Periodico di Matematica (IV) Vol. V (2) giugno 2023, pp. 125-156

Perimetro e area nella scuola secondaria di I grado: dalle esperienze di Emma Castelnuovo all'uso di software di geometria dinamica

Marco D'Errico*

*IC Nino Cortese (Casoria – Na); marco.derrico1@posta.istruzione.it

DOI : 10.53159 /PdM(IV).v5n2.115

Sunto*:* *Dalle esperienze e dalle lezioni di Emma Castelnuovo, una delle cose più sorprendenti e, nello stesso tempo innovative, è lo stimolo ad osservare e guardarsi intorno.*

In diversi suoi lavori, questo stimolo è particolarmente evidente nella descrizione dell'argomento "area e perimetro". Nell'articolo viene ripercorsa la proposta didattica di Emma Castelnuovo presentandola attraverso esperienze concrete svolte con alunni della scuola secondaria di I grado ed ampliandola attraverso l'utilizzo di software di geometria dinamica come Geogebra.

Parole Chiave*:* *Perimetro, area, didattica, Emma Castelnuovo, geogebra.*

Abstract: *In the Castelnuovo's lessons a surprising and, at the same time, innovative thing is to teach to observe and look around. In her works, this is* *particularly evident in the description of the topic "area and perimeter". In this article is presented concrete experiences on this topic carried out with students also using the geogebra software.*

Keywords: *Area, perimeter, didactics, Emma Castelnuovo, Geogebra.*

1 - Introduzione

Dalle esperienze e dalle lezioni di Emma Castelnuovo, una delle cose più sorprendenti e, nello stesso tempo innovative, è lo stimolo ad osservare e guardarsi intorno.

Nei suoi volumi "Documenti di un'esposizione matematica" , "Pentole, ombre e formiche", "Officina matematica" e "Didattica della matematica" nonché nei testi per la scuola secondaria di I grado, questo stimolo è particolarmente evidente nella descrizione dell'argomento "area e perimetro". Emma Castelnuovo in questa trattazione cerca di sciogliere uno dei nodi cruciali della geometria ovvero la confusione che spesso i bambini fanno tra perimetro e area all'inizio del ciclo scolastico secondario di I grado. Un classico errore, ad esempio, è di dividere per 4 l'area del quadrato al fine di ottenere la lunghezza del lato. L'innovazione introdotta su questi temi da parte di Castelnuovo è proprio il trattare questi due argomenti congiuntamente (ovvero relativamente allo stesso problema).

«La letteratura ha ampiamente mostrato come molti studenti di ogni età siano convinti che vi sia una relazione di dipendenza stretta tra i due concetti sul piano relazionale, del tipo: se A e B sono due figure piane, allora:

• se (perimetro di A > perimetro di B) allora (area di A > area di B)

• idem con <

• idem con = (per cui: due figure isoperimetriche sono necessariamente equiestese);

• e viceversa, scambiando l'ordine "perimetro – area" con "area – perimetro" » (D'Amore, 2005);

«se vi sono due relazioni con qualche mutuo legame reciproco, lo studente tenta di applicare la seguente "legge di conservazione": se la tal cosa cresce, anche quest'altra ad essa relazionata cresce (e viceversa)» (Azhari, 1998).

Si può partire, quindi, considerando che poligoni che hanno lo stesso perimetro possono avere diversa area o che poligoni con la stessa area possono avere diverso perimetro.

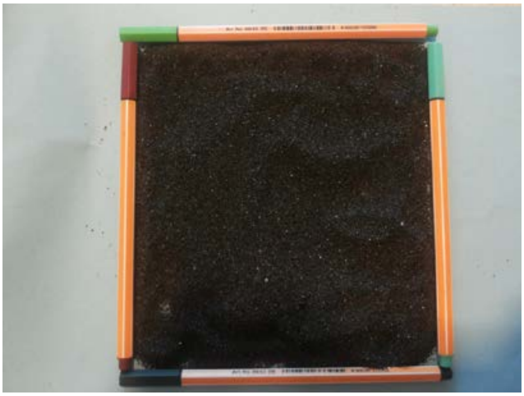
Durante una lezione tenuta a Cenci nel 2003 Emma Castelnuovo introduce queste tematiche sottolineando l'importanza che rivestono da un punto di vista didattico in quanto "c'è qualcosa che cambia". E questo induce prima di tutto ad osservare e poi a sperimentare.

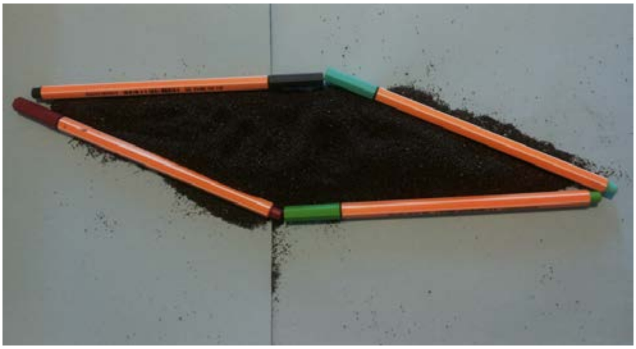
2 - Poligoni isoperimetrici ma non equivalenti

Partiamo da un'osservazione contenuta in uno del libri di Pappo di Alessandria (vissuto intorno al 350 d. C.): "le api, in virtù di un certo senso geometrico, sanno che l'esagono regolare ha un'area più grande, e contiene quindi più miele, del quadrato o del triangolo di ugual perimetro".

Nella narrazione della costruzione di Cartagine contenuta nell'Eneide di Virgilio (V, libro I, versi 335-368) troviamo invece che Didone, figlia del re Tiro, fugge dalla sua città per questioni familiari e politiche e giunge nella bellissima baia di Cartagine. Affascinata da tanta bellezza, Didone decide di stabilirsi in questa terra. Ma il "proprietario" della zona non è intenzionato a cedere appezzamenti. Per far cambiare idea a Didone e, contemporaneamente, per prenderla in giro, il proprietario stesso le dona una pelle di bue per creare il "contorno" della sua città. Allora Didone raccoglie la sfida e taglia la pelle in strisce sottili, e per ottenere la massima superficie le dispone a forma di cerchio. Questo perché, a parità di perimetro, il cerchio è la figura geometrica che racchiude l'area massima. Molte città medioevali, infatti, hanno proprio questa forma (basta cercare in rete provando ad esempio con Milano, Parma e Viterbo).

Prendiamo quattro penne uguali fra loro. Possiamo costruire un quadrilatero. In particolare possiamo costruire un quadrato. La somma delle misure delle lunghezze delle penne rappresentano il perimetro del quadrato. Come possiamo rappresentare l'area? Possiamo ad esempio riempire l'interno del quadrato di sabbia (figura 1). Il quadrato che abbiamo costruito è articolabile. A mano a mano che il quadrato viene deformato come nella figura, pur rimanendo il perimetro lo stesso, la sabbia fuoriesce dalla figura fino a scomparire del tutto: ovvero, l'area diminuisce.





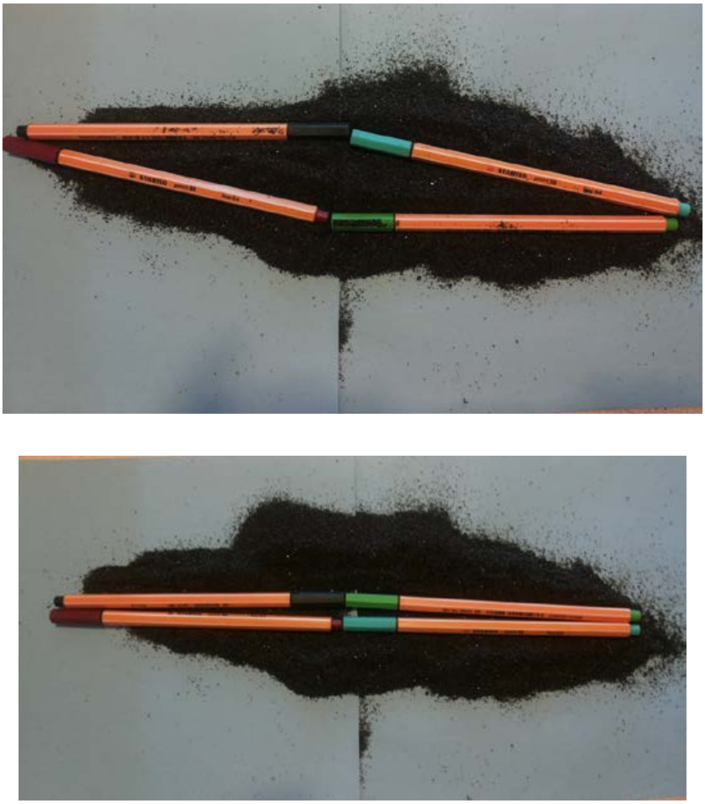
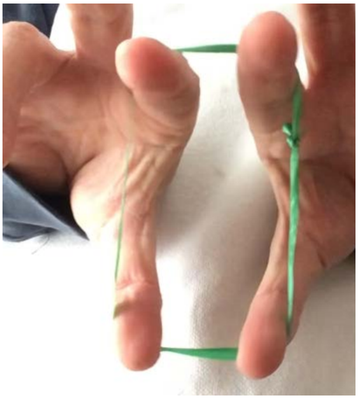
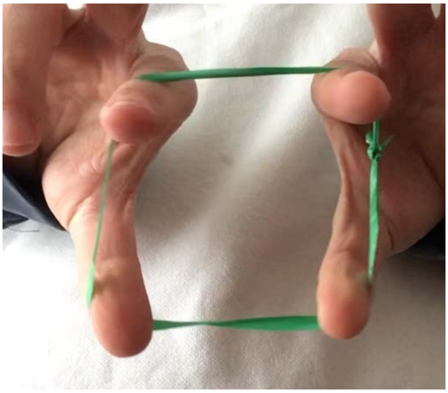


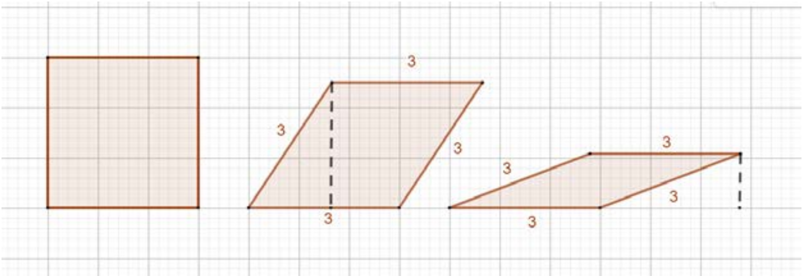
Fig. 1 – Parallelogrammi isoperimetrici

Possiamo realizzare questa esperienza simile anche con uno spago:

Quando il parallelogramma è completamente schiacciato l'area diventa uguale a zero.

L'altezza della figura infatti misura sempre meno man mano che si "schiaccia" la figura:



E dato che l'area la calcoliamo moltiplicando la base per l'altezza, chiaramente nel caso limite in cui l'altezza è zero (la figura è schiacciata completamente) anche l'area diventa uguale a zero perché qualsiasi numero moltiplicato per zero fa zero (è un caso limite; la figura è completamente schiacciata). L'altro caso è quando il parallelogramma è un quadrato con altezza massima e quindi anche area massima.

Passiamo a verificare anche numericamente allora. Ammettiamo che lo spago con cui abbiamo costruito il rettangolo misuri 40 cm. Il suo semiperimetro misura allora 20 cm.

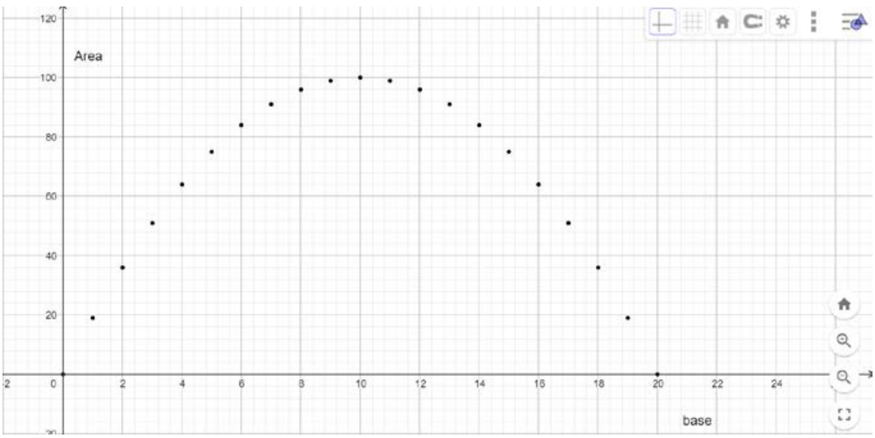
Facciamo variare le misure dei due lati (usando solo i numeri naturali), facendo in modo che il perimetro risulti sempre lo stesso. Vediamo se il calcolo dell'area fornisce effettivamente risultati differenti:

Base	*Altezza*	*Semiperimetro*	*Area*
1	*19*	*20*	*19*
2	*18*	*20*	*36*
3	*17*	*20*	*51*
4	*16*	*20*	*64*
5	*15*	*20*	*75*
6	*14*	*20*	*84*
7	*13*	*20*	*91*
8	*12*	*20*	*96*
9	*11*	*20*	*99*
10	*10*	*20*	*100*
11	*9*	*20*	*99*
12	*8*	*20*	*96*
13	*7*	*20*	*91*
…	…	…	…

(è utile far notare agli alunni che la differenza tra 9+11 ed 11+1 sta nel fatto che il secondo rettangolo è ruotato di 90° rispetto al primo).

Si osserva quindi che fra i rettangoli isoperimetrici ha l'area massima quello che ha i due lati di 10 e 10… ovvero un quadrato.

Rappresentiamo questi dati su un piano cartesiano. Per visualizzare come varia l'area del rettangolo su questo diagramma possiamo estrapolare dalla tabella i valori della base (asse x) e dell'area (asse y).



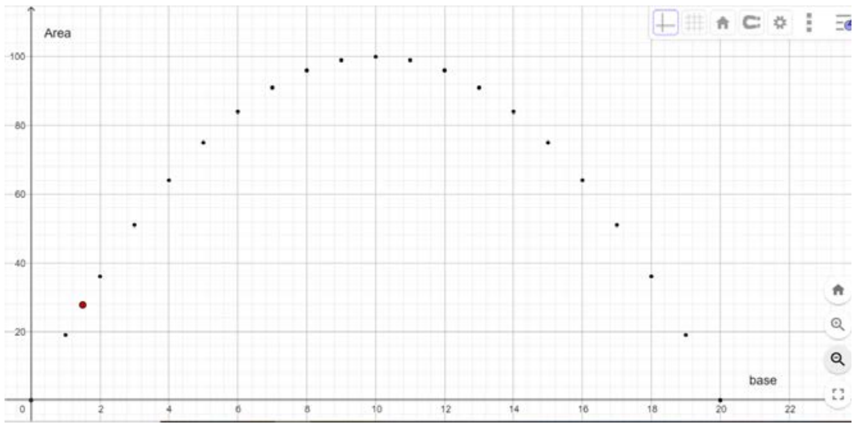
Discutiamo il grafico con gli allievi.

Ad esempio: cosa accade nel punto $(10;100)$? Quali sono i casi limite? I punti seguono un andamento o sono posizionati a caso? Puoi mettere altri punti?

Proprio sull'ultima domanda possiamo dire che nella nostra tabella abbiamo considerato, per le dimensioni dei rettangoli, solo i numeri naturali. Possiamo però inserire anche i razionali (o meglio la loro rappresentazione decimale). Ad esempio:

Base	*Altezza*	*Semiperimetro*	*Area*
1,5	*18,5*	*20*	*27,75*

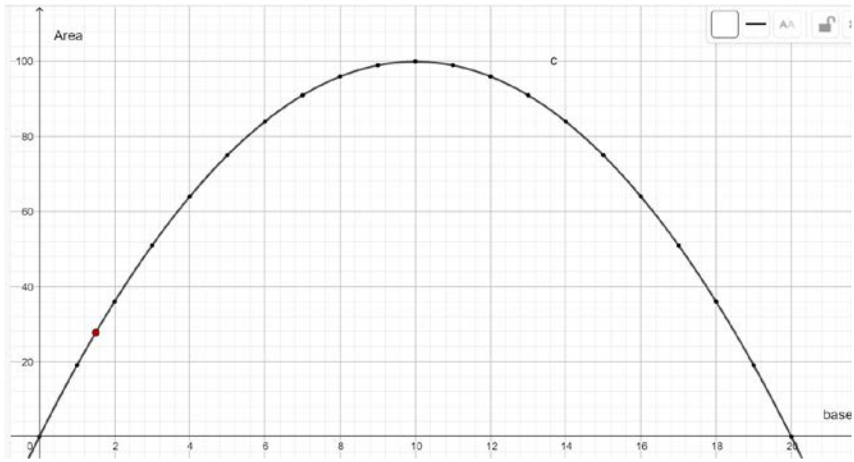
Se l'andamento dei punti sul diagramma cartesiano non è casuale, la nuova coppia che forma il punto $(1{,}5; 27{,}75)$ deve seguire l'andamento che abbiamo individuato. Proviamo:



Questo cosa significa?

Significa che in realtà quelli che vediamo sono solo alcuni dei punti che compongono una curva fatta da infiniti punti (tutte le coppie di numeri naturali e razionali che potrebbero rappresentare la base e l'area di un rettangolo il cui semiperimetro è 20).

Allora questa curva la possiamo tracciare:



Questa curva è una parabola.

Possiamo immaginarla come la traiettoria di una palla lanciata verso l'alto. La palla arriva al culmine e poi riscende.

Anche la parabola è molto usata nell'architettura, nell'arte e nella tecnologia (i fari di un'automobile, le antenne "paraboliche").

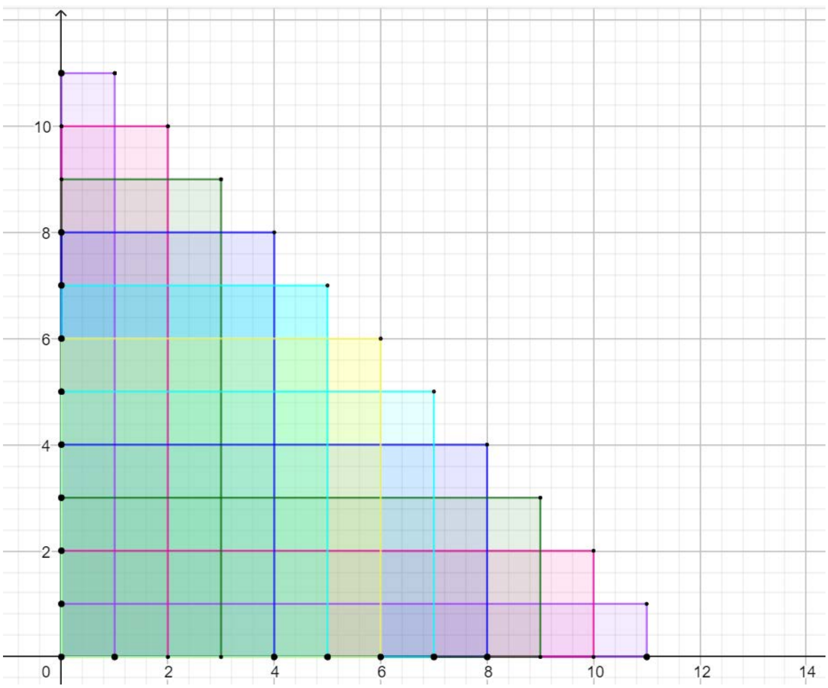
Adesso con cartoncini colorati costruiamo tutti i rettangoli isoperimetrici che hanno il perimetro di 24cm (semiperimetro di 12 cm). Per le dimensioni dei lati usiamo solo i numeri naturali. Facciamo ogni rettangolo di un colore diverso, ma quelli che hanno le dimensioni uguali li facciamo dello stesso colore.

Raccogliamo i dati nella tabella:

Base	*Altezza*		*Semiperimetro*
1	*11*		*12*
2	*10*		*12*
3	*9*		*12*
4	*8*		*12*

5	*7*		*12*
6	*6*		*12*
7	*5*		*12*
8	*4*		*12*
9	*3*		*12*
10	*2*		*12*
11	*1*		*12*

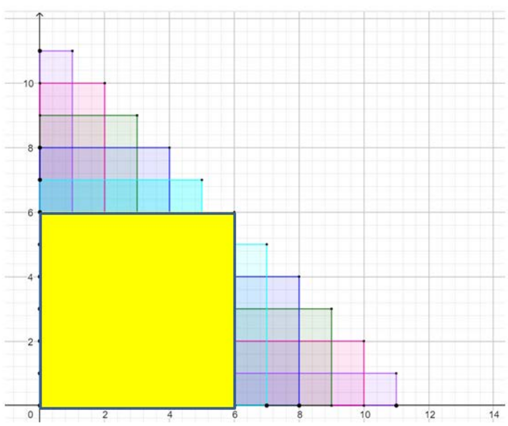
Poi costruiamo un altro diagramma cartesiano e disponiamo i rettangoli su questo diagramma in questo modo:



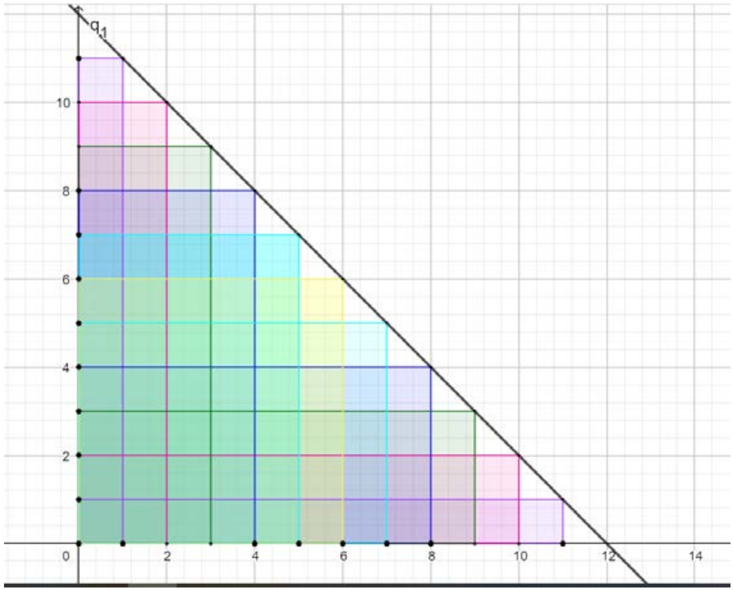
Discutiamo con gli alunni. Cosa possiamo dedurre da questo grafico? Qual è la figura che ha l'area massima?

Base	*Altezza*	*Semiperimetro*	*Area*
1	*11*	*12*	*11*
2	*10*	*12*	*20*
3	*9*	*12*	*27*
4	*8*	*12*	*32*
5	*7*	*12*	*35*
6	*6*	*12*	*36*
7	*5*	*12*	*35*
8	*4*	*12*	*32*
9	*3*	*12*	*27*
10	*2*	*12*	*20*
11	*1*	*12*	*11*

Fra tutti i rettangoli che hanno lo stesso perimetro, come si vedei, il quadrato è quello che ha area massima.



I vertici mobili $(1; 11); (2; 10); (3; 9)$ ecc. di tutti i rettangoli si dispongono su una retta:



Tutti i vertici mobili hanno una caratteristica: la somma dell'ascissa e dell'ordinata è costante ed è uguale a 12.

Abbiamo considerato solo i numeri naturali. E se considerassimo anche i numeri razionali? Il vertice mobile si dispone ancora su questa retta.

Allora possiamo scrivere che la retta che vediamo contiene tutti i punti la cui somma tra ascissa (x) ed ordinata (y) è sempre 12.

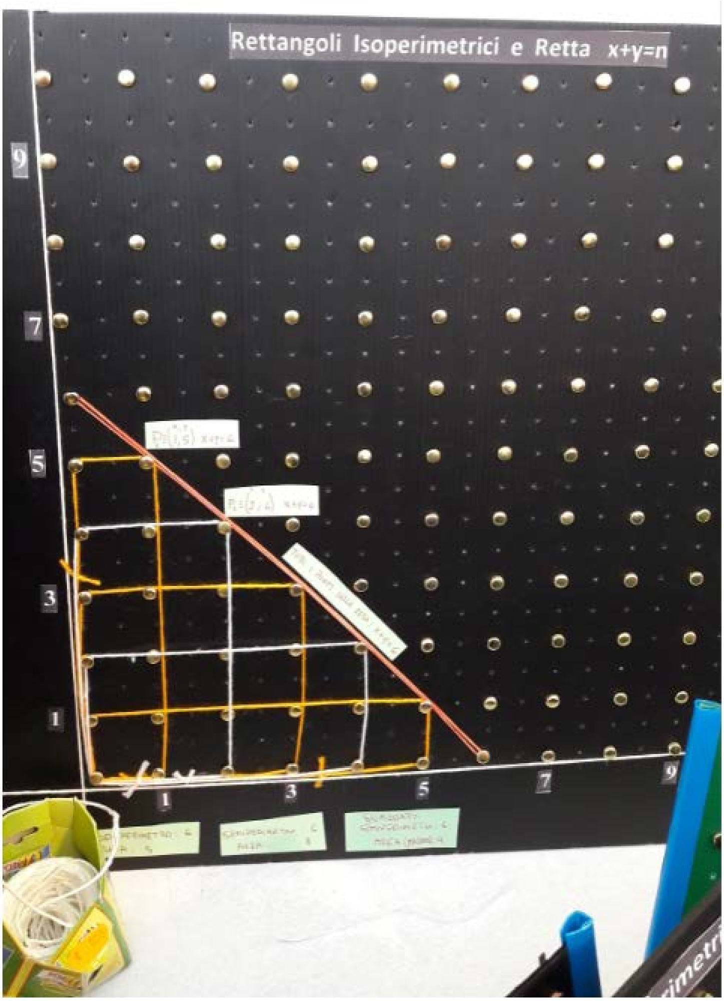
$$x + y = 12$$

La retta che abbiamo disegnato è la rappresentazione di questa equazione.

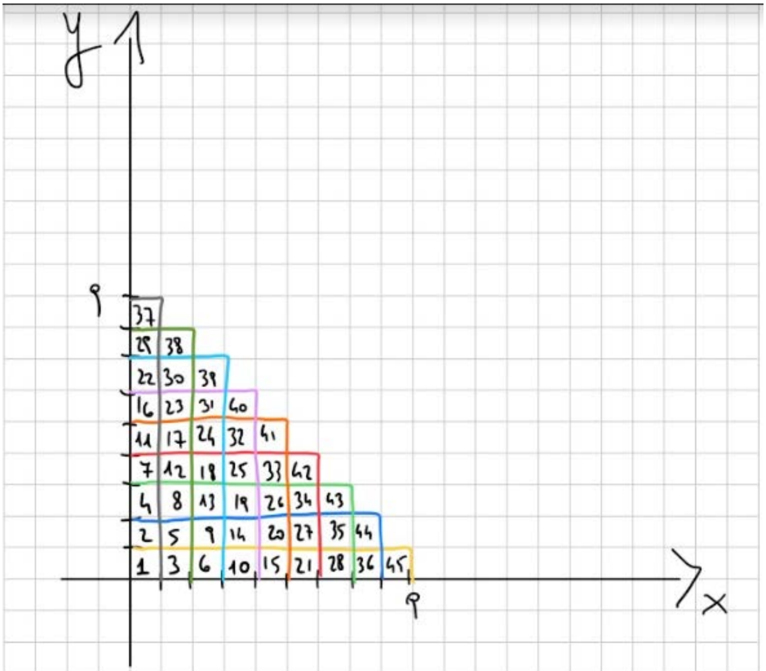
Ogni retta di questo tipo in generale avrà un'equazione:

$$x + y = n$$

Possiamo fare questa costruzione anche utilizzando un geopiano:



Passiamo adesso a calcolare l'area della figura ottenuta in questo modo:



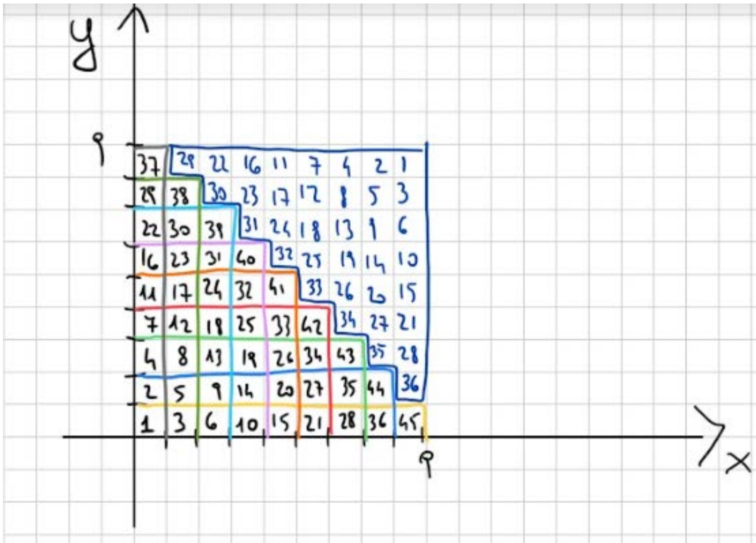
L'area è un numero triangolare:

$45 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$

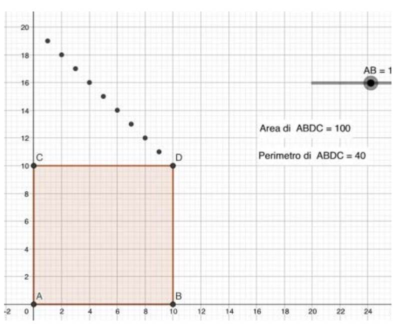
Se aggiungiamo il numero triangolare precedente a quello ottenuto, ovvero:

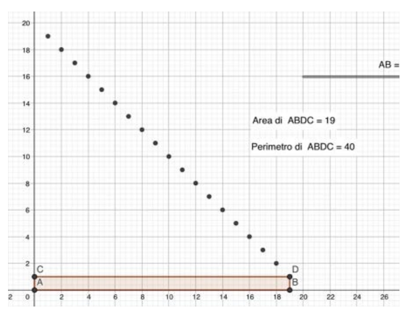
$36 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$

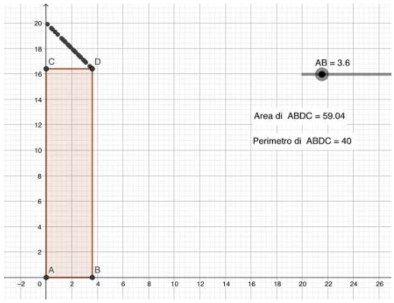
avremo: $36 + 45 = 81$ che è un numero quadrato.

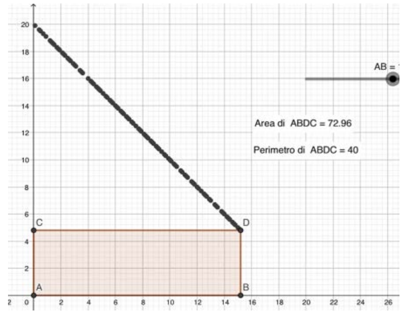


L'attività appena proposta può essere integrata con geogebra. Si può costruire un'animazione che faccia muovere i vertici mobili lasciando la loro traccia sul piano cartesiano, prima considerando solo i numeri naturali e poi aggiungendo gli altri insiemi numerici. Questo consente di richiamare anche altri concetti (continuità sulla retta dei numeri, l'importanza di chiarire quale insieme numerico stiamo considerando):









Riferiamoci adesso a triangoli isoperimetrici con uguale base (anche in questo caso il materiale che possiamo usare è molto semplice: un pezzo di spago, un paio di chiodi, una tavoletta di legno, un cartoncino, una matita).

Si fissano due chiodi sulla tavoletta di legno su cui è disteso il cartoncino; indichiamo i chiodi con le lettere A e B (AB quindi sarà la base dei nostri triangoli). Ai due chiodi A e B leghiamo un pezzo di spago (che sia più lungo della base AB). Con la matita si tende lo spago. Si vede che lo spago forma un triangolo di vertici: A, B, punta della matita (figura 2).

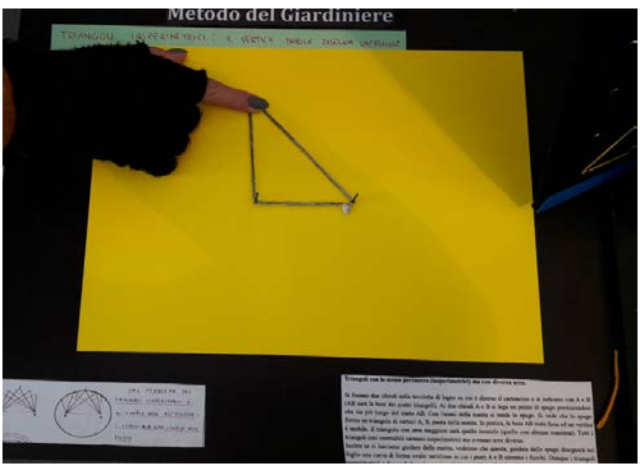
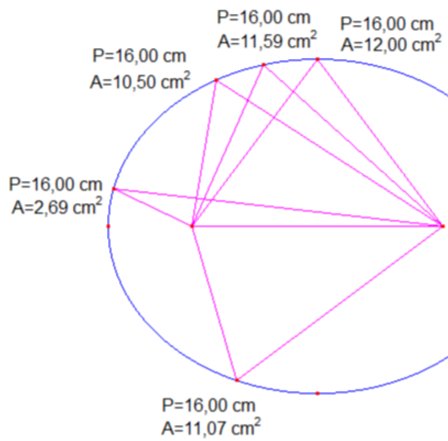
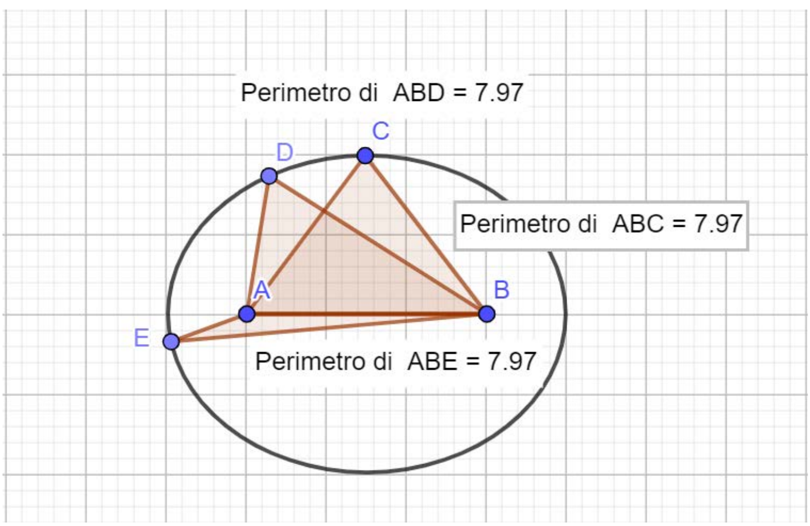


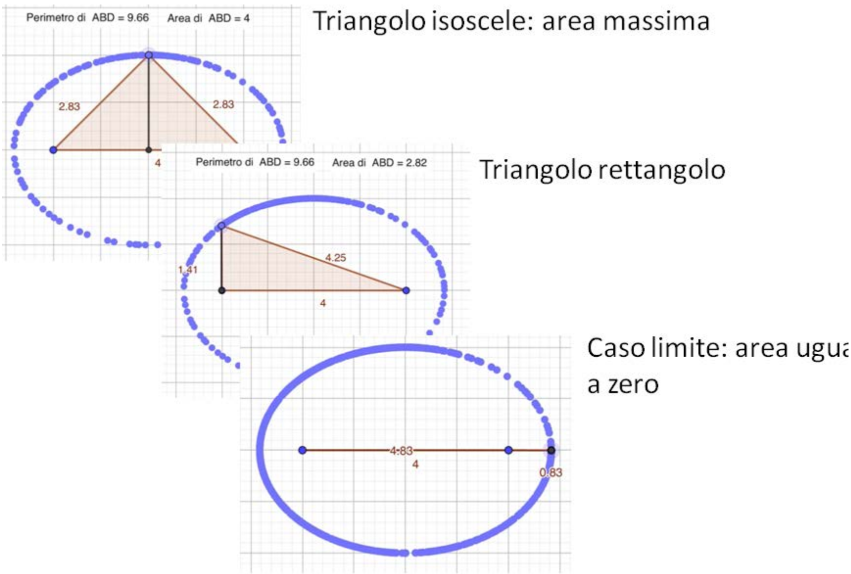
Fig. 2 Triangoli isoperimetrici

In pratica, la base AB resta fissa ed un vertice è mobile. Il triangolo con area maggiore sarà quello isoscele (quello con altezza massima). Tutti i triangoli così costruibili saranno isoperimetrici ma avranno aree diverse.

Inoltre se ci lasciamo guidare dalla matita, vedremo che questa, guidata dallo spago disegnerà sul foglio una curva di forma ovale: un'ellisse in cui i punti A e B saranno i fuochi. Dunque i triangoli isoperimetrici e di uguale base hanno i vertici su una nuova figura. Questa volta la figura che vediamo è una figura ovale: l'ellisse. I punti A e B si chiamano fuochi dell'ellisse. Il triangolo che ha l'area massima è quello isoscele. Infatti in questo caso l'altezza è massima. Ed essendo la base di tutti i triangoli fissata con i chiodi e quindi uguale per tutti, l'unico parametro che fa variare l'area è l'altezza. L'area diventa uguale a zero invece quando il triangolo è schiacciato con altezza minima ovvero uguale a zero. Più avviciniamo A e B più l'ellisse diventa un cerchio (come se la corda facesse da compasso). Questo metodo è chiamato "metodo del giardiniere" proprio perché lo usano i giardinieri quando vogliono fare aiuole ellittiche.


P=16,00 cm
A=11,59 cm²
P=16,00 cm
A=12,00 cm²
P=16,00 cm
A=10,50 cm²
P=16,00 cm
A=2,69 cm²
P=16,00 cm
A=11,07 cm²


Perimetro di ABD = 7.97
C
D
Perimetro di ABC = 7.97
A
B
E
Perimetro di ABE = 7.97



L'ellisse è una figura che si può osservare nell'ombra che lascia per terra un segnale stradale di forma circolare o un qualsiasi oggetto di forma circolare.

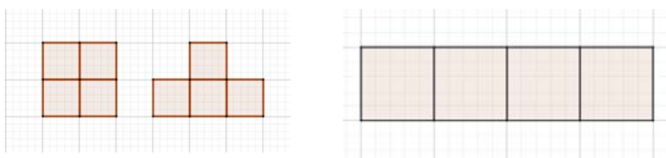
Quando in scienze si studieranno i pianeti si vedrà che essi ruotano intorno al sole proprio disegnando orbite ellittiche.

La terra infatti ruota intorno al Sole descrivendo un'ellisse ed il Sole sta proprio su uno dei due fuochi.

Anche nell'arte e nell'architettura l'ellisse è molto usata: il colosseo di Roma ha una forma ellittica.

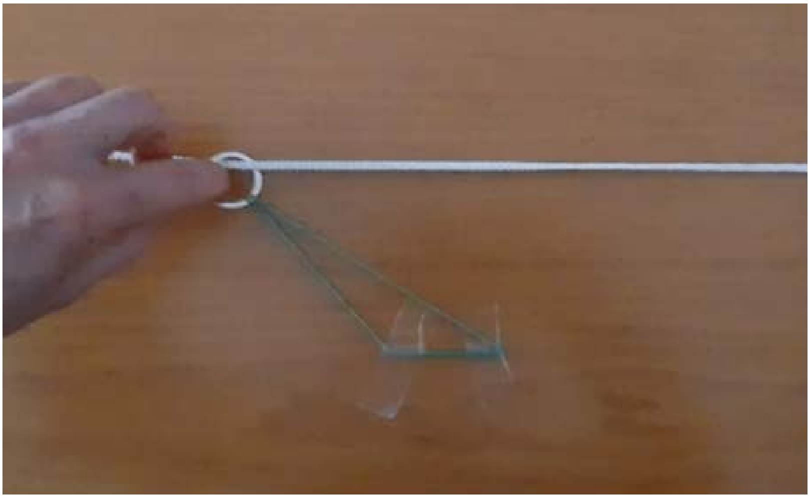
3 - Poligoni equivalenti ma non isoperimetrici

In questo caso possiamo partire da tanti quadratini disposti in modo da formare rettangoli diversi o anche altri poligoni. Costruiamo dei quadratini con dei cartoncini. Il perimetro cambia se i quadratini sono disposti in modo diverso:

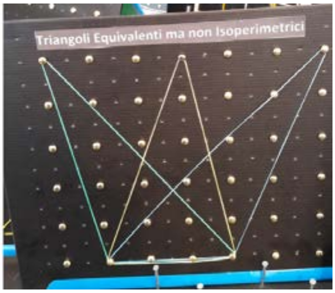


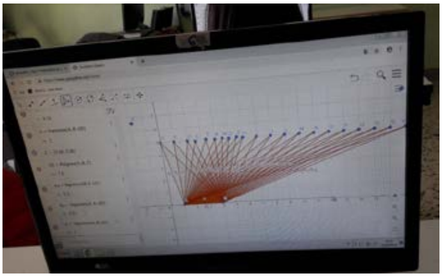
Ma tutte e tre le figure nel complesso hanno la stessa area.

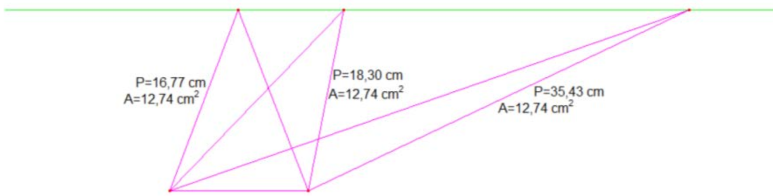
Nel caso dei triangoli di uguale base e uguale area (e quindi uguale altezza), possiamo realizzare un'esperienza pratica. Su una tavoletta di legno costruiamo un triangolo variabile che abbia sempre la stessa base e la stessa altezza. Gli estremi della base sono due chiodi e il vertice opposto è un anellino che può scorrere lungo un filo disposto parallelamente alla base. Un elastico, legato ai due chiodi, passa entro l'anellino, e indica così il triangolo.

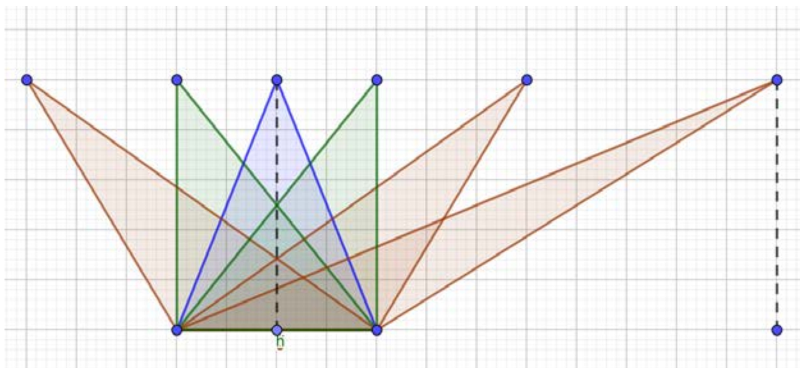


Anche in questo caso, spostando l'anellino, si vede che i triangoli che si possono costruire sono innumerevoli. L'elastico spostato prima a destra o a sinistra, lasciato libero, scorre fino a posizionarsi dove la tensione è minima (ovvero dove diventa isoscele). Si evidenzia così che il triangolo isoscele è quello con perimetro minimo tra quelli che hanno la stessa base e la stessa area. Possiamo realizzare l'esperienza anche sul geopiano con degli elastici o con geogebra.









Si può notare che l'altezza esce fuori dalla figura quando il triangolo diventa ottusangolo. Il caso limite è quando il triangolo è rettangolo. In questo caso l'altezza corrisponde con il lato (triangolo verde). Il triangolo che ha il perimetro minimo è quello isoscele (azzurro).

Vediamo cosa possiamo osservare con i rettangoli equivalenti.

Costruiamo rettangoli che abbiano area uguale a 16 cm^2 e con perimetro che cambia. Quindi troviamo tutte le coppie di numeri naturali il cui prodotto ($base \times altezza$) sia 16.

Base (x)	*altezza (y)*	*Area*
1	*16*	*16*
2	*8*	*16*

4	*4*	*16*
8	*2*	*16*
16	*1*	*16*

Mettiamo tutti i cartoncini su un diagramma cartesiano in questo modo:

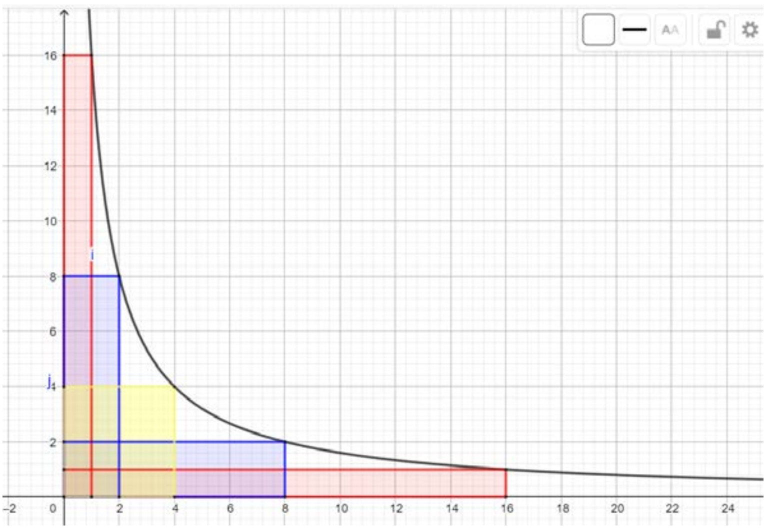
Si può discutere con gli alunni su cosa possiamo dedurre da questo grafico e cosa possiamo dire sui perimetri. Possiamo partire costruendo una tabella:

Base (x)	*Altezza (y)*	*Area*	*Perimetro*
1	*16*	*16*	*34*
2	*8*	*16*	*20*
4	*4*	*16*	*16*
8	*2*	*16*	*20*
16	*1*	*16*	*34*

Osserviamo che il quadrato ha il perimetro minimo tra tutti i rettangoli con la stessa area.

Tutti i vertici mobili hanno una caratteristica: il prodotto tra l'ascissa e l'ordinata è costante ed è uguale a 16.

Questa volta però i vertici mobili non si dispongono su una retta ma su una curva:



Questa curva è un ramo di iperbole.

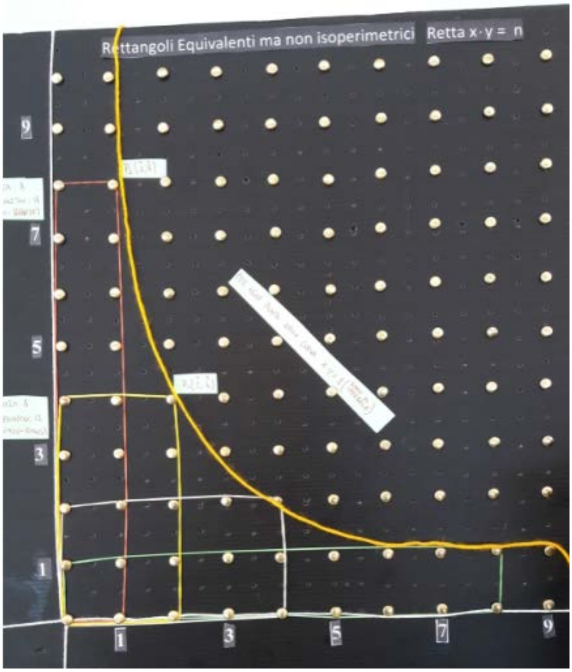
Possiamo scrivere che la curva che vediamo contiene tutti i punti il cui prodotto tra ascissa (x) ed ordinata (y) è sempre 16.

$$x \cdot y = 16$$

O più in generale

$$x \cdot y = n$$

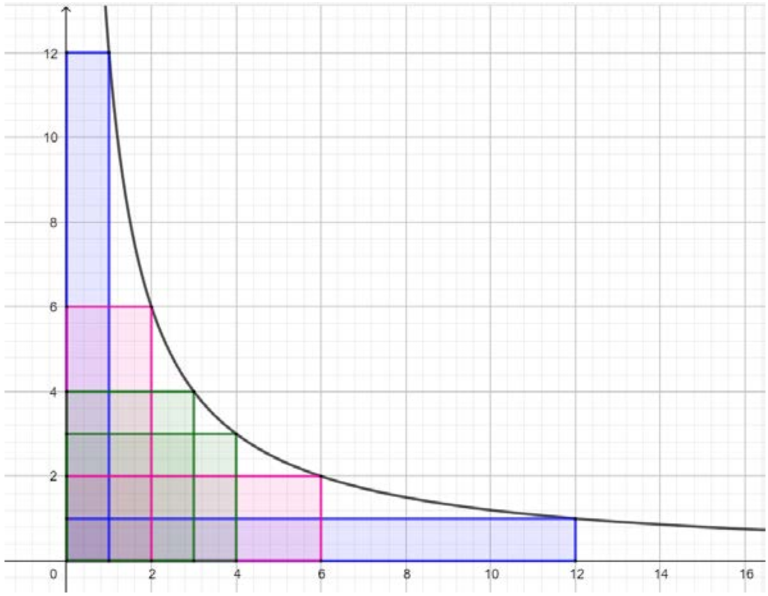
Possiamo costruirla anche con un geopiano:



Consideriamo adesso i rettangoli che hanno area uguale a 12 cm^2 (anche in questo caso usiamo solo numeri naturali per le misure di base ed altezza).

Costruiamo prima la tabella e poi il grafico sul diagramma cartesiano:

Base (x)	*altezza (y)*	*Area*
1	*12*	*12*
2	*6*	*12*
3	*4*	*12*
4	*3*	*12*
2	*6*	*12*
12	*1*	*12*



Possiamo discutere con gli alunni su cosa manca rispetto a prima. Che fine ha fatto il quadrato? In questo caso sembra che manchi. Per quale motivo?

Abbiamo detto prima che lungo il ramo di iperbole ci sono tutti i punti che hanno il prodotto di ascissa ed ordinata costante ed uguale all'area dei rettangoli che stiamo considerando.

Pertanto in questo caso:

$$x \cdot y = 12$$

E se consideriamo solo i numeri naturali non c'è nessun numero che moltiplicato per se stesso dia 12, ovvero che rappresenti il lato di un quadrato di area 12 cm^2.

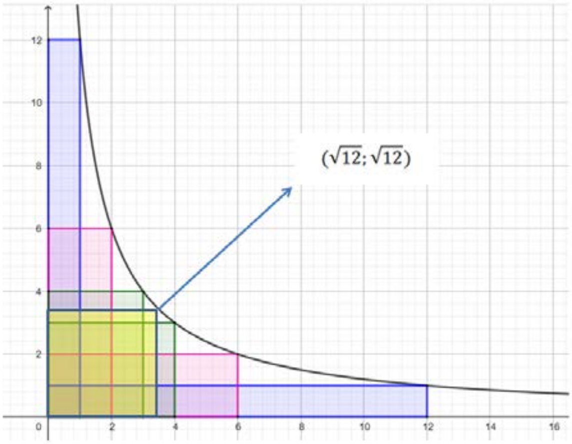
Ma il punto sulla curva c'è.

Corrisponderà ad un punto che ha come coordinate numeri irrazionali:

$$(\sqrt{12};\sqrt{12})$$

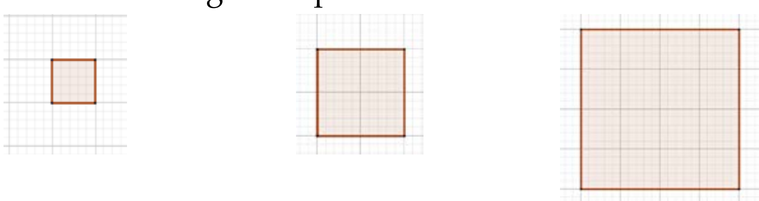
Infatti

$$\sqrt{12}\cdot\sqrt{12}=12.$$



4 - L'area del quadrato cresce rapidamente all'aumentare del lato: la parabola

Consideriamo i seguenti quadrati:



Nel passare dal precedente al successivo cosa è cambiato?

Abbiamo raddoppiato il lato e vediamo che però l'area si quadruplica.

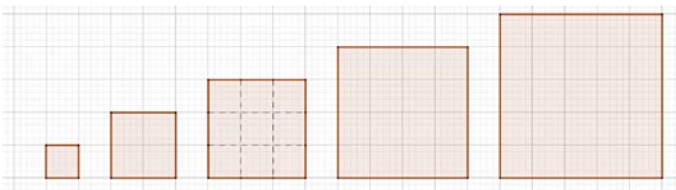
Possiamo fare una tabella:

x (lato)	1	2	4	...
y (area	1	4	16	...

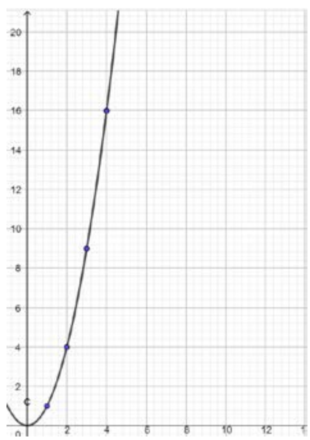
La legge che rappresenta questa situazione possiamo scriverla così:

$$y = x^2$$

Più in generale avremo:



Rappresentiamo la legge così ottenuta su un diagramma cartesiano:



La curva che otteniamo è ancora una volta una parabola.

5 - Conclusioni

Concludendo questo percorso possiamo riflettere su alcuni punti. In particolare sul fatto che è utile mettere in relazione area e perimetro di una stessa figura facendolo sottolineando le differenze che possono sussistere. Questo aiuta a non creare misconcenzioni, a lavorare trasformando le figure facendo variare area e perimetro o mantenendoli costanti. Inoltre il percorso proposto da Emma Castelnuovo e che in questo articolo viene ampliato con costruzioni ed animazioni fatte con un software di geometria dinamica tengono insieme diversi aspetti della matematica trattata nella scuola secondaria di I grado.

Bibliografia

AA.VV. (2012). *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione.*

AA.VV. (2001). *Matematica 2001.*

AZHARI N. (1998). *Using the intuitive rule «Same of A, same of B» in conservation tasks.* Manoscritto non pubblicato, cit. in Stavy, Tirosh.

CASTELNUOVO Emma (1977). *Documenti di un'esposizione matematica.* Torino:Bollati Boringhieri.

CASTELNUOVO Emma (1979). *La matematica.* Firenze: La nuova Italia.

CASTELNUOVO Emma (2017). *Didattica della matematica.* Torino: UTET.

CASTELNUOVO Emma (2017). *Pentole, ombre, formiche.* Torino: UTET.

CASTELNUOVO Emma (2008). *Officina matematica.* La Meridiana.

D'AMORE Bruno (1999). *Elementi di didattica della matematica.,* Bologna: Pitagora.

D'AMORE Bruno (2005). *Relazioni tra area e perimetro: convinzioni di insegnanti e studenti* Pubblicato in italiano: D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2005). *Area e perimetro Relazioni tra area e perimetro: convinzioni di insegnanti e studenti. La matematica e la sua didattica.* Bologna, Italia.

FRANK A.B., DI MARTINO P., NATALINI R., ROSOLINI G.(2016). *Didattica della matematica,* Milano: Mondadori.

https://federazionemathesis.it/link-alle-relazioni-presentazioni-in-formato-pdf