Periodico di Matematica (IV) Vol. V (4) dicembre 2023, pp. 7-30

La geometria piana sul campo complesso

Franco Eugeni*

* Già professore ordinario di Discipline Matematiche e di Filosofia della Scienza, Presidente dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane;
eugenif3@gmail.com

DOI : 10.53159 /PdM(IV).v5n4.121

Sunto. *Lo scopo di questa nota è approfondire le nozioni metriche del piano affine complessi, inquadrandole anche in una visione n-dimensionale. Nella terza parte, senza andare oltre la dimensione due del piano, esaminiamo il processo di complessificazione, che pur presentandosi molto naturale, nasconde rapporti significativi allora che le proprietà di un piano affine complesso si vogliano rileggere in uno spazio affine reale 4-dimensionale. Concludendo siamo convinti di dare un contributo di carattere epistemologico per la comprensione della cosiddetta "complessificazione".*

Parole chiave. *Punti e rette complesse e coniugate –prodotto hermitiano – norma – fibrazioni dello spazio 3-domensionale.*

Abstract. *The purpose of this note is to deepen the metric notions of the complex affine plane, also framing them in an n-dimensional view. In the third part, without going beyond dimension two of the plane, we examine the process of complexification, which, although very natural, hides significant relationships that can be reinterpreted in a real 4-dimensional affine space. In conclusion, we are making an epistemological contribution to the understanding of the so-called "complexification".*

Keywords. *Complex and conjugate points and lines –Hermitian product – norm – fibrations of 3-domensional space.*

1 - La geometria piana affine sul campo complesso

Sia **C** il campo dei numeri complessi. Consideri amo l'insieme **C²,** quadrato cartesiano di **C,** che chiameremo sostegno del piano affine complesso**.**

Chiamiamo punti complessi, le coppie ordinate di numeri complessi del tipo:

$$P = (x,y),\ P_1 = (x_1\,,\, y_1),\ \ldots..$$

dove $x = x'+ix''$, $y = y' + i\, y''$.

Chiameremo **vettori** le medesime coppie che indicheremo con:

$$\boldsymbol{u} = \overrightarrow{OP}\,,\quad \mathbf{v} = \overrightarrow{OP_1}\,,\ \mathbf{w} = = \overrightarrow{OP_2}\,,$$

I due punti I(1,0) e J(0,1) individuano due vettori speciali, che si dicono costituire una **base**, dati da:

$$\boldsymbol{i} = \overrightarrow{OI}\ ,\ \boldsymbol{j} = \overrightarrow{OJ}\,.$$

L'introduzione della base permette di scrivere per un generico vettore:

$$\boldsymbol{u} = \overrightarrow{OP} = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j}\,.$$

Il più generale legame tra punti e vettori nasce, appunto, dall'aver fissato una *base.* Se P (x,y) e P_1 = (x_1 ,y_1), sono due punti, il vettore **u** individuato dal segmento orientato PP_1, di estremi complessi sarà definito mediante la:

$$\boldsymbol{u} = \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{PP_1} := (x_1 - x)\,\boldsymbol{i} + (y_1 - y)\,\boldsymbol{j}$$

e in modo formale

u = P_1 – P = Q – O, o anche, P_1 = P + **u**.

La corrispondenza che , fissato **u =** u_1 ***i*** + u_2 ***j*** , ad ogni punto P (x,y) associa il punto P_1 = (x_1 , y_1), di coordinate :

$$x_1 = x + u_1 , \;\; y_2 = y + u_2$$

si chiama *traslazione* di vettore **u**.

Passando ora al formulario relativo alla geometria analitica del piano complesso, è ben chiaro che le nozioni affini rimangono inalterate ma con qualche questioni in più da aggiungere. Così data ad esempio data un retta (r) di equazione:

$$(r)\;\; a\,x + b\,y + c = 0$$

dove a,b,c,x,y sono in **C,** sono inalterate tutte le formule note quali la cosiddetta *condizione di allineamento* di tre punti: dati infatti tre punti :

$$P = (x,y),\ P_1 = (x_1 , y_1),\ P_2 = (x_2 , y_2)$$

con P variabile e $P_1 \neq P_2$, la condizione suddetta può essere provata in diversi modi, specie ricooendo al parallelismo dei vettori definiti dai segmenti orientati P P_1, P_1P_2 , che portano alla condizione :

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

che può scriversi nella forma più elegante:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Sviluppando, rispetto alla prima riga, si ottiene una equazione del tipo:

$$a\,x + b\,y + c = 0,$$

con a, b,c, x, y in C, (a,b) ≠ (0, 0) , poiché da a = $y_2 - y_1$, b = $x_1 - x_2{}'$, risulta:

$$(a,b) = (0,0) \quad \Leftrightarrow \quad P_1 = P_2.$$

Diremo *effettiva* ogni equazione di 1° grado in due variabili con coefficienti delle incognite non entrambi nulli.

Dunque: *terne di punti allineati soddisfano una equazione di 1° grado in due variabili effettiva.*

Ma se quanto detto sopra è banale ed appare in tutti i testi, è anche impor-tante provare il viceversa[1] di quanto detto e cioè che: *ogni equazione di 1° grado in due variabili del tipo* a x + b y + c = 0, *ed effettiva, ha come soluzioni terne di punti allineati.*

Infatti se i punti $P = (x,y)$, $P_1 = (x_1 , y_1)$, $P_2 = (x_2 , y_2)$sono soluzioni della equazione data si ha:

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y + c &= 0 \\ a\,x_1 + b\,y_1 + c &= 0 \\ a\,x_2 + b\,y_2 + c &= 0 \end{aligned}$$

affinchè il sistema omogeneo nelle incognite a,b,c abbia soluzioni (necessariamente non nulle per essere (a,b) ≠ (0, 0)), occorre che sia:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ovvero le soluzioni del sistema, sono terne di punti allineati, ovvero punti di una retta. Concludendo:

In un riferimento cartesiano qualsiasi, ogni retta è rappresentata da una equazione lineare in due variabili effettiva, che è soddisfatta da tutti e soli i punti della retta, e viceversa ogni equazione lineare, in due variabili effettiva, rappresenta una retta come luogo dei punti le cui coordinate la soddisfino.

1 Tale osservazione appare raramente, specie nei testi scolastici, Si veda M.Villa [2], vol. I, Cap.2, p.18.

Un vettore parallelo ad una data retta r di equazione:

$$a\,x + b\,y + c = 0$$

è il vettore di componenti

$$\mathbf{r} = (-b, a).$$

Rimangono così fisse le condizioni di parallelismo di due rette che si traducono nelle proporzionalità tra due vettori paralleli alle due rette. Così le incidenze si studiano al solito modo, in particolare la formula della retta per due punti, le nozioni di fascio di rette proprio ed improprio e così l'intero corpo solitamente detto della geometria affine del piano. Per queste nozioni si può consultare un qualsiasi libro di geometra analitica universitario[2] , ma anche di Scuola Media Superiore.

Vi sono comunque nuove proprietà:

Teorema 1.- *Due punti complessi e coniugati si incontrano in una retta reale.*

Dati infatti i due punti P = (a+ia', b+ib') e $\overline{P}$ = (a-ia', b-ib'), la retta che li congiunge ha equazione:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a + ia' & b + ib & 1 \\ a - ia' & b - ib' & 1 \end{vmatrix} = 0$$

[2] Si veda , ad esempio, M.Villa [2] vol. I, Cap.1 e 2, pp.1-23.

Sostituendo alla 2° riga la somma della seconda con la terza, ed alla 3° riga la differenza della seconda con la terza, si ha la retta reale:

$$4i\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ a' & b' & 0 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Teorema 2.- *Due rette complesse e coniugate si incontrano in un punto reale.*

Il punto comune a due rette r , $\bar{r}$ complesse e coniugate è dato dal sistema:

$$\begin{aligned} &(r) \quad (a+ia')\,x + (b+ib')\,y + (c+ic') = 0 \\ &(\bar{r}) \quad (a-ia')\,x + (b-ib')\,y + (c-ic') = 0 \end{aligned}$$

del tutto equivalente per somma e sottrazione a:

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y + c &= 0 \\ a'x + b'y + c' &= 0 \end{aligned}$$

avente per soluzione appunto , un punto reale.

Usualmente la parte metrica nei testi di geometria classici[3] si affida ad un prodotto scalare, non canonico, entrato nell'uso, definito, a partire da due vettori:

$$\boldsymbol{u} = \overrightarrow{OP} = (x, y) \ , \quad \boldsymbol{v} = \overrightarrow{OP_1} = (x_1 , y_1)$$

dalla relazione

[3] Vedasi ad esempio M.Villa [6] o G.Vaccaro [7].

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} := x\, x_1 + y\, y_1 \in C$$

con conseguente norma (non canonica)

$$|\, \boldsymbol{u}\, |^2 = x^2 + y^2 \in C$$

ne segue una "distanza non canonica" di due punti

$$\text{dist}\ (P, P_1)^2 = |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\,|^2 = (x-x_1)^2 + (y - y_1)^2.$$

Tale struttura pur essendo utile per esercizi stimolanti non è affatto in linea con la teoria generale della norma e del prodotto interno, che nel caso di spazi vettoriali sui complessi si sviluppa in altro modo. Richiamiamo queste nozioni nel successivo paragrafo.

Appaiono, con queste definizioni, interessanti anomalie. In particolar modo troviamo anomalie riguardo le rette di equazioni $y = ix$ ed $y = -ix$, dette *rette isotrope,* ed alle loro parallele. Ad esempio ciascuna di esse è perpendicolare a se stessa essendo $i^2 = -1$, due punti distinti su ciascuna di esse come (1,i) (a, ai) sono a distanza nulla, avendosi:

$$d = (a-1)^2 + (ai - i)^2 = (a-1)^2\, [1+i^2\,] = 0.$$

Ancora la circonferenza di raggio nullo e centro nell'origine è chiaramente il prodotto delle equazioni delle rette isotrope:

$$x^2 + y^2 = (y - ix)\,(y+ix) = 0.$$

Tuttavia se definiamo il prodotto scalare in altro modo, le cose cambiano. Dati ancora due vettori:

$$\boldsymbol{u} = \overrightarrow{OP} = (x, y)\ , \quad \boldsymbol{v} = \overrightarrow{OP_1} = (x_1\,, y_1)$$

Definiamo un nuovo prodotto, che chiameremo *prodotto hermitiano* che si definisce ponendo :

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} := x\,\overline{x_1} + y\overline{y_1} \in R\ .$$

Si prova facilmente che la quantità reale positiva $||\,\boldsymbol{u}||$, definita da :

$$\|\boldsymbol{u}\|^2 = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} := x\,\overline{x} + y\,\overline{y}$$

è una effettiva norma, detta *norma hermitiana*, che da luogo ad una diversa e più corretta geometria metrica del piano affine complesso.

Ne derivano nozioni metriche di misure di segmenti, ortogonalità, misure di angoli che non approfondiremo in questo contesto.

Nel paragrafo successivo chiariremo invece le differenze generali tra la nozione di norma, le sue connessioni con il prodotto interno in spazi vettoriali sui reali o sui complessi, di dimensione finita o infinita, nella forma più generale possibile.

2 - Spazi vettoriali normati e dotato di prodotto interno

La nozione di *"norma"* di un vettore, estende il concetto di *"lunghezza"* di un vettore dello spazio fisico intuitivo, a spazi vettoriali su reali o sui complessi di dimensioni finita o infinita. Naturalmente :

- la "lunghezza di un vettore sarà sempre un numero non negativo, con pochi vettori di lunghezza eventuale nulla;
- moltiplicare un vettore per un numero reale avrà l'effetto di moltiplicare la sua lunghezza per il modulo di esso;

dovrà evidenziarsi un chiaro legame con la nozione di prodotto scalare o più in generale di prodotto interno (anche hermitiamo) e con la nozione di distanza.

Daremo per nota la definizione di spazio vettoriale[4] su un campo K e la nozione di sottospazio e di lineare dipendenza e indipendenza.

Ricordiamo che un sottospazio può essere *generato* a partire da diversi suoi sotto-insiemi di vettori. Tra i possibili insiemi di generatori alcuni risultano più economici di altri: sono gli insiemi di vettori con la proprietà di essere linearmente indipendenti.

Un insieme di vettori linearmente indipendenti che generano il sottospazio è detto base del sottospazio.

---

[4] Cfr. Eugeni F., M. Gionfriddo [1].

È noto che tutte le basi di uno spazio vettoriale di dimensione anche infinita, posseggono la stessa cardinalità (risultato di Felix Hausdorff). Tale cardinalità viene chiamata *dimensione di Hamel* dello spazio.

Si dimostra che ogni spazio vettoriale, che non sia il solo vettore nullo, possiede almeno una base; alcuni spazi hanno basi costituite da un numero finito di vettori, altri hanno basi costituite da insiemi infiniti. Per questi ultimi, ai fini della dimostrazione dell'esistenza di una base si deve ricorrere al *Lemma di Zorn*[5] ovvero all'*assioma della scelta*.[6]

Da un punto di vista descrittivo occorre anche ricordare che a volte, in matematica, si presenta la necessità di ripetere una determinata costruzione, supponendo di poterla ripetere, un numero infinito di volte. In una tale situazione può essere necessario compiere delle scelte arbitrarie, talvolta in quantità infinita. In termini non formali, l'assioma della scelta assicura che, quando viene data una collezione di insiemi non vuoti, si

---

[5] Il Lemma di Zorn asserisce che : se X è un insieme non vuoto su cui è definita una relazione d'ordine parziale tale che ogni sua catena possiede un maggiorante in X, allora X contiene almeno un elemento massimale. E' noto anche come Lemma di Kuratowski-Zorn poiché esso fu scoperto da Kazimierz Kuratowski nel 1922 e riscoperto indipendentemente da Max Zorn nel 1935.

[6] L'assioma della scelta, come è stato dimostrato, assunto il sistema di assiomi di Zermelo-Fraenkel, per la teoria degli insiemi, è equivalente ad altri assiomi classici quali i seguenti: l'enunciato Lemma di Zorn, ma ancora il Teorema del buon ordinamento(su ogni insieme si può definire un buon ordinamento), l' assioma moltiplicativo (il prodotto cartesiano di una famiglia di insiemi non vuoti è non vuoto), Teorema di Hartogs (la relazione d'ordine standard sui cardinali è totale). In altre parole, assunto uno di essi, si provano gli altri.

può sempre costruire un nuovo insieme "scegliendo" un singolo elemento da ciascuno di quelli di partenza. Precisiamo che se il numero di insiemi della collezione di partenza è finito, l'assioma della scelta non è necessario, poiché gli altri assiomi della teoria degli insiemi sono atti a garantire la possibilità della scelta. Il problema si pone invece nel caso che la collezione sia costituita da un numero infinito di insiemi. In tal caso occorre introdurre nella teoria un assioma specifico, l'assioma della scelta asserente che: *data una famiglia finita o infinita non vuota di insiemi non vuoti, esiste una funzione che ad ogni insieme della famiglia fa corrispondere un suo elemento.*

Il problema di natura logica consiste nel cercare di comprendere se l'atto di compiere un'infinità di scelte arbitrarie sia o meno lecito. L'argomento è molto dibattuto. Dal punto di vista puramente logico è stato mostrato che supporre di poterlo fare non porta a contraddizioni — in altre parole, l'assioma della scelta, che garantisce la possibilità di compiere infinite scelte, è indipendente dagli altri assiomi generalmente usati in matematica. L'assioma della scelta, insieme alle sue molteplici riformulazioni equivalenti, permette di mostrare molte proprietà interessanti in svariate strutture della matematica.[7]

[7] Alcuni risultati per i quali è indispensabile l'assioma della sceltasono i seguenti: Ogni funzione suriettiva ha un'inversa destra- Ogni campo ammette una chiusura algebrica, unica a meno di isomorfismi- Ogni anello unitario ammette ideali massimali. Il teorema di Tichonov (asserente che:il prodotto di una qualsiasi famiglia di spazi topologici compatti è compatto. Andrej Nikolaevič Tichonov, 1930). Altri sono risultati più profondi quali Il teorema di Hahn-Banach

La distinzione più rilevante fra gli spazi vettoriali vede da una parte gli spazi di dimensione finita e dall'altra quelli di dimensione infinita.

Giova ricordare che ogni spazio vettoriale di dimensione finita n, sul campo K, è isomorfo a K^n, ovvero allo spazio vettoriale delle n-ple di elementi di K. Per quel che segue faremo riferimento solo a spazi vettoriali sul campo reale R o sul campo complesso C.

Un prodotto hermitiano in uno spazio vettoriale V su C, è una operazione binaria esterna di V X V in C , che a due vettori $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ di V associano il numero complesso indicato con $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$, che quali che siano $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$,· $\boldsymbol{w}$ in V ed a in C, sono soddisfatti gli assiomi seguenti:

1.- $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \overline{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}}$

2.- $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w}\ ) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$

3.- $(a\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v} = a\,(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})$

4.- $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} \in R^+ \cup \{0\}$, con $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$, **se** $\boldsymbol{u} \neq 0$.

Inoltre, come si prova[8] è anche:

5.- $\boldsymbol{w} \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}$

6.- $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{a}\boldsymbol{v}\ ) = \overline{a}\ (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})$

Si chiama spazio di Banach è uno spazio vettoriale sui reali o sui complessi, sul quale è definita una norma tale che

[8] Cfr. B. Pini, Secondo corso di Analisi Matematica Prte proma, Coop. Libraria Univ. ,Bologna, 1972.

ogni successione di Cauchy sia convergente (abbia cioè un limite) a un elemento dello spazio.

Si chiama spazio pre-hilbertiano uno spazio vettoriale sui reali o sui complessi, con prodotto interno. Uno spazio pre-Hilbertiano si dice hilbertiano se la norma indottaè completa. Uno spazio di Hilbert soddisfa all'identita' del parallelogramma.

Esempio 1 - Supponiamo di avere uno spazio vettoriale di dimensione n sui complessi e sia { e_i }, i = 1,2,…, n, una base. Dati due vettori[9]: x = xi e_i , y = yj e_j, e posto:

$$e_i \cdot e_j = h_{ij} \in C$$

Risulta

$$x \cdot y = (x^i e_i) \cdot (y^j e_j) = h_{ij}\ x^i \overline{y^j}$$

che è la forma più generale del prodotto hermitiano usato nel 1° paragrafo. La restrizione del prodotto hermitiano al caso reale si chiama *prodotto scalare* di V su R, ed essendo in tale caso $\overline{y^j}$ = yj , si ha la classica espressione del prodotto scalare in V su R.

Abbiamo premesso questa nozione e questo esempio in quanto utile per in esempio di norma.

[9] In questo esempio usando la notazione degli indici in alto e in basso (notazione di Einstein) sotto- tendiamo la sommatoria rispetto all'indice alto- basso.,

Una semi-norma su uno spazio vettoriale V sul campo reale o complesso, è una applicazione $\|\cdot\|$ di V nei reali R, tale che:

1.- $\|x\| \geq 0$, $\forall$ x $\in$ V;
2.- $\|a\,x\| = |a|\,\|x\|$, $\forall$ a $\in$ R, $\forall$ x $\in$ V (omogeneità);
3.- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall$ x, y $\in$ V. (diseguaglianza triangolare), se inoltre:

4.- $\|x\| = 0$ se e solo se x = 0, allora la semi-norma si dice norma.

Si dimostra ancora:

5.- Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Dati x, y $\in$ V, spazio vettoriasle ui complessi e dotato di prodotto hermitiano si ha:

$$|x \cdot y| \leq \|x\|\,\|y\|$$

Esempio 2 - Consideriamo l'insieme dalla funzioni reali di variabili reali:

L^p = {f t. c. f(x), ∀x [a, b]di R, è t. c. $f(x)^p$ è sommabile}
costituito dalla funzioni reali di variabili reali f (x) su un intervallo [a,b] di potenza p-sima sommabile nel senso di Lebesgue, p intero positivo. La norma $||f||$ di una funzione f di L^p, è la funzione $||f||$ che in x ò data da:

$$\|f\|\,(x) = \left[\int_a^b f(x)^p dx\right]^{1/p}$$

Spazio semi-normato che prende il nome di spazio hielbertiano funzionale. In qusto spazio ci sono funzioni non nulle a norma nulla come, ad esempio, la funzione che in [a,b] vale o tranne che per un numero finito di punti dove vale 1

Un caso interessante particolare è dato dall'insieme delle successioni di numeri reali o complessi:

$$[\ell]^p = \left\{ a = \{a_i\}, i = 1,2, \dots, n \,, \text{t.c.} \ \left[\sum_1^\infty |a_i|^p\right]^{1/p} < +\infty \right\}$$

$$\|a\| = \left[\sum_1^\infty |a_i|^p\right]^{1/p}$$

Spazio normato che prende il nome di spazio hielbertiano numerico.

Uno spazio vettoriale dotato di norma è anche uno spazio metrico. Infatti la distanza tra due vettori si può definire ponendo:

$$d(x,y) := \|x - y\| \ , \forall\ x, y \in V$$

ed è facile esercizio provare le tre classiche proprietà di positività, simmetria e diseguaglianza triangolare. Pertando uno spazio vettoriale sui Reali o complessi dotato di norma , è anche uno spazio vettoriale topologico.

Due differenti norme possono essere equivalenti secondo la seguente:

Definizione. - Dato uno spazio vettoriale X, due norme $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ su X si dicono equivalenti se esistono due costanti positive C1 e C2 tali che per ogni $x \in X$ risulta:

$$C_1 \|\mathbf{x}\|_1 < \|\mathbf{x}\|_2 < C_2 \|\mathbf{x}\|_1 .$$

Proposizione. Se V `è uno spazio vettoriale normato sui reali o sui complessi, di dimensione finita, allora tutte le norme definite su di esso sono fra loro equivalenti, ed inducono la stessa topologia, detta topologia euclidea, che è anche completa.[10]

Inoltre:

Teorema di Weierstrass. *Uno spazio vettoriale V normato sui reali o sui complessi, ha dimensione finita, se e solo se da ogni successione* $\{x_n\} \subset X$ *limitata `e possibile estrarre una sottosuccessione convergente in V .*

Si noti che uno spazio vettoriale V sui reali o sui complessi dotato di prodotto interno x·y (scalare o hermitiano) è di conseguenza normato, ponendosi $\|x\|^2 := x \cdot x$, per ogni x di V.

Da notare che in generale non è vero il viceversa in quanto:

Teorema.[11] Condizione necessaria e sufficiente a che uno spazio vettoriale normato sui complessi sia dotato di prodotto interno è che in esso sia valida per ogni x,y di V la seguente identità vettoriale:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2$$

(regola del parallelogramma).

Nel qual caso è definibile un prodotto hermitiano, che induce la norma di partenza, ponendo:

---

10 Sarebbe a dire che ogni successione di vettori soddifacenti le condizioni ci Cauchy sono convergernti.

11 Per la prova, peraltro ricostruibili, vedasi a d Esempio B. Pini [4].

$$x\cdot y = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 + i\,\|x + y\|^2 + i\,\|x - y\|^2.$$

Nel caso reale il prodotto scalare si riduce a:

$$4\,x\cdot y = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2\ .$$

3 - Il piano affine ampliato e complessificato e la sua immagine in R^4

Chiameremo piano affine ampliato e complessificato **$A^2(C)$** o anche piano proiettivo complesso, l'insieme delle terne ordinate ***(t, x, y)*** di numeri complessi non tutti nulli e definiti a meno di un fattore complesso. Il legame tra **$A^2(C)$** ed **C^2**, nasce dall'identificazione dei punti di **$A^2(C)$**, con **$t \neq 0$,** chiamati **punti propri** di **$A^2(C)$,** con i punti P(x,y) di **C^2,** mediante le relazioni **:**

$$x = x/t \quad , \quad y = y/t.$$

I punti di **$A^2(C)$,** con ***t = 0,*** cioè del tipo (0, r , s**),** li chiameremo **punti impropri,** ciascuno geometricamente rappresentato della direzione della retta (o di una sua qualsiasi parallela) di C^2**,** di equazioni:

$$x = r\,u \quad , y = s\,u$$

L'insieme di tutti i punti impropri, è caratterizzato dall'equazione:

$$\boldsymbol{t = 0}$$

che prende il nome di *equazione della retta impropria.*

Si chiama, altresì, *retta propria* di **A^2(C),** una retta (r) di **C** alla quale si sia aggiunto un punto improprio, esattamente quello che definisce la direzione della stessa (r). La definizione è giustificata anche dal fatto che l'equazione di una retta (r), scritta in forma omogenea, ha un significato ben più generale, in quanto, l'equazione:

$$a\,\boldsymbol{x} + b\,\boldsymbol{y} + c\,\boldsymbol{t} = 0$$

è soddisfatta sia dagli ordinari punti propri (1, x',y') con ax'+by' +c ≡ 0, sia dal punto improprio (0, b, -a) definente la direzione della stessa retta. Inoltre, nella forma omogenea, si può includere anche il caso a = b = 0, (che era il caso escluso nelle rette proprie di **C^2**) che fornisce l'equazione della retta impropria.

Vogliamo ora passare all'esame di una ovvia applicazione che fornisce una immagine del Piano affine complesso nell'R^4 reale, esame che risulta tutt'altro che banale.

Dato un punto qualsiasi P (x,y) = P(x'+ix'', y' + i y'') del piano, fissiamo l'attenzione su una applicazione naturale:

$$\mathbf{f} : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{R}^4$$

definita ponendo:

$$\mathbf{f}\,(x'+ix'', y' + i\,y'') = (x', x'', y', y'')$$

l'applicazione essendo chiaramente biettiva nella corrispondenza tra punti.

Vogliamo ora comprendere quali sono le immagini delle rette di $\mathbf{C}^2$ in $\mathbf{R}^4$.

Sia data una retta di $\mathbf{C}^2$ di equazione $\mathbf{y = m\,x}$, con $m = m' + im''$. Si ha:

$y' + i\,y'' = (m'+im'')\,(x'+ix'') = (m'x'-m''\,x'') + i\,(m''\,x'+m'x'')$

quindi l'immagine di una retta di $\mathbf{C}^2$ in $\mathbf{R}^4$ è data dal sistema:

$y' = m'x' - m''\,x''$, $y'' = m''\,x' + m'x''$

dunque: *ad una retta di* $\mathbf{C}^2$ *corrisponde un piano di* $\mathbf{R}^4$ *che taglia sullo spazio improprio* S_∞ , di $\mathbf{R}^4$ di equazione $t = 0$, *la retta di equazioni*[12]*:*

$$\begin{cases} y' = m'x' - m''\,x'' \\ y'' = m''\,x' + m'x'' \\ t = 0. \end{cases}$$

È evidente che tale corrispondenza non è biettiva esistendo piani di $\mathbf{R}^4$ non provenienti[13] da rette di $\mathbf{C}^2$.

Proviamo che: *due rette di* $\mathbf{C}^2$ *del tipo* $y = mx$, $y = nx$, *con* $m \neq n$, *hanno per immagine due piani* di $\mathbf{R}^4$, *che tagliano sullo spazio improprio* S_∞ *di equazione* $t = 0$, *due rette sghembe.*

Infatti posto $n = n' + i\,n''$ le due rette sul piano $t = 0$ portano al sistema (1):

---

[12] In R4 una equazione è l'equazione di uno spazio o iperpiano, due equazioni indipendenti rappresentano un piano e tre equazioni indipendenti rappresentano una retta.

[13] È sufficiente considerare il piano $y' = ax' - b\,x''$, $y'' = c\,x' + dx''$ non verificanti le due condizioni $a = d$, $b = c$.

$$\begin{array}{ll} y' = m'x' - m''x'' & y' = n'x' - n''x'' \\ y'' = m''x' + m'x'' & y'' = n''x' + n'x'' \end{array}$$

per il quale si richiede la soluzione non nulla. Tale sistema è equivalente al sistema (2):

$$\begin{array}{c} (m'-n')\,x' - (m'' - m'')\,x'' = 0 \\ (m'' - m'')\,x' \ - m'-n')\,x'' = 0 \end{array}$$

Poiché $m \neq n$ implica

$$(m'-n')^2 + (m''-n'')^2 \neq 0$$

il sistema (2) ha la sola soluzione nulla e quindi anche il sistema (1) ha la sola soluzione nulla.

Dunque le rette sullo spazio improprio S_∞ di $\mathbf{R}^4$ di equazioni:

$$y' = m'x' - m''x'' , \quad y'' = m''x' + m'x'', \ t = 0$$

al variare di m formano una famiglia R(m) di rette a due a due sghembe.

La retta di $\mathbf{C}^2$ di equazione $x = 0$ ha come immagine in $\mathbf{R}^4$ il piano $x' = x'' = 0$ che taglia sullo spazio improprio una retta r* che è sghemba con le rette della famiglia R(m).

Infatti il sistema:

$$x' = x'' = 0 \ , \ y' = m'x' - m''x'', \quad y'' = m''x' + m'x'' , t = 0$$

equivale al sistema:

$$x' = x'' = y' = y'' = t = 0$$

privo di soluzione non nulla.

Considero ora la famiglia $R^*(m) = R(m) \cup \{r *\}$ che è una fibrazione del piano improprio in rette in quanto:

a.- *le retta di* $R^*(m)$ *sono a due a due sghembe;*

b.- *per ogni punto dello spazio improprio di* R^4 *passa una retta di* $R^*(m)$.

Infatti fissato comunque un punto $P = (0, a', a'', b', b'')$ su $t = 0$, proviamo che esiste una retta del sistema $R^*(m)$, che passa per esso.

Considero la retta generica del sistema ridotto $R(m)$

$$y' = m'x' - m'' x'', \quad y'' = m'' x' + m'x'', \; t = 0$$

Il passaggio per P, conduce alle condizioni:

$$m'a' - m'' a'' = b', \quad m'' a' + m'a'' = b''$$

sistema di due equazioni nelle incognite m', m''. Quando $(a')^2 + (a'')^2 \neq 0$, ha soluzione unica. Se invece è $a' = a'' = 0$, la retta per P $(0,0,0,b'.b'')$ è la retta di equazione $x' = x'' = t = 0$ che e' proprio la retta aggiunta ad $R(m)$ per avere $R^*(m)$.

Concludendo: Le immagini delle rette di C^2 in R^4 sono tutti e soli i piani di R^4, passanti per le rette improprie della assegnata fibrazione $R^*(m)$.

4 - Conclusioni

La conclusione che si trae da questa breve nota è che la geometria del piano complesso allora che si legga nella rappresentazione reale è ben complicata.

Varrebbe la pena di andare a studiare altri luoghi classici, riletti nella geometria del piano complesso e reinterpretati nello spazio reale quadridimensionale. Inoltre anche sostituendo all'R^4 il corpo dei quatrenioni potremmo avere altre chiavi di lettura. Ancora potremmo esaminare il piano quaternaniale ampliato e vedere la sua immagine nell'$R^{8.}$ Saranno queste problematiche di prossimi lavori.!

Bibliografia

[1] F.Eugeni-M.Gionfriddo (1994). *Appunti del Corso di Algebra e Geome-tria,* Pescara Edizioni CUSL. Reperibile in www.afsu.it/Matematica/Geo-metria/

[2] Per la voce : "*Spazio normato*", *si veda Encyclopaedia of Mathematics, Springer e European Mathematical Society.*

[3] S. Lang, *Algebra lineare*, Torino, Bollati Boringhieri, 1992, ISBN 88-339-5035-2

[4] B. Pini, *Secondo corso di Analisi Matematica* Parte prima, Coop. Libraria Univ. Bologna, 1972.

[5] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1970-ISBN 0-07-054234-1.

[6] M.Villa (1965), Lezioni di Geometria, CEDAM, Padova.

[7] G. Vaccaro, *Lezioni di geometria*, 2 voll., Libreria Eredi Virgilio Veschi, Roma, 1960-61

[8] E. W. Weisstein, Spazio normato, su MathWorld, Wolfram Research.