Periodico di Matematica (IV) Vol. V (3) settembre 2023, pp. 59-96

La Tavola Pitagorica e le sue proprietà

Luca Nicotra*

* Ingegnere e giornalista pubblicista. Membro onorario APAV e AFSU, Presidente dell'A.P.S. "Arte e Scienza", Direttore responsabile di «ArteScienza», «Bollettino dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane», «Periodico di Matematica». Direttore editoriale di UniversItalia; luca.nicotra1949@gmail.com.

DOI: 10.53159 /PdM(IV).v5n3.117

Sunto: *La tavola pitagorica è nota a tutti fin dalle prime classi della scuola elementare, eppure le sue origini storiche e la sua struttura matematica riservano varie sorprese. Le origini storiche sono state illustrate in un mio precedente articolo. In questo articolo vengono esposte alcune proprietà della tavola pitagorica generalizzata. La particolare distribuzione dei numeri nella tavola pitagorica dà luogo a numerose proprietà, che ricordano quelle dei quadrati magici, alcune delle quali già note, altre invece scoperte dallo scrivente. Alcune di esse trascendono la qualifica di pure curiosità aritmetiche, rivestendo un significato matematico più generale.*

Parole Chiave: *tavola pitagorica, abaco, ossi di Nepero, Boezio.*

Abstract: *The multiplication table has been known to everyone since the first classes of elementary school, yet its historical origins and its mathematical structure reserve various surprises. The historical origins were illustrated in a previous article of mine. In this article some properties of the generalized multiplication table are exposed. The particular distribution of numbers in the* *multiplication table gives rise to numerous properties, which recall those of magic squares, some of which are already known, others discovered by the writer. Some of them transcend the qualification of pure arithmetic curiosities, taking on a more general mathematical meaning.*

Keywords: *multiplication table, abacus, Neper bones, Boethius.*

1 - Le tavole di moltiplicazione

La moltiplicazione fra numeri naturali1 è una legge di composizione interna sull'insieme N* che associa a ogni coppia ordinata (n_i, n_j) di elementi di N* un elemento n_{ij} di N* stesso. Essa è pertanto una mappa dell'insieme delle coppie ordinate di N^*in N^*stesso:

$$(n_i, n_j) \rightarrow n_{ij}$$

ovvero una mappa del prodotto cartesiano N^* x N^* nell'insieme N^*:

$$f : \quad N^* \text{x } N^* \rightarrow N^*$$

L'elemento neutro è l'unità.

Nel caso in cui si consideri la moltiplicazione in un sottoinsieme finito di N^*, la mappa f risulta completamente definita da una tabella a doppia entrata (detta in generale tavola di composizione o, in questo caso, di moltiplicazione) che riporta nella prima casella in alto a sinistra il simbolo della legge di composizione (in questo caso: x), nella prima riga e nella prima colonna i successivi elementi del sottoinsieme

---

[1] Qui e nel seguito $N^*= \{1, 2, 3 \ldots\}$.

finito di N^*(figura 1) e nella casella *ij* all'incrocio fra la i_esima riga e la j_esima colonna, contenenti rispettivamente gli elementi n_i, n_j della coppia ordinata (n_i, n_j), il risultato n_{ij} della loro moltiplicazione. Dalla tavola di moltiplicazione risulta evidente l'unità come elemento neutro della moltiplicazione. Inoltre, essendo la moltiplicazione una legge di composizione commutativa, nella tavola di moltiplicazione l'elemento n_{ij} è uguale all'elemento n_{ji} e di conseguenza la tavola risulta simmetrica rispetto alla sua diagonale principale.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	45	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Fig. 1

Tuttavia, normalmente, si rappresenta la tavola di moltiplicazione più semplicemente con il quadrato evidenziato in giallo nella figura 1.

Le tavole di moltiplicazione furono molto diffuse in tutto il Medioevo: la tavola pitagorica è l'esempio più comune che è pervenuto fino ai nostri tempi. La particolare distribuzione dei numeri nella tavola pitagorica dà luogo a numerose curiose proprietà, alcune delle quali già note,[2] altre invece scoperte dallo scrivente (Nicotra, 2013). Alcune di esse trascendono la qualifica di pure curiosità, rivestendo un significato matematico più generale (per es. il teorema 4.1 e il corollario 5.3).

2 – Origini storiche

La tavola di moltiplicazione che tutti noi conosciamo con il nome di "Tavola Pitagorica" non deve il suo nome né a Pitagora né ad alcuno dei suoi seguaci, bensì soltanto a un errore di trascrizione di un copista del Medioevo (Nicotra, 2009). D'altra parte, già l'utilizzo, nella Tavola Pitagorica, del sistema di numerazione decimale posizionale, inventato nell'India settentrionale presumibilmente nel V secolo e poi diffuso in Europa dagli arabi nel Medioevo, dovrebbe essere sufficiente per dubitare della attribuzione della tavola ai pitagorici. I greci, infatti, utilizzavano un altro sistema di numerazione scritta, di tipo decimale additivo, simile al sistema usato dai romani antichi.

---

[2] In *Enciclopedia Generale Illustrata*, vol. IV, p. 9, Milano, Rizzoli Larousse, 1969 si trovano i teoremi 4.1 e, parzialmente accennati per il caso di un quadrato di tre caselle, i teoremi 4.2, 4.3, 4.4 ed enunciato, senza dimostrazione, il corollario 4.1. I teoremi 4.7, 5.3 e il corollario 5.2 si trovano accennati da Giuseppe Spinoso a pag. 56 del numero 1-2 anno XII-1963 di «La scienza e i giovani», Firenze, Le Monnier.

Nel riprodurre il manoscritto dell''*Ars Geometrica*[3] attribuita a Severino Boezio (480-526), il copista, per errore, sostituì l'abaco neopitagorico *Mensa Pythagorea*, in essa trattato, con la comune tavola di moltiplicazione, di aspetto assai simile, conservando però per quest'ultima il nome di quell'abaco. Secondo le moderne indagini filologiche, tuttavia, sembra che l'*Ars Geometrica* non sia di Boezio, bensì un'opera medievale risalente al secolo XI che raccoglie contributi di vari autori. La denominazione *Mensa Pythagorea* deriverebbe, in tal caso, dalla sua attribuzione ai tardo-neopitagorici e non ai neopitagorici della scuola alessandrina, seguaci diretti dell'antica scuola pitagorica. Per ulteriori dettagli su questo falso storico si rimanda a (Nicotra, 2023).

3 - La meccanizzazione della tavola di moltiplicazione

Una geniale variante della tavola pitagorica fu introdotta dall'inventore dei logaritmi: l'astronomo, matematico e fisico scozzese lord John Napier barone di Murchiston (1550-1617), noto con il nome latinizzato di Giovanni Nepero. Questi, volendo munirsi di uno strumento di calcolo per la compilazione delle tavole dei logaritmi e per i calcoli astronomici, concepì e realizzò uno strumento fondato sulla tavola pitagorica e su una tecnica delle moltiplicazioni già nota con diversi nomi: "per graticola, per quadrettatura, per tavola, per gelosia", probabilmente ideata in India e ivi

[3] Contenuta nell'opera *De Institutione Arithmetica* (Boezio, 1867).

sicuramente utilizzata sin dal VI secolo (Ifrah, 1989, p. 261), poi ampiamente utilizzata dagli arabi, quindi diffusa in Italia da Leonardo Fibonacci nel XIII secolo.

Le denominazioni "per graticola, per quadrettatura, per tavola" sono chiaramente comprensibili dalla disposizione stessa a reticolo dei numeri da moltiplicare. Quella, invece, "per gelosia" deriva dalla somiglianza di questo schema di calcolo alle persiane che si usava mettere alle finestre, la cui regolazione permetteva di vedere fuori senza essere visti dall'esterno: ciò consentiva ai mariti "gelosi" di sottrarre alla vista indiscreta di estranei le loro mogli senza impedire loro di guardare fuori.

I due fattori vengono scritti ai lati di una tabella con tante righe e colonne quante sono le loro cifre. Ogni casella, formata dall'incrocio di una riga con una colonna, è divisa dalla diagonale principale in due triangoli destinati a contenere i risultati parziali della moltiplicazione fra le cifre dei due fattori. Volendo moltiplicare 324 per 43, scritti i due numeri ai lati della tabella (figura 2), si scrive in ciascuna casella il

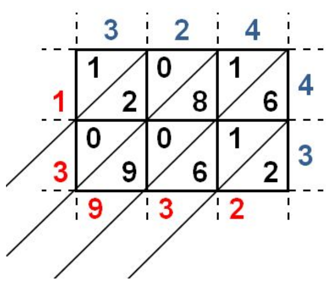


Fig. 2 – Schema di moltiplicazione per graticola o per gelosia.

prodotto dei numeri corrispondenti alle cifre dei due fattori, ponendo nel triangolo inferiore le unità e in quello superiore le decine. Per ottenere il prodotto dei due numeri dati, basta sommare in diagonale i numeri dei triangoli delle caselle, tenendo conto degli eventuali riporti. Nel nostro esempio, nella seconda striscia diagonale 6+1+6 dà come risultato 3 con il riporto di 1 che va sommato ai numeri nei triangoli della striscia diagonale successiva: 1, 8, 0, 9, dando come risultato 9 con il riporto di 1 che va sommato ai numeri nei triangoli della striscia successiva: 0, 2, 0. dando come risultato 3 senza alcun riporto. Il prodotto cercato è quindi 13.932.

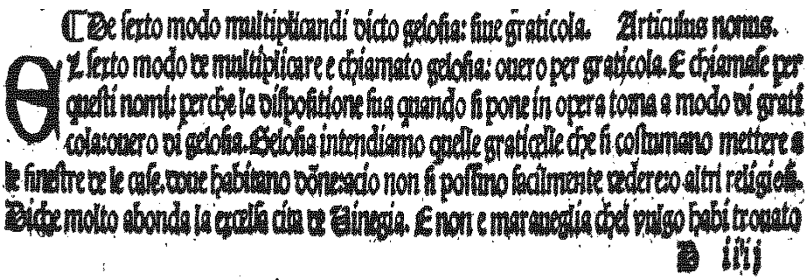

¶ De sexto modo multiplicandi dicto gelosia: siue graticola. Articulus nonus.
EL sexto modo de multiplicare e chiamato gelosia: ouero per graticola. E chiamase per
questi nomi: perche la dispositione sua quando si pone in opera torna a modo di grati
cola: ouero di gelosia. Gelosia intendiamo quelle graticelle che si costumano mettere a
le finestre de le case. doue habitano dōne: acio non si possino facilmente vedere: o altri religiosi.
Diche molto abonda la excelsa cita de Vinegia. E non e marauegia chel vulgo habi trouato
D iiij

Fig. 3 – La citazione dello schema di moltiplicazione per graticola o per gelosianella *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* di Luca Pacioli (Pacioli, 1494, *Distinctio Secunda, Tractatus tertius* c28): «El sexto modo de multiplicare e chiamato gelosia ouero per graticola. E chiamase per questi nomi: perche la dispositione sua quando si pone in opera torna a moda di graticola: ouero di gelosia. Gelosia intendiamo quelle graticelle che si costumono mettere ale finestre de le case doue habitano done: acio non si possino facilmente vedere: o altri religiosi di che molto abonda la excelsa cita de Vinegia»

L'idea che ispirò Nepero è molto semplice e geniale: inserire, prendendolo dallo schema della "moltiplicazione per gelosia", la separazione, con una diagonale, *delle* unità dalle decine nei risultati delle moltiplicazioni fra i numeri naturali nelle caselle della tavola pitagorica e realizzare fisicamente come elementi mobili le colonne della tavola (figura 4). Il nuovo strumento fu descritto da Nepero nella sua opera *Rhabdologiae seu Numerationis per virgulas libri duo* nel 1617, anno della sua morte. Fu chiamato *Bacchette* o *Virgulae numeratrices* o *Ossi di Nepero*, poiché spesso le bacchette furono realizzate in avorio. Per certi aspetti somigliava all'abaco a colonne e per altri alla tavola pitagorica, ma conteneva in embrione il nuovo concetto di elaborazione automatica dei calcoli, evidenziando, in particolare, l'aspetto dei riporti. Esso realizzava una specie di tavola pitagorica a colonne mobili, che si potevano accostare componendo, con le cifre impresse nella prima casella in alto, le cifre del numero da moltiplicare. Con tale strumento era possibile eseguire più speditamente moltiplicazioni, divisioni ed estrazioni di radice di numeri interi.

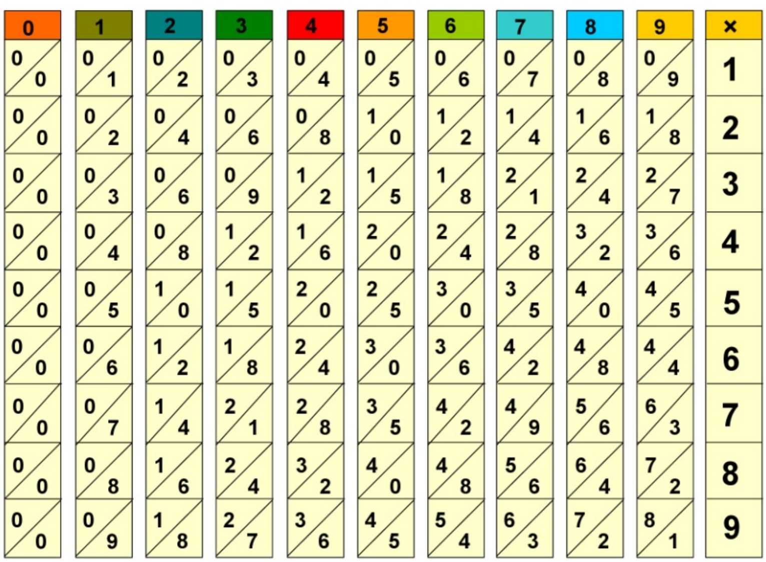
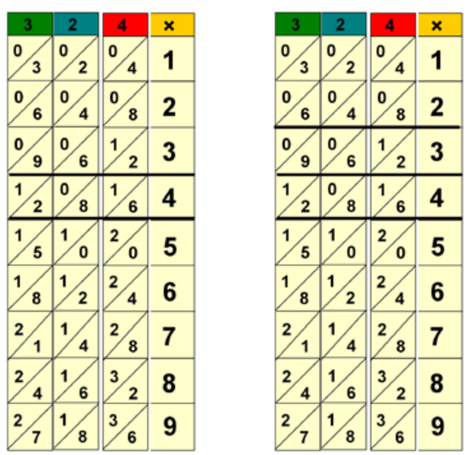


Fig. 4 - Le 10 bacchette mobili e il regolo fisso di Nepero.

Lo strumento è fisicamente costituito da un contenitore recante una colonna fissa divisa in dieci caselle numerate da 0 a 9 senza diagonale. A ogni numero intero, da zero a nove, è dedicata una bacchetta mobile, che riporta come intestazione nella prima casella in alto la cifra corrispondente e nelle sottostanti caselle i suoi successivi multipli (figura 4). Una barra diagonale separa in ciascuna casella, come nello schema della moltiplicazione per graticola, le due cifre di ciascuno di tali multipli, ponendo sotto la diagonale le unità e sopra le decine; nei casi in cui il prodotto è a una sola cifra, viene posto lo zero sopra la diagonale. All'interno del contenitore vengono disposte, accostate alla colonna fissa, le colonne mobili che compongono il numero da moltiplicare.

Volendo, per esempio, ottenere il prodotto di 324 per 4, si accostano alla colonna fissa le bacchette del 3, del 2 e del 4 (figura 5a). Nelle caselle della riga del 4 si leggono i prodotti parziali 16, 8, 12 per i quali sono evidenziati in alto a sinistra i



a **b**

Fig. 5 - Le moltiplicazioni 324 x 4 e 324 x 43 con le bacchette di Nepero.

riporti da sommare di volta in volta: 1, 0.

Con le bacchette di Nepero è possibile eseguire anche moltiplicazioni fra due numeri a più cifre. Per ottenere il prodotto 324 x 43, accostate le bacchette del 3, del 2 e del 4 alla bacchetta fissa, si procede come nell'esempio precedente

  972+
1296 =
13932

ottenendo i prodotti parziali 324 x 3 e 324 x 4 nelle righe del 3 e del 4 (figura 5b). Quindi si sommano i due prodotti parziali 324 x 3 = 972 e 324 x 4 = 1296 scrivendone le cifre spostate di un ordine da destra:

Nell' *Organum Mathematicum* di Padre Gaspard Schott del 1668, è descritto un altro dispositivo attribuito a Nepero, costituito da cilindri paralleli divisi ciascuno in dieci zone numerate da 0 a 9.

4 - Alcune proprietà della Tavola Pitagorica

Consideriamo la tavola pitagorica generale P_N costruita, come è noto, disponendo nella prima riga i primi N numeri interi, nella seconda i loro multipli secondo 2, nella terza i multipli secondo 3, e così via fino alla riga N. Di conseguenza anche la prima colonna contiene i primi N numeri interi, la seconda i loro multipli secondo 2, la terza i multipli secondo 3 e così via: il numero intero contenuto nella casella all'incrocio della generica riga n con la generica colonna p è dunque np.[4] Da tale legge di distribuzione dei numeri nella tavola e dalla proprietà commutativa della moltiplicazione discende la loro simmetria rispetto alla diagonale principale, la quale contiene i quadrati dei primi N numeri interi essendo ivi $n=p$. Inoltre i numeri delle righe e delle colonne della tavola formano progressioni aritmetiche di ragione 1 (1ª riga e colonna), di ragione 2 (2ª riga e colonna) di ragione 3 (3ª riga e colonna),...e così via.

Molte dimostrazioni delle proprietà elencate sono semplici e immediate, altre sono basate sulla proprietà della somma di n termini consecutivi di una progressione aritmetica che è $(a_1 + a_n)\, n/2$. In particolare, la somma dei primi N numeri interi è $(1 + N)\, N/2$.

Teorema 4.1 *Condizione necessaria (ma non sufficiente) perché un numero intero sia quadrato di un altro numero intero è che termini, nella scrittura decimale, con una delle cifre 0, 1, 4, 5, 6, 9. 0vvero non può essere quadrato di un numero intero un numero terminante con una delle cifre 2, 3, 7, 8.*

Dimostrazione

Nel sistema decimale un numero intero può porsi nella forma 10d + u, essendo d il numero delle diecine e u il numero delle unità semplici. Pertanto il suo quadrato è (10d

[4] Da questo punto in poi, per ragioni di maggiore chiarezza della notazione, per indicare le generiche righe e colonne della tavola di moltiplicazione userò le lettere *n, p* in luogo di *i, j* usate all'inizio di questo articolo (parag. 1).

Periodico di Matematica (IV) Vol. V (3) settembre 2023, ISSN: 2612-6745

+ u)^2 = 100d^2 + 20du + u^2. Le unità semplici del numero dato sono quindi le stesse di u^2. Osservando la diagonale principale della tavola pitagorica P_{10}, che contiene i quadrati dei primi 10 numeri interi e quindi anche u^2, si vede che questo deve terminare con una delle cifre 0, 1, 4, 5, 6, 9.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	45	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Fig. 6

<u>Teorema 4.2</u> *Un numero qualunque np della tavola pitagorica P_N è la media aritmetica dei due numeri della sua stessa riga n o colonna p da esso "equidistanti",[5] nonché dei k numeri[6] che lo precedono e lo seguono sulla sua stessa riga n o colonna p.*

---

[5] Da qui in poi equidistanti = separati dallo stesso numero di caselle.

[6] K è un numero naturale ≥ 1 e $\leq \min\{(p-1),(N-p)\}$ se si considera la riga n_esima, oppure ≥ 1 e $\leq \min\{(n-1),(N-n)\}$) se si considera la colonna p_esima.

Per esempio, nel caso di figura 6 considerato il numero 24, per i numeri da esso equidistanti lungo la stessa riga o colonna si ha:

(6 + 42) / 2 = 24, (12 + 36) / 2 = 24, (18+30) /2 = 24
(12+ 36) / 2 = 24, (16 + 32) / 2 = 24, (20+28) /2 = 24

Inoltre consideriamo i numeri entro le 3 caselle che precedono e seguono 24 lungo la sua stessa riga e colonna (in questo caso è k = 3 spostandosi sia lungo la riga sia lungo la colonna di 24, ma si potrebbero considerare valori differenti per le due direzioni):

(6 + 12 + 18 + 30 + 36 + 42) /6 = 144 / 6 = 24
(12 + 16 + 20 + 28 + 32 + 36) / 6 = 144 / 6 = 24.

<u>Dimostrazione</u>

Considerato il numero np all'incrocio della riga n con la colonna p, i numeri che lo precedono e lo seguono di k caselle sulla sua stessa riga sono rispettivamente $n(p - k)$ e $n(p + k)$.

La loro somma è $n(p - k) + n(p + k) = 2np$, da cui: $np = [n(p - k) + n(p + k)]/2$. Analogo ragionamento si può ripetere considerando la colonna p.

Sia ora w l'elemento centrale di $2k + 1$ numeri consecutivi della stessa riga o colonna. Per la prima parte dell'asserto, ciascuna delle k coppie di elementi equidistanti da w ha per somma $2w$ e quindi la somma totale di tali coppie è $S_k = 2wk$, da cui: $w = S_k/2k$.

<u>Teorema 4.3</u> *La somma dei numeri situati nei quattro estremi delle mediane o nei quattro vertici di un quadrato di lato k caselle (k naturale dispari ≤ N) contenuto nella tavola pitagorica P_N è quattro volte il numero della casella centrale.*

Per esempio con riferimento al quadrato evidenziato in figura 7a:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Fig. 7a

$12 + 36 + 16 + 32 = 4 \times 24 = 96$; $8 + 24 + 48 + 16 = 4 \times 24 = 96$.

<u>Dimostrazione</u>

Considerato un qualunque quadrato di lato k caselle (k naturale dispari ≤ N) contenuto in P_N (figura 7b), le coppie di numeri (a, b), (c, d) situati ai quattro estremi delle mediane del quadrato appartengono rispettivamente alla stessa riga e alla stessa colonna dell'elemento centrale m e sono da esso equidistanti. Per il teorema 4.2 è: $a + b = 2m$, $c + d = 2m$ e quindi:

$$a + b + c + d = 4m.$$

Analogamente, le coppie di numeri (e, f) , (h, g) che figurano nei quattro vertici del quadrato appartengono rispettivamente alle medesime colonne di a e di b e sono da essi equidistanti, per cui, ancora in virtù del teorema 4.2, si ha: $e + f = 2a$, $h + g = 2b$ e quindi, sommando membro a membro e tenendo conto che è $a + b = 2m$, si ha infine:

$$e + f + h + g = 2\,(a + b) = 4m.$$

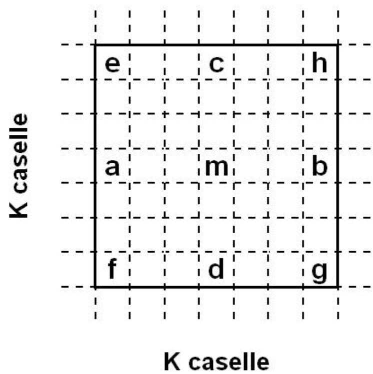


Fig. 7b

Teorema 4.4 *La somma S_l dei numeri delle caselle laterali di un quadrato di lato k caselle (k naturale dispari ≤ N) contenuto nella tavola pitagorica P_N è tante volte il numero m della casella centrale quante sono le caselle laterali. Poiché queste sono 4(k-1) si ha dunque:*

(1) $$S_l = 4(k-1)m$$

La (1) si applica anche nel caso in cui il quadrato coincida con l'intera tavola pitagorica ponendo $k = N$.

Per esempio, con riferimento al quadrato evidenziato in figura 7a:

S_l = 8 + 12 + 16 + 20 + 24 + 30 + 36 + 42 + 48 + 40 + 32 + 24 + 16 + 14 + 12 +10 = 4(5 − 1) × 24 = 16 × 24 = 384.

Dimostrazione

In un quadrato di lato k caselle (k naturale dispari $\leq N$), il numero delle caselle laterali è $4(k-1)$. Per il teorema 4.2, la somma dei numeri contenuti nei rettangoli R1, R2, R3, R4 evidenziati in figura 8 sono rispettivamente:

$$(k-1)a + a,\ \ (k-3)c + c,\ \ (k-1)b + b,\ \ (k-3)d + d.$$

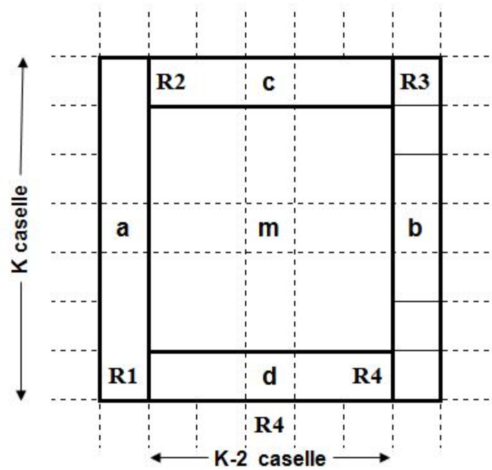


Fig. 8

Pertanto, sommando e dopo semplici passaggi, è $S_l = (a + b + c + d)\,k - 2(c + d)$. Quindi, essendo per il teorema 4.3: $a + b + c + d = 4m$ e per il teorema 4.2: $c + d = 2m$, risulta infine:

$$S_l = 4mk - 4m = 4(k-1)m.$$

<u>Teorema 4.5</u> *La somma dei numeri delle caselle laterali della tavola pitagorica P_N è:*

$$S_l = (N-1)(N+1)^2$$

(2)

Per esempio, nella tavola pitagorica P_{10} è $S_l = (10-1)(10+1)^2 = 1089$, risultato che il lettore volenteroso può verificare effettuando la somma dei numeri delle caselle laterali della tavola pitagorica costruita con i primi 10 numeri naturali.

<u>Dimostrazione</u>

Ripartiamo i numeri delle caselle laterali della tavola pitagorica nei rettangoli evidenziati in figura 9.

R2

R1 R3

1	2	3	....	....	....	....	....	N-1	N
2									2N
3									3N
4									4N
.									.
.									.
.									.
.									.
(N-1)									(N-1)N
N	2N	3N	....	....	....	....	....	....	N^2

R4

Fig. 9

I numeri contenuti in ciascuno di questi sono per:

(R1): $2, 3, 4, \dots N$; (R2): $1, 2, 3 \dots N - 1$;

(R3): $N, 2N, 3N, \dots (N - 1)N$; (R4): $2N, 3N, 4N, \dots N^2$.

Essi costituiscono progressioni aritmetiche di ragione 1 per i rettangoli 1 e 2, di ragione N per i rettangoli 3 e 4. Pertanto, osservando che in ciascun rettangolo sono contenuti (N − 1) numeri, le loro somme sono:

$$S_1 = \frac{(2+N)(N-1)}{2} \quad , \quad S_2 = \frac{(1+N-1)(N-1)}{2} \quad ,$$

$$S_3 = \frac{[N+(N-1)N](N-1)}{2} \quad , \quad S_4 = \frac{\left(2N+N^2\right)(N-1)}{2}$$

da cui, sommando membro a membro, dopo semplici passaggi algebrici, si ottiene la (2).

<u>Teorema 4.6</u> *Il numero della casella centrale della tavola pitagorica P_N (N naturale dispari) è il quadrato della media aritmetica fra il primo e l'ultimo numero della prima riga (o colonna) della tavola*

(3) $$m = \left(\frac{1+N}{2}\right)^2$$

Per esempio, nella tavola pitagorica P_9 si ha:

$$m = \left(\frac{1+9}{2}\right)^2 = 25.$$

<u>Dimostrazione</u>

Nel caso in cui N è dispari, e quindi la tavola pitagorica ha un elemento centrale, applicando entrambi i teoremi 4.4 e 4.5, che forniscono la somma dei numeri laterali della tavola, si può scrivere:

$$4(N - 1)m = (N - 1)(N + 1)^2$$

da cui la (3).

<u>Teorema 4.7</u> *La somma dei numeri di un rettangolo di s colonne per t righe (s e t naturali ≤ N) , contenuto nella tavola pitagorica* P_N *, è il prodotto fra le somme dei numeri d'ordine di quelle colonne e di quelle righe, ovvero è:*

(4) $$S_R = \frac{2p+s-1}{2}\,s\;\frac{2n+t-1}{2}\;t$$

essendo p, n i numeri d'ordine, rispetto alla tavola, della prima colonna e della prima riga del rettangolo considerato.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	45	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Fig. 10.

Per esempio la somma totale S_R dei numeri contenuti nel rettangolo evidenziato in azzurro in figura 10 è:

$$S_R = 8 + 12 + 16 + 10 + 15 + 20 = 81$$

Poiché 8 si trova nella colonna 2 e riga 4, 12 nella colonna 3 e riga 4, 16 nella colonna 4 e riga 4, 10 nella colonna 2 e riga 5, 15 nella colonna 3 e riga 5, 20 nella colonna 4 e riga 5, applicando la prima parte dell'enunciato del teorema si ha:

$$S_R = (2 + 3 + 4) \text{ x } (4 + 5) = 9 \text{ x } 9 = 81.$$

Oppure applicando la (4) essendo $s = 3$, $t = 2$, $p = 2$, $n = 4$:

$$S_R = \frac{2 \text{ x } 2+3-1}{2} \text{ x } 3 \text{ x } \frac{2 \text{ x } 4+2-1}{2} \text{ x } 2 = 9 \text{ x } 9 = 81$$

Dimostrazione

Nel rettangolo generico di s colonne e t righe (figura 11) le righe contengono i multipli dei numeri p, p+1, p+2, … p+s-1 rispettivamente secondo n, n+1, n+2, …; n+t-1.

La somma dei numeri della prima riga del rettangolo è:

$$n[p + (p + 1) + (p + 2) + \ldots + (p + s - 1)] = n \ \frac{2p + s - 1}{2} \text{ s}$$

quella dei numeri della seconda riga è:

$$(n+1)\ [p+(p+1) + (p+2) + \ldots + (p+s-1)] = (n+1) \ \frac{2p+s-1}{2} \text{ s}$$

e così via fino alla somma dei numeri dell'ultima riga t:

$$(n+t-1)[p+(p+1)+(p+2)+\ldots+(p+s-1)] = (n+t-1)\ \frac{2p+s-1}{2}\ s$$

Addizionando le somme dei numeri delle *t* righe così trovate, si ottiene la somma S_R dei numeri contenuti nel rettangolo:

(5) $[n+n+1)+(n+2) +\ldots+ (n+t -1)]\ [p+(p+1)+(p+2)+\ldots+(p+s-1)]$

	p	p+1	p+2		p+s-1
n	np	n(p+1)	n(p+2)		n(p+s-1)
n+1	(n+1)p	(n+1)(p+1)	(n+1)(p+2)		(n+1)(p+s-1)
n+2	(n+2)p	(n+2)((p+1)	(n+2)(p+2)		(n+2)(p+s-1)
n+t-1	(n+t-1)p	(n+t-1)(p+1)	(n+t-1)(p+2)		(n+t-1)(p+s-1)

Fig. 11.

Le somme indicate entro le due parentesi quadre sono rispettivamente la somma dei numeri d'ordine delle t righe e delle s colonne dei numeri del rettangolo, il che dimostra la prima parte dell'asserto. Inoltre, le somme indicate entro le due parentesi quadre della (5) sono somme rispettivamente di *t* e *s* termini consecutivi di progressioni aritmetiche. Pertanto dalla (5) si ottiene immediatamente:

$$S_R = \frac{2p+s-1}{2}\ s\ \frac{2n+t-1}{2}\ t$$

ovvero la (4).

Nel caso particolare di un quadrato, ponendo nella (4) $s = t = k$, la somma S_Q dei numeri in esso contenuti è:

(6) $$S_Q = (2p + k - 1)\,(2n + k - 1)\left(\frac{k}{2}\right)^2$$

essendo p, n i numeri d'ordine, rispetto alla tavola pitagorica, della prima colonna e della prima riga del quadrato considerato.

Per esempio, nel caso del quadrato verde evidenziato nella tavola pitagorica di figura 10, si ha:

$$S_Q = 30 + 35 + 40 + 36 + 42 + 48 + 42 + 49 + 56 = 378$$

ovvero applicando il teorema 4.7:

$$S_Q = (6 + 7 + 8) \text{ x } (5 + 6 + 7) = 21 \text{ x } 18 = 378:$$

oppure applicando la (6) essendo k = 3, p = 6, n = 5:

$$S_Q = (2 \text{ x } 6 + 3 - 1)\,(2 \text{ x } 5 + 3 - 1)\,(3/2)^2 = 14 \text{ x } 12 \text{ x } 9 / 4 = 378.$$

Dal teorema 4.7 discende il seguente corollario:

<u>Corollario 4.7.1</u> *La somma* s_{P_N} *dei numeri della tavola pitagorica* P_N *è il quadrato della somma dei primi N numeri interi:*

(7) $$s_{P_N} = \left(\frac{1+N}{2}N\right)^2$$

e quindi la somma dei numeri della tavola pitagorica P_N *è sempre un quadrato perfetto, qualunque sia N.*

Per esempio, la somma dei numeri della tavola pitagorica relativa ai primi 10 numeri interi è:

$$s_{P_{10}} = \left(\frac{1+10}{2}\right) 10 = 55^2 = 3025.$$

Dimostrazione

La (7) si ottiene ponendo $p = n = 1$, $k = N$ nella (6). Si ricorda, inoltre, che la somma dei primi N numeri interi è:

$$\frac{1+N}{2} N.$$

Teorema 4.8 *La somma S_Q dei numeri di un quadrato di lato k caselle (k naturale dispari $\leq N$) della tavola pitagorica P_N è tante volte il numero m della casella centrale quanti sono i numeri del quadrato stesso, ovvero il numero m della casella centrale è mediana e media aritmetica dei numeri del quadrato:*

(8) $$S_Q = mk^2 , \; m = \frac{S_Q}{k^2}$$

Il quadrato può ovviamente coincidere con l'intera tavola pitagorica ($k = N$). Se m è un quadrato perfetto lo è anche S_Q: *se il numero della casella centrale del quadrato è un quadrato perfetto, lo è anche la somma dei numeri del quadrato*. Tale proprietà vale quindi per qualunque quadrato della tavola pitagorica avente la casella centrale sulla diagonale della tavola (che contiene i quadrati dei primi N numeri interi).

Per esempio, il numero della casella centrale del quadrato di 3 caselle evidenziato in verde nella figura 17 è 42. Pertanto è $S_Q = 9 \times 42 = 378$, che, come precedentemente visto, è effettivamente la somma dei numeri di quel quadrato.

Dimostrazione

La (6) si può anche scrivere:

(9) $$S_Q = (2p+k-1)(2n+k-1)\left(\frac{k}{2}\right)^2 = \left(p+\frac{k-1}{2}\right)\left(n+\frac{k-1}{2}\right)k^2$$

Osservando che, nel caso di k dispari, il numero della casella centrale del quadrato è:

$$m = \left(p+\frac{k-1}{2}\right)\left(n+\frac{k-1}{2}\right)$$

e che k^2 è il numero degli elementi del quadrato, rimane dimostrato il teorema.

Teorema 4.9 *In un qualunque quadrato contenuto nella tavola pitagorica P_N i prodotti dei numeri delle due diagonali sono uguali.*

Per esempio, per il quadrato evidenziato in figura 14a si ha:

$P' = 8 \text{ x}15\text{x}24 \text{ x}35\text{x}48 = 4838400$, $P'' = 24 \text{ x}25\text{x}24\text{x}21\text{x}16 = 4838400$.

Dimostrazione

Si consideri nella tavola pitagorica P_N un qualunque quadrato di lato k caselle (k ≤ N) e siano n, p rispettivamente i numeri d'ordine, rispetto all'intera tavola, della prima riga e della prima colonna del quadrato (figura 12).

Ciascun termine della diagonale principale del quadrato è il prodotto di due fattori che si incrementano di una unità spostandosi di una riga e di una colonna in senso crescente, iniziando dal primo termine in alto a sinistra che vale np:

$$P' = n\, p\, (n+1)(p+1)\ldots(n+k-2)(p+k-2)(n+k-1)(p+k-1)$$

ovvero, applicando la proprietà commutativa della moltiplicazione:

(10) $P' = n\,(n+1)\ldots(n+k-2)(n+k-1)p(p+1)\ldots(p+k-2)(p+k-1)$

Analogamente, ciascun termine della diagonale secondaria è il prodotto di due fattori: il primo si incrementa di una unità spostandosi di una riga in senso crescente, mentre il secondo si decrementa di una unità spostandosi di una colonna in senso decrescente, cominciando dall'ultimo termine in alto a destra che vale $n\ (p + k - 1)$.

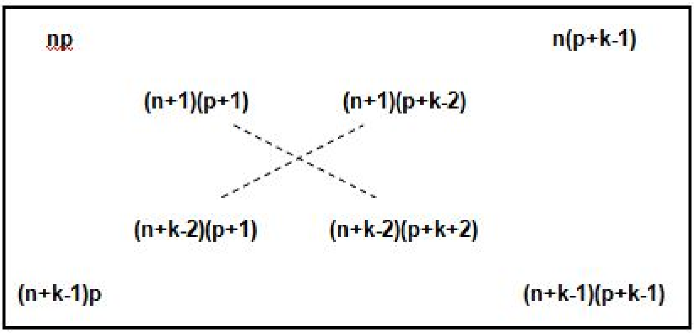


Fig. 12.

Il loro prodotto è quindi:

$$P'' = n\,(p+k-1)\,(n+1)\,(p+k-2)\ldots(n+k-2)\,(p+1)\,(n+k-1)p$$

ovvero, applicando la proprietà commutativa della moltiplicazione:

(11) $P'' = n(n+1)\ldots(n+k-2)\,(n+k-1)p(p+1)\ldots(p+k-2)\,(p+k-1)$

Dal confronto delle (10) (11) risulta che i fattori dei due prodotti P', P'' sono identici, e pertanto è $P' = P''$.

5 - Quadrati home della Tavola Pitagorica

Consideriamo ora i quadrati di lato 1, 2, 3, … , N caselle della tavola pitagorica generale P_N che hanno in comune la prima casella in alto a sinistra (figura 13). Chiameremo tali quadrati *home* e li indicheremo con la notazione $Q_{1;k}$ (k = 1, 2, 3, .. N). Essi godono di diverse proprietà.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Fig. 13.

<u>Teorema 5.1</u> *La differenza tra le somme dei termini delle diagonali principale e secondaria di un quadrato qualunque di lato k caselle (k naturale ≤ N) contenuto nella tavola pitagorica P_N è uguale alla somma dei termini della diagonale secondaria di un quadrato home di lato k-1 caselle:*

(12) $$s'_k - s''_k = s''_{Q_{1,k-1}}$$

Per esempio, considerato il qualunque quadrato di lato 5 caselle evidenziato in figura 14a, si ha:

s'_5 = 8+15+24+35+48 = 130; s''_5 = 24+25+24+21+16 = 110.

La somma dei termini della diagonale secondaria del quadrato *home* di lato 4 caselle è:

$$s''_{Q_{1,4}} = 4+6+6+4 = s'_5 - s''_5 = 20.$$

<u>Dimostrazione</u>

Si consideri un quadrato di lato k caselle (k naturale $\leq N$) della tavola pitagorica P_N e siano n; p i numeri d'ordine, rispetto all'intera tavola, della prima riga e della prima colonna del quadrato (figura 19).

La somma dei termini della diagonale principale è:

$$S'_k = n\,p + (n+1)\,(p+1) + (n+2)\,(p+2) + \ldots + (n+k-1)\,(p+k-1)$$

ovvero:

$$S'_k = \sum_{i=0}^{k-1} (n+i)\,(p+i) = p \sum_{i=0}^{k-1} (n+i) + \sum_{i=1}^{k-1} (n+i)\,i =$$
$$= p \sum_{i=0}^{k-1} (n+i) + \mathrm{n} \sum_{i=1}^{k-1} i + \sum_{i=1}^{k-1} i^2$$

La somma dei termini della diagonale secondaria è invece:

$$S''_k = n\,(p+k-1) + (n+1)\,(p+k-2) + (n+2)\,(p+k-3) +:\ldots+ (n+k-1)\,p$$

ovvero:

$$S''_k = \sum_{i=0}^{k-1} (n+i)(p+k-1-i) = \sum_{i=0}^{k-1} [(n+i)\,p + (n+i)(k-1-i)] =$$

$$= p \sum_{i=0}^{k-1} (n+i) + n \sum_{i=0}^{k-2} (k-1-i) + \sum_{i=1}^{k-2} i\,(k-1-i)$$

Osservando che è:

$$n \sum_{i=1}^{k-1} i = n \sum_{i=0}^{k-2} (k-1-i)$$

trattandosi della stessa somma con gli addendi in ordine inverso, si ha:

$$S''_k = p \sum_{i=0}^{k-1} (n+i) + n \sum_{i=1}^{k-1} i + \sum_{i=1}^{k-2} i\,(k-1-i)$$

$$S'_k - S''_k = \sum_{i=1}^{k-1} i^2 - \sum_{i=1}^{k-2} i\,(k-1-i)$$

ma poiché è:

$$\sum_{i=1}^{k-1} i^2 = \sum_{i=1}^{k-1} i\,(k-i) + \sum_{i=1}^{k-2} i\,(k-1-i)$$

si ha:

(13) $$S'_k - S''_k = \sum_{i=1}^{k-1} i\,(k-i)$$

Indicizzando con i le righe, il generico numero della diagonale secondaria di un quadrato *home* di lato k caselle è $i(k+1-i)$ e quindi la somma dei numeri della diagonale è:

(14) $$s''_{Q_{1,k}} = \sum_{i=1}^{k} i\,(k+1-i)$$

Ponendo nella (14) k-1 al posto di k, si ottiene $s''_{Q_{1,k-1}} = \sum_{i=1}^{k-1} i\,(k-i)$ e quindi la (13) diventa:

$$S'_k - S''_k = s''_{Q_{1,\ k-1}}$$

Dal teorema 5.1 discende il seguente corollario:

Corollario 5.1 *La somma dei termini della diagonale principale di ciascun quadrato home della tavola pitagorica P_N è uguale alla somma dei termini delle diagonali secondarie del quadrato stesso e del quadrato home precedente.*

Per i primi 10 quadrati *home*, si sono calcolate le somme dei termini delle diagonali principale $s'_{Q_{1,k}}$ e secondaria $s''_{Q_{1,k}}$:

	$Q_{1,1}$	**$Q_{1,2}$**	**$Q_{1,3}$**	**$Q_{1,4}$**	**$Q_{1,5}$**	**$Q_{1,6}$**	**$Q_{1,7}$**	**$Q_{1,8}$**	**$Q_{1,9}$**	**$Q_{1,10}$**
$s''_{Q_{1,k}}$	1	4	10	**20**	**35**	56	84	120	165	220
$s'_{Q_{1,k}}$		5	14	30	**55**	91	140	204	285	385

Nello schema è evidenziato, a titolo di esempio, che la somma $s'_{Q_{1,5}}$ = 55 è pari alla somma di $s''_{Q_{1,5}}$ = 35 e $s''_{Q_{1,4}}$ = 20.

Con tale schema è immediato verificare la proprietà indicata per tutti i primi 10 quadrati *home* di P_N.

Teorema 5.2 *La somma dei numeri contenuti in un quadrato home $Q_{1,k}$ della tavola pitagorica P_N è il quadrato della somma dei numeri della prima riga (o colonna) del quadrato stesso:*

$$s_{Q_{1,k}} = \left(\frac{1+k}{2}\,k\right)^2 \tag{15}$$

Per esempio, la somma dei numeri contenuti nel terzo quadrato *home* $Q_{1,3}$ (figura 13) è:

$$(1+2+3) + (2+4+6) + (3+6+9) = (1+2+3) + 2(1+2+3) + 3(1+2+3) =$$
$$= (1+2+3)\,(1+2+3) = (1+2+3)^2.$$

Dimostrazione

Infatti, i quadrati *home* di una tavola pitagorica P_N sono essi stessi tavole pitagoriche P_1, P_2, P_3, ... per le quali vale il corollario 5.1.

Teorema 5.3 *La somma dei numeri compresi fra due quadrati home successivi $Q_{1,k-1}$, $Q_{1,k}$ della tavola pitagorica P_N è il cubo del numero della prima riga (o colonna) compreso fra i due quadrati stessi, ovvero è k^3.*

Per esempio, la somma dei numeri contenuti fra i quadrati home $Q_{1,2}$ e $Q_{1,3}$ (figura 20) è: 3+6+9+6+3 = 27 = 3^3, essendo 3 il numero della prima riga compreso fra $Q_{1,2}$ e $Q_{1,3}$.

Dimostrazione

La somma dei numeri compresi fra due quadrati *home* successivi $Q_{1,n-1}$ e $Q_{1,n}$ è pari alla differenza fra le somme dei numeri contenuti nei due quadrati stessi e quindi per il teorema 5.2:

$$\left(\frac{1+k}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1+k-1}{2}\right)^2 (k-1)^2 = k^2\left[\left(\frac{k+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{k-1}{2}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{k^2}{4}(k^2+2k+1-k^2+2k-1) = k^3.$$

Dai teoremi 5.2 e 5.3 discende che:

Corollario 5.2 *La somma dei cubi dei primi N numeri interi è uguale alla somma dei numeri della tavola pitagorica P_N e quindi al quadrato della somma dei primi N numeri interi:*

$$1^3+2^3+3^3 + ::: +N^3 = s_{P_N} = (1+2+3+ ::: + N)^2$$

ovvero è:

(16) $$\sum_{i=1}^{i=N} i^3 = \left(\frac{1+N}{2}N\right)^2$$

Dimostrazione

Considerata P_N come unione dei quadrati home di lato 1, 2, 3, ...N caselle, la somma dei numeri contenuti in P_N è la somma delle somme dei numeri compresi fra i successivi quadrati home che, per il teorema 5.3, valgono 1^3, 2^3, 3^3, …, N^3.

D’altra parte, la somma dei numeri contenuti nella tavola pitagorica P_N, per il corollario 4.1, è il quadrato della somma dei primi N numeri interi, che è fornita dalla (7). Rimane dunque dimostrata la (16).

Per esempio, nella tavola pitagorica P_4, possiamo considerare i suoi numeri ripartiti in sottoinsiemi formati dai numeri compresi fra i quadrati home $Q_{1,1}$, $Q_{1,2}$, $Q_{1,3}$, $Q_{1;4}$

$1 = 1^3 = 1$

$2+4+2 = 2^3 = 8$

$3+6+9+6+3 = 3^3 = 27$

$4+8+12+16+12+8+4 = 4^3 = 64$

La loro somma è dunque 1 + 8 + 27 + 64 = 100 ma anche per la (16):

$$\left(\frac{1+4}{2}4\right)^2 = 10^2 = 100.$$

6 - Cubi e ipercubi pitagorici

Possiamo pensare di estendere al caso del prodotto fra tre numeri interi lo schema di calcolo della tavola pitagorica. Avremo in tal modo, in luogo della tavola pitagorica, il cubo pitagorico generalizzato CP_N, inteso come tabella a tre entrate per il prodotto di tre numeri interi.

In fondo, si tratta di passare da un caso bidimensionale a uno tridimensionale. In luogo di righe e colonne, parleremo in tal caso di spigoli *a, b, c* del cubo pitagorico, disposti per esempio secondo gli assi x, y, z di una terna cartesiana.

Il prodotto fra i numeri interi *n, p, q* si troverà nella cella (cubo elementare) individuata dalle tre coordinate *n, p, q*. In tal modo si possono ottenere analoghe proprietà di quelle precedentemente viste per la tavola pitagorica.

A titolo di esempio accenniamo all'estensione al caso tridimensionale dei teoremi 4.2, 4.3. Il teorema 4.2 nel caso del cubo pitagorico diventa:

<u>Teorema 6.1</u> *Un numero qualunque del cubo pitagorico 3-CP$_N$ è la media aritmetica dei due numeri da esso "equidistanti" nonché dei k (k naturale ≤ N)*[7] *numeri che lo precedono e lo seguono nella direzione di uno stesso spigolo del cubo.*

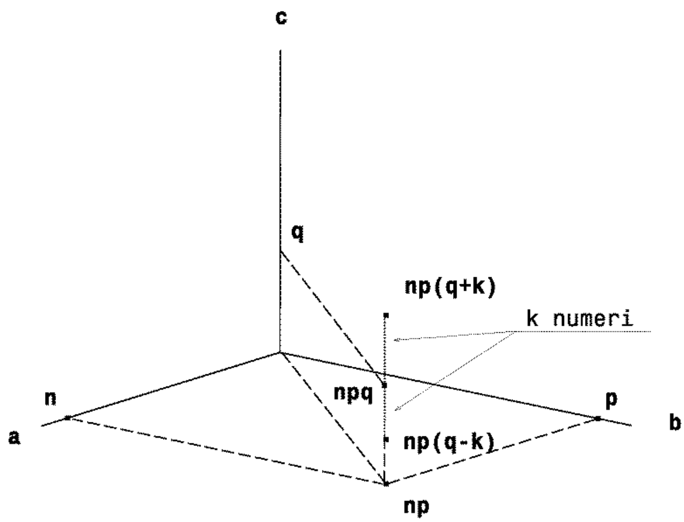


Fig. 14.

<u>Dimostrazione</u>

Infatti, considerato un numero qualunque *npq* del cubo pitagorico (figura 14), i due numeri da esso distanti *k* celle secondo la direzione dello spigolo *c* del cubo sono *np* (*q*-*k*) e *np* (*q*+*k*), per cui la loro somma è: *np* (*q*-*k*)+ *np* (*q*+*k*) = 2*npq,* da cui:

---

[7] Analogamente alla nota 12: *K* è un numero naturale ≥ 1 e ≤ min $\{(n-1),(N-n)\}$ se si considera lo spigolo *a*, oppure ≥ 1 e ≤ min $\{(p-1),(N-p)\}$) se si considera lo spigolo *b*, oppure ≥ 1 e ≤ min $\{(q-1),(N-q)\}$) se si considera lo spigolo *c*.

$$npq = \frac{np\,(q-k) + np\,(q+k)}{2}$$

Sia ora v l'elemento centrale di $2k + 1$ numeri consecutivi nella direzione dello spigolo c del cubo pitagorico. Per la prima parte dell'asserto, ciascuna delle k coppie di elementi equidistanti da v ha per somma $2v$ e quindi la somma totale di tali coppie è $S_k = 2vk$, da cui: $v = S_k / 2k$.

Analoghi ragionamenti si possono ripetere, per entrambe le parti dell'enunciato, considerando le direzioni secondo gli altri due spigoli *a, b* del cubo pitagorico. Il teorema è pertanto dimostrato.

Il teorema 4.3 nel caso del cubo pitagorico diventa:

Teorema 6.2 *La somma dei numeri situati negli otto vertici di un cubo di lato k caselle (k naturale dispari ≤ N) contenuto nel cubo pitagorico 3-CP_N è otto volte il numero m della cella centrale.*

Si noti che nel caso bidimensionale la somma dei numeri contenuti nei quattro vertici di un quadrato della tavola pitagorica è $4 = 2^2$ volte il numero mediano del quadrato; nel caso tridimensionale la somma dei numeri contenuti negli otto vertici di un cubo del cubo pitagorico è $8 = 2^3$ il numero mediano del cubo... Questa proprietà può essere estesa al caso più generale dell'ipercubo pitagorico n-dimensionale: *la somma dei numeri contenuti nei 2^n vertici di un ipercubo n-dimensionale di lato k caselle (k naturale dispari ≤ N) contenuto nell'ipercubo pitagorico n-dimensionale n-CP_N è 2^n volte il numero m della cella centrale.*

L'estensione di questa proprietà all'ipercubo n-dimensionale sarà trattata in un successivo articolo.

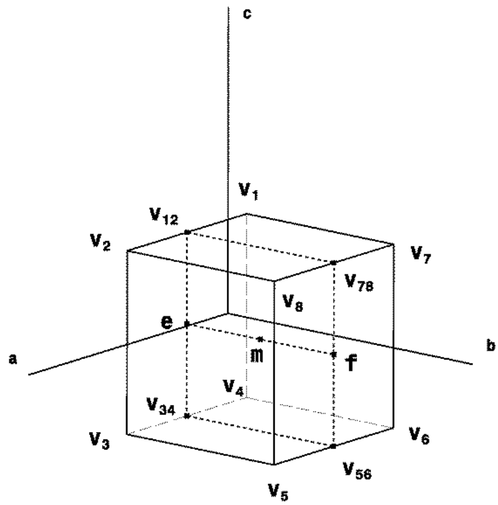


Fig. 15.

<u>Dimostrazione</u>

Infatti (figura 15), per il teorema precedente si ha:

(17) $$e + f = 2m$$

$$e = \frac{v_{12}+v_{34}}{2} = \left(\frac{v_1+v_2}{2} + \frac{v_3+v_4}{2}\right)\frac{1}{2}$$

(18) $$f = \frac{v_{56}+v_{78}}{2} = \left(\frac{v_5+v_6}{2} + \frac{v_7+v_8}{2}\right)\frac{1}{2}$$

e quindi sostituendo la (18) nella (17):

$$\frac{v_1+ v_2 + v_3+ v_4}{4} + \frac{v_5+ v_6 + v_{73}+ v_8}{4} = 2m$$

e infine:

$$v_1+ v_2 + v_3+ v_4 + v_5+ \mathrm{v}_6 + v_{73}+ v_8 = 8m.$$

Bibliografia

Boezio Severino (1867). *De Institutione Arithmetica*, (a cura di G. Friedlein), Lipsia.

Bombelli Rocco (1976). Studi archeologico-critici circa l'antica numerazione italica, 1, Roma.

Boncompagni Baldassarre (1877). «Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche», 10 anno 1877.

Boncompagni Baldassarre (1881). «Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche», 14 anno 1881.

Bortolotti Ettore, Gigli Duilio (1929). *Aritmetica pratica*, in *Enciclopedia delle Matematiche Elementari e Complementi*, vol. 1° parte 1a, Milano, Hoepli.

Chasles Michel (1843). «Comptes Rendus hebdomadaires des Sciences de l'Academie des Sciences de Paris», 16 e 17 anno 1843.

Chasles Michel (1867). «Comptes Rendus hebdomadaires des Sciences de l'Academie des Sciences de Paris», 64 anno 1867.

Chasles Michel (1875). *Aperçu historique sur l'origine et le développment des méthodes en géométrie,* Parigi, Gauthier - Villars 1875, p. 468.

Devlin Keith (2012). *I numeri magici di Fibonacci* (titolo originale: *The man of Numbers*), Bergamo, BUR Rizzoli.

Enciclopedia Generale Illustrata (1969), vol. IV, p. 9, Milano, Rizzoli Larousse..

Enestrom Von Gustaf . (1894). «Bibliotheca Mathematica» (2) 8, (1894), p. 120.

Garrucci Raffaele (1853). *Notizia di una tavoletta calcolatoria romana*. «Bullettino Archeologico Napolitano», Nuova serie, anno II, Decembre 1853, pp. 93-96.

Ginanni Francesco (1753). *Dissertatio mathematica critica de numeralium notarum minuscolarum origine.* In: "Raccolta di Opuscoli scientifici e filologici" a cura di Calogierà, Tomo 48, pp. 19-110, Venezia.

Ifrah Georges (1989). *Storia universale dei numeri*, Milano, Mondadori, 1989.

Libri Guglielmo (1839). *Note sur l'origine de nos chiffres et sur l'Abacus des Pythagoriciens.* «Journ. De Mathèmatiques», T. IV, 1839.

Loria Gino (1914). *Le scienze esatte nell'antica Grecia.* Milano, Hoepli.

Mannert Corrado (1801). *De numerorum, quos Arabicos vocant, vera origine pythagorica*, Norimberga.

Napier John (1617). *Rhabdologiae seu Numerationis per virgulas libri duo.* Edimburgo, Andreas Hart.

Narducci Enrico – «Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche», 15 anno 1882, 14.

Nicotra Luca (2009). *La tavola pitagorica: un falso storico dimenticato.* «Alice&Bob», n. 15, 2009, MatePristem Bocconi Springer-Verlag, Milano. La versione completa di approfondimenti è in http://matematica.unibocconi.it/articoli/la-tavola-pitagorica.;

Nicotra Luca (2013). *Proprietà della tavola pitagorica.* «Alice&Bob", n. 36-37, 2013, MatePristem Bocconi Springer-Verlag, Milano. La versione completa è pubblicata in http://matematica.unibocconi.it/articoli/propriet%C3%A0-della-tavola-pitagorica; https://matematica.unibocconi.eu/sites/default/files/media/attach/Propriet%25C3%25A0TavolaPitagorica_Integrale-web_0.pdf

Pacioli Luca (1494), *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*, Paganino de' Paganini, Venezia, p. .

Romagnosi Gian Domenico (1827). *Supplemento ed illustrazioni alla seconda parte delle Ricerche storiche sull'India di Robertson*. Tomo II, VI, Milano, Ferrario.

Spinoso Giuseppe (1963). «La scienza e i giovani», 1-2 anno XII-1963, Le Monnier, p. 56.

Stiattesi Andrea, (1870). .*Sull'Aritmetica. Dissertazione storica-critica.* In: «Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche», Tomo III (novembre 1870).

Tannery Paul (1897). «L'Intermediaire des Mathematiciens» 4 (1897), pp. 162-163.