il grado del polinomio diminuisce. Pertanto la procedura indicata nell'enunciato del Teorema 1.1 costituisce un algoritmo.

Nell'esempio che segue si mostra che il teorema precedente consente di applicare la tecnica della sostituzione anche a divisori che non sono binomi, effettuando più iterazioni.

Esempio 1.2 Si vuole determinare il resto della divisione del polinomio $P(x)=3x^4-10x^3-2x+5$ per il polinomio $D(x)=x^2-2x+7$. Sostituendo il polinomio $t(x)=2x-7$ ad x^2 in $P(x)=3(x^2)^2-10(x^2)x-2x+5$ si ottiene il polinomio $R_1(x)=3(2x-7)^2-10(2x-7)x-2x+5 = \cdot \cdot = -8x^2-16x+152$. Iterando la sostituzione precedente in $R_1(x)$ si ottiene il polinomio $R_2(x)=-8(2x-7)-16x+152=-32x+208$, il quale, avendo grado minore del grado di $D(x)$, coincide col resto cercato.

È del tutto ovvio che lo studio della divisibilità tra polinomi si può effettuare utilizzando la tecnica delle sostituzioni iterate illustrata in precedenza. In proposito vale il seguente corollario del Teorema 1.1 (cf Theorem 2.9, p. 963, Laudano, 2019; e, più in generale, Theorem 2.7, p. 780, Cuida, Laudano, Martinez, 2020).

Corollario 1.3 (Teorema di Ruffini generalizzato)

Sia $P(x)$ un polinomio a coefficienti razionali di grado $n > 1$ e sia $D(x) = a_h x^h + a_{h-1} x^{h-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in Q[x]$ con $a_h \neq 0$ e $h \leq n$.

Le affermazioni seguenti sono equivalenti:

- (a) $D(x)$ è un divisore di $P(x)$ in $Q[x]$
 (b) sostituendo il polinomio $t(x) = a_h^{-1}(-a_{h-1}x^{h-1} - \dots - a_1 x - a_0)$ ad x^h in $P(x)$ ed iterando tale sostituzione nel polinomio così ottenuto al più $n-h+1$ volte si ottiene il polinomio nullo.

Esempio 1.4

Come si è già osservato il polinomio $P(x) = 4x^{15} - 15x^3 - 2x^2 + 8x - 7$ non è multiplo del binomio $D(x) = x^3 - 2$ poiché sostituendo x^3 con 2 in $P(x)$ si ottiene come resto il polinomio $R(x) = -2x^2 + 8x + 91$.

Di seguito si fornisce un esempio di applicazione diretta del teorema precedente alla scomposizione in fattori di una famiglia di polinomi razionali

Esempio 1.5 Si voglia fattorizzare il polinomio in $Q[x]$ il polinomio $P(x) = x^4 + kx^3 + kx - 1$. Poiché $P(x) = x^2(x^2 + kx) + kx - 1$, è evidente che sostituendo x^2 con -1 in $P(x)$ si ha $R(x) = 0$. Pertanto, per il Corollario 1.3, il polinomio $x^2 + 1$ divide $P(x)$ in $Q[x]$. Dividendo $P(x)$ per $x^2 + 1$ si ottiene il secondo fattore $x^2 + kx - 1$.

2 - Applicazioni del Teorema del resto generalizzato alla risoluzione di quesiti olimpici

In questa sezione si applicano i risultati esposti in precedenza per risolvere alcuni quesiti proposti in gare nazionali di vario livello delle olimpiadi della matematica.

Quesito 2.1 (c.f. p. 76, Verolino, 2021).

“La somma di due radici dell’equazione $2x^3-x^2-7x+k=0$ è uguale a 1. Si determini il valore di k .”

Dette x_1 ed x_2 le radici aventi somma 1 e indicato con p il loro prodotto, si può dire che il polinomio $P(x)=2x^3-x^2-7x+k$ è multiplo del polinomio $D(x)=(x-x_1)(x-x_2)=x^2-x+p$. Il Corollario 1.3 ci assicura che sostituendo x^2 con $x-p$ in $P(x)$ ed iterando tale sostituzione nel polinomio così ottenuto si ha il polinomio nullo. Con la prima sostituzione si ha $2x(x-p)-x+p-7x+k$, ed iterando $(-6-2p)x+k-p$. Quest’ultimo polinomio è nullo. Pertanto $k=p=-3$.

Quesito 2.2 (c.f. p. 74, Verolino, 2021).

“Si determini a in modo che una delle radici dell’equazione $x^3-7x+a=0$ sia doppia di un’altra.”

Dette x_1 e $2x_1$ le radici di cui sopra, si può dire che il polinomio $P(x)=x^3-7x+a$ è multiplo del polinomio $D(x)=(x-x_1)(x-2x_1)=x^2-3x_1x+2x_1^2$. Il Corollario 1.3 ci assicura che sostituendo x^2 con $3x_1x-2x_1^2$ in $P(x)$ ed iterando tale sostituzione nel polinomio così ottenuto si ha il polinomio nullo. Con la prima sostituzione si ha $x(3x_1x-2x_1^2)-7x+a$, ed iterando si ha $(7x_1^2-7)x-6x_1^3+a$. Quest’ultimo polinomio è nullo. Pertanto $x_1=\pm 1$ ed $a=\pm 6$.

Quesito 2.3 (Gara a Squadre di Secondo Livello - X Edizione - Roma, 14 Marzo 2017 - Università di Tor Vergata - valevole per l'accesso alla fase nazionale di Cesenatico - <https://www.problemisvolti.it/GaraDiMatematicaASquadreRoma2.html>).

“Del polinomio di terzo grado $P(x)=15x^3+Bx^2-36x-24$ non conosciamo il coefficiente B ma sappiamo che esiste un numero $a>0$ tale che sia a che $-a$ sono soluzioni dell'equazione $P(x)=0$. Quanto vale B ?”

Poiché sia a che $-a$ sono soluzioni dell'equazione $P(x)=0$ il polinomio $P(x)$ è multiplo del binomio x^2-a^2 . Il Corollario 1.3 ci assicura che sostituendo x^2 con a^2 in $P(x)$ si ottiene il polinomio nullo. Con tale sostituzione si ha $15a^2x+Ba^2-36x-24$, Quest'ultimo polinomio è nullo, quindi $15a^2-36=0$ e $Ba^2-24=0$. Pertanto $a^2=12/5$ e $B=10$.

Quesito 2.4 (Gara a Squadre di Secondo Livello - II Edizione - Roma, 26 Marzo 2009 - Università di Tor Vergata - valevole per l'accesso alla fase nazionale di Cesenatico - <https://www.problemisvolti.it/GaraDiMatematicaASquadreRoma2.html>).

“Eseguendo la divisione con resto tra il polinomio $p_1(x)=-3x^{81}+10x^{41}+x^{27}+6x^{21}+2x^7+x^2+9x+53$ e il polinomio polinomio $p_2(x)=x^{20}+2$ si ottiene un certo polinomio quoziente $q(x)$ e un polinomio resto $r(x)$, quest'ultimo con grado strettamente minore di $p_2(x)$. Quanto vale $r(23)$?”

Il Teorema 1.1 ci assicura che il resto della divisione di $p_1(x)$ per $p_2(x)$ si può ottenere sostituendo x^{20} con -2 in $p_1(x)$. Con tale sostituzione si ha $r(x)=-3x(-2)^4+10x(-2)^2+x^7(-2)+6x(-2)+2x^7+x^2+9x+53 = x^2-11x+53$. Pertanto $r(23)=329$.

Quesito 2.5 (XXXI Olimpiade Italiana di Matematica - Cesenatico, 8 maggio 2015 - Finale nazionale - <http://olimpiadi.dm.unibo.it/le-gare/gara-nazionale/>).

“Determinare tutte le coppie di numeri interi (a,b) che risolvono l’equazione $a^3+b^3+3ab=1$.”

L’equazione si può riscrivere come $(a+b)^3-3ab(a+b)+3ab-1=0$. Ponendo $a+b=x$ si ottiene l’equazione $x^3-3abx+3ab-1=0$, che ha come soluzione $x=1$ per ogni coppia (a,b) di interi. Quindi, per il teorema di Ruffini (e più in generale per il Corollario 1.3) il polinomio $x^3-3abx+3ab-1$ si può fattorizzare dividendolo per $x-1$. In tal modo si ottiene l’equazione $(x-1)(x^2+x-3ab+1)=0$. L’unica coppia (a,b) di interi che annulla $x^2+x-3ab+1=(a+b)^2+(a+b)-3ab+1=a^2+(1-b)a+b^2+b+1$ è la coppia $(-1,-1)$, in quanto il discriminante dell’ultimo polinomio è $-3(b^2+2b+1)$ che risulta non negativo solo se $b=-1$ e, di conseguenza, $a=(b-1)/2=-1$. Mentre il polinomio $x-1=a+b-1$ si annulla in corrispondenza delle coppie del tipo $(a,1-a)$.

3 - Riflessioni conclusive

La generalizzazione del teorema del resto presentata in questa nota potrebbe essere utilizzata in ambito didattico, allo scopo di sviluppare le competenze degli studenti nel ragionamento algebrico computazionale. Inoltre, sebbene non sufficientemente evidenziata in letteratura, essa sembra in molti casi vantaggiosa in termini computazionali ed utile a risolvere problemi. È naturale chiedersi se la tecnica della sostituzione, presentata in queste pagine può essere utilizzata anche per determinare il quoziente della divisione.

Bibliografia

Bergamini M., Barozzi G. (2021). *Algebra multimediale.blu*, Zanichelli. Bologna.

Mac Lane S., Birkhoff G. (1985). *Algebra*, Mursia Milano.

Smith D. E., Latham M., (2007). *The geometry of René Descartes*, Dover Pub.

Ruffini P. (1812). Di un nuovo metodo generale di estrarre le radici numeriche, *Memorie di Matematica e di Fisica della società italiana delle scienze*, 16(1), pp. 373–429, <https://www.biodiversitylibrary.org/item/34291#page/420/mod/e/1up>.

Baglioni L. (2016). Il Teorema di Ruffini, <https://www.youtube.com/watch?v=kePx7biRTR4>.

Laudano F. (2019). A generalization of the remainder theorem and factor theorem. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 50:6, 960-967, doi: 10.1080/0020739X.2018.1522676.

Cuida A., Laudano F., Martinez-Moro E. (2020). General remainder theorem and factor theorem for polynomials over non-commutative coefficient rings, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 51:5, 775-785, doi:10.1080/0020739X.2019.1676926.

Verolino L. (2021). Guida alle prove di ammissione per le scuole di eccellenza, vol. II. *EdiSES università. Napoli*.



http://www.assculturale-arte-scienza.it/Rivista%20ArteScienza_magazine/ArteScienza_magazine%20N.6/ArteScienza_magazine_N.6_Online.pdf

Ricerca e prassi in Didattica della Matematica: il caso della Goniometria e Trigonometria

Bonaventura Paolillo*

**Docente di Matematica e Fisica al Liceo Scientifico Severi di Salerno;
bonaventura.paolillo@liceoseverisalerno.net



DOI : 10.53159/PdM(IV).v5n4.125

Sunto: *Questo lavoro presenta una riflessione sull'insegnamento della Trigonometria e sulla Goniometria. Queste discipline affondano le proprie radici storiche da migliaia di anni, con l'elaborazione compiuta da diversi popoli, tra cui gli Egizi, Babilonesi e Greci. Il progresso che ne è seguito è stato intenso in diversi rami: Astronomia, Topografia, Geodesia, Acustica. Ci concentreremo su alcune esperienze didattiche di laboratorio, realizzate con degli studenti di una classe quarta del Liceo Francesco Severi di Salerno. Si fornirà anche uno sguardo sulla letteratura attuale delle due discipline, in cui i contributi sono fiorenti e continui. Lo scopo in ogni caso è di evitare una pratica didattica finalizzata a produrre formule stereotipate, separandosi dallo sviluppo storico e da quelli più recenti.*

Parole Chiave: *Goniometria, Trigonometria, dimostrazioni.*

Abstract: *This work presents a reflection on the teaching of Trigonometry and Goniometry. These have their historical roots for thousands of years, with development carried out by various peoples, including the Egyptians, Babylonians*

and Greeks. The progress that followed was intense in several branches: Astronomy, Topography, Geodesy, Acoustics.

We will focus on some teaching experiences of laboratory, created with the students in eleventh grade of the F. Severi's high school, in Salerno. We will also provide an overview of the current literature of the two disciplines in which developments are fruitful and continuous. The goal is to avoid a teaching practice aimed at producing stereotyped formulas, separating itself from historical and more current developments.

Keywords: *Goniometry, Trigonometry, proof.*

1 - Introduzione

La Trigonometria affonda le sue radici storiche da migliaia di anni, e il suo percorso è avvenuto attraverso diversi popoli, tra cui gli antichi Egizi, i Babilonesi e i Greci, con i quali si affermò definitivamente. I progressi che ne sono seguiti sono stati intensi: dall'Astronomia alla Topografia, dalla Geodesia all'Acustica per citare alcune applicazioni. Il seguente lavoro propone una riflessione generale sulla trattazione di queste due discipline. Queste, si sono realizzate contestualmente con degli allievi di una classe quarta del Liceo "Francesco Severi" di Salerno. Il confronto si è posto, evidentemente, con le *indicazioni ministeriali del 2010*, che regolano l'insegnamento della Matematica. Per i Licei Scientifici così si afferma: "*...saranno inoltre studiate le funzioni circolari e le loro proprietà e relazioni elementari, i teoremi che permettono la risoluzione dei triangoli e il loro uso nell'ambito di altre discipline, in particolare nella fisica*". Non si fa riferimento esplicito alla Goniometria e Trigonometria al secondo biennio e al quinto anno. Dalle indicazioni di sopra, seppur valide nel loro complesso, si

evincesse uno sviluppo della Goniometria e della Trigonometria abbastanza ridotto, laddove all'esame di Stato tale presenza è sistematica, così come lo è nei corsi delle facoltà tecnico-scientifiche. Tra l'altro, l'introduzione delle due discipline in aula, sta diventando sempre più esigente poiché legato alla trattazione della Fisica, sin dal primo anno liceale. Nel concreto, ci si focalizzerà, su alcune esperienze-laboratori, con un'analisi sulla trattazione tradizionale, ma anche fornendo uno sguardo sulla Letteratura attuale in cui permangono fiorenti gli sviluppi delle due discipline. Lo scopo dichiarato, in ogni caso, è quello di evitare un orientamento ed una prassi didattica rivolti a produrre solamente ricette e formule, scollegandosi dalla sua storia e dagli sviluppi recenti.

2 - Una scheda zero ...per iniziare

La seguente attività consente agli allievi di prendere consapevolezza delle difficoltà che derivano dal confronto tra due diverse grandezze geometriche, gli angoli al centro di una circonferenza e le corde corrispondenti.

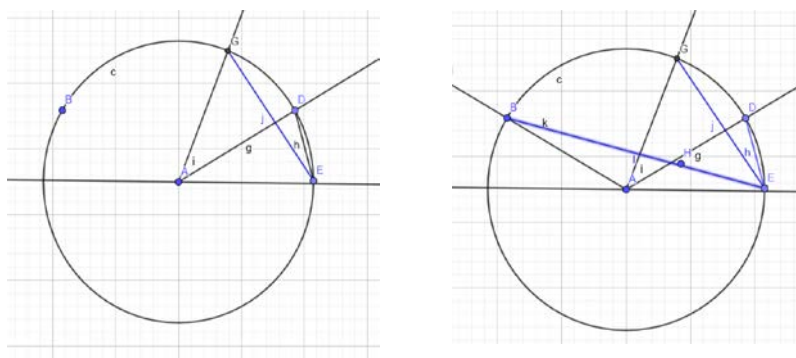
Al variare, per esempio, dei seguenti angoli di 30° , 60° , come cambiano le lunghezze delle corde sottese dagli angoli?

Oppure cosa accade per angoli di 90° , 120° ?

Tale richiesta, porta a concludere subito che non esiste una proporzionalità diretta tra angoli e corde corrispondenti.

Che relazione quantitativa si potrebbe allora stabilire?

Gli allievi si rendono conto, ben presto, di una necessaria riflessione che li fa rendere consapevoli dei propri mezzi e dei relativi limiti.

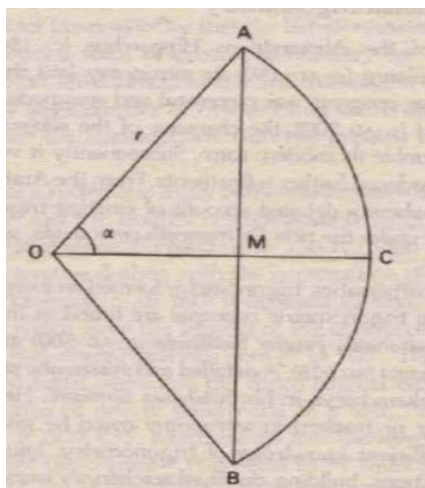


La mancata soluzione del problema è collegata, tra l'altro, agli stessi nodi epistemologici della nascita delle funzioni goniometriche.

2.1 - Un po' di storia...e qualche riferimento

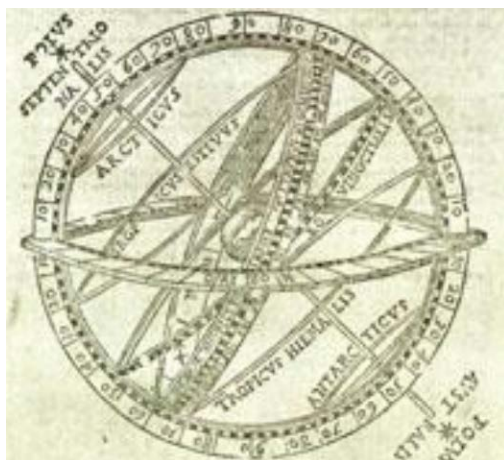
Come accennato, il primo uso delle funzioni trigonometriche fu legato storicamente alla ricerca della lunghezza della corda sottesa da un angolo dato. Secondo la *tradizione babilonese*, per misurare gli archi, la semicirconferenza era divisa in 180 parti uguali, da cui derivava la relativa costruzione in gradi sessagesimali, ma anche il diametro del cerchio era diviso in 120 parti uguali.

Presso i *Greci* i contributi alla trigonometria furono apportati da *Ipparco da Rodi* (II sec. a. c.) con le *Prime tavole di corde*, *Teodosio da Tripoli* (I sec. a.c.), *Menelao di Alessandria* (I-II sec. d.c.) con la *Sphaerica* e soprattutto *Claudio Tolomeo* (II sec. d.c.) con l'*Almagesto*. Nel I libro dell'*Almagesto*, si costruì una Tavola delle corde con un salto di mezzo grado da 1° a 180°; (in figura Tolomeo).



Lo sviluppo matematico in India intorno al 500 d.c. produsse una trigonometria più vicina a quella moderna, con l'uso della mezza corda al posto della corda. Nell'opera *Surya Siddhanta* (IV-V sec.) si costruì una tavola dei seni degli angoli multipli di $3^{\circ} 45'$ fino a 90° . *Aryabhata* diede una tavola di mezza corde, note col nome di *jya-ardha* o semplicemente *jya*, dove $jya x = r \sin x$ (in figura la mezza corda *AM*).

Nell'ottavo secolo, i testi astronomici indiani vennero tradotti in arabo e fu oggetto di studio anche la funzione seno. Il termine sanscrito *jya* fu traslitterato, divenendo *jiba* o *jb*. Essendo questa, priva di significato, gli Arabi la trasformarono in *jaib* che significava *baia* o *rada*. Nel XII secolo *Gherardo da Cremona* la tradusse con la parola latina *sinus*.



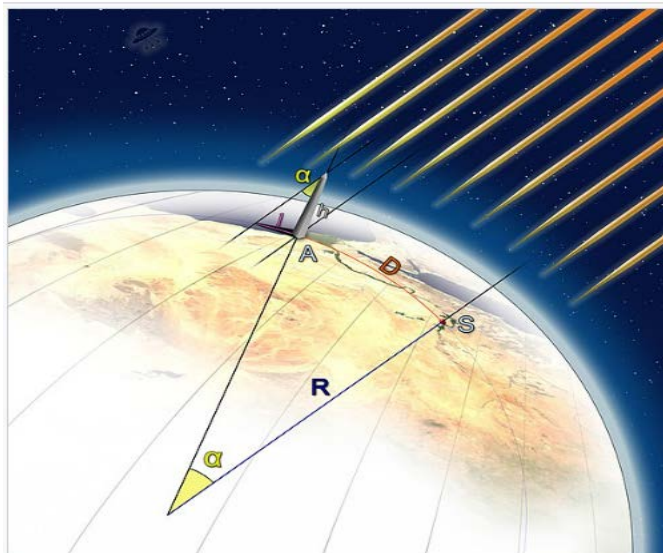
Altresì risultano fondamentali i riferimenti alla trigonometria sferica. Per calcolare le posizioni di stelle e pianeti bisognava ricorrere a una geometria quantitativa sulla sfera ed esaminare i triangoli sferici. Oltre all'*Astronomia*, tali studi determinavano in *Nautica*, una maggiore precisione dei percorsi e delle rotte da seguire nella navigazione.

3 - Misurare la circonferenza terrestre e il suo raggio

Particolarmente significativa è la discussione della seguente esperienza didattica. Essa è collegata ad un celebre esperimento di *Eratostene da Cirene* (Cirene 276 a.C.- *Alessandria d'Egitto* 194 a.C.) e costituisce una pietra miliare nella storia della scienza. In essa si intrecciano elementi di matematica, fisica, geologia e astronomia. Ecco la descrizione dei fatti:

A Mezzogiorno del solstizio d'estate il Sole illuminava completamente un pozzo a Syene (attuale Assuan), che

quindi si trovava sul Tropico del Cancro. Ad Alessandria invece, posta sullo stesso meridiano, i raggi formavano un angolo con un bastone, detto gnomone, di $7,2^\circ$.



Si evidenziano in figura alcuni rilievi:

- Raggi solari paralleli
- Rette parallele tagliate da una trasversale con angoli alterni-interni congruenti tra loro
- La misura dell'angolo α calcolata con la funzione arcotangente

La proporzione tra angoli e archi corrispondenti porta a:

$$360^\circ : 7,2^\circ = 2\pi R : AS$$

(era nota la distanza AS tra *Alessandria* e *Syene*), quindi:

$$2\pi R = 50 \cdot AS \approx 40000 \text{ km}$$

Eratostene stima, quindi, per la circonferenza della Terra un valore vicino a 40000 *km* ed un raggio prossimo a 6300 *km*, con un errore che differisce del 1% rispetto a quello attuale.

Nell'esperimento di Eratostene, sono rilevanti oltre agli elementi di teoria delle rette parallele, l'utilizzo delle tavole goniometriche per il calcolo della *funzione arcotangente*, il significato del solstizio d'estate e la scelta delle città di *Syene* e *Alessandria* situate sullo stesso meridiano.

Per motivi di semplicità didattica, si è supposta la Terra perfettamente sferica ed i raggi solari paralleli tra loro; si sono trascurati il leggero scostamento delle due città dal meridiano comune, così come *Syene* non è situata perfettamente sul Tropico del Cancro. Tali assunzioni incidono in maniera lieve sul risultato complessivo.

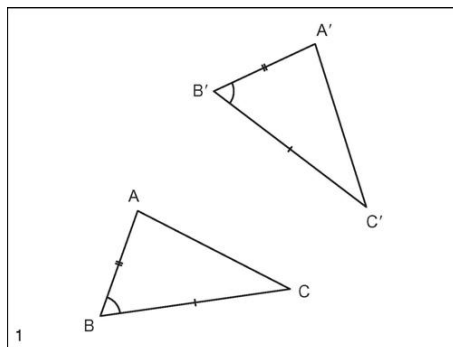
Si evidenzia come l'ingegno di Eratostene e se vogliamo l'arte del *problem solving*, raggiungono apici molto alti, sottolineando la semplicità dei mezzi che si sono adoperati per tale risoluzione. C'è da chiedersi se si possono accantonare facilmente esperienze didattiche di tale portata?

Come avverrà successivamente con *l'esperimento di Cavendish*, per il calcolo della massa della Terra (e quindi della valutazione della densità media terrestre), queste danno luogo a notevoli spunti di argomentazione in aula.

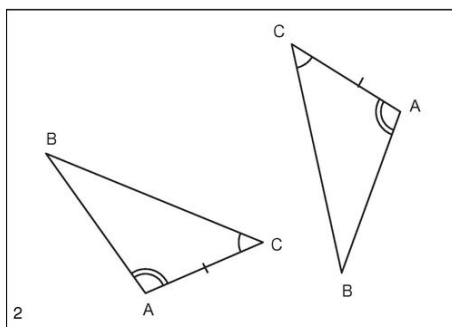
4 - La risoluzione dei triangoli e i relativi criteri di congruenza

Sono noti agli allievi i tre criteri di congruenza dei triangoli, che qui si riportano:

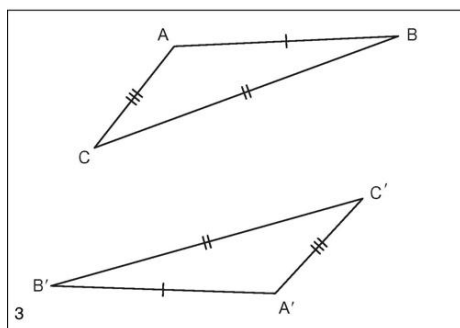
- primo criterio (lato-angolo-lato): se due triangoli hanno congruenti due lati e l'angolo tra essi compreso, allora sono congruenti;



- secondo criterio (angolo-lato-angolo): se due triangoli hanno congruenti un lato e due angoli a esso adiacenti, allora sono congruenti;



- terzo criterio (lato-lato-lato): se due triangoli hanno rispettivamente congruenti tutti i loro lati, allora sono congruenti.



Osservazione: la sola uguaglianza degli angoli non implica naturalmente la congruenza dei due triangoli

Per la risoluzione dei triangoli, i casi di studio sono allora:

- Trovare gli elementi incogniti conoscendo due lati e l'angolo compreso
- Trovare gli elementi incogniti conoscendo un lato e due angoli adiacenti
- Trovare gli angoli conoscendo le lunghezze dei tre lati

La risoluzione dei triangoli diventa immediata, utilizzando canonicamente il teorema del coseno e il teorema dei seni. Si dovrebbe forse notare, che in passato, a tal proposito, altre formule come quelle di Briggs, hanno trovato largo impiego poiché si riuscivano a calcolare facilmente, con apposite tavole, i logaritmi delle funzioni goniometriche.

Come è noto, il secondo criterio si può generalizzare nel senso seguente, non richiedendo che i due angoli siano necessariamente adiacenti al lato fornito:

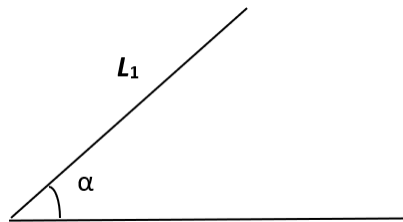
se due triangoli hanno rispettivamente congruenti un lato, e due angoli, uno opposto ed uno adiacente al lato ancora congruenti, allora i due triangoli sono congruenti tra loro.

La questione che si pone è come risolvere il caso più critico, per i triangoli, cioè: trovare gli elementi incogniti conoscendo due lati e l'angolo non compreso.

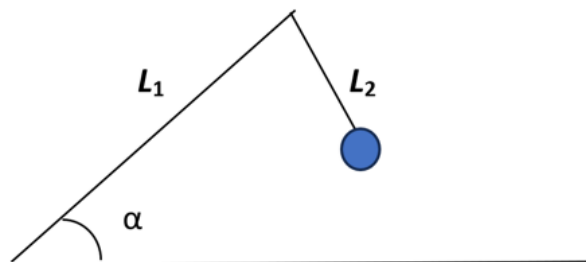
A questo scopo si illustrerà la seguente scheda che compendia la relativa attività laboratoriale.

4.1 - Il pendolino

Si abbia un asse obliquo, per esempio il braccio di una lampada da tavolo, di lunghezza prefissata L_1 e inclinata di un determinato angolo α (*acuto*), rispetto ad un tavolo orizzontale di riferimento. Si conoscono inizialmente i valori di L_1 e α .



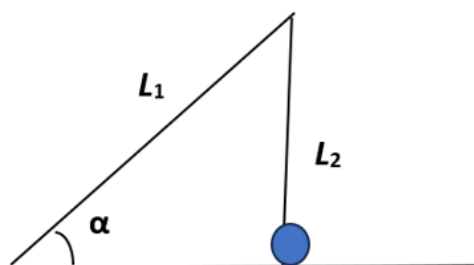
Alla sommità dell'asse si vuole porre un pendolo, mediante una cordicella, di lunghezza L_2

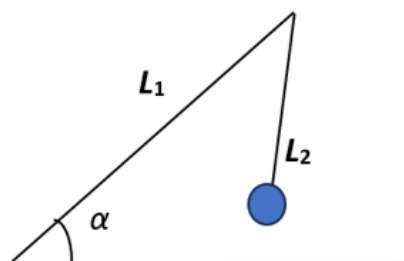
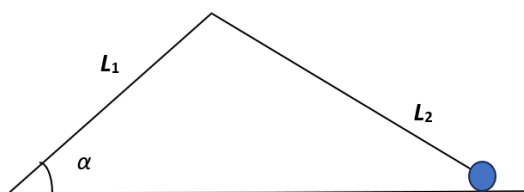


Si chiede agli allievi, al variare della lunghezza L_2 , di valutare quando il pendolo tocca o non tocca la retta orizzontale di riferimento. Si mostrano alcuni casi-guida per esplorare la situazione e valutare quando si chiuderà il triangolo.

Si invitano gli allievi ad elaborare in modo autonomo la questione avvalendosi di gruppi di lavoro in modalità cooperative learning.

Una sola soluzione



Soluzione impossibileUna sola soluzione

Al variare di L_2 ci potrà quindi essere o meno una soluzione!

Dalle figure di sopra, in relazione all'altezza H che si formerà:

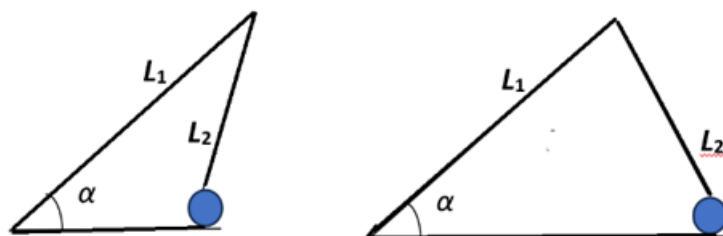
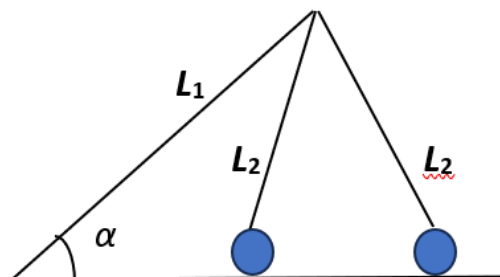
$$L_2 = H = L_1 \sin \alpha \text{ (determinato)}$$

$$L_2 < H = L_1 \sin \alpha \text{ (impossibile)}$$

$$L_2 > H = L_1 \sin \alpha \text{ (determinato)}$$

Si scopre dopo un po' di tentativi, che in qualche caso, il pendolo toccherà il tavolo (asse orizzontale) due volte. Precisamente quando è verificata la condizione:

$$H < L_2 < L_1$$



Se invece $L_2 \geq L_1$ la soluzione è determinata univocamente.

Di conseguenza, per due triangoli, che abbiano congruenti sia i due lati che l'angolo non compreso tra questi, non risultano necessariamente congruenti. Il primo criterio, allora, non si può generalizzare.

L'attività esplorativa si può evidentemente estendere alla risoluzione di triangoli, in cui α è *retto o ottuso*. In questi casi la

risoluzione è più semplice, non presentando una doppia soluzione.

5 - La Goniometria e Trigonometria negli sviluppi attuali

Si presenterà in questo paragrafo una proiezione sui risultati della Letteratura attuale della Goniometria e Trigonometria. Come in Geometria Euclidea, la ricerca è tutt'ora attiva, e si possono citare alcune ricerche, tra cui:

- Nuove dimostrazioni di risultati classici: il teorema di Pitagora, i teoremi di Euclide, la formula di Erone, ecc
- Dimostrazioni di teoremi più recenti: *Niven, Morley*, ecc.
- Relazioni ed espressioni tra funzioni goniometriche particolarmente eleganti

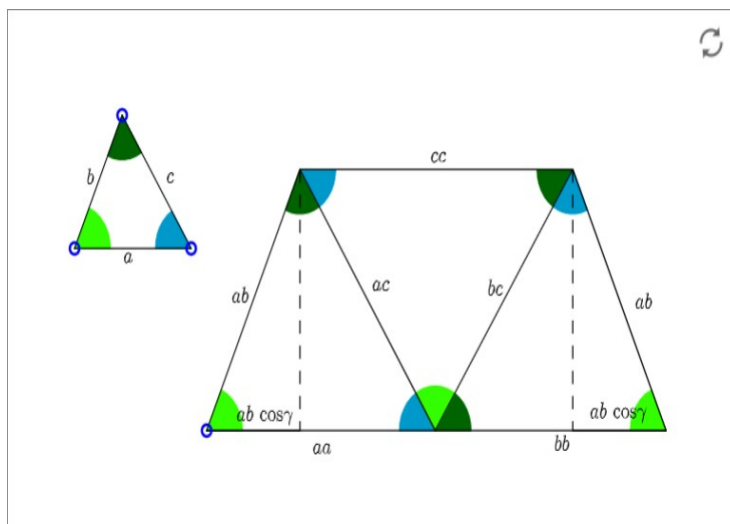
Rielaborare o semplificare la dimostrazione di teoremi, anche noti, ha il vantaggio di rendere evidente alcuni aspetti peculiari oltre a far risaltare il nucleo principale del risultato stesso. Ciò è accomunato, d'altra parte, con quel filone didattico di ricerca, sviluppato negli ultimi decenni, delle cosiddette *PWW (Proof Without Words)*.

Un sito che si è rivelato fonte utile in tal senso, è stato <https://www.cut-the-knot.org> che espone centinaia di risultati recenti, tra cui ne presenteremo alcuni.

5.1 - Il teorema del coseno o di Carnot

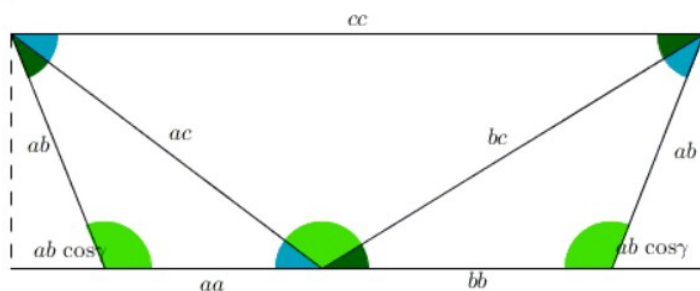
Per il suo stretto collegamento alla Geometria Euclidea, è evidente che alcuni teoremi trigonometrici possono essere condotti per via puramente geometrica. In tal senso, un modo di provare il teorema del coseno può essere quello di sfruttare

direttamente la similitudine dei triangoli. Infatti, si può procedere partendo con un dato triangolo (acutangolo) e costruire tre nuovi triangoli da quello di partenza, moltiplicando i suoi lati rispettivamente per le misure a , b , c delle lunghezze dei lati. Naturalmente, i nuovi triangoli saranno simili tra loro e con gli angoli congruenti a quelli del triangolo originario. Così, come un gioco ad incastro per tessere di *puzzle*, si riesce ad avere il seguente schema geometrico:

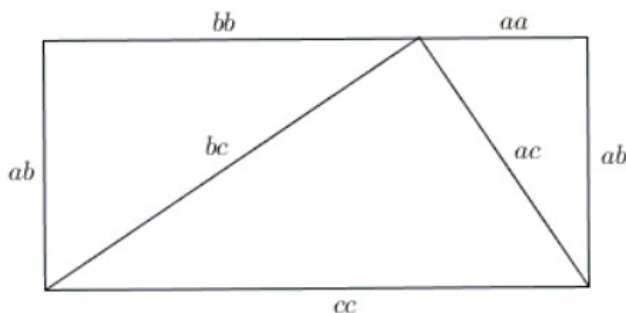


Confrontando la base maggiore con la base minore, si ha evidentemente la tesi: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$.

L'enunciato è verificato, come in figura, anche per i triangoli ottusangoli:



Per il triangolo rettangolo, si ottiene così il teorema di Pitagora, $a^2 = b^2 + c^2$, con una dimostrazione che sfrutta tale gioco d'incastro.



Questa è dovuta a G. Margrave, della Lucent Technologies e probabilmente ha anticipato le dimostrazioni dei due casi precedenti.

Si riporta ora, un'altra dimostrazione del teorema del coseno, basata sulla proprietà delle corde di una circonferenza (S.Kung).

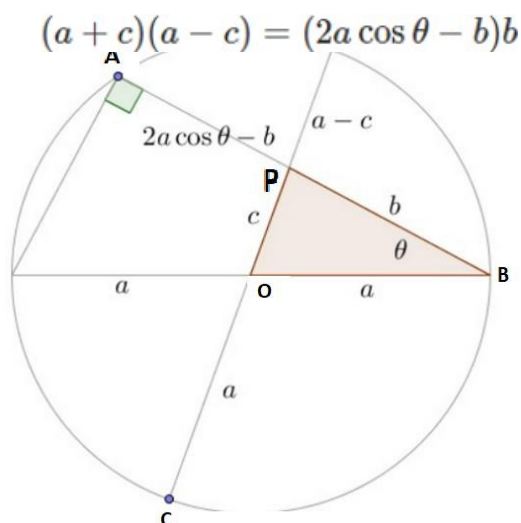
Dimostrazione

Sia dato il triangolo colorato posizionato come in figura, (con l'angolo acuto in evidenza). Sul lato di lunghezza a si

costruisca il diametro di lunghezza $2a$ con centro O , ottenendo poi, prolungando i lati, un triangolo rettangolo, retto in A . Esso è inscritto nella semicirconferenza ed in generale non è simile a quello colorato.

Vale per il teorema delle corde: $CP \cdot PD = AP \cdot PB$

Esplicitando:



$$a^2 - c^2 = 2ab \cos \theta - b^2$$

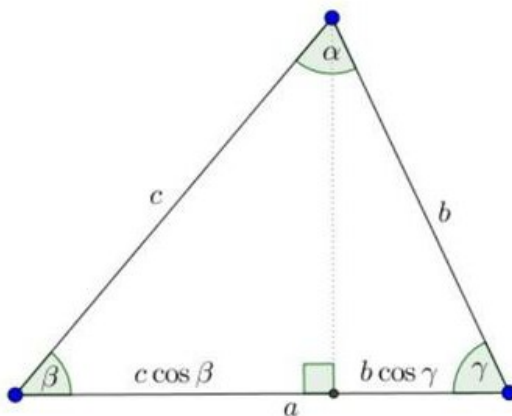
quindi la tesi.

5.2 - L'equivalenza del teorema dei seni e del teorema del coseno

In questa sezione si mostra come due dei principali teoremi della Trigonometria-teorema dei seni e del coseno- sono riconducibili l'uno all'altro, sebbene nella prassi didattica non venga sottolineato di frequente. Anche se conosciuta da tempo

tale equivalenza logica, la prova che qui si fornisce ha il pregio di essere particolarmente semplice ed efficace (S. Kung, 2016).

Dimostrazione



Si nota che: $a = b \cos(\gamma) + c \cos(\beta)$

Elevando al quadrato ed usando l'identità pitagorica fondamentale:

$$a^2 = [b \cos(\gamma)]^2 + [c \cos(\beta)]^2 + 2bc \cos(\beta) \cos(\gamma)$$

$$a^2 = b^2(1 - \sin^2 \gamma) + c^2(1 - \sin^2 \beta) + 2bc \cos \beta \cos \gamma$$

$$= b^2 + c^2 + 2bc[\cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma]$$

$$- [b^2 \sin^2 \gamma + c^2 \sin^2 \beta - 2bc \sin \beta \sin \gamma]$$

$$= [b^2 + c^2 + 2bc \cos(\beta + \gamma)] - (b \sin \gamma - c \sin \beta)^2$$

Aggiungendo e sottraendo il termine $2bc \sin \beta \sin \gamma$, si ha:
Formula di addizione del coseno.

Si perviene quindi a:

$$a^2 = [b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)] - (b \sin \gamma - c \sin \beta)^2.$$

Se è vero il teorema del coseno: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$, risulta

$$(b \sin \gamma - c \sin \beta)^2 = 0$$

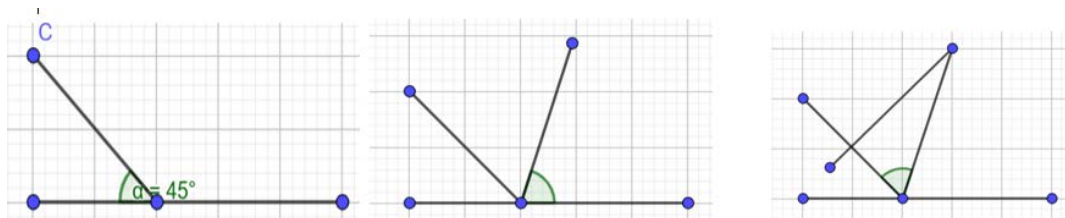
$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

cioè il teorema dei seni. Viceversa, se vale il teorema dei seni, si ha: $b \sin \gamma - c \sin \beta = 0$ e dalla precedente relazione segue il teorema del coseno $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$.

5.3 - La valutazione di una particolare relazione goniometrica: $\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3 = \pi$.

Una proposta che si può realizzare in aula è chiedere agli allievi di provare a verificare l'identità di sopra. Nel 2006, in [2], Ecker ne diede una dimostrazione geometrica. In questa direzione, risulta significativa trattare l'identità, secondo il seguente approccio:

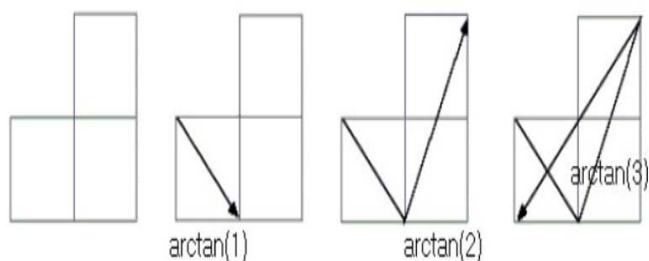
riconoscere che le funzioni goniometriche $\arctan 1$, $\arctan 3$, $\arctan 2$, sono associate agli angoli evidenziati tra i segmenti, come nelle figure:



È immediato constatare che si raggiunge subito la tesi:

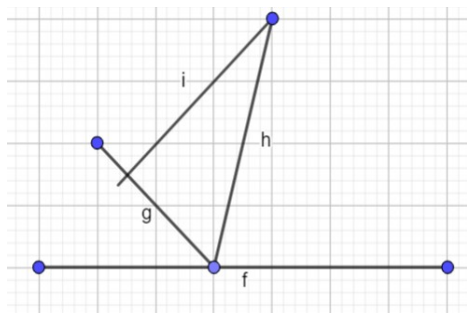
$$\arctan 1 + \arctan 3 + \arctan 2 = \pi.$$

La soluzione appena mostrata è equivalente a quella fornita da *J. Molokach*, nel 2012, che si riporta in basso:

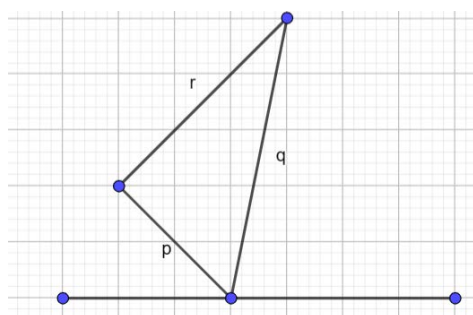


Comunque si scelga lo schema geometrico, la bellezza del risultato è proprio nella semplicità della verifica dell'identità, cioè nel coglierla in uno sguardo d'insieme. Riuscire a "vedere particolari angoli", con i rispettivi valori della funzione tangente pari a 1, 2, 3, rende la dimostrazione breve e affascinante.

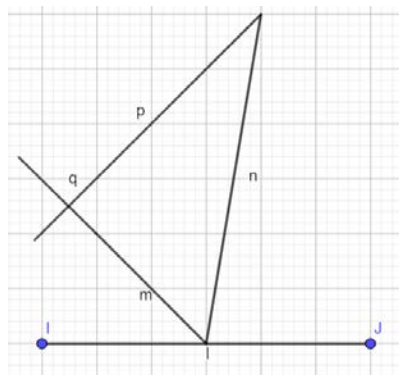
Ci si può chiedere se esistono varianti e generalizzazioni su tale questione e la risposta è affermativa. Per $n = 4, 5, 6, \dots$ si hanno:



$$\arctan 1 + \arctan(5/3) + \arctan 4 = \pi$$



$$\arctan 1 + \arctan(3/2) + \arctan 5 = \pi$$

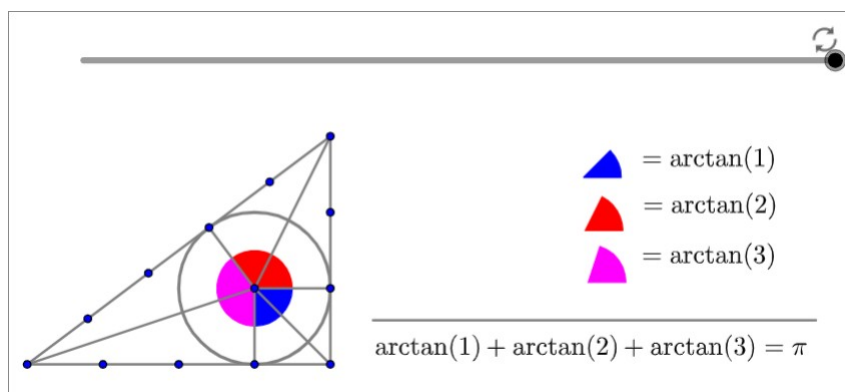


$$\arctan 1 + \arctan(7/5) + \arctan 6 = \pi$$

La regola generale da far scoprire agli allievi, provando dei valori di n via via crescenti, conduce dopo diversi tentativi, alla seguente:

$$\arctan 1 + \arctan\left(\frac{n+1}{n-1}\right) + \arctan(n) = \pi.$$

Un'ulteriore dimostrazione dello stesso risultato, si realizza esaminando il noto triangolo egizio 3-4-5, dove si evidenziano l'incentro e i relativi angoli che si vengono a formare.



Created with GeoGebra

6 - Conclusioni

Il seguente lavoro ha la speranza di favorire una riflessione più matura, nella nostra scuola, nella trattazione della Goniometria e Trigonometria.

Sviluppare delle schede di lavoro in cui sono presenti esperienze storiche come quella di *Eratostene*, di recenti risultati come l'equivalenza del Teorema dei Seni e del

Coseno, oppure dimostrazioni alternative di fatti noti, dovrebbe probabilmente indurre a rendere più appetibile una Didattica laboratoriale della Goniometria e Trigonometria. Si potrebbero citare numerosi risultati che ricevono continua attenzione in Letteratura, ma ci limiteremo per motivi di spazio a qualcuno di essi. Per esempio, il *teorema di Niven* fornisce restrizioni ai soli valori razionali $0, \pm 1, \pm 1/2$, della funzione $\cos(a)$, per angoli α commensurabili con l'angolo giro, si veda per approfondimenti [3],[4],[6]. Così pure, ricerche di altro tipo tendono a riconoscere l'incommensurabilità tra le diagonali di un poligono regolare [5], oppure determinare dei criteri che realizzano la congruenza o meno dei poligoni [1].

In tale direzione, la Goniometria e la Trigonometria, di fianco alla Geometria, possono essere presentate come un organismo vivo ed alimentare un interesse reale sia nei docenti che negli allievi, oltreché nei cultori di matematica. In questo modo, si evita anche di cadere in un tecnicismo di calcolo eccessivo favorendo un'esposizione più fluida ed efficace, ed una divulgazione della Matematica consona alle esigenze attuali.

Bibliografia

Anatriello G., Laudano F., Vincenzi G. (2018). Pairs of congruent like quadrilaterals that are not congruent, *Forum Geometricorum*, vol. 18, pp. 381-400.

Ecker, Michael W. (2006) $\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3 = \pi$, *College Mathematics Journal*, vol 37, n. 3 May 2006, pag 218-219.

Paolillo B., Vincenzi G. (2020). An elementary proof of Niven's theorem via the tangent function, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*.

Paolillo B., Vincenzi G. (2021). On the Rational Values of Trigonometric Functions of Angles that are Rational in Degrees, *Math. Mag.* **94**, n. 2, 132-134, *Mathematical Association of America*.

Paolillo B., Rizzo P., Vincenzi G. (2021). Commensurable diagonals in Regular n-gons, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*.

Paolillo B. (2021). Incommensurabilità angolare in classe: un nuovo approccio didattico-Un laboratorio didattico di geometria- *Periodico di Matematica (IV) Vol. III (3-4)* 255-270.

Bergamini, Barozzi, Trifone (2020) *Matematica.blu 4*, Zanichelli, terza edizione.

Durell C.V. , Robson A. (1930) *Advanced Trigonometry*.

Gelfand, Mark Saul, *Trigonometry*, I.M.

Maor. E., (1998) *Trigonometric Delights*, Princeton University Press.

Sawyer. W. W. (2011) *Prelude to Mathematics*, Dover, pp 37-39.

Santià Giuseppe (1984). *Trigonometria piana per il Liceo scientifico* Edtsco.

<https://www.cut-the-knot.org>

Il principio metodologico della ricerca scientifica del geniale fisico Paul Dirac era la bellezza: ricercare la verità in fisica per Dirac equivaleva a inseguire la bellezza. Per Dirac valeva il motto rinascimentale «Pulchritudo splendor veritatis», laddove c'è bellezza c'è verità. Per Dirac la bellezza era l'eleganza di un'equazione. Per lui, per esempio, se un'equazione è bella, prima o poi la teoria fisica sulla quale poggia si rivelerà vera, anche se quell'equazione, almeno temporaneamente, riesce scarsamente a descrivere la realtà sperimentale. In fondo è ciò che è accaduto alla sua famosa equazione, che nel 1928 predisse l'esistenza delle antiparticelle, confermata sperimentalmente soltanto quattro anni dopo da Anderson nel 1932. Più in generale per Dirac sono tanto più belli i formalismi in matematica quanto più "invarianti" mettono a disposizione, intendendosi per "invarianti" tutte quelle entità o quantità che non cambiano quando si effettuano trasformazioni geometriche (come per es. una rotazione) o quando si cambia sistema di riferimento. E quanti più "invarianti" ci sono in una teoria fisica tanto maggiore è la sua bellezza e quindi la probabilità della sua esattezza. Perché l'invarianza risulta essere garante dell'esattezza di una teoria fisica? La risposta è semplice: perché l'invarianza rispetto a una trasformazione (geometrica o di sistema di riferimento) è la prova più convincente dell'esistenza di un oggetto. Per spiegarlo basta questa semplice riflessione. Se ho un oggetto davanti ai miei occhi, posso credere in un primo momento che ciò che vedo da una certa angolazione sia un cubo, ma poi ruotando attorno a quell'oggetto, mi accorgo che invece non è un cubo, perché la sua forma è cambiata osservandolo da un altro punto di vista. Se, invece, pur cambiando diversi punti di vista permane in me la vista prospettica di un cubo, mi convincerò che effettivamente quell'oggetto è un cubo. Questo in estrema sintesi il pensiero di Dirac: la bellezza porta all'invarianza, questa alla verità: la bellezza conduce dunque alla verità. Se per Dirac e anche altri scienziati la bellezza ha un valore euristico e gnoseologico, per alcuni scrittori ha un valore escatologico, come per Fedor Dostoevskij, che nell'Idiota scrive: «La bellezza salverà il mondo». Allora è allettante l'idea di fondere assieme i due punti di vista di Dirac e Dostoevskij, concependo una scienza che, ricercando la bellezza per raggiungere la verità, conduca l'umanità alla salvezza, in contrasto quindi con l'attuale diffuso scetticismo: la scienza salverà l'umanità.

(da Luca Nicotra, "La bellezza nell'opera dello scienziato", «ArteScienza», Anno X, N. 20, pp. 5-36, DOI:10.30449/AS.v10n20.176.)

“La verità in matematica. Da Gödel a Euclide” di Luca Nicotra

Recensione

Franco Eugeni*

* Già professore ordinario di Discipline Matematiche e di Filosofia della Scienza, Presidente dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane;

eugenif3@gmail.com



DOI : 10.53159/PdM(IV).v5n4.126

Il titolo dell'opera *La verità in matematica. Da Gödel a Euclide* dell'ing. Luca Nicotra è, a tutti gli effetti, un riassunto dell'opera stessa, racchiudendo quello che potrebbe essere chiamato il “salto epistemologico” prodottosi tra il 1500 e 1800, passaggio che, dopo lunga gestazione, ha modificato in maniera irreversibile il nostro modo di concepire la matematica.

I primi vagiti della geometria, risalenti a Talete di Mileto (640 (625)/548 a.C), sono essenzialmente legati a risolvere problemi di natura pratica. Del resto, come ci ricorda Erodoto, l'etimologia della parola geometria, nata nell'antico Egitto se non nelle precedenti civiltà sumeriche, significa “misura della terra” sintetizzando ciò che gli antichi chiedevano a questa scienza.

Ma in quello che è definito il Periodo Presocratico, in Calabria sorse attorno al 530 a.C. la Scuola Pitagorica, a Crotona, città fondata da coloni greci provenienti dalla regione dell'Acacia, nella seconda metà dell'VIII secolo a.C. Difficile definire correttamente l'indirizzo misterico della scuola, che nasce forse ispirata alle comunità orfiche-dionisiache, ma anche su idee ereditate da varie sette religiose operanti nell'antico Egitto e a Babilonia. La scuola fu fondata da Pitagora di Samo (570-495 a.C.) sulla cultura che egli avrebbe acquisita dai suoi viaggi nell'Oriente di allora. Non vi è dubbio che in questo periodo la scoperta dell'irrazionale produce un primo, se pur irrisolto, salto epistemologico, tipico della scoperta di teorie errate, quando la richiesta della finitezza del numero dei punti di un segmento entrò in vivo contrasto con una pretesa compatibilità con la teoria della misura. In un brano attribuito a Proclo Diacono (412-485), matematico e filosofo bizantino, si legge in una delle tante traduzioni:

È fama che colui il quale rese per primo di pubblico dominio la teoria degli irrazionali sia perito in un naufragio, e ciò perché l'inesprimibile e l'inimmaginabile avrebbero dovuto rimanere per sempre celati. Perciò il colpevole, che fortuitamente toccò e rivelò quest'aspetto delle cose viventi, fu trasportato al suo luogo d'origine e là viene in perpetuo flagellato dalle onde.

In tale passo sembra quasi che gli Antichi avessero intuito che nel "continuo" ci potessero essere elementi inesprimibili. In effetti, in tempi successivi, George Cantor (1845 -1918), Jules Richard (1862 -1956) ed Emil Borel (1871 -1956) troveranno un risultato in questa direzione. Sembra quasi che fin da allora aleggiassero idee, certamente troppo nuove per l'antichità, che solo con filosofi del futuro come Bertrand Russell (1872-1970) e il più giovane Karl Popper (1902-1994) si sarebbero comprese.

Sarà Euclide tra il IV e il III secolo a.C. a fare un tentativo di trattare l'ingenua geometria della misura del terreno, in una Scienza dimostrativa, nel senso aristotelico del termine. Effettivamente accettate le sue ancora necessariamente ingenuie premesse, che in ogni caso continuano ad essere utili ai fini didattici, nello sviluppo si avrà una trattazione di una reale Scienza dimostrativa. Nel 1899 David Hilbert (1862-1943) si pone il problema di dare un fondamento assiomatico rigoroso alla euclidea senza lasciare ossia di descrivere la geometria ,geometria assiomi 21 Giunge così a definire .nessun assioma inespresso, espressi nel suo lavoro *Grundlagen der Geometrie* (Fondamenti di Geometria).

Come osserva Nicotra si può delineare un legame, a mio avviso importante, tra la sistemazione logica di una scienza esatta e le costruzioni letterarie di Luigi Pirandello (1867-1936). Non sono nuovi tali legami, dei quali ha anche disquisito Bruno de Finetti. Nicotra nota come lo stesso Pirandello costruisce i suoi personaggi esattamente come un matematico costruisce un sistema ipotetico-deduttivo: ogni personaggio ha la sua verità, che è coerente con le sue personali esperienze e con la sua logica e, come tale, ha lo stesso diritto di cittadinanza della verità degli altri, non esistendo mai nei nostri contesti una verità assoluta, se non per banali ovvietà. I personaggi pirandelliani con le loro storie sono, dunque, la trasposizione sulle scene teatrali di altrettanti e diversi sistemi ipotetico-deduttivi, ciascuno fondato su premesse differenti e sviluppato con logiche differenti. La verità d'ogni personaggio va valutata all'interno di se stesso, al pari della verità in un sistema ipotetico-deduttivo, o meglio ancora secondo uno schema di un sistema razionale, con logiche multiformi, se non addirittura secondo gli schemi di una lingua esatta nel senso di Rudolf Carnap (1891-1970).

Occorre osservare che anche questo cammino ha i suoi limiti. Non vi è dubbio che i risultati di Gödel relativi alla indimostrabilità della non contraddittorietà di un sistema ipotetico-deduttivo, o più in generale di un sistema razionale, mettono in luce una impossibilità che è ben più profonda di quelle superate impossibilità dei problemi classici del mondo greco irrisolti con l'uso della riga e del compasso, quali la duplicazione del cubo, la trisezione dell'angolo, la costruzione dei poligoni regolari, la rettificazione della circonferenza e la quadratura del cerchio. Ci si chiede, sgomenti assieme a Nicotra: ma allora cosa ha senso in matematica? Per i neo-empiristi la risposta è secca: in un sistema razionale hanno un senso soltanto i postulati della teoria e della logica usata, le loro conseguenze, ma occorre accettare anche la nostra ignoranza a stabilire se il sistema in oggetto è o no contraddittorio, dato che ciò non è dimostrabile con i mezzi offerti dal sistema.

Ma allora quale sarà la nostra convinzione per andare avanti in matematica? La geometria appoggia la sua non contraddittorietà su quella dei numeri reali, i numeri reali poggiano sulla non contraddittorietà dei numeri naturali, questi o li poggiamo sulle insidiose teorie degli insiemi, oppure, come di fatto si fa, operiamo un esoterico atto extra-logico e riteniamo la teoria dei numeri naturali non contraddittoria. Ci si chiede : è una ipotesi di lavoro o un inconscio atto di fede?

Così l'opera di Nicotra, che ci affascina con una corsa attraverso la storia della matematica e dei suoi problemi.

Arriviamo necessariamente alla nascita di nuovi dubbi, nascono angosce sui problemi sconcertanti che si pongono davanti all'avanzare del pensiero contemporaneo, sempre più razionale, sempre più incerto sulle radici profonde del pensiero. Non sappiamo più se la base della matematica sia un personaggio in cerca d'autore, o se, come scrive Nicotra alla fine della sua opera,

la matematica non sarebbe altro che un platonismo universalizzato. La verità non è più l'unica esistente per grazia divina, ma è un insieme di tante possibili verità matematiche, e in tutto questo non solo non si distrugge il platonismo, ma con un ennesimo salto epistemologico lo si riporta, rendendolo universale, all'antico maestro: Parmenide.



ISBN:

9788893644433,
15,6 x 23,4 x 0,94, 164 pp., bn

Acquistabile su Amazon con **Bonus Cultura e/o Carta del Docente**

Versione stampata 16,50 €

Versione e-book 9,90 €

Nell'immaginario collettivo la matematica è la scienza esatta per eccellenza, che non può essere posta in dubbio. Questa "fede" irrinunciabile nella "verità assoluta" della matematica ha trovato la sua teorizzazione più autorevole nel filosofo Immanuel Kant, per il quale i concetti matematici sono giudizi sintetici apriori, che esprimono verità necessarie e universali. Essa però è stata infranta dall'avvento delle geometrie non euclidee e dalla conseguente profonda revisione critica dei fondamenti della geometria e della matematica tutta. Il libro ripercorre l'iter di tali mutamenti del pensiero matematico, dalla millenaria verità assoluta della concezione platonica alla verità relativa della moderna matematica pura: insieme di sistemi ipotetico-deduttivi, costituiti da proposizioni derivate logicamente da poche proposizioni iniziali coerenti, gli assiomi, di cui si "postula" la verità senza richiederne una corrispondenza alla realtà fisica.

In matematica la verità da assoluta è quindi diventata relativa, con valore soltanto sintattico di coerenza con gli assiomi, senza necessità di un valore semantico da cercarsi nella realtà fisica. In questo mutamento si è visto l'abbandono del platonismo matematico a favore di una matematica come libera creazione del nostro pensiero. Ma è proprio così? L'Autore in questo libro propone una sua originale interpretazione.

Un itinerario storicistico- didattico per l'introduzione del concetto di campo in fisica

Luca Nicotra*

* Ingegnere e giornalista pubblicitario. Membro onorario APAV e AFSU, Presidente dell'A.P.S. "Arte e Scienza", Direttore responsabile di «Arte-Scienza», «Bollettino dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane», «Periodico di Matematica». Direttore editoriale di UniversItalia;

luca.nicotra1949@gmail.com.



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v5n4.127

Sunto: *In questo articolo si delinea un percorso storicistico-didattico che, partendo da una facile analogia con il gioco degli scacchi, approda al concetto di campo nella fisica classica, oggetto di studio nelle scuole secondarie superiori. In questa trattazione si è deciso di non utilizzare la matematica: né le definizioni delle grandezze fisiche coinvolte né le relative formule, rimanendo unicamente nei confini di una esposizione concettuale, secondo lo stile di Michael Faraday.*

Parole Chiave: *scacchi, campo, induzione elettromagnetica, Michel Faraday, azione a distanza.*

Abstract: *This article outlines an educational path which, starting from an easy analogy with the game of chess, arrives at the concept of field in classical physics, an object of study in upper secondary schools. In this discussion it was decided not to use mathematics: neither the definitions of the physical quantities*

involved nor the related formulas, remaining solely within the confines of a conceptual exposition, according to Michael Faraday's style.

Keywords: *chess, field, electromagnetic induction, Michel Faraday, remote action.*

Come insegnante Fermi era noto per la sua grande abilità nel far sembrare meravigliosamente semplici, in modo chiaro e diretto, con poca matematica e molto contenuto fisico, gli argomenti più difficili.

Jay Orear

Professore di fisica alla Cornell University

1 - Il concetto di campo in fisica: dal gioco degli scacchi alla realtà fisica

Il concetto di campo ha fatto la sua apparizione in fisica, ma poi si è esteso anche alla matematica. Albert Einstein lo considerava il «maggior successo dell'uomo nella scienza». In questo articolo si delinea un percorso storicistico-didattico che, partendo da una facile analogia con il gioco degli scacchi, approda al concetto di campo nella fisica classica, oggetto di studio nelle scuole secondarie superiori.

In questa trattazione si è deciso di non utilizzare la matematica: né le definizioni delle grandezze fisiche coinvolte né le relative formule, rimanendo unicamente nei confini di una esposizione concettuale, secondo lo stile di Michael Faraday.

2 - Le "mosse" dei pezzi degli scacchi

Si dice spesso che il modo migliore per apprendere qualcosa di nuovo, specialmente in campo scientifico, è un approccio ludico. Il concetto di campo nella fisica classica non è di immediata comprensione e la sua accettazione presenta difficoltà soprattutto di ordine psicologico. Il gioco degli scacchi offre una inaspettata opportunità di rendere più familiare la sua comprensione, tramite l'analogia con il campo d'azione delle mosse dei suoi pezzi nella scacchiera.

Consideriamo le possibili posizioni raggiungibili dai pezzi degli scacchi. Escluso il caso del pedone, per tutti gli altri pezzi le posizioni raggiungibili sulla scacchiera sono anche quelle in cui è possibile "mangiare" il pezzo dell'avversario. Il pedone, invece, si può muovere di una casella in avanti (oppure di due caselle partendo dalla fila iniziale) ma può "mangiare" soltanto diagonalmente in avanti spostandosi di una casella. Osservando le figure 1-6, si può affermare che ogni pezzo degli scacchi crea sulla scacchiera una zona di "influenza" (le caselle con croce verde) disponibile per il suo movimento e per l'eliminazione dei pezzi dell'avversario.

Poiché la scacchiera è lo "spazio" del gioco degli scacchi, viene in mente, per analogia, un concetto fondamentale che riguarda invece lo "spazio fisico" entro cui si svolgono fenomeni che si manifestano con le cosiddette "forze a distanza", come la forza di gravità, le interazioni elettriche e magnetiche: il campo di forze della fisica classica. In tale analogia al campo di forze corrisponde la "zona di influenza" di un pezzo degli scacchi sulla scacchiera.

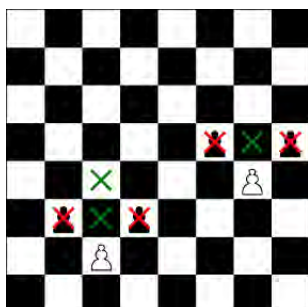


Fig. 1 - Le possibili posizioni raggiungibili dal pedone.

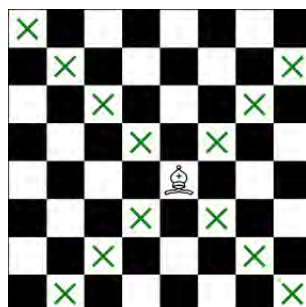


Fig. 2 - Le possibili posizioni raggiungibili dall'alfiere.

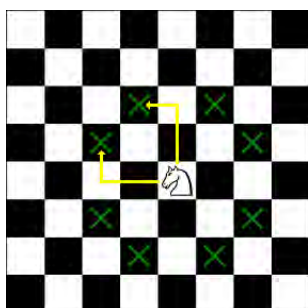


Fig. 3 - Le possibili posizioni raggiungibili dal cavallo.

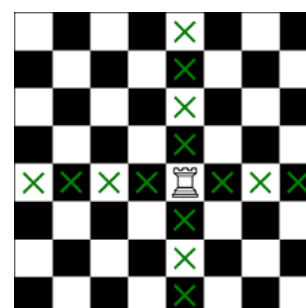


Fig. 4 - Le possibili posizioni raggiungibili dalla torre.

La scacchiera, con le sue regole di movimento degli scacchi, offre dunque un ottimo punto di partenza per un viaggio di esplorazione del concetto di campo in fisica.

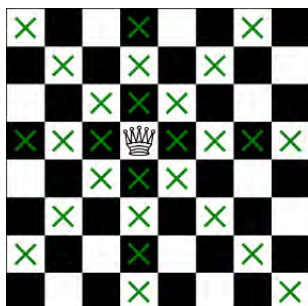


Fig. 5 - Le possibili posizioni raggiungibili dalla regina.

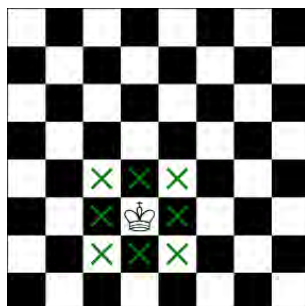


Fig. 6 - Le possibili posizioni raggiungibili dal re.

3 - Un problema controverso della fisica: le azioni a distanza

Nella fisica classica, le forze vengono distinte in due grandi categorie: le forze a contatto e le forze a distanza. Le prime sono dovute al contatto fisico fra due corpi, mentre le seconde sono attribuite all'azione esercitata da un corpo su un altro distante dal primo. Esempi di forze a contatto sono le reazioni vincolari (per es. la reazione al peso di un oggetto esercitata dal piano di un tavolo sul quale l'oggetto poggia), le forze di attrito, le forze risultanti dalla pressione esercitata da un fluido su un corpo in esso immerso, ecc. Forze a distanza sono, invece, la gravità terrestre, la forza di gravitazione universale, le forze elettriche e magnetiche.

Tuttavia l'idea di "azione a distanza" non risulta accettabile intuitivamente e psicologicamente, in quanto è radicata nelle comuni esperienze quotidiane l'idea che l'azione esercitata da un corpo su un altro debba avvenire tramite un contatto fisico.

In altri termini, l'azione a distanza ha qualcosa di "magico" e ripugna allo spirito umano l'idea che un oggetto possa influenzare lo stato di un altro oggetto senza che vi sia un contatto fisico. Spesso si considera Isaac Newton (1642-1726) il "padre" del concetto di azione a distanza, in quanto scopritore della legge di gravitazione universale che postula un tale tipo di azione e "newtonesimo" è stato chiamato questo indirizzo di pensiero. In realtà, invece, nessuno più di Newton stesso è stato un anti-newtoniano, in questo senso. Infatti, Newton, dopo aver formulato nel 1687 la legge della gravitazione universale, espresse i suoi dubbi sulla reale esistenza di azioni a distanza¹ nella celebre terza lettera inviata al filologo Richard Bentley tra dicembre del 1692 e febbraio del 1693:

Che la gravità possa essere innata, inerente ed essenziale alla materia, cosicché un corpo possa agire su un altro a distanza e attraverso un vuoto, senza la mediazione di qualcosa grazie a cui e attraverso cui l'azione e la forza possano essere trasportate dall'uno all'altro, ebbene, tutto ciò è per me una assurdità così grande, che io non credo che un uomo il quale abbia in materia filosofica una capacità di pensare in modo reale, possa mai cadere in essa. La gravità deve essere causata da un agente che agisca sempre secondo certe leggi; e ho lasciato alla considerazione dei miei lettori il problema se quell'agente è materiale o immateriale. (Cohen, 1978)²

Dunque lo stesso Newton pensava che la "forza a distanza" della gravità dovesse, in realtà, essere trasmessa da un corpo a un altro distante dal primo per mezzo di un «agente che agisca sempre secondo certe leggi». La geniale intuizione di

¹ Dubbi condivisi pure da Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716), Renè Descartes (1596-1650), Christiaan Huygens (1629-1695).

² Brano riportato in italiano da (Bellone, 2006a, pp. 438-439).

Newton avrà un seguito nel concetto di campo di forza, introdotto definitivamente in fisica, con successo, da Michael Faraday (1791-1867), considerato uno dei più grandi fisici sperimentali di tutti i tempi.³

Fu infatti Faraday a dare una prima risposta convincente alle riflessioni scettiche di Newton sulla reale possibilità di azioni a distanza. Studiando l'interazione fra fenomeni magnetici ed elettrici per primo formulò l'idea di "campo di forza" come oggetto fisico reale in grado di riportare l'idea di azione a distanza a quella di azione a contatto. In breve, si trattava di dare una risposta alla domanda: come è possibile pensare che una azione fisica possa trasmettersi da un corpo a un altro distante, se accettiamo l'idea che ogni azione possa svilupparsi unicamente per contatto?

Nel paragrafo successivo ripercorreremo il percorso storico che portò Faraday a concepire l'idea di campo di forza.

Il concetto di "campo", come vedremo oltre, ha un vasto dominio di applicazione nella fisica attuale, ma può essere introdotto più intuitivamente considerando i fenomeni elettrici. Il concetto di campo si estrinseca nel fatto che una carica elettrica (più in generale una distribuzione di cariche elettriche), con la sua presenza, modifica lo stato "fisico" dello spazio circostante, in maniera tale che se un'altra carica elettrica viene posta in un suo punto, essa subisce una forza elettrica (forza

³ Antesignani del concetto di campo sono da considerarsi il matematico, astronomo e fisico olandese Christiaan Huygens (1629-1695) e l'ingegnere e fisico francese Augustin-Jean Fresnel (1788 -1827) padri della teoria ondulatoria della luce. Tale teoria, infatti, contrapponeva all'idea dello spazio vuoto della meccanica newtoniana l'idea di uno spazio avente una consistenza fisica reale, tale da permettere l'esistenza di perturbazioni in grado di spiegare la propagazione della luce.

di Coulomb) "da parte di tale spazio", che assume, così modificato, il nome di "campo elettrico". È importante notare che, secondo questa impostazione, la seconda carica subisce una forza elettrica non direttamente dalla prima carica da essa distante (in tal caso si rimarrebbe nella concezione della azioni a distanza) ma dal campo elettrico da quella creato. In altri termini è il campo elettrico il "mediatore" o "messaggero" dell'azione elettrica che la prima carica esercita sulla seconda. Il campo di forze concepito da Faraday ha dunque un'interpretazione fisica reale, tant'è che esso può trasportare energia da un punto all'altro, come Faraday dimostrò nel 1859.

Il concetto di campo introdotto per le forze elettriche può essere esteso a qualunque altra forza a distanza. Esso consente di suddividere il problema della determinazione delle azioni a distanza in due fasi: nella prima la determinazione del valore del campo in ogni punto dello spazio e nella seconda la determinazione della forza esercitata dal campo su un corpo che si trovi in un punto del campo e che abbia la stessa natura del campo, in modo che possa subirne l'azione. Quest'ultima osservazione significa che, per esempio, l'azione di un campo gravitazionale può essere subita soltanto da un corpo dotato di massa, essendo soltanto una massa in grado di subirla. Analogamente, l'azione di un campo elettrico può essere subita soltanto da un corpo elettricamente carico mentre non lo è da un corpo elettricamente neutro o scarico. È importante porre in evidenza che la carica elettrica utilizzata per rilevare il campo elettrico (carica esplorante) deve essere "molto piccola" in confronto alla carica o alle cariche che generano il campo, affinché non alteri quest'ultimo con la sua presenza. Infatti essa stessa, in realtà, genera un campo elettrico che si compone

con quello creato dalle altre cariche. Nel caso in cui la carica elettrica unitaria non modifichi in maniera non trascurabile il campo elettrico creato dalle cariche generatrici, si può definire intensità del campo elettrico in un punto dello spazio la forza esercitata sulla carica unitaria. Analoghe osservazioni possono essere ripetute per altri tipi di campi.

Le stesse considerazioni fatte per il campo creato da una o

Oggi, la meccanica quantistica ha eliminato radicalmente l'idea delle azioni a distanza dimostrando l'esistenza di particolari tipi di particelle elementari, dette "messaggeri", alle quali è dovuta la trasmissione di quelle che nella fisica classica erano dette interazioni a distanza. In altri termini queste ultime sono "mediate" da questi particolari tipi di particelle elementari, riducendo quindi le "azioni a distanza" della fisica classica ad azioni a contatto:

il **fotone** è la particella portatrice o messaggera della forza elettromagnetica;

il **gluone** è la particella messaggera della forza nucleare forte (quella che tiene assieme protoni e neutroni nel nucleo dell'atomo);

i **bosoni W e Z** sono le particelle messaggere della forza nucleare debole (quella che permette le reazioni chimiche)

il **gravitone** (finora soltanto postulato ma non ancora scoperto sperimentalmente) è la particella messaggera della forza di gravità.

più cariche elettriche possono essere ripetute nel caso di un magnete, che anch'esso modifica lo stato dello spazio circostante creando un "campo magnetico", che si manifesta non appena un altro magnete viene posto in un suo punto, subendo una forza magnetica "da parte del campo magnetico" e non direttamente dal magnete creatore del campo.

4 - La genesi del concetto di campo

L'idea di campo di forza fu utilizzata da Michael Faraday per spiegare il meccanismo dell'induzione elettromagnetica, che è un fenomeno di interazione tra fenomeni elettrici e magnetici.

Faraday considerò l'idea di campo di forza non soltanto uno strumento concettuale utile per spiegare i diversi casi di induzione elettromagnetica ma anche avente una esistenza fisica reale. Il dottor Bence Jones, segretario della Royal Society e autore della corposa biografia di Faraday in due volumi *The life and letters of Michael Faraday* (Jones, 1870, vol. II, p. 5) così scrive, descrivendo le prime esperienze sull'induzione fatte da Faraday nel 1831:

In his paper, when describing the experiment, he speaks of the metal cutting the magnetic curves, and in a note to his paper he says: «By magnetic curves I mean lines of magnetic forces which would be depicted by iron filings».

This is the germ of those ' lines of force ' which rose up in the mind of Faraday into ' physical ' and almost tangible matter.

Dunque alla mente di Faraday le linee di forza si palesarono fin dall'inizio in una forma fisica reale e tangibile (*rose up in the mind of Faraday into ' physical ' and almost tangible matter*) e non come semplice espediente per spiegare l'induzione elettromagnetica, come talvolta si legge. Tuttavia, la realtà fisica delle linee di forza non era condivisa da tutti e certamente è vero che Faraday negli anni Cinquanta del XIX secolo ne ribadì con forza l'esistenza, dimostrando che esse (quindi il campo magnetico) sono in grado di trasportare energia da un punto all'altro dello spazio.

Alla base degli studi che furono sviluppati da Faraday (e poi anche da Simone Lenz e Franz Ernst Neumann) sui legami tra fenomeni elettrici e magnetici occorre richiamare alcune fondamentali scoperte fatte rispettivamente dal fisico danese Hans Christian Oersted (1777-1851) nel 1820.

Oersted fece il seguente esperimento. Costruì un semplice circuito elettrico con un filo metallico rettilineo alimentato da una batteria elettrica e pose una bussola accanto al circuito. A interruttore aperto non fluisce corrente elettrica e l'ago della bussola si orienta puntando verso il Nord geografico sotto l'azione del campo magnetico terrestre. Chiudendo l'interruttore, invece, comincia a scorrere nel circuito una corrente elettrica e l'ago della bussola ruota dalla posizione originaria disponendosi perpendicolarmente al filo elettrico, come se subisse l'azione di un campo magnetico diverso da quello terrestre, che non può essere creato che dalla corrente elettrica. Oersted aveva dimostrato che una corrente elettrica, ovvero un flusso di cariche elettriche, genera un campo magnetico che non è creato invece da cariche elettriche ferme.

Faraday allora, seguendo un principio di simmetria, si pose il problema se potesse essere vero pure il caso inverso: un campo magnetico (stazionario) può creare una corrente elettrica? Questo non accade, salvo aggiungere alcune precisazioni. Infatti, Faraday nel 1831 dimostrò, con alcuni esperimenti, che un campo magnetico "variabile" genera una corrente elettrica: è il fenomeno dell'induzione elettromagnetica.⁴ In realtà sarebbe meglio precisare che tale affermazione è vera se la variabilità del campo magnetico interessa l'area occupata dal circuito indotto. Dalle considerazioni che seguono risulta chiaro che un campo magnetico anche stazionario (cioè costante nel tempo), ma non uniforme (cioè variabile nello spazio), genera una corrente elettrica in un circuito non collegato ad alcuna sorgente di elettricità, nel caso di moto relativo fra la sorgente del campo magnetico e tale circuito.

Il 24 novembre 1831 Faraday presentò alla Royal Society di Londra una memoria scientifica, intitolata *Experimental Researches in Electricity -First Series*, nella quale sono contenute le descrizioni dei suoi esperimenti fondamentali che lo condussero alla scoperta dell'induzione elettromagnetica. Faraday, negli anni 1831-1838, proseguì a compiere molte altre esperienze, di cui redasse particolareggiati resoconti in successive note scientifiche sempre intitolate *Experimental Researches in Electricity* per un totale di quattordici serie, poi da lui stesse raccolte in un volume nel 1839.

⁴ Nello stesso periodo ma indipendentemente, lo stesso fenomeno fu scoperto dal fisico statunitense Joseph Henry (1797-1878). Ma le sue ricerche non furono pubblicate, per cui ufficialmente la scoperta viene riconosciuta soltanto a Faraday.

Le esperienze che dimostrano l'esistenza dell'induzione elettromagnetica sono riconducibili essenzialmente a quattro schemi.

Caso 1

In un primo tipo di esperimenti (fig. 7), si considerino due circuiti elettrici affiancati: nel primo circuito (inducente) sono inseriti una batteria elettrica e un reostato, mentre nel secondo circuito (indotto) è inserito soltanto un galvanometro, in grado di rilevare la presenza di una corrente elettrica.

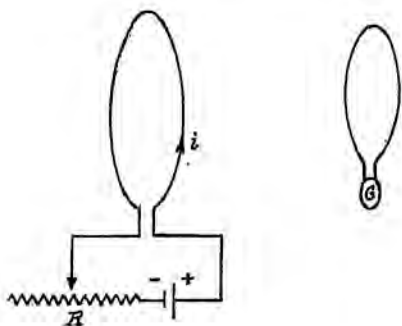


Fig. 7 - Induzione elettromagnetica (caso 1).

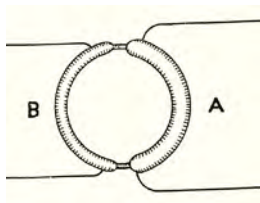
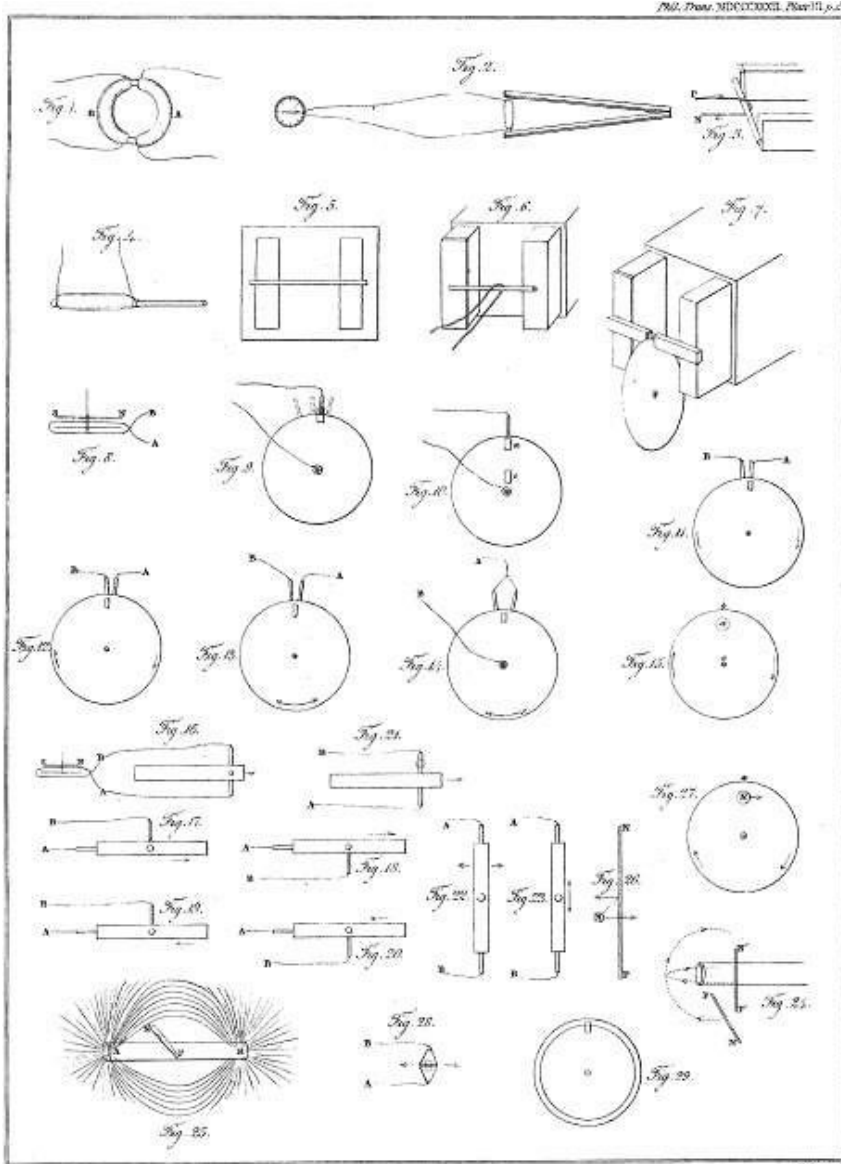


Fig. 8 - Induzione elettromagnetica (caso 1). Disegno di Faraday tratto da *Experimental Researches in Electricity*. Il filo di rame isolato A è collegato a una batteria di dieci elementi; il filo di rame isolato B è collegato a un galvanometro.

Quando l'interruttore del circuito inducente viene chiuso, l'ago magnetico del galvanometro registra una corrente elettrica nel circuito indotto, ma soltanto durante la chiusura dell'interruttore, ovvero durante il tempo (transiente) impiegato dalla corrente per raggiungere da zero il suo valore di regime costante. Una volta raggiunto questo, la corrente scompare. Lo stesso fenomeno accade quando l'interruttore del circuito inducente si apre e la corrente dal valore di regime diminuisce fino a diventare zero. La corrente indotta in questo secondo caso ha il verso opposto a quello del caso precedente. In entrambi i casi transienti il campo magnetico, creato dalla corrente inducente, varia da zero fino al valore raggiunto a corrente stazionaria e da questo fino a zero, rispettivamente quando l'interruttore del circuito inducente viene chiuso e aperto. Una corrente indotta si rileva anche quando la corrente del circuito inducente viene variata con il reostato. Anche in questo caso il campo magnetico creato dal circuito inducente varia nel tempo. Faraday denominò "elettrovoltaica" tale tipo di induzione.

In figura 8 è rappresentato lo schema dell'esperimento originale eseguito da Faraday (tratto dagli *Experimental Researches in Electricity-First Series*) per dimostrare più chiaramente l'effetto di induzione elettrovoltaica, aggiungendo nell'apparato sperimentale di figura 7 l'uso di un nucleo di ferro dolce, con la funzione di aumentare l'intensità del campo magnetico creato dalla corrente. I due circuiti, inducente e indotto, sono due fili di rame isolato avvolti attorno a un anello di ferro dolce. Sia alla chiusura sia all'apertura del circuito inducente l'ago del galvanometro collegato al circuito indotto

oscilla, come nell'esperimento già descritto di figura 7, ma con maggiore violenza.



Disegni di Michael Faraday sugli esperimenti del 1831 sull'induzione elettromagnetica (da *Experimental Researches in Electricity. First Series-1831*).

Caso 2

In un secondo tipo di esperimenti (fig. 9), si considerino un magnete oppure un circuito elettrico (inducente), nel quale scorra una corrente elettrica stazionaria, e lo stesso circuito indotto del primo esperimento.

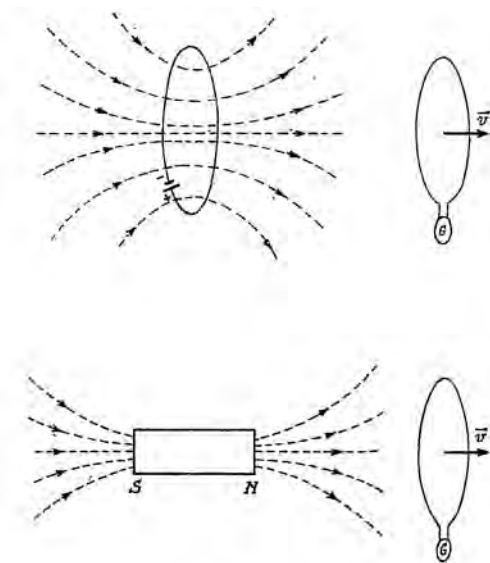


Fig. 9 - Induzione elettromagnetica (caso 2).

Dalle esperienze di Oersted, che dimostrano che una corrente elettrica genera un campo magnetico, discende che una spira elettrica è equivalente a una lamina magnetica con il polo nord rivolto dalla parte dalla quale si vede circolare la corrente in verso antiorario. Pertanto l'uso della spira percorsa da una corrente elettrica stazionaria e l'uso del magnete sono equivalenti come sorgenti di un campo magnetico. È fondamentale osservare che nell'uno e nell'altro caso il campo magnetico stazionario è non uniforme.

Se il magnete (o il circuito inducente) è fermo rispetto al circuito indotto nessuna corrente circola in questo. Se, invece, il magnete (o il circuito inducente) si muove rispetto al circuito indotto, una corrente elettrica fluisce in quest'ultimo fin tanto che dura il moto.

Il verso della corrente indotta cambia a seconda che il magnete (o il circuito inducente) si avvicini o si allontani rispetto al circuito indotto: è tale da contrastare l'avvicinamento o l'allontanamento del magnete (o del circuito inducente), esercitando rispettivamente un'azione repulsiva o attrattiva.⁵

In figura 10 è riportato il disegno originale dell'esperimento di Faraday equivalente a quello di figura 9b in cui il magnete si muove rispetto al circuito indotto.

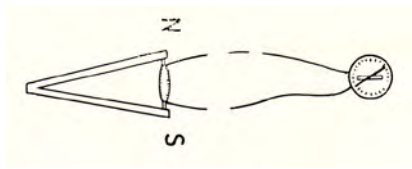


Fig. 10- Induzione elettromagnetica (caso 2).
Disegno di Faraday tratto da *Experimental Researches in Electricity- First Series* (1831).

Attorno a un cilindro di ferro dolce è avvolto il circuito indotto collegato a un galvanometro. Il cilindro è posto fra i due poli di un magnete, costituito da due barre magnetizzate.

⁵ Si tenga presente quanto già detto: una spira elettrica è equivalente a una lamina magnetica con il polo nord rivolto dalla parte dalla quale si vede circolare la corrente in verso antiorario. Di conseguenza il verso della corrente nel circuito indotto sarà tale che la lamina magnetica ad esso equivalente presenterà verso il magnete o il circuito inducente una polarità tale da provocare repulsione, in caso di avvicinamento, o attrazione, in caso di allontanamento.

Scrive Faraday: «Ogni volta che il contatto magnetico nei punti N e S era stabilito o interrotto, avveniva un movimento nel galvanometro, e l'effetto non era permanente, ma semplicemente momentaneo. Vi era, in ogni modo, trasformazione evidente di magnetismo in elettricità».

Caso 3

Il terzo esperimento (fig. 11), è identico al precedente salvo il fatto che questa volta il magnete (o il circuito inducente) è fermo e invece il circuito indotto si muove. Anche in questo caso una corrente elettrica fluisce in quest'ultimo in versi tali da contrastare l'avvicinamento o l'allontanamento rispetto al

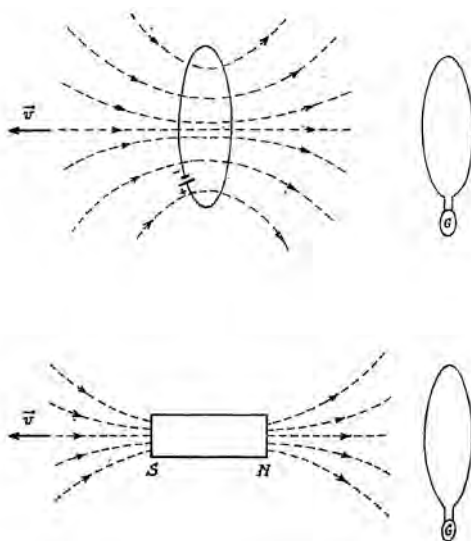


Fig. 11- Induzione elettromagnetica (caso 3).

magnete o al circuito inducente. In entrambi i casi, dunque, la corrente indotta ha un carattere reattivo nei confronti del magnete o del circuito elettrico.

Caso 4

Il quarto esperimento consiste nel disporre il circuito indotto costituito da una spira rettangolare C girevole all'interno dello spazio (molto ridotto) compreso fra i due poli Nord e Sud di un magnete (figura 12). Il campo magnetico nello spazio fra i due poli può essere considerato uniforme.

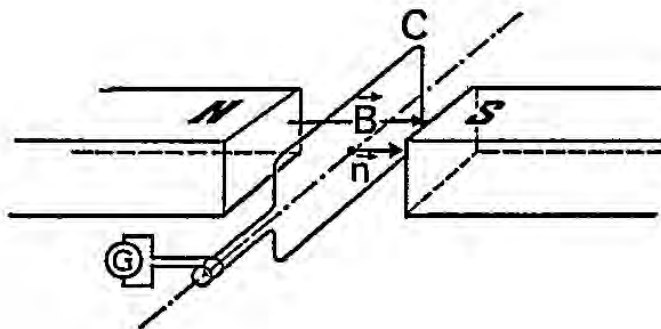


Fig. 12- Induzione elettromagnetica (caso 4).

Durante il moto rotatorio della spira attorno al suo asse longitudinale il galvanometro rileva la presenza di una corrente elettrica indotta fin tanto che dura il moto.

Dalle esperienze fatte, in un primo tempo, Faraday si trovò costretto a considerare due differenti tipi di induzione elettromagnetica: quella prodotta da una corrente elettrica, che chiamò *induzione elettrovoltaica*, e quella prodotta da un magnete, che chiamò *induzione magnetoeltrica*.

Per essere più certo della generazione di una corrente elettrica nel circuito indotto per effetto di un'altra corrente elettrica, Faraday ideò questo esperimento, basato sulla osservazione che se veramente esiste la corrente indotta questa dovrebbe

generare un campo magnetico, in grado quindi di magnetizzare un ago metallico. Si trattava di una più scrupolosa verifica dell'esistenza della corrente indotta, che negli esperimenti precedenti era affidata soltanto alla constatazione della brevissima temporanea deviazione dell'ago magnetico del galvanometro. Faraday sostituì quindi il galvanometro con un piccolo avvolgimento attorno a un tubetto di vetro al cui interno si trovava un ago di acciaio. Una volta chiuso l'interruttore del circuito inducente, estraeva l'ago dal tubetto prima di aprire successivamente l'interruttore. L'ago risultava magnetizzato, provando così, con un sistema più sicuro, la creazione di corrente indotta nell'avvolgimento attorno al tubetto di vetro.

5 - Uno spazio fatto di linee di forza

Faraday era convinto che tutti fenomeni fisici dipendano da un'unica causa che può assumere forme diverse.

«Ma ciò che veramente contava, per Faraday, era la visione generale d'un universo completamente denso d'una materia concettualmente ridisegnata su trame alternative a quelle atomiche, e governato da una sola legge unificante che riconduceva tutti i fenomeni alle forze dell'elettricità» (Bellone, 2006b, p. 104). Tutte le forze della Natura, per Faraday, erano connesse e dovevano avere una origine comune.

Le riflessioni sull'elettrolisi (di cui Faraday enunciò le leggi) e sull'induzione elettromagnetica fecero allontanare definitivamente Faraday dall'idea dell'azione a distanza e abbracciare una nuova concezione dello spazio. Prendendo spunto dall'effetto elettrolitico, causato dalla polarizzazione delle particelle dell'elettrolita per effetto della corrente elettrica, pensò

che anche l'induzione elettromagnetica fosse riconducibile ad «un'azione di particelle contigue consistente di una specie di polarità, e non un'azione a distanze sensibili tra particelle o masse». Lo stesso spazio vuoto della meccanica newtoniana, concepito come puro contenitore della materia dotato soltanto di proprietà geometriche, nel quale si trasmettevano istantaneamente (quindi con velocità infinita) le azioni a distanza in linea retta fra i due corpi interagenti, veniva sostituito da Faraday con uno spazio non soltanto geometrico ma anche "fisico", dove la «materia è presente ovunque e non c'è spazio senza materia».

Faraday criticava l'idea di uno spazio vuoto ponendo in evidenza alcuni paradossi di uno spazio concepito soltanto come un continuo geometrico nel quale è immersa la materia in volumi finiti separati da spazi vuoti intermedi:

Un corpo non conduttore doveva essere formato da particelle non conduttrici, e queste ultime dovevano essere immerse in uno spazio che necessariamente aveva la proprietà d'essere non conduttore: se lo spazio non godeva di tale proprietà, allora il corpo, macroscopicamente esaminato, non poteva essere non conduttore. Un corpo conduttore come il platino era invece formato particelle conduttrici, Ma come doveva essere lo spazio in questo secondo caso? Affinchè il platino fosse effettivamente un conduttore, le sue particelle dovevano essere disposte in uno spazio conduttore: delle particelle conduttrici di platino dislocate in uno spazio non conduttore avrebbero formato infatti un corpo macroscopicamente non conduttore (Bellone, 2006, p.102).

Ci sono alcune affermazioni di Faraday sulla natura dello spazio che sembrano preludere alla gravità einsteniana: «una causa della gravità che non risieda semplicemente nelle parti-

celle materiali, ma che si trovi, congiuntamente, in esse e in tutto lo spazio» (Bellone, 2006, p. 109).

Nel 1844 Faraday non compie esperimenti importanti, ma si dedica invece a riflessioni sulla natura della materia, che invia a Richard Phillipps e poi nel 1846 alla rivista «*Philosophical Magazine*» e che saranno pubblicate nel 1859 con il titolo *Thoughts on Ray-Vibrations* negli *Experimental Researches in Chemistry and Physics* (Faraday, 1859).

A proposito dei vari modelli di etere dell'epoca, Faraday si chiede se è possibile farne a meno:

The point intended to be set forth for the consideration of the hearers was, whether it was not possible that the vibrations which in a certain theory are assumed to account for radiation and radiant phenomena may not occur in the lines of force which connect particles and consequently masses of matter together; a notion which, as far as it is admitted, will dispense with the ether which, in another view, is supposed to be the medium in which these vibrations take place. (Faraday, 1859, p.367).

Faraday giunge a una conclusione rivoluzionaria. Concepisce l'atomo non tanto come un corpuscolo materiale ma piuttosto come un *centro di forza* da cui si irradia la sua azione lungo le *linee di forza*. Gli atomi non hanno un'esistenza indipendente dalle forze che esercitano, essi esistono soltanto tramite tali forze. Le dimensioni considerate finite dell'atomo per Faraday, invece, si estendono ovunque arrivano le linee di forza, perché essi esistono soltanto tramite le forze che esercitano e dove ci sono queste ci sono pure loro:

You are aware of the speculation which I some time since uttered respecting that view of the nature of matter*

which considers its ultimate atoms as centres of force, and not as so many little bodies surrounded by forces, the bodies being considered in the abstract as independent of the forces and capable of existing without them. In the latter view, these little particles have a definite form and a certain limited size; in the former view such is not the case, for that which represents size may be considered as extending to any distance to which the lines of force of the particle extend: the particle indeed is supposed to exist only by these forces, and where they are it is. The consideration of matter under this view gradually led me to look at the lines of force as being perhaps the seat of the vibrations of radiant phenomena (Ivi).

Successivamente tenne una lezione alla Royal Society nella quale ribadì i concetti espressi nella lettera a Phillipps:

Final brooding impression, that particles are only centres of force ; that the force or forces constitute the matter; that therefore there is no space between the particles distinct from the particles of matter; that they touch each other just as much in gases as in liquids or solids ; and that they are materially penetrable, probably even to their very centres. (Jones, 1870, vol.II, p. 175)

Faraday considerò in tutti i casi delle sue esperienze delle curve in ogni punto delle quali la tangente fornisce la forza magnetica esercitata sul circuito indotto. Introdusse in tal modo l'idea di linea di forza del campo magnetico, inizialmente chiamata curva magnetica, aventi le seguenti proprietà:

a) per ogni punto dello spazio nel quale non sia concentrata una sorgente di forze magnetiche passa una e una sola linea di forza;

- b) la tangente in ogni suo punto fornisce la direzione della forza magnetica in quel punto e con il suo orientamento definisce anche il verso della forza;
- c) la densità delle linee di forza è correlata all'intensità del campo magnetico: il campo magnetico risulta più intenso là dove sono più fitte le curve magnetiche e viceversa.



Studio di Michael Faraday alla Royal Society di Londra.

Faraday introdusse la convenzione seguente nella rappresentazione del campo magnetico tramite le linee di forza o curve magnetiche: il numero di linee di forza che passano attraverso una superficie unitaria è proporzionale all'intensità del campo magnetico in quell' area della superficie. Ovviamente è soltanto una convenzione per la rappresentazione del campo, in quanto le linee di forza sono di numero infinito.

Dunque le linee di forza sono la prova della modificazione dello stato dello spazio prodotta da cariche elettriche in moto (correnti elettriche) o da magneti, ovvero dell'esistenza del campo di forza magnetico. La prova tangibile della loro realtà era fornita da Faraday con la loro visualizzazione tramite la limatura di ferro: ogni minuscolo pezzetto di ferro si comporta come l'ago di una bussola orientandosi nella direzione della

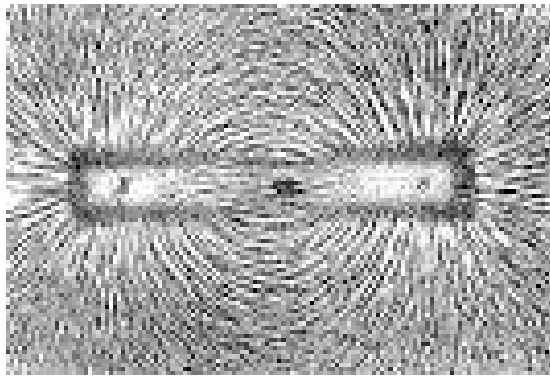


Fig. 13 - Visualizzazione delle linee di forza del campo magnetico creato da un magnete. Sono visibili i poli nord, sud alle estremità del magnete.

forza magnetica (figura 13) ovvero si orienta nella direzione della tangente alla linea di forza del campo magnetico. Pertanto ogni curva di involuzione dei pezzettini di ferro costituisce una curva magnetica o linea di forza.

La scoperta dell'induzione elettromagnetica avvenne con un esperimento il 29 agosto 1831, ma Faraday si prese diversi mesi prima di pubblicarne nell'aprile del 1832 una interpretazione, ovvero la legge che la governa. Nella citata nota del 24 novembre 1831, letta alla Royal Society con il titolo *Experimental Researches in Electricity-First Series* Faraday descrisse gli e-

sperimenti con i quali scoprì l'induzione elettromagnetica, ma senza una loro interpretazione che sarà fornita invece nell'aprile dell'anno dopo.

Nei sette mesi che seguirono all'agosto del 1831 si dedicò a una intensa attività di analisi critica e revisione dei suoi risultati sperimentali, costellata di nuovi esperimenti, nuove ipotesi, pause e rettifiche.⁶ Un esempio significativo di quanto laborioso e tormentato sia il raggiungimento di un nuovo risultato scientifico importante.

Per spiegare i risultati dei suoi esperimenti sull'induzione elettromagnetica, in un primo momento Faraday ricorse a due differenti schemi concettuali: lo *stato elettro-tonico* per l'induzione elettrovoltaica e le *curve magnetiche* per l'induzione magnetoelettrica:

Whilst the wire is subject to either volta-electric or magneto-electric induction, it appears to be in a peculiar state; for it resists the formation of an electrical current in it, whereas, if in its common condition, such a current would be produced; and when left uninfluenced it has the power of originating a current, a power which the wire does not possess under common circumstances. This electrical condition of matter has not hitherto been recognised, but it probably exerts a very important influence in many if not most of the

⁶ Il 23 settembre 1831 Faraday scriveva in una sua lettera a Richard Phillipps: «*I am busy just now again on electro-magnetism, and think I have got hold of a good thing, but can't say. It may be a weed instead of a fish that, after all my labour, I may at last pull up*». (Sono nuovamente occupato intorno all'elettromagnetismo e credo di aver scoperto qualche cosa di importante; ma non posso dirlo. Può darsi che dopo tutto il mio lavoro tiri su un'erbaccia invece di un pesce). (Jones, 1870, p.3). Le opere di Faraday sono state digitalizzate in <https://archive.org/search?query=Michael+Faraday>.

phenomena produced by currents of electricity. For reasons which will immediately appear (71.), I have, after advising with several learned friends, ventured to designate it as the electro-tonic state (Faraday, 1831, 3. New Electrical State or Condition of Matter).

Questa doppia spiegazione dell'induzione elettromagnetica non fu però "pubblicata" perché la nota del 24 novembre 1831 fu "soltanto letta" alla Royal Society. Lo stesso Faraday, nella nota 6 al paragrafo 3. *New Electrical State or Condition of Matter* delle edizioni "pubblicate" degli *Experimental Researches in Electricity-First Series*, avverte il lettore che da studi successivi agli esperimenti dell'agosto 1831 si era convinto che la legge dell'induzione elettromagnetica poteva essere spiegata senza ricorrere allo stato elettrotonico:

This section having been read at the Royal Society and reported upon, and having also, in consequence of a letter from myself to M. Hachette, been noticed at the French Institute, I feel bound to let it stand as part of the paper; but later investigations (intimated 73. 76. 77.) of the laws governing those phenomena, induce me to think that the latter can be fully explained without admitting the electro-tonic state. My views on this point will appear in the second series of these researches. – M.F.

Le curve magnetiche furono subito definite in maniera corretta come linee di forza, mentre mancava una vera definizione dello stato elettrotonico, che rimaneva qualcosa di molto vago e oscuro. Tuttavia è chiaro cosa volesse intendere Faraday con esso: una modificazione delle proprietà "fisiche" dello spazio che permettesse la creazione delle correnti indotte. In sostanza si possono ravvisare nello stato elettrotonico le caratteristiche del concetto di campo di forza: uno spazio non sol-

tanto geometrico ma “fisico” in grado di fare da mediatore fra il circuito inducente e quello indotto.

Il ritardo nella pubblicazione della legge sull'induzione elettromagnetica fu provvidenziale, perché soltanto un mese prima della sua pubblicazione, nel marzo 1832, Faraday ebbe l'intuizione di un unico schema concettuale in grado di spiegare i due tipi di induzione elettromagnetica (elettrovoltaica e magnetoelettrica) utilizzando soltanto le curve magnetiche.⁷ Egli notò che esse, in tutte le esperienze eseguite, erano “tagliate” dal circuito indotto (Jones, 1870, vol.II, p.5), e questo accade se si ammette che le curve attorno ad esso siano libere di muoversi, come effettivamente lo sono al momento della chiusura o dell'apertura del circuito nell'induzione elettrovoltaica e durante il moto relativo fra sistema inducente e sistema indotto. Questa conclusione deriva proprio dalla distribuzione delle curve magnetiche nello spazio: esse cambiano sia nell'induzione elettrovoltaica sia nell'induzione magnetoelettrica, sia nel caso di moto relativo fra sistema inducente e sistema indotto, sia nel caso in cui tale moto sia assente e vi sia invece soltanto variazione della corrente elettrica nel sistema inducente. Faraday aveva saputo vedere con gli occhi della mente come veniva alterato lo stato dello spazio per effetto

⁷ Il primo acceno alle curve magnetiche risale al 4 novembre 1831. Nella descrizione dell'esperimento fatto in quel giorno parla di curve magnetiche tagliate dal filo: «*In his paper, when describing the experiment, he speaks of the metal cutting the magnetic curves, and in a note to his paper he says, 'By magnetic curves I mean lines of magnetic forces which would be depicted by iron filings'*» (Jones, 1870, vol.II, p.5). Poi anche: «*By magnetic curves, I mean the lines of magnetic forces, however modified by the juxtaposition of poles, which would be depicted by iron filings; or those to which a very small magnetic needle would form a tangent*» (Faraday, 1831, nota 13) .

delle azioni magnetiche esercitate dal magnete o dal circuito inducente. La distribuzione spaziale delle curve magnetiche non è altro che una rappresentazione di ciò che chiamiamo *campo magnetico*. Concluse che tutti i casi avevano in comune il fatto che varia il campo magnetico (costituito dalle curve magnetiche) nella regione di spazio occupata dall'anello del circuito indotto. Questa variazione si può "vedere" intuitivamente immaginando le curve magnetiche che si concatenano con il circuito indotto (figura 14). È una conclusione qualitativa fondata sull'osservazione che essendo il campo magnetico

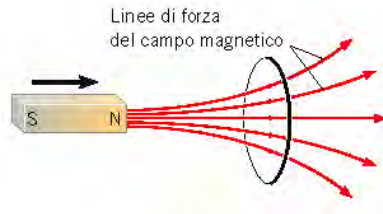


Fig. 14 – Linee di forza del campo magnetico concatenate con il circuito indotto.

più intenso là dove sono più fitte le curve magnetiche e viceversa, nel moto relativo fra sistema inducente e sistema indotto quest'ultimo, per la divergenza delle curve magnetiche generate dal sistema inducente, si trova ad essere "attraversato" da curve magnetiche più fitte o più rade, a seconda che vi sia avvicinamento o allontanamento reciproco (figura 14).

Anche nel caso 4, in cui il circuito indotto è collocato all'interno di un campo magnetico uniforme, rappresentato quindi da linee di forza parallele ed equidistanti, le linee di forza concatenate con il circuito variano in conseguenza della rotazione di questo. Dunque, una variazione del campo

magnetico concatenato con il circuito si verifica pure quando, per ragioni varie, si modifica l'area "efficace" racchiusa dal circuito indotto attraversata dalle linee di forza, che è in generale la proiezione ortogonale alle linee di forza dell'area racchiusa dal circuito indotto. Dunque, in tutti casi in cui si verifica l'induzione elettromagnetica, il campo magnetico nella regione occupata dal circuito indotto varia nel tempo. Più precisamente varia nel tempo il flusso del vettore induzione magnetica \underline{B} concatenato con il circuito.

Faraday concluse dunque che un *campo magnetico variabile genera un campo elettrico (non conservativo)*, al quale è dovuta la corrente elettrica nel circuito indotto.⁸

Saranno il fisico e matematico tedesco Franz Ernst Neumann (1798 -1895) e il fisico russo Simone Lenz (1804-1865) a completare in forma quantitativa la legge dell'induzione elettromagnetica di Faraday, stabilendo che:

la forza elettromotrice indotta f_i è uguale alla derivata rispetto al tempo, cambiata di segno, del flusso del vettore induzione magnetica

\underline{B} concatenato con il circuito indotto:
$$f_i = - \frac{d\Phi(\underline{B})}{dt}.$$

Il segno meno fu introdotto da Lenz per indicare che la corrente indotta è di verso tale da opporsi alla variazione del flusso del vettore induzione magnetica concatenato con il circuito indotto.

⁸ Più in generale si dovrebbe parlare di f.e.m. indotta nel caso in cui il circuito indotto sia aperto.

Nel 1865 il grande fisico teorico scozzese James Clerk Maxwell (1831-1879) riprese e formalizzò matematicamente l'idea di campo di Faraday,⁹ scoprendo teoricamente un fenomeno non ancora sperimentalmente dimostrato, ma che lo sarà più tardi: un campo elettrico variabile genera un campo magnetico così come un campo magnetico variabile genera un campo elettrico, come aveva dimostrato sperimentalmente Faraday con la sua legge dell'induzione elettromagnetica, ristabilendo quindi un principio di simmetria fra i due fenomeni: le due leggi di Faraday e di Maxwell sono l'una duale dell'altra.

Nelle sue celebri quattro equazioni che regolano tutti i fenomeni elettrici e magnetici, Maxwell legò fra loro, in una interazione reciproca, il campo elettrico e il campo magnetico unificati in un unico "campo elettromagnetico":

La teoria da me proposta può pertanto essere definita come una teoria del campo elettromagnetico, in quanto essa prende in considerazione lo spazio nei pressi dei corpi elettrici e magnetici, e può essere definita come una teoria dinamica in quanto assume che in quello spazio esista una materia in moto grazie alla quale si producono i fenomeni elettromagnetici osservati (Maxwell, 1865, p. 461) .

La «materia in moto grazie alla quale si producono i fenomeni elettromagnetici» era, secondo Maxwell, l'etere, uno strano "materiale" che permea tutti i corpi e dotato di proprietà particolari: invisibile, imponderabile, impalpabile, totalmente rigido (in contrasto con l'esperienza fisica che mostra non esservi nessun corpo totalmente rigido).

⁹ È curioso notare la coincidenza della data di nascita di Maxwell con l'anno della scoperta dell'induzione elettromagnetica di Faraday: 1831.

Oggi sappiamo che la teoria della relatività di Albert Einstein e un famoso esperimento eseguito nel 1881 dal fisico statunitense Albert Michelson hanno dimostrato la non esistenza dell'etere. Ma al tempo di Maxwell la tecnologia per la produzione del vuoto non era così perfezionata come lo è oggi e lasciava sempre, in realtà, tracce non trascurabili di materia. Per tale motivo Maxwell parlava di «cosiddetti vacua», per porre in evidenza che non era possibile realizzare totalmente il vuoto. Questa osservazione forniva, ai suoi tempi, un sostegno all'esistenza dell'etere (Bellone, 2006c,p. 308).

Vediamo ora cosa intendeva Maxwell per interazione fra campo elettrico e campo magnetico.

Un campo elettrico variabile genera un campo magnetico che, però, prima non esisteva e quindi anch'esso risulta variabile e quindi, secondo Faraday, deve generare un altro campo elettrico che, essendo anch'esso generato da una situazione in cui non esisteva, è anch'esso variabile e quindi genera un altro campo magnetico anch'esso variabile e così via. Siamo in presenza di una specie di "reazione a catena", o meglio di un fenomeno autosostenentesi: un campo elettrico variabile genera un campo magnetico variabile, che a sua volta genera un campo elettrico variabile, che a sua volta genera un nuovo campo magnetico variabile, che a sua volta genera un nuovo campo elettrico variabile ecc.. Questa combinazione di campi elettrici e magnetici variabili in grado di autosostenersi costituisce una perturbazione del campo elettromagnetico che non si propaga istantaneamente da un punto all'altro, ma con un certo ritardo con le modalità tipiche della propagazione per onde. Le perturbazioni dei due campi elettrico e magnetico si propagano come un'onda da un punto all'altro dello spazio: le

increspature del campo elettromagnetico provocate dalle variazioni dei due campi componenti si propagano "per onde" nello spazio con le stesse modalità con cui la perturbazione di una superficie liquida, a seguito della caduta di un sasso, si propaga in tutto il liquido.

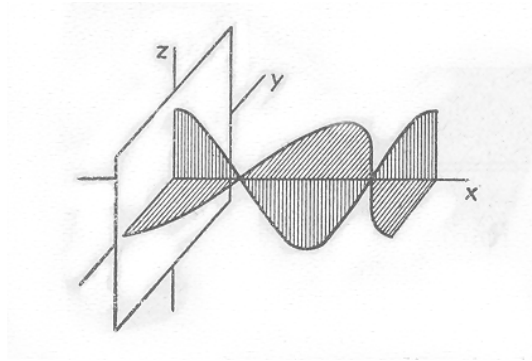


Fig. 15 - Onda elettromagnetica. I due campi elettrico e magnetico oscillano in piani fra loro perpendicolari.

Tutta la moderna tecnologia delle telecomunicazioni (radio, televisione, cellulari, ecc.) è basata su tale fenomeno: le onde elettromagnetiche (fig. 15).

5 - Il più generale concetto di "campo" in fisica

Il concetto di campo, nato in magnetismo e in elettricità, si riferisce a grandezze vettoriali aventi il significato di forze "a distanza", e sostituisce l'incomprensibile concetto di azione a distanza con quello di azione "mediata" da esso.

Una immediata estensione del concetto di campo riguarda pertanto anche la forza di gravità, che condivide con le forze magnetiche ed elettriche il carattere di azione a distanza.

Una ulteriore estensione del concetto di campo riguarda tutte quelle situazioni nelle quali, per fenomeni di natura diversa, si ha una distribuzione spaziale punto per punto di valori di grandezze vettoriali o scalari o tensoriali.

Così si parla di campo delle velocità nella meccanica dei fluidi, intendendosi una regione dello spazio in ogni punto del quale risulta definito un valore di velocità delle particelle fluide.

Nel caso della terminologia si ha un classico esempio di campo scalare: un campo termico è l'insieme dei valori che la temperatura assume in ogni punto dello spazio occupato da un corpo "caldo" e in ogni punto dello spazio ad esso circostante, poiché per la trasmissione del calore anche in tali punti la temperatura viene modificata dalla presenza del corpo in questione.

Lo stesso concetto è stato esteso al caso di grandezze tensoriali, per cui si parla di campo delle tensioni e di campo delle deformazioni all'interno di un corpo deformabile.

Dunque, un "campo" in fisica può essere più semplicemente definito come l'insieme dei valori che una data grandezza fisica (scalare, vettoriale o tensoriale) assume nello spazio, in conseguenza di fenomeni fisici di varia natura. È sottinteso che tale proprietà implica una modificazione dello stato dello spazio tale da consentire l'assunzione di quei valori della grandezza fisica in oggetto soltanto da parte di corpi per i quali ha senso l'attribuzione di quella particolare grandezza fisica. Questa definizione di campo sottintende ciò che Farady

aveva intuito: lo spazio non è soltanto geometrico ma anche fisico, perché manifesta proprietà fisiche non appena lo andiamo ad esplorare con opportuni mezzi.

Alla fine di questo itinerario didattico sul concetto di campo, viene spontaneo chiedersi la ragione di questo termine: campo. La risposta è semplicissima: l'analogia con un campo fiorito, in ogni punto del quale c'è un fiore. Al posto del fiore pensiamo di volta in volta il valore di una grandezza scalare (la temperatura per esempio) o di una grandezza vettoriale (forza, velocità, ecc.) o di una grandezza tensoriale (tensione, deformazione, ecc.). Il mondo della scienza sa essere anche poetico.

Bibliografia

AMALDI Edoardo (1955). *Fisica Sperimentale*. Università di Roma. Litografia Marves S.r.l.

BELLONE Enrico (2006a). "Isaac Newton". In *Storia della scienza* (P. Rossi cur.), vol. 1. *La rivoluzione scientifica: dal Rinascimento a Newton*, pp. 419-447. Roma: Gruppo Editoriale l'Espresso.

BELLONE Enrico (2006b). "Michael Faraday". In *Storia della scienza* (P. Rossi cur.), vol. 4. *La scienza classica: da Faraday a Darwin*, pp. 93-110. Roma: Gruppo Editoriale l'Espresso.

BELLONE Enrico (2006c). "James Clerk Maxwell". In *Storia della scienza* (P. Rossi cur.), vol. 4. *La scienza classica: da Faraday a Darwin*, pp. 301-318. Roma: Gruppo Editoriale l'Espresso.

COHEN I. B. (1978). *Isaac Newton's papers and letters on natural philosophy and related documents*. Cambridge Mass.: Harvard University Press, pp. 271-312.

COSCIONE Ester, MALERBA Antonia, VERRONE Maria Giuseppa (n.d.). *Particelle e campi di forze*. Università degli studi di Napoli "Federico II", Fac. di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali.

CUTNELL J.D., JOHNSON K.W. (2010). *Elementi di fisica*. Bologna: Zanichelli.

FARADAY Michael (1831). *Experimental Researches in Electricity-First Series*. London: Royal Institution. <https://archive.org>.

FARADAY Michael (1859). "Thoughts on Ray-Vibrations". In *Experimental Researches in Chemistry and Physics*. London: Richard Taylor and William Francis, 1859. <https://archive.org/>.

FERMI Enrico (1944). *Fisica ad uso dei licei*. Vol. 2. Bologna: Zanichelli.

JONES Bence (1870). "The life and letters of Michael Faraday", Voll. I, II. Second Edition revised. London: Longmans, Green & Co.

MAXWELL J. C. (1865). "A dynamical theory of the electromagnetic field". In «*Philosophical Transactions*», CLV.

OREAR Jay (1960). *Fisica generale*. Bologna: Zanichelli.

PASTORI Maria (1963). "Campi. Teoria classica". In *Enciclopedia della Scienza e della Tecnica Mondadori*. 2° vol. Milano: Mondadori.

SETTE Daniele (1969). *Lezioni di fisica*. Vol. III. *Elettromagnetismo*. Università degli Studi "La Sapienza" - Roma: Veschi.

STEINLE Friedrich (2003). "Faraday e la genesi del concetto di campo". In *Storia della Scienza*. Treccani. https://www.treccani.it/enciclopedia/l-ottocento-fisica-faraday-e-la-genesi-del-concetto-di-campo_%28Storia-della-Scienza%29/.

Profili biografici degli autori

Gian Italo Bischi (Urbino) - gian.bischi@uniurb.it

Professore Ordinario di Metodi matematici dell'economia e delle scienze attuariali e finanziarie presso la Facoltà di Economia dell'Università di Urbino "Carlo Bo". Dopo la laurea in Fisica ha svolto ricerche sui modelli dinamici non lineari e le loro applicazioni in biologia, economia e scienze sociali. Nell'ambito di queste ricerche ha pubblicato numerosi articoli su riviste internazionali di matematica applicata e ha curato numeri monografici di riviste internazionali sulla Modellistica Dinamica e sulla Teoria dei giochi. Si occupa anche di divulgazione, in particolare sulle connessioni fra la Matematica e gli altri campi del sapere, nell'ambito delle attività del Centro PRISTEM, e ha pubblicato articoli divulgativi e didattici. È autore di otto libri: *Applicazioni dell'elaboratore elettronico alla Chimica e alla Biologia* (Urbino, Quattro Venti, 1990); *Sulle orme del caos. Comportamenti complessi in modelli matematici semplici* (Milano, Bruno Mondadori, 2004); *Nonlinear Oligopolies: Stability and Bifurcations* (Springer-Verlag, 2010); *Matematica e Letteratura. Dalla Divina Commedia al Noir* (Collana Alice & Bob n.42, Egea, Milano, 2015); *La matematica secondo Sinisgalli* (Fondazione Leonardo Sinisgalli, Collana Quaderni, n.3, Montemurro, 2017); *Lo specchio, il labirinto e la farfalla. Il postmoderno in letteratura e matematica* (Editrice Morcelliana, Brescia, 2018); *Arrivano! Sciascia e gli americani* (Aras Edizioni, Fano, 2021); *Calvino e la limpidezza della complessità. Tra Palomar e Parisi* (Aras editore 2023). Su Leonardo Sinisgalli ha curato i volumi *Un 'Leonardo' del Novecento: Leonardo Sinisgalli (1908-1981)* (assieme a Pietro Nastasi) e *Civiltà del Miracolo* (assieme a Liliana Curcio e Pietro Nastasi). È membro dell'editorial board di varie riviste scientifiche internazionali. Dal 2020 è Direttore di «Nuova Lettera Matematica», Palermo University Press.

Franco Eugeni - eugenif3@gmail.com

È nato a Teramo nel 1941. Laureato in Matematica a Bologna nel 1963, percorre tutti i gradini della carriera universitaria fino alla pensione. Vince il Concorso da Ordinario del 1984 sulla Cattedra di Analisi Matematica e Geometria Analitica. Ha insegnato in varie Università quali Modena, L'Aquila, Chieti, Roma, Milano ed infine Teramo. Ha trascorso periodi di ricerca presso le Università di Mainz, Giessen, Dehli e Iasi. E' stato per molti anni Direttore di Dipartimento e Coordinatore di Dottorati di ricerca e di Master, membro del Senato Accademico, Delegato Rettorale (prorettore) anche presso la Conferenza dei Rettori. Dal 2001 è transitato sulla Cattedra di Logica Filosofia della Scienza. In pensione dal 2009, è stato Rettore dell'Istituto Universitario linguistico "A.Macagno" di Cuneo e Pinerolo e ha tenuto insegnamenti presso l'ISIA di Pescara e Scienze Sociali di Chieti, fino al 2015. E' stato Presidente Nazionale della Mathesis, nel 2001-2004, l'associazione dei Matematici Italiani fondata nel 1894, nella quale era nel direttivo Nazionale fin dal 1979, è professore onorario nell'Università di Iasi (Romania), è stato Presidente dell'Accademia Piceno-Aprutina dei Velati, fondata nel 1598, dal 1998 fino al 2015. E' Commendatore della Repubblica Italiana. E' autore di circa 250 pubblicazioni, in Riviste italiane ed estere, e di una quindicina di libri. Ha fondato le riviste telematiche Ratio Matematica, Eiris, Skills for Economic Management, Science and Philosophy, ed è membro dei comitati scientifici di varie riviste internazionali. Un elenco parziale delle sue pubblicazioni è reperibile nel sito ResearchGate.

Franco Francia (La Spezia) - franco.francia40@virgilio.it

Iscritto prima a fisica presso l'università di Pisa, ha conseguito la laurea presso l'università di Ferrara e insegnato matematica presso l'istituto tecnico di Fivizzano e successivamente presso il liceo "G.Mazzini" di La Spezia. Il prof. Dionisio Gallarati, avendo

conosciuto le questioni di matematica trattate dal Francia, gli offrì la propria collaborazione finalizzata alla realizzazione di un articolo che fu pubblicato successivamente su «Archimede»: *Insiemi di punti materiali* - «Archimede», N.1 anno 1985 casa editrice Le Monnier. *Reti di rette e circonferenze* è un ulteriore articolo, prodotto con la collaborazione del prof. Dionisio Gallarati, pubblicato sul «Periodico di matematiche», Organo della Matesis, del luglio- settembre 1996.

Luca Nicotra (Roma) - luca.nicotra1949@gmail.com

Laureato in Ingegneria Meccanica a pieni voti all'Università "Sapienza" di Roma. Giornalista iscritto all'Ordine Nazionale dei Giornalisti albo pubblicitari dal 2008. Autore di oltre 400 articoli, culturali, tecnici e di divulgazione scientifica, e di vari libri fra cui: *Bruno de Finetti: un matematico scomodo* (coautore Fulvia de Finetti) Livorno: Belforte, 2008, la prima biografia mondiale del grande scienziato; *Ingegneria Assistita dal Computer, vol. 1.*(coautore F. Campana) Roma: UniversItalia, 1ed. 2012 e 2ed. 2014; *Nello specchio dell'altro: riflessi della bellezza tra arte e scienza* (coautore Rosalma Salina Borello) Roma: Universalita, 2011; *Quasicristalli. Intrecci segreti fra natura, arte e scienza* (coautori C. Francou e U. Locatelli) Roma, UniversItalia, 2017; *La progettazione meccanica con CATIA V5*, Bologna: InRiga, 2023 . Ha svolto attività di ricerca nel campo della trasmissione del calore presso l'Istituto di Fisica Tecnica dell'Università "Sapienza" di Roma e nel settore dei sistemi di guerra elettronica nell'industria della difesa (Elettronica S.p.A. - Roma). È esperto di sistemi computerizzati per la progettazione e produzione meccanica e ha svolto una intensa attività di formatore di progettisti meccanici presso molte importanti industrie nazionali. Dal 2014 tiene annualmente il "Corso Mechanical Design con CATIA V5" al Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale dell'Università "Sapienza" di Roma. È Presidente dell'Associazione Culturale "Arte e Scienza", membro onorario

dell'Accademia Piceno Aprutina dei Velati (APAV) e dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane (AFSU), membro dell'Editorial Board della rivista internazionale «Science & Philosophy», fondatore e direttore responsabile dei periodici «ArteScienza», «Bollettino dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane», «Periodico di Matematica». Direttore editoriale della casa editrice UniversItalia. Per le ricerche si veda il sito Research Gate.

Francesco Laudano - frlaud.fl@gmail.com

Laureato in Matematica con lode nel 1990, è docente a tempo indeterminato di Matematica e Fisica nella Scuola secondaria di secondo grado e nel 2018 ha conseguito il Dottorato di ricerca in Matematica e Fisica all'Università di Salerno. Da sempre sensibile alla didattica, ha tenuto relazioni in vari Convegni e Seminari nelle Scuole a supporto di studenti e docenti per la formazione. Ha pubblicato vari articoli su riviste nazionali e internazionali. È socio da diversi anni dell'associazione Mathesis, di cui è stato Presidente della sezione di Campobasso fino al 2017, anno di chiusura della sezione.

Bonaventura Paolillo - bonaventura.paolillo@gmail.com

Si è laureato in Matematica e Scienze dell'informazione a Salerno. Ha conseguito poi il Phd in Matematica sotto la supervisione del prof. Gerla, occupandosi di Geometria senza Punti. È stato Tutor/Formatore TFA nel 2015 per la classe di concorso A047. Insegna Matematica e Fisica al Liceo Scientifico "Severi" di Salerno. Si occupa di temi legati alla divulgazione della matematica, come la Probabilità e le sue applicazioni, Irrazionalità di numeri notevoli, la Geometria,... Ha pubblicato una quindicina di articoli di tali temi su riviste nazionali e internazionali.