Periodico di Matematica (IV) Vol. V (4) dicembre 2023, pp. 83-92

Il Teorema del resto generalizzato

Francesco Laudano*, Mattia Laudano**

*Liceo M. Pagano, Campobasso; francesco.laudano@unimol.it
** studente c/o Università Federico II - Napoli; mattialaudano1@gmail.com

DOI: 10.53159 /PdM(IV).v5n4.124

Sunto: *In questo lavoro si mostra una semplice generalizzazione del teorema del resto dalla quale segue una naturale estensione del teorema di Ruffini. I risultati presentati sono utilizzati per risolvere alcuni quesiti olimpici.*

Parole Chiave: *Teorema del resto; Teorema di Ruffini; fattorizzazione di polinomi, quesiti olimpici.*

Abstract: *In this paper we show a simple generalization of the remainder theorem from which a natural extension of Ruffini's theorem follows. The results presented are used to solve some Olympic questions.*

Keywords: *remainder theorem; Ruffini's theorem; factorization of polynomials; Olympic questions.*

1 - Introduzione

Defendit numerus
Giovenale, Satire, II 46

L'insegnamento della matematica alle superiori prevede spesso dimostrazioni di teoremi geometrici mentre, al contrario, le dimostrazioni algebriche sono rare, probabilmente perché ritenute troppo astratte per gli studenti. Fa eccezione il teorema del resto (cf. Teorema del resto, p. 428, Bergamini and Barozzi, 2021; Corollary 1, p. 162, Mac Lane and Birkhoff, 1985) che si introduce fin dal primo anno delle superiori e consente di provare il cosiddetto teorema di Ruffini (cf. Teorema di Ruffini, p. 428, Bergamini and Barozzi, 2021; Corollary 2, p. 162, Mac Lane and Birkhoff, 1985), utilizzato per fattorizzare polinomi interi.

Il teorema del resto, probabilmente già noto a Cartesio (cf Smith & Latham, 2007, p. 179), ci proviene soprattutto dal lavoro di Paolo Ruffini (1765–1822) (cf. Ruffini, p. 380-381), ed è molto usato nella matematica scolastica, tanto che nel 2016 Lorenzo Baglioni un ricercatore-youtuber italiano gli ha addirittura dedicato una canzone (Baglioni, 2016)!

Com'è ben noto, facendo riferimento, per semplicità, a polinomi con coefficienti razionali, il teorema del resto afferma che

Il resto della divisione di un polinomio $P(x)$ per il binomio $(x-c)$ coincide col numero $P(c)$.

In altre parole tale resto può essere determinato con una semplice sostituzione, senza eseguire la divisione tra polinomi, e quindi con una notevole riduzione nella complessità di calcolo.

Sorge spontaneo chiedersi se la stessa tecnica si possa applicare a polinomi di grado maggiore, ed è sorprendente la semplicità con la quale si può verificare che essa funziona anche per divisori del tipo (x^m-c). Ad esempio, per determinare il resto della divisione del polinomio $P(x)=4x^{15}-15x^3-2x^2+8x-7$ per il binomio $D(x)=x^3-2$ è sufficiente sostituire x^3 con 2 in $P(x)$. In tal modo si ottiene il polinomio non nullo $R(x)=4\cdot 2^5-15\cdot 2-2x^2+8x-7=-2x^2+8x+91$. Pertanto si può concludere che x^3-2 non divide $4x^{15}-15x^3-2x^2+8x-7$.

In questo lavoro si mostra come è possibile estendere la tecnica della sostituzione a polinomi divisori generici e quindi si formula una generalizzazione del teorema del resto e conseguentemente del teorema di Ruffini. Infine si utilizzano queste estensioni per risolvere alcuni quesiti olimpici. Gli argomenti proposti sono abbastanza semplici da poter essere considerati noti, tuttavia non siamo riusciti a trovarli in testi classici di algebra. In tempi recenti la validità della tecnica utilizzata nell'esempio precedente è stata provata per polinomi a coefficienti su anelli generici (c.f. Theorem 2.7, p. 962, Laudano, 2019; e, più in generale, Theorem 2.5, p. 779, Cuida, Laudano, Martinez, 2020). Il teorema che segue costituisce un caso particolare dei teoremi sopra citati.

Teorema 1.1 (Teorema del resto generalizzato)

Sia $P(x)$ un polinomio a coefficienti razionali di grado $n>1$ e sia $D(x)=a_hx^h + a_{h-1}x^{h-1} + \cdot\cdot\cdot + a_1x + a_0 \in Q[x]$ con $a_h\neq 0$ e $h\leq n$. Allora il resto $R(x)$ della divisione di $P(x)$ per $D(x)$ si può determinare sostituendo il polinomio $t(x)= a_h^{-1}(-a_{h-1}x^{h-1} - \cdot\cdot\cdot - a_1x - a_0)$ ad x^h in $P(x)$, ed iterando tale sostituzione nel *polinomio così ottenuto fino ad avere un polinomio di grado minore di h.*

È opportuno osservare che l'iterazione menzionata nell'enunciato precedente costituisce un ciclo finito, in quanto il polinomio $t(x)$, che sostituisce x^h, ha grado minore di h. Quindi ad ogni iterazione dopo la sostituzione il grado del polinomio diminuisce. Pertanto la procedura indicata nell'enunciato del Teorema 1.1 costituisce un algoritmo.

Nell'esempio che segue si mostra che il teorema precedente consente di applicare la tecnica della sostituzione anche a divisori che non sono binomi, effettuando più iterazioni.

<u>Esempio 1.2</u> *Si vuole determinare il resto della divisione del polinomio $P(x)=3x^4-10x^3-2x+5$ per il polinomio $D(x)=x^2-2x+7$. Sostituendo il polinomio $t(x)=2x-7$ ad x^2 in $P(x)=3(x^2)^2-10(x^2)x-2x+5$ si ottiene il polinomio $R_1(x)=3(2x-7)^2-10(2x-7)x-2x+5 = \cdot$ $\cdot \quad \cdot = -8x^2-16x+152$. Iterando la sostituzione precedente in $R_1(x)$ si ottiene il polinomio $R_2(x)=-8(2x-7)-16x+152=-32x+208$, il quale, avendo grado minore del grado di $D(x)$, coincide col resto cercato.*

È del tutto ovvio che lo studio della divisibilità tra polinomi si può effettuare utilizzando la tecnica delle sostituzioni iterate illustrata in precedenza. In proposito vale il seguente corollario del Teorema 1.1 (cf Theorem 2.9, p. 963, Laudano, 2019; e, più in generale, Theorem 2.7, p. 780, Cuida, Laudano, Martinez, 2020).

<u>Corollario 1.3 (Teorema di Ruffini generalizzato)</u>

Sia $P(x)$ un polinomio a coefficienti razionali di grado $n>1$ e sia $D(x)=a_hx^h + a_{h-1}x^{h-1} + \cdot \cdot \cdot +a_1x + a_0 \in Q[x]$ con $a_h\neq 0$ e $h\leq n$.

Le affermazioni seguenti sono equivalenti:

(a) $D(x)$ è un divisore di $P(x)$ in $Q[x]$

(b) sostituendo il polinomio $t(x)=a_h^{-1}(-a_{h-1}x^{h-1} - \cdot \cdot \cdot -a_1x-a_0)$ ad x^h in $P(x)$ ed iterando tale sostituzione nel polinomio così ottenuto al più n-h+1 volte si ottiene il polinomio nullo.

<u>Esempio 1.4</u>

Come si è già osservato il polinomio $P(x)=4x^{15}-15x^3-2x^2+8x-7$ non è multiplo del binomio $D(x)=x^3-2$ poiché sostituendo x^3 con 2 in $P(x)$ si ottiene come resto il polinomio $R(x)= -2x^2+8x+91$.

Di seguito si fornisce un esempio di applicazione diretta del teorema precedente alla scomposizione in fattori di una famiglia di polinomi razionali

<u>Esempio 1.5</u> Si voglia fattorizzare il polinomio in Q[x] il polinomio $P(x)= x^4 +kx^3+kx-1$. Poiché $P(x)=x^2(x^2+kx)+kx-1$, è evidente che sostituendo x^2 con -1 in $P(x)$ si ha $R(x)=0$. Pertanto, per il Corollario 1.3, il polinomio x^2+1 divide $P(x)$ in Q[x]. Dividendo $P(x)$ per x^2+1 si ottiene il secondo fattore x^2+kx-1.

2 - Applicazioni del Teorema del resto generalizzato alla risoluzione di quesiti olimpici

In questa sezione si applicano i risultati esposti in precedenza per risolvere alcuni quesiti proposti in gare nazionali di vario livello delle olimpiadi della matematica.

Quesito 2.1 (c.f. p. 76, Verolino, 2021).

"La somma di due radici dell'equazione $2x^3-x^2-7x+k=0$ è uguale a 1. Si determini il valore di k."

Dette x_1 ed x_2 le radici aventi somma 1 e indicato con p il loro prodotto, si può dire che il polinomio $P(x)=2x^3-x^2-7x+k$ è multiplo del polinomio $D(x)=(x-x_1)(x-x_2)=x^2-x+p$. Il Corollario 1.3 ci assicura che sostituendo x^2 con $x-p$ in $P(x)$ ed iterando tale sostituzione nel polinomio così ottenuto si ha il polinomio nullo. Con la prima sostituzione si ha $2x(x-p)-x+p-7x+k$, ed iterando $(-6-2p)x+k-p$. Quest'ultimo polinomio è nullo. Pertanto $k=p=-3$.

Quesito 2.2 (c.f. p. 74, Verolino, 2021).

"Si determini a in modo che una delle radici dell'equazione $x^3-7x+a=0$ sia doppia di un'altra."

Dette x_1 e $2x_1$ le radici di cui sopra, si può dire che il polinomio $P(x)=x^3-7x+a$ è multiplo del polinomio $D(x)=(x-x_1)(x-2x_1)= x^2-3x_1x+2x_1^2$. Il Corollario 1.3 ci assicura che sostituendo x^2 con $3x_1x-2x_1^2$ in $P(x)$ ed iterando tale sostituzione nel polinomio così ottenuto si ha il polinomio nullo. Con la prima sostituzione si ha $x(3x_1x-2x_1^2)-7x+a$, ed iterando si ha $(7x_1^2-7)x-6x_1^3+a$. Quest'ultimo polinomio è nullo. Pertanto $x_1=\pm 1$ ed $a=\pm 6$.

<u>Quesito 2.3</u> (Gara a Squadre di Secondo Livello - X Edizione - Roma, 14 Marzo 2017 - Università di Tor Vergata - valevole per l'accesso alla fase nazionale di Cesenatico - https://www.problemisvolti.it/GaraDiMatematicaASquadreRoma2.html).

"Del polinomio di terzo grado $P(x)=15x^3+Bx^2-36x-24$ non conosciamo il coefficiente B ma sappiamo che esiste un numero $a>0$ tale che sia a che $-a$ sono soluzioni dell'equazione $P(x)=0$. Quanto vale B?"

Poiché sia a che $-a$ sono soluzioni dell'equazione $P(x)=0$ il polinomio $P(x)$ è multiplo del binomio x^2-a^2. Il Corollario 1.3 ci assicura che sostituendo x^2 con a^2 in $P(x)$ si ottiene il polinomio nullo. Con tale sostituzione si ha $15a^2x+Ba^2-36x-24$, Quest'ultimo polinomio è nullo, quindi $15a^2-36=0$ e $Ba^2-24=0$. Pertanto $a^2=12/5$ e $B=10$.

<u>Quesito 2.4</u> (Gara a Squadre di Secondo Livello - II Edizione - Roma, 26 Marzo 2009 - Universita` di Tor Vergata - valevole per l'accesso alla fase nazionale di Cesenatico - https://www.problemisvolti.it/GaraDiMatematicaASquadreRoma2.html).

"Eseguendo la divisione con resto tra il polinomio $p_1(x)=-3x^{81}+10x^{41}+x^{27}+6x^{21}+2x^7+x^2+9x+53$ e il polinomio polinomio $p_2(x)=x^{20}+2$ si ottiene un certo polinomio quoziente $q(x)$ e un polinomio resto $r(x)$, quest'ultimo con grado strettamente minore di $p_2(x)$. Quanto vale $r(23)$?"

Il Teorema 1.1 ci assicura che il resto della divisione di $p_1(x)$ per $p_2(x)$ si può ottenere sostituendo x^{20} con -2 in $p_1(x)$. Con tale sostituzione si ha $r(x)=-3x(-2)^4+10x(-2)^2+x^7(-2)+6x(-2)+2x^7+x^2+9x+53=x^2-11x+53$. Pertanto $r(23)=329$.

Quesito 2.5 (XXXI Olimpiade Italiana di Matematica - Cesenatico, 8 maggio 2015 - Finale nazionale - http://olimpiadi.dm.unibo.it/le-gare/gara-nazionale/).

"Determinare tutte le coppie di numeri interi (a,b) che risolvono l'equazione $a^3+b^3+3ab=1$."

L'equazione si può riscrivere come $(a+b)^3-3ab(a+b)+3ab-1=0$. Ponendo $a+b=x$ si ottiene l'equazione $x^3-3abx+3ab-1=0$, che ha come soluzione $x=1$ per ogni coppia (a,b) di interi. Quindi, per il teorema di Ruffini (e più in generale per il Corollario 1.3) il polinomio $x^3-3abx+3ab-1$ si può fattorizzare dividendolo per $x-1$. In tal modo si ottiene l'equazione $(x-1)(x^2+x-3ab+1)=0$. L'unica coppia (a,b) di interi che annulla $x^2+x-3ab+1=(a+b)^2+(a+b)-3ab+1=a^2+(1-b)a+b^2+b+1$ è la coppia $(-1,-1)$, in quanto il discriminante dell'ultimo polinomio è $-3(b^2+2b+1)$ che risulta non negativo solo se $b=-1$ e, di conseguenza, $a=(b-1)/2=-1$. Mentre il polinomio $x-1=a+b-1$ si annulla in corrispondenza delle coppie del tipo $(a,1-a)$.

3 - Riflessioni conclusive

La generalizzazione del teorema del resto presentata in questa nota potrebbe essere utilizzata in ambito didattico, allo scopo di sviluppare le competenze degli studenti nel ragionamento algebrico computazionale. Inoltre, sebbene non sufficientemente evidenziata in letteratura, essa sembra in molti casi vantaggiosa in termini computazionali ed utile a risolvere problemi. È naturale chiedersi se la tecnica della sostituzione, presentata in queste pagine può essere utilizzata anche per determinare il quoziente della divisione.

Bibliografia

Bergamini M., Barozzi G. (2021). *Algebra multimediale.blu,* Zanichelli. Bologna.

Mac Lane S., Birkhoff G. (1985). *Algebra,* Mursia Milano.

Smith D. E., Latham M., (2007). *The geometry of René Déscartes,* Dover Pub.

Ruffini P. (1812). Di un nuovo metodo generale di estrarre le radici numeriche, *Memorie di Matematica e di Fisica della società italiana delle scienze, 16(1), pp. 373--429,* https://www.biodiversitylibrary.org/item/34291#page/420/mode/1up.

Baglioni L. (2016). Il Teorema di Ruffini, https://www.youtube.com/watch?v=kePx7biRTR4.

Laudano F. (2019). A generalization of the remainder theorem and factor theorem. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 50:6,* 960-967*, doi: 10.1080/0020739X.2018.1522676.*

Cuida A., Laudano F., Martinez-Moro E. (2020). General remainder theorem and factor theorem for polynomials over non-commutative coefficient rings, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 51:5,* 775-785, *doi:10.1080/0020739X.2019.1676926*.

Verolino L. (2021). Guida alle prove di ammissione per le scuole di eccellenza, *vol. II. EdiSES università. Napoli.*

http://www.assculturale-arte-scienza.it/Rivista%20ArteScienza_magazine/ArteScienza_magazine%20N.6/ArteScienza_magazine_N.6_Online.pdf