

# *Sull'assioma di scelta*

*Quando la Matematica è ricerca del rigore*

Giovanna Della Vecchia\*

\* DIARC\_Università di Napoli; giovanna.dellavecchia@unina.it



DOI: 10.53159 /PdM(IV).v5n3.119

**Sunto:** *Col presente lavoro si intende fare una riflessione su uno degli assiomi più controversi e spinosi della teoria degli insiemi: l'assioma di scelta, formulato da Zermelo in due versioni leggermente differenti ma equivalenti, rispettivamente negli anni 1904 e 1908. Sembra che nella storia della Matematica, ad eccezione del postulato delle parallele di Euclide, nessun altro assioma abbia provocato tante discussioni e polemiche come l'assioma di scelta. Senza entrare troppo nei dettagli di una trattazione storico-filosofica che sarebbe pressoché impossibile esaurire, si propongono esempi di enunciati la cui dimostrazione non richiede l'utilizzo dell'A.C. ed esempi in cui non sarebbe possibile la dimostrazione senza il ricorso all'assioma.*

**Parole Chiave:** *Zermelo, assiomatica, buon ordinamento, assioma di scelta.*

**Abstract:** *This paper aims to make a reflection on one of the most controversial and thorny axioms of set theory: the axiom of choice, formulated by Zermelo in two slightly different but equivalent versions in 1904 and 1908, respectively. It seems that in the history of Mathematics, with the exception of Euclid's postulate of parallels, no other axiom has caused as much discussion and controversy as the axiom of choice.*

*Without going into too much detail in a philosophical-historical discussion that would be almost impossible to exhaust, examples are offered of demonstrations in which it is not necessary to use the C.A. and examples in which demonstration would not be possible without the use of the axiom.*

**Keywords:** *Zermelo, axiomatic method, good ordering, axiom of choice.*

## **1 - La teoria degli insiemi di Cantor: croce e delizia**

La teoria degli insiemi di Cantor che ha indubbiamente gettato le basi per lo sviluppo della matematica moderna, è stata fortemente osteggiata e messa in discussione durante tutta la vita del suo creatore oltre che per motivi ideologici, per il fatto che al suo interno racchiudeva le trappole delle antinomie o dei paradossi, indicativi di una qualche intuizione non proprio corretta sulla nozione stessa di insieme nonché sulla natura dell'infinito.

Si riteneva allora che la teoria intuitiva degli insiemi di Cantor, dando origine a contraddizioni, non fosse pienamente sufficiente ai fini di un assetto logico più rigoroso della Matematica.

Cantor non aveva considerato primitivo il concetto di insieme, ma aveva dato di esso la seguente caratterizzazione intuitiva:

«Per «insieme» intendiamo ogni riunione  $M$  in un tutto di oggetti determinati e distinti dalla nostra intuizione o dal nostro pensiero (chiamati elementi di  $M$ )».

La sua teoria degli insiemi, pur non basandosi su assiomi esplicitamente enunciati, faceva comunque implicitamente uso di alcuni principi guida, quali il principio di

comprensione che dava origine ad una molteplicità di antinomie: si citano, tra le più note, l'antinomia di Russell, quella di Burali-Forti e quella del massimo numero cardinale attribuita allo stesso Cantor. A quest'ultima si fa riferimento, a titolo di esempio, nel paragrafo che segue.

### 1.1 - Il paradosso di Cantor o del massimo numero cardinale

Supponiamo di poter considerare l'insieme di tutti gli insiemi, chiamiamolo  $V$ : ovviamente la sua cardinalità dovrebbe essere il massimo numero cardinale.

Per il teorema di Cantor però l'insieme  $P(V)$  deve avere cardinalità strettamente maggiore di quella di  $V$ , per cui il cardinale associato a  $V$  non può essere il massimo numero cardinale. Più precisamente:

$$|V| < |P(V)|$$

quindi a maggior ragione

$$|V| \leq |P(V)|.$$

Ma  $P(V) \subset V$ , pertanto

$$|P(V)| \leq |V|.$$

Per il teorema di Schröder-Bernstein si ha dunque:

$$|V| = |P(V)|$$

contro il teorema di Cantor.

## 2 - Il ricorso al metodo assiomatico

Per salvaguardare la maggior parte della teoria degli insiemi di Cantor e metterla al riparo da paradossi e

contraddizioni, Hilbert, prendendo spunto dal metodo di lavoro utilizzato nei «Fondamenti della Geometria», al congresso dei matematici di Heidelberg del 1904, propose il ricorso al metodo assiomatico.

Assumendo come primitivi alcuni oggetti del pensiero come «insieme», «relazione», «funzione», «infinito», ecc. ed opportuni assiomi per essi, si trattava di ridurre l'aritmetica ad un sistema di formule dalle quali partire per dedurne le conseguenze. Il metodo assiomatico avrebbe consentito un controllo rigoroso dei procedimenti deduttivi: la dimostrazione stessa doveva essere considerata "un oggetto matematico"

La dimostrazione della non contraddittorietà del sistema avrebbe consentito di dare significato definito e un contenuto agli oggetti inizialmente assunti come "non definiti".

## 2.1 - Il metodo assiomatico di Hilbert

Nella concezione moderna o formale (le Grundlagen der Geometrie di Hilbert -1899)

- i concetti primitivi non sono definiti, contano solo le relazioni imposte su di essi dagli assiomi; essi si ritengono «definiti implicitamente» dagli assiomi stessi

Per esempio, nell'impostazione hilbertiana non è definito o descritto che cosa si intenda per retta o punto; tali enti sono invece definiti dalle loro relazioni reciproche («per due punti passa una sola retta», «per un punto passano infinite rette» ecc.)

- vengono accentuati gli aspetti formali nella matematica a discapito degli aspetti contenutistici: nella nuova teoria assiomatica non vengono definiti gli enti di cui si parla, è sufficiente che essi soddisfino gli assiomi:

*si deve essere in grado di dire ogni volta, invece di «punti, rette e piani», «tavoli, sedie e boccali di birra».*

## 2.2 - Il metodo assiomatico classico (di Euclide)

Nella concezione *classica* o *contenutistica* (gli *Elementi* di Euclide - 300 a.C.)

- ai concetti primitivi viene attribuito un significato, tanto che si ritiene necessario fornire una loro definizione iniziale, seppure approssimativa; a monte della trattazione c'è l'esigenza di esplicitare ciò di cui si va a parlare:

*«punto è ciò che non ha parti», «linea è una lunghezza senza larghezza»* e simili (Libro I degli *Elementi* di Euclide) sono definizioni reali (*definitio quid rei*), contrapposte alle definizioni nominali (*definitio quid nominis*)

- alle proposizioni primitive (assiomi e postulati) si dà il significato di proposizioni evidenti, di verità così immediate da non richiedere alcuna dimostrazione:

*«cose uguali a una terza sono uguali tra loro»* è un assioma della geometria di Euclide.

In sintesi:

- Una teoria assiomatica organizzata secondo il metodo classico (o contenutistico) è fondata sulla stessa evidenza degli assiomi.
- Una teoria assiomatica organizzata secondo il metodo moderno è invece fondata sulla dimostrazione della non contraddittorietà del sistema di assiomi posto alla sua base.

### **3 - La proposta di assiomatizzazione della teoria degli insiemi di Zermelo**

Nel 1908 Ernst Zermelo, riprendendo l'idea di Hilbert, formulò una proposta di assiomatizzazione della teoria degli insiemi in modo tale da salvaguardare gran parte del lavoro di Cantor mettendolo al riparo dalle antinomie implicite nella teoria ingenua degli insiemi.

L'idea di fondo della teoria di Zermelo era introdurre opportunamente una «limitazione di grandezza» alle molteplicità. Il principio di comprensione che consentiva di considerare insiemi «troppo grandi» (tutte le cose pensabili, tutti gli insiemi, gli insiemi che non appartengono a se stessi, i numeri ordinali, i numeri cardinali), viene sostituito da una serie di assiomi che consentono di considerare insiemi sufficientemente grandi da potere sviluppare la teoria del transfinito di Cantor ma tali da evitare le antinomie.

In realtà il lavoro di Zermelo, dal punto di vista strettamente storico, ha radici profonde che risiedono in problemi tecnici relativi alla teoria degli insiemi, e non va

inteso esclusivamente come il risultato di una ricerca volta al superamento delle antinomie, anche se è questa, in un certo senso, la "lettura ufficiale" della sua proposta.

Zermelo, in linea con l'impostazione hilbertiana, parte da un dominio  $B$  di oggetti di cui non precisa alcuna natura, dalla relazione  $\in$  di appartenenza e da sette assiomi:

1. *Assioma di estensionalità*: Un insieme è determinato dai suoi elementi, ossia se due insiemi hanno gli stessi elementi, allora sono uguali
2. *Assioma degli insiemi elementari (oggi sdoppiato in assioma dell'insieme vuoto e assioma della coppia)*: Esiste un insieme senza elementi, detto insieme vuoto, e se  $a$  e  $b$  sono oggetti del dominio  $B$  allora esistono gli insiemi  $\{a\}$ ,  $\{b\}$ ,  $\{a,b\}$
3. *Assioma di separazione o di isolamento*: Se una proprietà  $P$  è definita in un insieme  $z$ , allora esiste l'insieme  $y$  che contiene tutti e soli gli elementi di  $z$  che soddisfano la proprietà  $P$ . (L'assioma di separazione consente di eliminare le note antinomie)
4. *Assioma dell'insieme potenza*: Esiste l'insieme dei sottoinsiemi di un insieme dato.
5. *Assioma dell'unione*: Per ogni insieme  $z$  esiste l'insieme  $\cup z$  avente come elementi gli elementi degli elementi di  $z$ .
6. *Assioma di scelta*: Se  $x$  è un insieme i cui elementi sono insiemi non vuoti e a due a due disgiunti, allora  $\cup x$  contiene un sottoinsieme  $y$  che ha uno ed un solo elemento in comune con ciascun elemento di  $x$ .
7. *Assioma dell'infinito*: Esiste un insieme  $y$  che contiene l'insieme vuoto tale che, per ogni oggetto  $a$ , se  $a \in y$ , allora  $\{a\} \in y$ .

## 4 - L'assioma di scelta e il teorema del buon ordinamento

La nascita dell'assioma di scelta stranamente non coincide con la sua formulazione originale, che Zermelo presentò nel 1904 come enunciato di un principio evidente, naturale e necessario per la sua dimostrazione del teorema del buon ordinamento.

Si dice che l'assioma di scelta abbia addirittura una preistoria, che riguarda l'uso inconsapevole e le prime deboli consapevolezze di trovarsi di fronte ad una nuova regola di ragionamento.

Già nel 1882 Cantor aveva introdotto la nozione di "insieme bene ordinato" (tale cioè che ogni suo sottoinsieme sia dotato di minimo), e aveva congetturato che ogni insieme potesse essere bene ordinato (principio del buon ordinamento).

Ciò però contrastava col fatto che non si riuscisse a trovare una relazione di buon ordine per insiemi importanti quale l'insieme  $R$  dei numeri reali, tanto è vero che nella famosa lista dei 23 problemi presentata da Hilbert al congresso nazionale di Parigi del 1900 al primo posto era collocata, oltre all'ipotesi del continuo, l'esistenza di un buon ordinamento di  $R$ .

Al terzo congresso internazionale di Matematica (Heidelberg, 1904) J. König presentò una dimostrazione secondo cui l'insieme  $R$  non poteva essere bene ordinato (dimostrazione rivelatasi poi errata); nello stesso anno 1904 Zermelo riuscì invece a dimostrare il principio del buon ordinamento che da congettura diventò così un teorema, appunto il teorema di Zermelo del buon ordinamento.

Nella dimostrazione del teorema Zermelo utilizzò esplicitamente l'assioma della scelta: per bene ordinare un



insieme  $M$ , considerò l'insieme di tutti i sottoinsiemi non vuoti di  $M$  e associò a ciascuno di essi un suo elemento, appunto l'elemento "scelto" del sottoinsieme.

Egli cioè postulò l'esistenza di una funzione  $f$  che ad ogni sottoinsieme non vuoto  $X$  di  $M$  associa un elemento del sottoinsieme  $X$  stesso, cioè una funzione  $f$  definita nell'insieme delle parti non vuote di  $M$  tale che

$$f(X) \in X \quad \forall X \subseteq M \text{ e } X \neq \emptyset.$$

Fu la prima formulazione esplicita dell'assioma di scelta:  
in simboli

$$\forall x [x \neq \emptyset] = \exists f: P(x) \setminus \emptyset \rightarrow x \wedge [\forall y, y \subseteq x \wedge y \neq \emptyset \Rightarrow f(y) \in y]$$

Utilizzando le notazioni più vicine a quelle usualmente utilizzate, l'assioma di scelta si può enunciare così:

A.C.: Sia  $F$  un insieme di insiemi non vuoti. Esiste allora una funzione  $f$  definita in  $F$  tale che

$$f(A) \in A, \forall A \in F$$

Tale assioma A.C. si traduce anche nel noto assioma moltiplicativo:

Se  $A = \{A_i, i \in I\}$  è una famiglia di insiemi non vuoti, allora  $\prod_{i \in I} A_i$  è non vuoto.

Ricordando che:

$$\prod_{i \in I} A_i = \{f : I \rightarrow \cup_{i \in I} A_i \text{ tali che } f(i) \in A_i, \forall i \in I\},$$

se si fa corrispondere ad ogni elemento di  $\prod_{i \in I} A_i$  una funzione di scelta (quella che ad ogni  $A_i$  associa  $f(i)$ ), l'equivalenza dei due enunciati risulta evidente.

Nella seconda formulazione di Zermelo (1908) si legge invece:

*Assioma di scelta:* Se  $x$  è un insieme i cui elementi sono insiemi non vuoti e a due a due disgiunti, allora  $\cup x$  contiene un sottoinsieme  $y$  che ha uno ed un solo elemento in comune con ciascun elemento di  $x$ .

Con le notazioni più usuali è possibile esprimere questa seconda formulazione dell'A.C. nei termini seguenti:

A.C.1: Sia  $F$  una famiglia di insiemi non vuoti e a due a due disgiunti. Allora

$$\exists \text{ un insieme } S \text{ tale che } \forall A \in F, |A \cap S| = 1$$

Tale insieme  $S$  è detto *insieme di scelta*.

Nell'ultima formulazione (A.C.1) si richiede che gli insiemi della famiglia siano a due a due disgiunti, condizione necessaria ai fini dell'esistenza dell'insieme di scelta. Ad esempio la famiglia i cui elementi non sono disgiunti

$$\{\{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$$

non ammette alcun insieme di scelta.

## 4.1 - Due formulazioni diverse ma equivalenti

Teorema: **A.C.** è equivalente ad **A.C.1**

Dimostriamo dapprima che **A.C.**  $\Rightarrow$  **A.C.1**

Sia  $A = \{A_i, i \in I\}$  una famiglia di insiemi non vuoti e a due a due disgiunti. Per **A.C.** esiste una funzione di scelta

$$f: A \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \text{ tale che}$$

$$f: A_i \rightarrow f(A_i) \in A_i, \forall A_i \in A$$

L'insieme  $f(A)$ , essendo gli  $A_i$  disgiunti, coincide con l'insieme di scelta  $S$ .

Dimostriamo ora che **A.C.1**  $\Rightarrow$  **A.C.**

Sia  $A$  una famiglia di insiemi non vuoti.

- Se tali insiemi sono disgiunti, esiste un insieme di scelta

$$S / |S \cap X| = 1, \forall X \in A.$$

Allora la funzione

$$f: X \in A \rightarrow x \in (S \cap X) \text{ (ovviamente } x \in X)$$

è una funzione di scelta per  $A$ .

- Se gli insiemi della famiglia non sono disgiunti, allora si considera una nuova famiglia  $A'$  formata dagli insiemi

$$Z' = \{(z, Z) \mid z \in Z\}, \quad \text{con } Z \in A$$

In tal modo  $A$  e  $A'$  sono equipotenti ma gli elementi di  $A'$  sono disgiunti. Esiste allora un insieme di scelta  $B$  per  $A'$  che ha in comune con ogni insieme di  $A'$  un solo elemento. Pertanto la funzione  $f$  che associa ad ogni insieme della famiglia  $A$  quell'elemento presente come prima proiezione dell'unico elemento di

$(B \cap Z')$  (cioè l'elemento  $z$  della coppia  $(z, Z)$  scelta da  $B$ ) è una funzione di scelta per  $A$ .

## 5 - Ma è proprio necessario applicare l'A.C.?

L'A.C. afferma la possibilità di scegliere un elemento da ogni sottoinsieme non vuoto di un insieme dato e di poter fare tutte queste scelte simultaneamente.

In realtà, a prescindere dall'A.C., sembra abbastanza ovvio che, data una famiglia di insiemi (ad esempio i sottoinsiemi di un insieme  $x$  distinti dal vuoto), è possibile creare un nuovo insieme prelevando un elemento da ogni insieme della famiglia e facendo simultaneamente queste scelte; ma questo è vero per un insieme finito oppure per un insieme anche infinito ma per il quale è possibile esplicitare la relazione che permette di scegliere l'elemento da associare a ciascun insieme della famiglia.

L'A.C. garantisce l'esistenza di una funzione di scelta senza fornire però alcun metodo per costruirla (così come era accaduto per il teorema del buon ordinamento che garantisce la possibilità di bene ordinare ogni insieme senza fornire

indicazioni su come farlo); ciò pose l'assioma al centro di forti polemiche in seguito alle quali una parte della comunità scientifica lo rifiutò. Allo stato attuale le polemiche sembrano superate e l'A.C. è utilizzato con disinvoltura nel ragionamento matematico.

Quando ad esempio diciamo: dato un insieme  $A$  non vuoto, consideriamo un elemento di  $A$ , chiamiamolo  $a$ .

In realtà abbiamo dato per scontato l'esistenza della funzione di scelta

$$f: \{A\} \rightarrow A \text{ definita da } f(A) = a$$

Ma abbiamo semplicemente detto: prendiamo un elemento  $a$  di  $A$  senza fare riferimento all'A.C. D'altra parte, quando diciamo che un insieme non è vuoto, ovviamente, secondo regole logiche ordinarie, stiamo affermando l'esistenza di un tale elemento.

## 6 - Quando non è necessario applicare l'A.C.

### Esempio 1

Se consideriamo l'insieme di tutti gli intervalli chiusi e limitati di  $R$ , per scegliere un determinato punto da ciascuno degli intervalli si può usare ad esempio la funzione che ad ogni intervallo associa il punto medio cioè tale che

$$f([a, b]) = \frac{a+b}{2}.$$

Abbiamo esplicitato la funzione di scelta  $f$  senza la necessità di ricorrere all'A.C.

Se invece avessimo considerato l'insieme di tutti i sottoinsiemi non vuoti di  $R$ , per scegliere un elemento da ciascuno di essi avremmo dovuto far ricorso all'A.C.

### Esempio 2

Un altro esempio è fornito dallo stesso Bertrand Russell: se consideriamo una collezione infinita di paia di scarpe, una funzione di scelta potrebbe essere quella che ad ogni paio della collezione associa la scarpa destra del paio. Anche in questo caso non c'è bisogno di ricorrere all'A.C.

### Esempio 3

Un altro caso in cui è possibile effettuare scelte senza ricorrere all'A.C ma procedendo per induzione è quello di un insieme finito di insiemi non vuoti. Facciamo un esempio:

Considerata la famiglia  $\{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\}$ , facciamo vedere, senza ricorrere all'A.C., che esiste una funzione di scelta

$$f: \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\} \rightarrow \bigcup_{i=1}^n (A_i)$$

Per  $n=1$  esiste (da un insieme non vuoto posso prelevare un elemento)

Supponiamo che esista una funzione di scelta per gli  $n-1$  insiemi

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}$$

e denotiamola con  $f^{n-1}$

$$f^{n-1}: \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}\} \rightarrow \bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i)$$

Sia  $c$  un elemento dell' $n$ -esimo insieme  $A_n$  e consideriamo la funzione

$$f^n: \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\} \rightarrow \bigcup_{i=1}^n (A_i)$$

definita da:

$$f^n(A_i) = \begin{cases} f^{n-1}(A_i) & \text{se } 1 \leq i \leq n-1 \\ c & \text{se } i = n \end{cases}$$

Dunque  $f^n$  è anch'essa una funzione di scelta.

Dall'ipotesi di esistenza della funzione di scelta per  $n-1$  insiemi segue l'esistenza di una funzione di scelta per  $n$  insiemi: pertanto si può affermare che ciò è vero per ogni  $n$ .

#### Esempio 4

Sia  $M$  l'insieme numerabile degli insiemi dei numeri razionali compresi tra 2 numeri interi positivi consecutivi:

$$M = \{m_0, m_1, \dots, m_v, \dots\}$$

$$\text{con } \frac{p}{q} \in m_v \text{ se e solo se } v < \frac{p}{q} \leq v+1$$

In questo caso è possibile scegliere come insieme di scelta l'insieme  $N$  dei numeri naturali, dato che ciascun insieme  $m_v$  contiene il numero  $v+1$ .

## 7 - Quando è necessario applicare l'A.C.

Il ricorso all'A.C. è necessario quando l'insieme  $x$  è infinito e non è possibile trovare una proprietà che permetta di costruire l'insieme di scelta.

Anche quando nella teoria degli insiemi si parla di "insiemi arbitrari", molto spesso il ricorso all'A.C. diventa necessario.

### Esempio 5

Come già evidenziato in calce all'esempio 1, se consideriamo la famiglia di tutti i sottoinsiemi non vuoti di  $R$ , per scegliere un elemento da ognuno di essi, non essendo definibile esplicitamente alcun procedimento di scelta (dunque alcuna funzione di scelta) è necessario A.C.

### Esempio 6

Anche se consideriamo una collezione infinita di paia di calzini non distinguibili l'uno dall'altro, per poter scegliere un calzino da ogni paio, bisogna ricorrere all'A.C.

To choose one sock from each of infinitely many pairs of socks requires the Axiom of Choice, but for shoes the Axiom is not needed. (*Bertrand Russell*).

### Esempio 7

Quando si dimostra la proprietà intuitivamente ovvia che la potenza dell'insieme  $N$  è il più piccolo cardinale infinito, occorre impiegare l'A.C.

Sia  $A$  un insieme infinito arbitrario: per dimostrare che la sua potenza è non minore del numerabile costruiamo una successione di elementi di  $A$  scegliendo successivamente in  $A$  degli elementi (è lecito proseguire nella scelta essendo  $A$



infinito). In questo modo l'insieme  $A$ , contenendo un insieme numerabile, ha cardinalità non minore di  $N$ .

Essendo  $A$  un insieme infinito "generico", non sarà possibile indicare una legge di scelta ma bisogna fare necessariamente ricorso all'**A.C.**

### Esempio 8

Consideriamo il ben noto teorema seguente e analizziamone la dimostrazione.

Teorema: L'unione di una famiglia numerabile di insiemi numerabili è numerabile.

Dimostrazione :

Sia  $X = \bigcup_{n \in N} X_n$  l'unione degli insiemi numerabili  $X_n$ . Possiamo supporre, senza perdita di generalità, gli  $X_n$  tutti disgiunti tra loro.

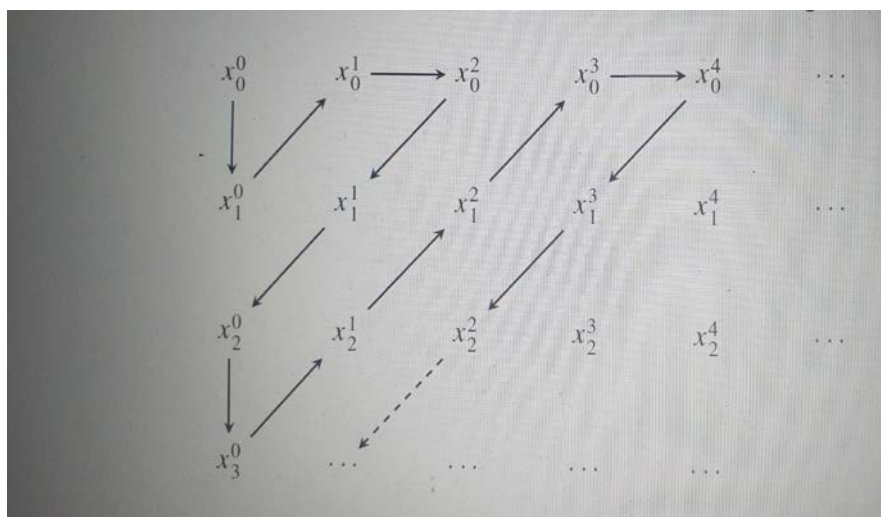
Enumeriamo ognuno degli  $X_n$  nel modo seguente:

$$X_n = \{x_n^i, i \in N\} = \{x_n^0, x_n^1, x_n^2, x_n^3, \dots\}.$$

Enumeriamo anche  $X = \bigcup_{n \in N} X_n$ , cioè costruiamo una nuova enumerazione

$$\alpha: N \rightarrow X$$

attraverso il seguente schema:



in cui è

$$\alpha(0) = x_0^0, \alpha(1) = x_1^0, \alpha(2) = x_0^1, \alpha(3) = x_0^2, \dots$$

La funzione

$$\alpha^{-1}(x_n^i) = \frac{1}{2} (n+i)(n+i+1) + \begin{cases} n, & \text{se } n+i \text{ è pari} \\ i, & \text{se } n+i \text{ è dispari} \end{cases}$$

assegna all'elemento  $x_n^i \in X$  il suo posto nell'enumerazione di  $X$  (contato a partire da 0).

In questa dimostrazione,<sup>1</sup> anche se non in modo evidente, si è fatto ricorso all'AC. In realtà, quando abbiamo enumerato gli insiemi  $X_n$  abbiamo effettuato una scelta simultanea dalla

---

<sup>1</sup> <http://www.rdossena.altervista.org/Articoli/assioma-scelta.pdf>

famiglia delle infinite possibili enumerazioni degli  $X_n$ , assegnandone una ad ogni  $X_n$ .

Contrariamente a quanto accade per altri teoremi che si possono dimostrare senza ricorrere all'A.C., in questo caso il ricorso ad A.C. è inevitabile.

## 8 - Conclusione

Ritornando al sistema assiomatico di Zermelo (al cui interno è presente l'assioma di scelta), è stato già sottolineato il suo grande vantaggio di evitare le antinomie più note ma nulla è stato detto in merito alla non contraddittorietà della teoria.

Lo stesso Zermelo afferma:

*Non sono ancora stato capace di provare rigorosamente la non "contraddittorietà" dei miei assiomi, sebbene ciò sia in certo modo essenziale; mi sono invece dovuto limitare ad indicare via via come le antinomie finora scoperte svaniscono subito se si adottano come basi i principi quivi esposti.*

Gli sviluppi di Zermelo sono stati perfezionati negli anni 20 da Abraham A. Fraenkel (con il contributo di Skolem): le modifiche apportate hanno condotto alla teoria di ZF o ZFC.

Nel sistema ZFC viene inserito il nuovo assioma di rimpiazzamento o di sostituzione che rende più potente il sistema di Zermelo e rende superfluo l'assioma di separazione (che può essere facilmente dimostrato), e l'assioma della coppia.

Assumendo la teoria ZF senza scelta sono equivalenti:

- Assioma di Scelta
- Lemma di Zorn

- Teorema di Zermelo (Ogni insieme è bene ordinabile)
- Tricotomia delle cardinalità
- $\forall A$  infinito,  $|A| = |A \times A|$

Un sistema alternativo è il sistema NBG degli assiomi di von Neumann-Bernays-Gödel che aggiungono il concetto di classe a quello di insieme: ma qualsiasi teorema riguardo agli insiemi che può essere provato in un sistema può essere provato nell'altro.

In merito alla coerenza del sistema ZF purtroppo non è stata dimostrata.

A tal proposito Poincaré osservò:

*Abbiamo messo un recinto intorno al gregge per proteggerlo dai lupi, ma non sappiamo se ci fossero altri lupi nel gregge.*

Supponendo ZF privo dell'assioma di scelta, ci si è chiesto a lungo se da esso è possibile dedurre A.C. o la sua negazione. A tal proposito nel 1938 Gödel enunciò il

Teorema: Se ZF è coerente, allora da ZF non si può dedurre la negazione di AC

Il risultato di Gödel mostra che AC è *consistente* con gli altri assiomi usuali della teoria ZF, cioè non può portare a contraddizioni: se poi da ZFC si può dedurre una qualche contraddizione, allora vuol dire che una contraddizione deve essere già presente in ZF. Dunque l'A.C. non può essere confutato.

Qualche decennio più tardi, precisamente nel 1963, Paul J. Cohen enunciò il

Teorema: Se ZF è coerente, allora da ZF non si può dedurre AC

Il teorema garantisce dunque che **A.C.** è *indipendente* dagli altri assiomi di ZF, cioè non può essere dimostrato in ZF.

In altre parole, sia assumendo l'assioma di scelta sia la sua negazione si ottiene comunque una teoria coerente (sempre che lo sia anche ZF).

Allo stato attuale, considerando che grazie all'assioma di scelta è possibile dimostrare molti e importanti teoremi, si è portati a ritenere più conveniente assumere l'assioma di scelta e non la sua negazione.

## Bibliografia

Borga M., Palladino D. (1997). *Oltre il mito della crisi*, Brescia: Editrice La Scuola.

Bottazzini U. (1990). *Il flauto di Hilbert*, Torino: UTET Libreria.

Curzio M. (1970). *Lezioni di Algebra*, Napoli: Liguori editore

Lolli G. (2008). *Guida alla teoria degli insiemi*, Milano: Springer.

Meschkowski H. (1973). *Mutamenti nel Pensiero Matematico*, Torino: Boringhieri

Morris Kline (1999). *Storia del pensiero matematico II*, Torino: Einaudi

Moore G. S. (1982). *Zermelo's Axiom of Choice*, New York: Springer-Verlag.

<https://matematica.unibocconi.eu/articoli/matematica-miracoli-e-paradossi>

<http://www.rdossena.altervista.org/Articoli/assioma-scelta.pdf>