Proprietà degli insiemi del V ordine contenenti punti dello spazio

Franco Francia*

*Docente attualmente in pensione; franco.francia40@virgilio.it

DOI: 10.53159 /PdM(IV).v5n4.123

Sunto: *L'articolo inizia considerando il caso di due coppie di punti. (A,B) e (C,D) appartenenti, rispettivamente, a due rette ortogonali del piano; successivamente viene esaminato il caso di due punti M e N, appartenenti ad una retta ortogonale ad un piano individuato da una terna di punti S,H,T. Nel primo caso le condizioni di perpendicolarità sono evidenziate utilizzando l'insieme completo di quarto grado il cui sostegno è A,B,C,D; analogamente, nel secondo caso, le condizioni di perpendicolarità sono evidenziate esaminando l'insieme completo di quinto grado il cui sostegno è l'insieme di punti dello spazio: (M,N,S,H,T). In entrambi i casi risulta evidente come gli insiemi dei punti materiali permettano di rappresentare sinteticamente, con facilità, la questione geometrica trattata.*

Parole Chiave: *Insiemi completi del V ordine nello spazio. Proiezione ortogonale di un punto. Insieme di punti materiali contenenti ortogonalità. Proprietà invariantiva degli insiemi completi.*

Abstract: *The article begins by considering the case of two pairs of points. (A,B) and (C,D) belonging, respectively, to two orthogonal lines in the plane; then the case of two points M and N, belonging to an orthogonal line to a plane* *identified by a triplet of points S,H,T, is examined. In the first case, the perpendicularity conditions are evidenced by using the complete set of fourth degree whose support is A,B,C,D; similarly, in the second case, the perpendicularity conditions are evidenced by examining the complete set of fifth degree whose support is the set of points in space: (M, N, S, H, T). In both cases, it is evident how the sets of material points make it easy to succinctly represent the under consideration geometric question.*

Keywords: *Complete sets of 5th order in space. Orthogonal projection of a point. Set of material points containing orthogonality. Invariant property of complete sets.*

1 - Proiezioni ortogonali sulla retta

Nota 1. Ricordiamo che un punto materiale: $m \cdot P$, è rappresentato mediante un numero reale m, detto massa del punto, associato ad una lettera P, detta posizione del punto. Ricordiamo, inoltre, che il richiamo a TH.12 si riferisce al dodicesimo teorema (Francia, 2020).

Def. 1. Diciamo che due punti P e Q sono simmetrici rispetto ad un centro H se H è il punto medio di P e Q.

Def. 2. Siano A e B due punti della retta r che divide il piano π nei semipiani π^+ e π^-. I punti P e Q, appartenenti, rispettivamente, ai semipiani opposti π^+ e π^-, sono detti simmetrici rispetto a (A,B) se $d(P,A) = d(Q,A)$, $d(P,B) = d(Q,B)$.

TH. 1. Se i punti P e Q sono simmetrici rispetto a (A,B), allora, sono simmetrici rispetto a qualsiasi altra coppia di punti (X,Y) di r, retta contenente A e B.

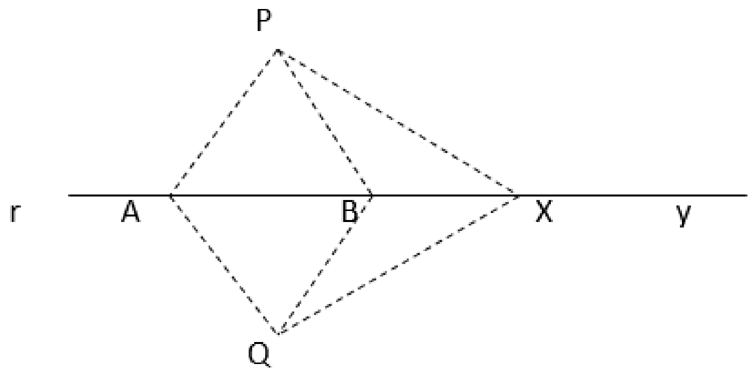

Fig. 1

Sia X un qualsiasi punto di r.

Essendo $d(A,B) = n$, $d(A,X) = s$, $d(B,X) = m$, l'insieme $I = (m\ A,\ -s\ B,\ n\ X)$ è completo pertanto, per la proprietà invariantiva del prodotto di un punto per l'insieme completo, si ha:

$$P \cdot I = Q \cdot I$$

Sviluppando si ottiene:

$$m[d(P,A)]^2 - s[d(P,B)]^2 + n[d(P,X)]^2 = m[d(Q,A)]^2 - s[d(Q,B)]^2 + n[d(Q,X)]^2. \qquad (1)$$

Essendo P e Q simmetrici rispetto a (A,B) per la def.2 si ha:

$$d(P,A) = d(Q,A)\ ,\ d(P,B) = d(Q,B) \qquad (2)$$

Sostituendo la (2) nella (1) e semplificando si ha:

$$n\,[d(P,X)]^2 = n\,[d(Q,X)]^2.$$

Essendo X un qualsiasi punto di r risulta confermata la tesi: $d(P,X) = d(Q,X)]$.

Analogamente si ha: $d(P,Y) = d(Q,Y)]$.

Il precedente teorema permette di introdurre la seguente definizione:

Def. 3. Diciamo che due punti P e Q sono simmetrici rispetto ad una retta r se sono simmetrici rispetto a due qualsiasi punti di r.

Nota 2. Se P e Q sono simmetrici rispetto alla retta r, ogni punto di r è equidistante da P e Q. Richiamiamo la seguente definizione:

Def. 4. Due angoli congruenti e adiacenti sono detti "angoli retti".

TH. 2. I punti P e Q siano simmetrici rispetto alla retta r. Sia H l'intersezione di r con $[P,Q]$. Gli angoli $\widehat{PHX}$ e $\widehat{QHX}$, appartenenti, rispettivamente, ai triangoli di vertici (P,H,X) e $(Q,H,X)]$, con $X \in r$, sono retti.

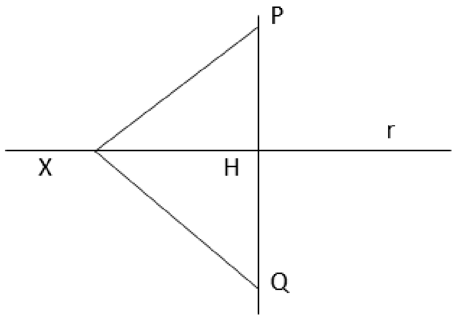

Fig. 2

I due triangoli *T(P,H,X)* e *T(Q,H,X)* hanno il lato *[X,H]* in comune; inoltre, essendo *P* e *Q* simmetrici rispetto a *H* e *X*, risulta: *d(P,X)* = *d(Q,X)*, *d(P,H)* = *d(Q,H)*; i due triangoli, essendo congruenti, hanno i due angoli $\widehat{PHX}$ e $\widehat{QHX}$ congruenti e adiacenti; per la def. 4, sono detti angoli retti.

<u>Def. 5.</u> Sia *P* un punto sul semipiano π^+ con origine la retta *r*. Chiamiamo proiezione ortogonale di *P* su *r* il punto *H*, intersezione della retta *r* con il segmento [*P,Q]*, essendo *Q* il simmetrico di *P* rispetto a *r*.

<u>TH. 3.</u> Sia *J* = *(A,B,P,Q)* un insieme contenente terne di punti non allineati del piano π. Sia *I* = *(m A,n B, u P, v Q)* l'insieme completo con sostegno *J*. Se *P* e *Q* sono simmetrici rispetto a *(A,B)*, allora, le masse *u* e *v* dei punti materiali $u \cdot P$, $v \cdot Q$ sono eguali: $u = v = -\frac{m+n}{2}$ e si ha:

I'= *[2m A, 2n B, –(m + n) P, – (m + n) Q]*, insieme equivalente a *I°* = *[2 k A, 2 B, –(k +1) P, – (k + 1) Q]*, essendo $k = \frac{m}{n}$.

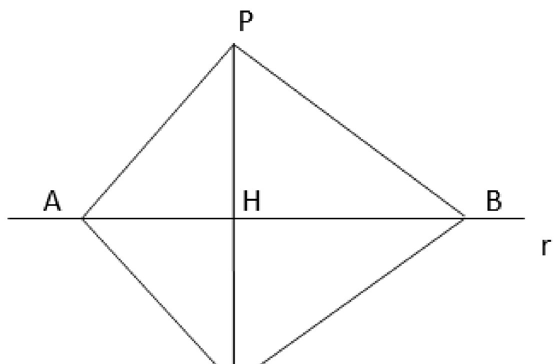

Fig. 3

1) Se P e Q sono simmetrici rispetto a A, B si ha:

$$d(A,P) = d(A,Q),\ d(B,P) = d(B,Q);$$

2) Se I è completo si ha:

$$P \cdot I = Q \cdot I$$

Sviluppando la 2) si ha:

$$m[d(P,A)]^2 + v[d(P,Q)]^2 + n[d(P,B)]^2 =$$
$$= m[d(Q,A)]^2 + u[d(Q,P)]^2 + n[d(Q,B)]^2$$

Tenendo conto della 1), la precedente diviene:

$$v[d(P,Q)]^2 = u[d(Q,P)]^2 \text{ da cui risulta } u = v.$$

Posto $u = v = d$, l'insieme I diviene

$$I = (m\,A,\ n\,B,\ d\,P,\ d\,Q) \tag{3}$$

Poiché $m + n + 2\,d = 0$, si ha: $d = -\frac{m+n}{2}$.

Sostituendo nella (3) e moltiplicando per 2 si ha la tesi:

$$I = [2m\,A,\ 2n\,B,\ -(m + n)\,P,\ -(m + n)\,Q].$$

Dividendo I per n e introducendo il parametro $K = \frac{m}{n}$, si ottiene l'insieme completo $I°$ equivalente a I:

$$I° = [2\,k\,A\,, 2\,B, -(k+1)\,P, -(k+1)\,Q]$$

Nota 3. L'eguaglianza delle masse dei punti materiali P e Q di $I°$: $-(k+1)\,P$, $-(k+1)\,Q$, è condizione necessaria (ma non sufficiente) per poter dedurre che P e Q sono simmetrici rispetto a A e B (condizione di ortogonalità).

Applicazione 1. L'insieme $J = (A,B,P)$ contiene terne di punti non allineati del piano π e si ha: $d(A,P) = 3\sqrt{2}$, $d(P,B) = 5$, $d(A,B) = 7$. Trovare la distanza $d(P,H)$ essendo H la proiezione ortogonale di P sulla retta r passante per A e B.

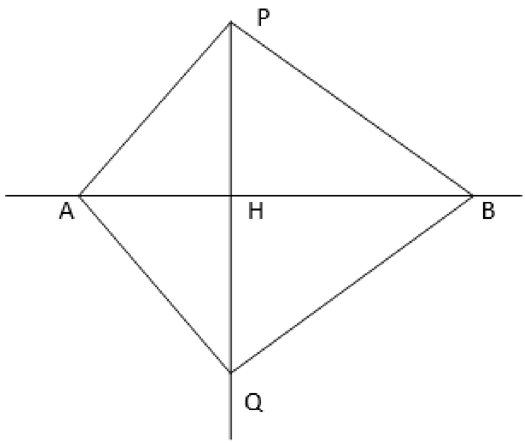

Fig. 4

Per individuare il punto H introduciamo il punto Q, simmetrico di P rispetto a (A,B); si ha: $d(A,Q) = d(A,P) = 3\sqrt{2}$, $d(B,Q) = d(B,P) = 5$. Affinché per l'insieme completo, con sostegno $J° = (A,B,P,Q)$, sussistano le condizioni di ortogonalità per il TH.3, deve risultare:

$$I° = [2k\ A,\ 2\ B,\ -(k+1)P,\ -(k+1)\ Q]$$

Per calcolare K svolgiamo l'equazione $A \cdot I° = B \cdot I°$, si ha:
$-(k+1)\ [d(A,P)]^2 - (k+1)\ [d(A,Q)]^2 + 2[d(A,B)]^2 = -(k+1)\ [d(B,P)]^2 +$
$-(k+1)\ [d(B,Q)]^2 + 2k[d(A,B)]^2$
$-(k+1)\ 18 - (k+1)\ 18 + 2 \cdot 49 = -(k+1)\ 25 - (k+1)\ 25 + 2\ k$ 49 da cui $k = \frac{4}{3}$.

Sostituendo in $I°$, moltiplicando per 3, si ha l'equivalente $I = (8\ A,\ 6\ B,\ -7\ P,\ -7\ Q)$. Per trovare $d(P,H)$ utilizziamo il TH.12: $[\ I \cup (7\ P,\ -7\ Q)]^2 = (7\ P,\ -7\ Q)^2$ da cui:

$$(8\ A,\ 6\ B,\ -7\ P,\ -7\ Q,\ 7\ P,\ -7\ Q)^2 = (7\ P,\ -7\ Q)^2$$
$$(8\ A,\ 6\ B,\ -14\ Q)^2 = (7\ P,\ -7\ Q)^2$$
$$48\ [d(A,B)]^2 - 84\ [d(B,Q)]^2 - 112\ [d(A,Q)]^2 = -49\ [d(P,Q)]^2$$

Svolgendo si ha: $d(P,Q) = 6$ e quindi

$$\frac{1}{2}\ d(P,Q) = d(P,H) = d(H,Q) = 3$$

2 - Proiezione ortogonale di un punto su un piano

Def. 6. Siano A,B,C tre punti non allineati del piano π. Diciamo che i punti P e Q, appartenenti, rispettivamente, a S^+ e S^-, semispazi con origine π, sono simmetrici rispetto a A,B,C se risulta:

$$d(P,A) = d(Q,A),\ \ d(P,B) = d(Q,B),\ \ d(P,C) = d(Q,C) \qquad (4)$$

TH. 4. Sia $J = (A,B,C)$ un insieme ternario di punti non allineati del piano π. Siano P e Q due punti simmetrici rispetto agli elementi di J. Un qualsiasi punto x di π, non allineato con coppie di elementi di J, è equidistante da P e Q: $d(P,X) = d(Q,X)$.

Sia X un qualsiasi punto del piano π, non allineato con coppie di punti di J. L'insieme $J'' = (A,B,C,X)$ è di sostegno all'insieme completo $I'' = (m\ A,\ n\ B,\ S\ C,\ t\ X)$. Per le proprietà degli insiemi completi si ha: $P \cdot I'' = Q \cdot I''$. Sviluppando si ha:

$$m\,[d(P,A)]^2 + n[d(P,B)]^2 + s[d(P,C)]^2 + t[d(P,X)]^2 = \\ = m\,[d(Q,A)]^2 + n\,[d(Q,B)]^2 + s[d(Q,C)]^2 + t[d(Q,X)]^2 \qquad (5)$$

Sostituendo le (4) nella (5) si ha: $t[d(P,X)]^2 = t[d(Q,X)]^2$ da cui $d(P,X) = d(Q,X)$.

Nota 4. Se X è allineato con una coppie di punti di J è sempre possibile trovare un punto $Y \in \pi$ non allineato con alcuna coppia di punti di J in modo che risulti $d(Y,P) = d(Y,Q)$. Scegliendo una terna di punti di (A,B,C,Y) le cui coppie non contengano X, per il TH.4, deve risultare $d(P,X) = d(Q,X)$.
Il precedente teorema permette di sostituire la def. 5 con la seguente:

Def. 7. Diciamo che i punti P e Q sono simmetrici rispetto ad un piano π se risultano equidistanti da ciascun elemento di una qualsiasi terna di punti di π.

TH.5. Siano P e Q due punti simmetrici rispetto al piano π. Sia H l'intersezione della retta r, passante per P e Q, con π. Se

X è un qualsiasi punto del piano π, i triangoli di vertici (P,H,X) e (Q,H,X) risultano rettangoli in H.

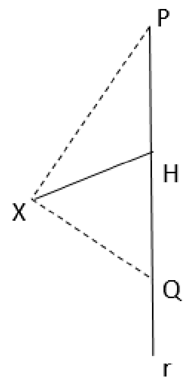

Fig. 5

Infatti, i due triangoli $T(J')$ e $T(J'')$, con $J' = (P,H,X)$ e $J'' = (Q,H,X)$, sono congruenti, essendo $d(P,X) = d(Q,X)$ e $d(P,H) = d(Q,H)$, e per avere il lato $[X,H]$ in comune. Conseguentemente, anche gli angoli $\widehat{PHX}$ e $\widehat{QHX}$ sono congruenti; inoltre, essendo adiacenti, sono rettangoli.

<u>Def.8</u>. Siano P e Q due punti simmetrici rispetto al piano π. Chiamiamo proiezione ortogonale del punto P (oppure Q) su π il punto di intersezione H della retta r, passante per P e Q, con π.

<u>TH.6.</u> Sia $J = (A,B,C,P,Q)$ un insieme contenente quaterne di punti non complanari. Sia $I = (m\ A,\ n\ B,\ s\ C,\ u\ P,\ v\ Q)$ l'insieme completo con sostegno J. Se P e Q sono simmetrici rispetto a (A,B,C), allora le masse u e v dei punti materiali $u \cdot P$, $v \cdot Q$ sono eguali: $u = v$.

Essendo $h = \frac{m}{s}$, $K = \frac{n}{s}$, l'insieme I risulta equivalente a

$I^* = [2h\,A\,, 2\,K\,B,\, 2\,C,\, -(h + k + 1)\,P,\, -(h + k + 1)\,Q].$

Se P e Q sono simmetrici rispetto a (A,B,C) si ha:
$d(A,P) = d(A,Q),\ d(B,P) = d(B,Q),\ d(C,P) = d(C,Q)$ (6)

Se I è completo si ha:

$$P \cdot I = Q \cdot I \qquad (7)$$

da cui:

$$m[d(P,A)]^2 + n[d(P,B)]^2 + s[d(P,C)]^2 + v[d(P,Q)]^2 =$$
$$= m[d(Q,A)]^2 + n[d(Q,B)]^2 + s[d(Q,C)]^2 + u[d(Q,P)]^2$$

Tenendo conto della (6), la precedente diviene: $v[d(P,Q)]^2 = u[d(Q,P)]^2$ pertanto si ha: $v = u$. Posto $u = v = t$, l'insieme I diviene: $I = (m\,A,\, n\,B,\, s\,C,\, t\,P,\, t\,Q)$;

Inoltre, la completezza di I implica: $m + n + s + t + t = 0$ da cui si ha:
$t = -\frac{1}{2}(m+n+s)$. Sostituendo la t nell'insieme I si ha:
$I = [m\,A,\ n\,B,\ s\,C,\ -\frac{1}{2}(m+n+s)\,P,\ -\frac{1}{2}(m+n+s)\,Q]$:
moltiplicando I per $\frac{2}{s}$, si ottiene l'insieme I* equivalente ad I:
$I^* = [\frac{2}{s}m\,A,\ \frac{2}{s}n\,B,\ \frac{2}{s}s\,C,\ -\frac{1}{2}\frac{2}{s}(m+n+s)\,P,\ -\frac{1}{2}\frac{2}{s}(m+n+s)\,Q] =$
$= [\frac{2m}{s}A,\ \frac{2n}{s}B,\ 2\,C,\ -(\frac{m}{s} + \frac{n}{s} + 1)\,P,\ -(\frac{m}{s} + \frac{n}{s} + 1)\,Q]$

Posto $h = \frac{m}{s}$, $K = \frac{n}{s}$, sostituendo nella precedente, si ha la tesi:

$$I^* = [2h\,A,\ 2\,K\,B,\ 2\,C,\ -(h+k+1)\,P,\ -(h+k+1)\,Q] \qquad (8)$$

Nota 5. L'eguaglianza delle masse dei punti materiali di I^*: $-(h+k+1)\,P$, $-(h+k+1)\,Q$, è condizione necessaria ma non sufficiente per poter dedurre che P e Q sono simmetrici rispetto a A e B.

Applicazione 2. Siano A,B,C tre punti del piano π, non allineati, e risulti: $d(A,B) = 6$, $d(B,C) = 2\sqrt{5}$, $d(A,C) = 4\sqrt{2}$. Sia P un punto del semispazio S^+ con origine π e risulti,
$d(A,P) = 6$, $d(B,P) = 2\sqrt{6}$, $d(C,P) = 2\sqrt{5}$.

Sia H la proiezione ortogonale di P su π. Trovare: $d(P,H)$, $d(A,H)$.

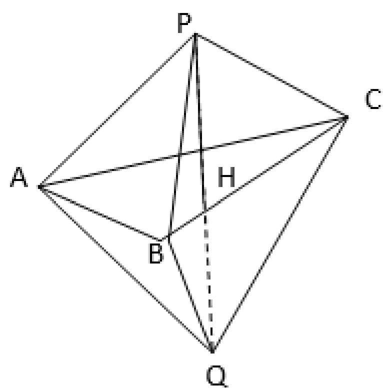

Fig. 6

Sia Q il punto simmetrico di P rispetto al piano π; si ha:

a) $d(A,Q) = d(A,P) = 6$, $d(B,Q) = d(B,P) = 2\sqrt{6}$, $d(C,Q) = d(C,P) = 2\sqrt{5}$;

b) l'insieme completo con sostegno $J = (A,B,C,P,Q)$, contenente i due punti simmetrici P e Q, è, per il
c) TH.6: $I^* = [2hA, 2kB, 2C, -(h+k+1)P, -(h+k+1)Q$.

Calcoliamo le masse h, k utilizzando la proprietà invariantiva del prodotto di un punto materiale per un insieme completo:

$$A \cdot I^* = B \cdot I^*,\ B \cdot I^* = C \cdot I^* \qquad (9)$$

Si ha:
$A \cdot I^* = 2k[d(A,B)]^2 + 2[d(A,C)]^2 - (h+k+1)\ [d(A,P)]^2 - (h+k+1)\ [d(A,Q)]^2 =$
$= 2k \cdot 36 + 2 \cdot 32 - 2\ (h+k+1) \cdot 36 = -72h - 8$
$B \cdot I^* = 2h[d(A,B)]^2 + 2[d(B,C)]^2 - (h+k+1)\ [d(B,P)]^2 - (h+k+1)\ [d(B,Q)]^2 =$
$= 2h \cdot 36 + 2 \cdot 20 - 2\ (h+k+1) \cdot 24 = 24h - 48k - 8$
$C \cdot I^* = 2h[d(A,C)]^2 + 2k[d(B,C)]^2 - (h+k+1)\ [d(C,P)]^2 - (h+k+1)\ d(C,Q)]^2 =$
$= 2h \cdot 32 + 2k \cdot 20 - 2\ (h+k+1)\ 20 = 24h - 40.$

Sostituendo nella (9) e mettendo a sistema si ha:

$$\begin{cases} -72h - 8 = 24h - 48k - 8 \\ 24h - 48k - 8 = 24h - 40 \end{cases} \qquad \text{da cui } k = \frac{2}{3}, h = \frac{1}{3}$$

Sostituendo K e h nell'insieme I, dividendo per 2, si ha:

$$I^* = (A,\ 2B,\ 3C,\ -3P,\ -3Q)$$

Utilizzando ancora la proprietà invariantiva del prodotto:

$P \cdot I^* = A \cdot I^*$, calcoliamo

$$d(P,Q): [d(P,A)]^2 + 2[d(P,B)]^2 +3\,[d(P,C)]^2 - 3[d(P,Q)]^2 =$$
$$= 2[d(A,B)]^2 +3\,[d(A,C)]^2 - 3\,[d(A,P)]^2 - 3[d(A,Q)]^2 \text{ da cui}$$
$$36 + 2 \cdot 24 +3 \cdot 20 - 3 \cdot [d(P,Q)]^2 = 2 \cdot 36 +3 \cdot 32 - 3 \cdot 36 - 3 \cdot 36$$
$$3 \cdot [d(P,Q)]^2 = 36+48 +60 +108+108 -72 - 96 = 192.$$

Essendo $[d(P,Q)]^2 = 64$, $d(P,Q) = 8$ si ha $d(P,H) = 4$. La distanza $d(A,H)$ è proprio il cateto del triangolo rettangolo in H di vertici (A,P,H) pertanto si ha:

$$[d(A,H)]^2 = [d(A,P)]^2 - [d(P,H)]^2 = 20,\ d(A,H) = 2\sqrt{5}\ .$$

<u>Applicazione 3</u>. Sia V il vertice di una piramide la cui base è il triangolo $T(A,B,C)$ di lati: $d(A,B) = \sqrt{241}$, $d(B,C) = 10$, $d(A,C) = 3\sqrt{29}$. Gli spigoli della piramide sono:
$d(A,V) = 15$, $d(B,V) = 14$, $d(C,V) = 6\sqrt{6}$. Sia P un punto interno a (A,V) e risulti:
$d(V,P) / d(P,A) = 2$. Trovare le distanze $d(H,V)$, $d(H,B)$, $d(H,C)$ essendo H la proiezione ortogonale di P sul piano π individuato dai punti V,B,C.

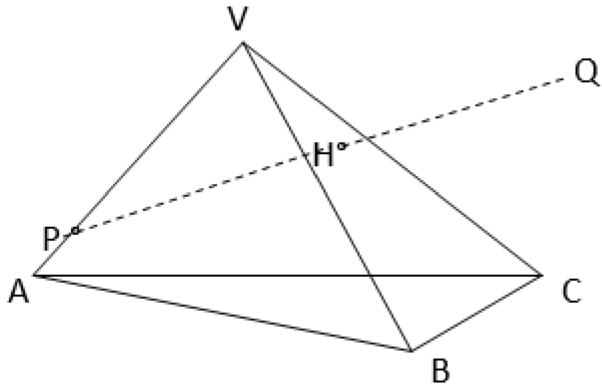

Fig. 7

Mediante l'insieme completo *I'= (2A, –3 P, V),* si ha:

d(P,V) =10 , d(A,P) = 5.

Essendo *B · I' = P · I' e C · I' = P · I'* calcoliamo le distanze *d(P,B) e d(P,C):*

$$\begin{cases} 2[d(B,A)]^2 - 3[d(B,P)]^2 + [d(B,V)]^2 = 2[d(P,A)]^2 + [d(P,V)]^2 \\ 2[d(C,A)]^2 - 3[d(C,P)]^2 + [d(C,V)]^2 = 2[d(P,A)]^2 + [d(P,V)]^2 \end{cases}$$

da cui

d(B,P) = 4 $\sqrt{11}$ *, d(C,P) = 14.*

Consideriamo la piramide di vertice *P* la cui base è il triangolo *T(V,B,C);*

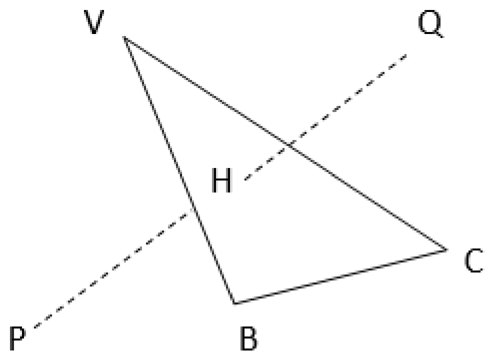

Fig. 8

sia Q il simmetrico di P rispetto a B,C,V. Per il TH.6, l'insieme completo avente sostegno (V,B,C,Q,P) è:

$$I = [2h\ B\ ,2\ K\ C,\ 2\ V,\ -(h+k+1)\ P,\ -(h+k+1)\ Q]$$

con h, $K \in R$. Ricorrendo ai dati a disposizione:

$d(P,V) = 10$, $d(B,V) = 14$, $d(C,V) = 6\sqrt{6}$, $d(B,C) = 10$, $d(B,P) = 4\sqrt{11}$, $d(C,P) = 14$, (10)

calcoliamo le masse di I. Essendo I completo si ha:

$$V \cdot I = C \cdot I,\ B \cdot I = C \cdot I \tag{11}$$

Indicando con X un qualsiasi punto V,B,C, si ha:

$X \cdot I = 2h\ [d(X,B)]^2,\ 2K\ [d(X,C)]^2,\ 2[d(X,V)]^2,\ -(h+k+1)\ [d(X,P)]^2,\ -(h+k+1)[d(X,Q)]^2$.

Poiché $(h+k+1)\ [d(X,P)]^2 = (h+k+1)[d(X,Q)]^2$ possiamo sostituire nella precedente:

$$– (h + k +1) [d(X,P)]^2 – (h + k + 1)[d(X,Q)]^2 =$$
$$= – 2 (h + k +1) [d(X,P)]^2$$

da cui $X \cdot I = 2h [d(X,B)]^2, 2K [d(X,C)]^2, 2[d(X,V)]^2, – 2 (h + k+1) [d(X,P)]^2$.

Sostituendo *V,B,C* nella precedente, si ha:

$$V \cdot I = 2h [d(V,B)]^2+2K [d(V,C)]^2 – 2 (h + k +1) [d(V,P)]^2$$
$$B \cdot I = 2K [d(B,C)]^2+ 2[d(B,V)]^2 – 2 (h + k +1) [d(B,P)]^2$$
$$C \cdot I = 2h [d(C,B)]^2+2[d(C,V)]^2 – 2 (h + k +1) [d(C,P)]^2$$

Sostituendo nelle (11) si ha:

$$\begin{cases} h[d(V,B)]^2 + k[d(V,C)]^2 - (h+k+1)[d(V,P)]^2 = \\ = h[d(C,B)]^2 + [d(C,V)]^2 - (h+k+1)[d(C,P)]^2 \\ k[d(B,C)]^2 + [d(B,V)]^2 - (h+k+1)[d(B,P)]^2 = \\ = h[d(C,B)]^2 + [d(C,V)]^2 - (h+k+1)[d(C,P)]^2 \end{cases}$$

Sostituendo le (10) si ha:

$$\begin{cases} 8h + 13k = 5 \\ 4h - 6k = 0 \end{cases} \qquad \text{da cui } h = \frac{3}{10}, k = \frac{1}{5}$$

Un insieme completo equivalente a I è:
I = (6 B, 4 C, 20 V – 15 P, – 15 Q).
L'unione dei due insiemi *I* e *I''*, essendo *I'' = (15 P, – 30 H, 15Q)* l'equivalente di *(P, – 2H, Q)*, è un insieme completo e si ha:
I ∪ I''= (6 B, 4 C, 20 V – 30 H), equivalente di

$I''' = (3\,B,\ 2\,C, 10\,V - 15\,H)$.

Applicando il Th.12 a I''' si ha:

$$[I''' \cup (15H, -15\,B)]^2 = (15H, -15\,B)^2$$

da cui:

$(-\,12\,B,\ 2C,\ 10\,V)^2 = (15H, -15\,B)^2 - 24\,[d(B,C)]^2 - 120\,[d(B,V)]^2 + 20\,[d(V,C)]^2 = -225\,[d(B,H)]^2$

da cui:

$$d(B,H) = 4\sqrt{6}\ .$$

Procedendo in modo analogo si calcola $d(H,C)$ e $d(H,V)$.

Esempio di un ulteriore procedimento per calcolare l'altezza di una piramide è contenuto nella seguente applicazione:

Applicazione 4. I vertici della base triangolare di una piramide siano A,B,C; appartengano al piano π e risulti: $d(A,B) = 2\sqrt{10}$, $d(B,C) = 6$, $d(A,C) = 2\sqrt{13}$. Le distanze di A,B,C dal vertice P della piramide siano: $d(B,P) = \sqrt{17}$, $d(A,P) = 5$, $d(C,P) = \sqrt{29}$. Trovare $d(P,H)$ essendo H la proiezione ortogonale di P su π.

Posto $d(P,H) = z$, si ha:

$[d(P,A)]^2 = [d(A,H)]^2 + [d(H,P)]^2$, $[d(P,B)]^2 = [d(B,H)]^2 + [d(H,P)]^2$, $[d(P,C)]^2 = [d(C,H)]^2 + [d(H,P)]^2$

da cui

$[d(A,H)]^2 = 25 - z^2$, $[d(B,H)]^2 = 17 - z^2$, $d(C,H)]^2 = 29 - z^2$.

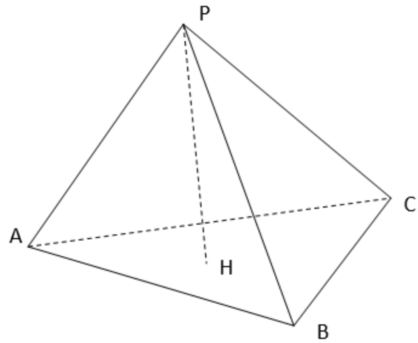

Fig. 9

L'insieme completo, avente sostegno $J = (A,B,C,H)$, è

$$I = [m\,A,\ n\,B,\ C,\ -(m+n+1)\,H]$$

Per la proprietà invariantiva degli insiemi completi si ha
$A \cdot I = B \cdot I = C \cdot I$.
Sviluppando:

$$n\,[d(A,B)]^2 + [d(A,C)]^2 - (m+n+1)\,[d(A,H)]^2 =$$
$$= m\,[d(B,A)]^2 + [d(B,C)]^2 - (m+n+1)\,[d(B,H)]^2 =$$
$$= m\,[d(C,A)]^2 + n\,[d(C,B)]^2 - (m+n+1)\,[d(C,H)]^2$$

Sostituendo:
$n\,40 + 52 - (m+n+1)\,[25 - z^2] = m\,40 + 36 - (m+n+1)\,[17 - z^2] =$
$= m\,52 + n36 - (m+n+1)\,[29 - z^2]$.
Mettendo a sistema, si ha:

$$\begin{cases} n = 2 \\ -6m + 4n + 1 = 0 \end{cases} \qquad \text{da cui: } n = 2, m = \frac{3}{2}, m + n + 1 = \frac{9}{2}$$

Sostituendo in I e moltiplicando per 2 si ha:

$$I = (3\,A,\ 4\,B,\ 2\,C,\ -9\,H)$$

Calcoliamo *d(A,H)* mediante il TH.12:

$$[I \cup (9H, -9A)]^2 = (9H, -9A)]^2 .$$

Sviluppando:

$$-24\,[d(A,B)]^2 + 8\,[d(B,C)]^2 - 12\,[d(A,C)]^2 =$$
$$= -81\,[d(H,A)]^2\ [\,d(H,A)]^2 = 16 \text{ da cui } d(H,A) = 4.$$

Essendo $[d(A,P)]^2 = [d(A,H)]^2+[d(H,P)]^2$ *si ha:*

$$25 = 16 + [d(H,P)]^2 \text{ e quindi } d(H,P) = 3.$$

Bibliografia

Francia Franco (1985). Insiemi di punti materiali. «*Archimede*» N.1 .

Francia Franco (2019). Insiemi completi del terzo ordine. «*Periodico di Matematica*» (IV) , Vol. I (1-2). Edizioni AFSU.

Francia Franco (2020). Insiemi completi del quarto ordine. «*Periodico di Matematica*» (IV), Vol. II (2). Edizioni AFSU.

Francia Franco (2022). Proprietà degli insiemi completi del quarto ordine. «*Periodico di Matematica*» (IV), Vol. IV (3). Edizioni AFSU.

Francia Franco (2023). Insiemi del V ordine contenenti punti *dello spazio.* «Periodico di Matematica« (IV) , Vol. V (2). Edizioni AFSU.