Periodico di Matematica (IV) Vol. V (2) giugno 2023, pp. 89-108

Fisica e matematica delle leggi di evoluzione.

Un' introduzione intuitiva basata sulla ricorrenza

Alessandro Amabile *, Emilio Balzano*, Pietro Piccialli*, Rodolfo Figari **, Giancarlo Artiano***

* Dipartimento di Fisica "Ettore Pancini" - Università Federico II di Napoli
Email: alessandro.amabile@unina.it; balzano@unina.it; pietro.piccialli@gmail.com;
** GSSI, L'Aquila
Email: rodolfo.figari@protonmail.com
*** Dipartimento di Matematica e Fisica - Università degli Studi della Campania Vanvitelli
Email: Giancarlo.Artiano@unicampania.it

DOI : 10.53159 /PdM(IV).v5n2.113

Sunto*: In questo contributo vogliamo sintetizzare un progetto didattico per la presentazione delle leggi di evoluzione dei sistemi fisici che abbiamo sperimentato negli ultimi anni con platee di professori e studenti delle scuole medie superiori. L'intento è quello di affrontare e risolvere le ovvie difficoltà degli studenti nel comprendere significato e uso delle leggi dinamiche nel prevedere l'evoluzione di sistemi fisici reali, legate anche alla mancanza di strumenti matematici adeguati. È nostra opinione che sia necessario che, da una parte, gli studenti acquisiscano un quadro quanto più chiaro possibile dell'apparato formale di una teoria fisica e, dall'altra, che riescano a impossessarsi di metodi computazionali con i quali verificare la reale efficacia della teoria stessa. Siamo altrettanto convinti che il* *significato euristico alla base dell'apparato formale sia acquisibile senza bisogno di conoscere una versione rigorosa e conclusa della matematica della teoria formalizzata. Al contrario, pensiamo che sia utile mostrare agli studenti come l'esigenza di rigore matematico scaturisca dalla necessità di dare una forma precisa a intuizioni forti non ancora formalizzate.*

Parole Chiave*: fisica, didattica, apprendimento, insegnamento*

Abstract*: We outline a unified introduction to the evolution equations of classical systems intended for a high school students audience. The attempt consists in circumventing the lack of mathematical knowledge with the use of a discretized version of the equations of motion and of simplified forms of computation and analysis of their solutions. The aim is to allow students to approach theoretical features as well as computational aspects of the evolution equations through the use of spreadsheets, a work environment students are usually familiar with and an ideal tool for an intuitive approach to recursive computational algorithms. The proposal was presented to an audience composed by students of University courses of Physics teaching and to high school Science teachers.*

Keywords*: Physics, didactic, learning, teaching*

1 – Introduzione

Come si possono superare le difficoltà nel rispondere alle raccomandazioni ministeriali che suggeriscono che la Fisica classica e moderna debbano far parte dei programmi della Scuola Media Superiore? Si noti che non c'è ambito della Fisica (con l'importante eccezione dell'Ottica geometrica) che non faccia uso dell'Analisi Matematica, la quale tuttavia non è parte dei programmi della maggior parte delle scuole medie superiori. D'altra parte, se non ci si vuole accontentare di un'introduzione puramente informativa della Meccanica, è necessario avere la possibilità di affrontare anche gli ambiti teorici che maggiormente poggiano sul Calcolo: la teoria della gravitazione universale, la dinamica del sistema solare, le oscillazioni (lineari e non) dei pendoli e le equazioni delle onde. È in questi ambiti che le leggi della dinamica e l'ipotesi dell'esistenza della forza gravitazionale manifestano tutta la loro potenza esplicativa. La dinamica celeste è stata la scienza del secolo dei Lumi, base della cosiddetta *metafora meccanica* e della convinzione che l'evoluzione di ogni sistema fisico fosse in principio prevedibile con i metodi della Meccanica, a patto di conoscerne con certezza le condizioni iniziali. Ogni paradigma successivo della Fisica, come i sistemi caotici o la dinamica quantistica, sono impossibili da comprendere senza fare riferimento ai successi della teoria newtoniana.

Tuttavia, se ci si limita alla cinematica dei moti rettilinei, a una definizione fenomenologica delle forze (basata sulla seconda legge), allo studio delle macchine semplici e al moto su piani inclinati, non c'è alcuna speranza di far provare agli studenti lo stupore nell'osservare l'efficacia predittiva del semplicissimo modello su cui si basa l'intera Meccanica Classica: insiemi di punti materiali (!) che si attirano con una forza (esistente per ipotesi, sebbene non direttamente visibile), il moto dei quali risulta approssimare con una con una precisione sconcertante i moti dei pianeti del Sistema Solare (!). L'idea che una teoria scientifica costituisca un modello costruito dalla mente umana per dare, tramite un vocabolario di regole di corrispondenza che traducano enti astratti in oggetti concreti, una comprensione della realtà attorno a noi è certamente una convinzione condivisa da molti scienziati e specialisti nell'analisi dei fondamenti della conoscenza. Al di là del portato epistemologico, questa idea ha il merito di far percepire la scienza in maniera laica e curiosa: nulla a che vedere con leggi normative, con fideismo anti-o ultra-razionale o con ricerca di "verità" assolute. Alla scienza non è necessario "credere" (come spesso viene richiesto recentemente), se con la parola scienza si intende semplicemente una conoscenza condivisa sul mondo, storicamente determinata e ritenuta provvisoriamente valida. Non vi è alcun dubbio che domani questa conoscenza condivisa cambierà, per tenere conto di altre osservazioni e di altre acquisizioni teoriche oggi non disponibili. L'etica e la moralità degli interessi coinvolti nella produzione scientifica e delle applicazioni che ne conseguono non sono, purtroppo, garantiti all'interno della scienza stessa.

È nostra opinione che accenni a questo peculiare modo di essere della scienza e al suo statuto epistemologico siano importantissimi da condividere con gli studenti in ogni classe e con ogni platea che frequenti lezioni di Fisica e Matematica.

In questo spirito vogliamo mostrare come le difficoltà degli studenti di Fisica dovute alla mancanza di conoscenze di Analisi Matematica siano collegate a un modello a cui è molto difficile rinunciare: il continuo spazio-temporale. Vogliamo inoltre convincere che i concetti di osservazione e misura dello spazio e del tempo possono rendere le leggi d'evoluzione più intuitive e facilmente utilizzabili ai fini del calcolo. Allo stesso tempo, essi chiariscono quale tipo di linguaggio matematico sua adeguato alla formalizzazione di qualunque teoria del moto dei corpi. In questo modo, inoltre, seguiremo l'evoluzione del pensiero di Newton al quale la caduta della mela (?) suggerì le leggi del moto ben prima di delineare rigorosamente quegli elementi di Calcolo Infinitesimale alla cui formulazione contribuì in maniera così rilevante.

2 - La Dinamica Newtoniana e la Teoria della Gravitazione Universale

L'idea di Newton fu di ipotizzare l'esistenza di una causa al moto dei corpi, ovvero le *forze* che agiscono su di essi, e specificarne l'effetto: la forza produce cambiamenti nel moto naturale, che è quello rettilineo uniforme, inducendo variazioni della velocità proporzionali alla forza stessa. Per prevedere il moto di un corpo l'entità e la direzione della forza agente devono essere note a priori in funzione della sua posizione e della sua velocità. Newton comprese che l'attrazione gravitazionale poteva unificare la spiegazione del moto osservato dei corpi nelle vicinanze della superficie terrestre (proiettili e mele), quello dei pianeti del sistema solare, le maree e il moto oscillatorio del pendolo.

La difficoltà con cui Newton si trovò a confrontarsi derivava, in ultima analisi, dalla concezione di un "tempo assoluto, vero e matematico, che di per sé e per sua natura fluisce in maniera uniforme senza alcun riferimento a nulla di esterno". Questa continuità (implicata nell'idea di flusso) e uniformità del tempo si traduce, in generale, nell'idea di forze agenti sui corpi che cambiano in maniera continua durante il moto. Ma come interpretare e calcolare l'effetto complessivo di un'infinità di forze continuamente variabili?

Newton affrontò il problema con un procedimento articolato in due fasi e basato sull'uso di diagrammi, talvolta chiamati *diagrammi di Newton*:[1]

-la variazione della quantità di moto m**v** del corpo materiale in un "breve" intervallo di tempo Δt è proporzionale all'impulso della forza applicata al corpo durante lo stesso intervallo di tempo. Δt deve essere "sufficientemente breve" da poter ritenere la forza costante in entità e direzione nell'intervallo di tempo. Di conseguenza, l'impulso risulterà approssimato dal prodotto **F**Δt, dove **F** è la forza agente sul corpo all'inizio dell'intervallo.

-la traiettoria è ottenuta come il limite geometrico della spezzata ottenuta considerando il moto rettilineo e uniforme (cioè *inerziale*) in ciascun intervallo.

In formule, per Δt "piccolo" e per un corpo puntiforme, si avrà dunque

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t+\Delta t) - \mathbf{x}(t) = \mathbf{v}(t)\,\Delta t \\ \mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t) = \frac{1}{m}\mathbf{F}(\mathbf{x}(t),t)\,\Delta t \end{cases} \tag{2.1}$$

dove **F**(**x**(t),t) è la forza che agisce sul corpo puntiforme all'istante t quando la sua posizione è **x**(t). La dipendenza della forza dalla posizione deve naturalmente essere ipotizzata a priori.[2]

1 Così sono chiamati da Feynman nella sua celebre lezione perduta, ma in altri ambiti l'espressione ha assunto altri significati.

2 Si noti che una possibile dipendenza della forza dalla velocità (per esempio una forza di attrito) non complica in alcun modo la procedura di ricerca iterativa della soluzione.

La seguente identità vettoriale, che esprime la variazione totale in posizione e velocità della particella puntiforme come la somma degli spostamenti o variazioni delle velocità in ciascun intervallo di tempo [t_{i-1},t_1] (qualunque sia la suddivisione in intervalli di tempo), sarà l'unica conoscenza cinematica richiesta:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t_N) - \mathbf{x}(t_0) &= \sum_{i=1}^{i=N} [\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}(t_{i-1})] = \\ &= \sum_{i=1}^{i=N} \frac{\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} (t_i - t_{i-1}) = \\ &= \sum_{i=1}^{i=N} \mathbf{v}_{t_{i-1,} t_i} (t_i - t_{i-1})\end{aligned} \tag{2.2}$$

dove la velocità media tra gli istanti t e t′ > t è definita come

$$\mathbf{v}_{t,t'} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x(t') - x(t)}{t' - t}$$

Allo stesso modo, la variazione totale di velocità è espressa come

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t_N) - \mathbf{v}(t_0) &= \sum_{i=1}^{i=N} [\mathbf{v}(t_i) - \mathbf{v}(t_{i-1})] = \\ &= \sum_{i=1}^{i=N} \frac{\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} (t_i - t_{i-1}) =\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$= \sum_{i=1}^{i=N} \mathbf{v}_{t_{i-1},t_i} (t_i - t_{i-1})$$

dove l'accelerazione media tra i tempi t e t'>t è definita come

$$\boldsymbol{a}_{t,t'} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\boldsymbol{v}(t') - \boldsymbol{v}(t)}{t' - t}$$

In questo schema di tempo discretizzato si possono facilmente definire il *lavoro*, l'*energia cinetica* e *potenziale* e la *conservatività* delle forze elastiche e gravitazionali. Le leggi dinamiche e le identità cinematiche (2.2), (2.3) permettono di provare la conservazione dell'energia totale a meno di termini che diventano trascurabili quando il passo temporale della suddivisione diventa sufficientemente piccolo.

Per chiarire cosa intendiamo, ricorriamo a un esempio semplice: la "prova" del teorema dell'energia cinetica.

Dall'identità

$$\vec{v}_{i+1} \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{2}|\vec{v}_{i+1}|^2 + \frac{1}{2}|\vec{v}_i|^2 - \frac{1}{2}(\vec{v}_{i+1} - \vec{v}_i) \cdot (\vec{v}_{i+1} - \vec{v}_i)$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i &= \frac{m}{\tau}(\vec{v}_{i+1} - \vec{v}_i) \cdot \vec{v}_i = \frac{m}{2\tau}|\vec{v}_{i+1}|^2 - \frac{m}{2\tau}|\vec{v}_i|^2 - \frac{m}{2\tau}|\vec{v}_{i+1} - \vec{v}_i|^2 \\ &= \frac{1}{\tau}(E_{cin_{i+1}} - E_{cin_i}) - \frac{m\tau}{2}|\vec{a}_i|^2 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Per valori limitati della forza, che implicano valori limitati delle accelerazioni, e per intervallo temporale τ sufficientemente piccolo, (2.4) prova che vale l'eguaglianza tra la velocità di variazione dell'energia cinetica e la potenza della forza ($\equiv \vec{F}_i \bullet \vec{v}_i$). Moltiplicando per τ e sommando su tutti gli i si trova che il lavoro totale della forza differisce dalla variazione totale di energia cinetica per un termine che diventa trascurabile per τ sufficientemente piccolo. Sebbene il procedimento non sia rigorosamente giustificato, esso può essere utile a far comprendere agli studenti le tappe concettuali che conducono a una teoria formalizzata del processo di limite.

Vogliamo sottolineare la concretezza, la semplicità e l'efficacia della discretizzazione temporale, se affiancata da una procedura semplice di calcolare le soluzioni dell'equazione (2.1). È altrettanto chiaro, tuttavia, che una teoria rigorosa non può essere data laddove non si specifichi cosa si intende per valore dell'intervallo temporale "piccolo" (specialmente se si adopera un modello continuo).

Risolvendo l'equazione di ricorrenza (2.1), per esempio mediante un foglio di calcolo, è possibile determinare numericamente il moto di un punto materiale in funzione del tempo. Più precisamente, quando la posizione e la velocità (e quindi la forza) siano note al momento iniziale, l'equazione di ricorrenza fornisce posizione e velocità ad ogni tempo ti. Ogni passo computazionale consiste in un "copia-e-incolla" della riga precedente. Le formule di ricorrenza sono scritte solo nella prima riga tramite riferimenti relativi (a parte i parametri fissati che appaiono come riferimenti assoluti).

Di seguito, mostriamo come la procedura sopra descritta si applica a problemi classici spesso considerati troppo complicati per essere affrontati in un corso di fisica elementare. L'obiettivo è mostrare che l'acquisizione di una comprensione qualitativa e quantitativa delle caratteristiche rilevanti dell'evoluzione di sistemi anche complessi è sicuramente alla portata di studenti della scuola media superiore.

Il primo esempio che vogliamo discutere è la dinamica dei corpi in interazione gravitazionale. A livello di scuola secondaria superiore, l'argomento viene presentato indicando prima le proprietà sperimentalmente verificate della forza gravitazionale. Successivamente, si verifica che un moto circolare uniforme, con velocità angolare e raggio del cerchio in accordo con la terza legge di Keplero, è un'orbita che soddisfa ad ogni tempo la legge del moto.

Sono attualmente presenti in letteratura molte presentazioni semplificate (ma certamente più dettagliate di quelle accennate precedentemente) che introducono il problema a due corpi in maniera diversa e più efficace (vedi per esempio [9]). Noi qui presenteremo due problemi che, secondo noi, sono di grande importanza: il moto dei tre corpi e il moto del pendolo.

Come è noto, Newton utilizzò la legge di gravitazione universale insieme alla seconda legge del moto per analizzare il problema di due corpi in interazione gravitazionale. Egli caratterizzò tutte le possibili orbite e dedusse la validità delle leggi di Keplero del moto planetario. Nei *Principia*, si trova anche il primo tentativo di affrontare il problema dei tre corpi per calcolare gli effetti del Sole sul moto della Luna intorno alla Terra. Non molto tempo dopo, Eulero analizzò una versione semplificata del modello dinamico successivamente indicato da Poincaré come il "problema dei tre corpi ristretto". In questo modello tre punti materiali interagiscono tramite forze gravitazionali; un corpo ha una massa trascurabile rispetto alle masse degli altri due e i due corpi "pesanti" seguono orbite circolari attorno al loro comune centro di massa. Il problema a tre corpi ristretto ha segnato la nascita della teoria delle perturbazioni in meccanica celeste che ha permesso di capire e calcolare le variazioni secolari delle orbite dei pianeti, dando inizio alle indagini sulla stabilità del sistema solare. I risultati della meccanica celeste costituirono senza dubbio il più grande e sorprendente successo della meccanica Newtoniana.

Nel modo descritto sopra, è possibile indagare numericamente l'evoluzione di un sistema a tre corpi ulteriormente semplificato. Per semplicità assumeremo:

- che il corpo più pesante (il Sole) ha una massa MS sufficientemente grande da essere sottoposto ad accelerazioni trascurabili. La sua posizione fissa viene presa come origine del sistema di coordinate cartesiane all'interno del quale si studia il movimento dei due pianeti;

- che il pianeta di grande massa M_e segua un'orbita circolare con velocità angolare costante. La sua posizione al tempo t sarà denotata $\mathbf{x_e}(t) = (x_e(t),y_e(t))$.

- che il secondo pianeta di massa *m* trascurabile rispetto alla massa del primo ha una velocità iniziale nel piano che contiene il Sole e i due pianeti all'istante iniziale, sicché il moto si svolgerà tutto su questo stesso piano. La distanza iniziale del pianeta "leggero" viene presa in un rapporto sufficientemente piccolo rispetto al raggio dell'orbita circolare del pianeta più massivo. Per questa ragione il secondo pianeta verrà identificato come pianeta interno (e il primo come pianeta esterno). Le sue coordinate saranno indicate come $\mathbf{x}(t) = (x(t),y(t))$.

Sotto queste ipotesi, è possibile usare la (2.1) per analizzare il moto del pianeta leggero soggetto all'azione congiunta delle forze gravitazionali del sole e del pianeta esterno, per diverse condizioni iniziali e differenti rapporti di massa.

Nell'esempio che segue le componenti della posizione del pianeta esterno saranno

$$x_e(t) = R_e \cos \omega_e t; \quad y_e(t) = R_e \sin \omega_e t.$$

Le leggi del moto (2.1) avranno la forma

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t+\Delta t) - \mathbf{x}(t) = \mathbf{v}(t)\,\Delta t \\ \mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t) = \frac{1}{m}\left[\mathbf{F}_{M_S m}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{F}_{M_e m}(\mathbf{x}(t),t)\right]\,\Delta t \end{cases} \tag{2.5}$$

dove le componenti x delle forze sul pianeta interno dovute rispettivamente al Sole e al pianeta esterno sono

$$F_{M_S m}(\mathbf{x}(t)) = \frac{G M_S m}{[(x^2(t)+y^2(t))]^{\frac{3}{2}}}\, x(t)$$

$$F_{M_e m}(\mathbf{x}(t),t) = \frac{G M_e m}{[(x_e(t)-x(t))^2+(y_e(t)-y(t))^2]^{\frac{3}{2}}}\, [x_e(t) - x(t)] \tag{2.6}$$

Le componenti y si ottengono rimpiazzando la x con la y.

Impostando le equazioni di ricorrenza nel foglio elettronico, è possibile esaminare il moto del pianeta interno per vari valori dei parametri dinamici (il rapporto M_e/M_S e m/M_S) e per differenti condizioni iniziali. In particolare, gli studenti possono analizzare il regime delle piccole perturbazioni, quando le orbite di entrambi i pianeti sono di tipo Kepleriano. Successivamente, facendo crescere la massa del pianeta esterno, possono osservare le piccole perturbazioni nell'orbita del pianeta interno, arrivando poi al comportamento caotico del sistema, dove possono investigare la forte dipendenza del moto nel lungo periodo dalle condizioni iniziali.

Non appena gli studenti siano consapevoli della possibilità di calcolare soluzioni approssimate delle equazioni di evoluzione, tramite procedure di ricorrenza intuitive, possono essere introdotti a schemi di calcolo più efficienti e più stabili. In particolare, possono iniziare a fare uso di *objected-oriented software* per esaminare i comportamenti complessi di molti sistemi gravitazionali composti da corpi approssimativamente puntiformi. Agli studenti deve essere chiaro che le animazioni prodotte dal software non sono gli output di una scatola nera imperscrutabile - come molte applets presenti sul web tendono di fatto ad essere - ma il risultato dell'ottimizzazione di procedure di calcolo non dissimili da quelle che loro stessi possono implementare su un foglio di calcolo.

Esempi di soluzioni delle leggi evolutive relative a sistemi-modello gravitazionali e le loro animazioni ottenute con un foglio di calcolo o con un software orientato agli oggetti sono disponibili sul sito http://www.les.unina.it/?page_id=4784. Qui di seguito, abbiamo inserito alcune figure che mostrano diversi regimi del moto di due pianeti ottenute mediante un software a oggetti.

Un'altra dinamica indotta dalla gravitazione ed estremamente rilevante nelle sue connessioni storiche e concettuali con la moderna rappresentazione fisico-matematica del "tempo" è il moto dei pendoli. Per inciso, vale la pena ricordare che spesso i libri di testo riportano confuse tautologie sulla definizione "operativa" di intervallo di tempo e di unità di misura del tempo. Da un lato, si sottolinea la necessità di "trovare" (e non "definire") un fenomeno "periodico", quindi le piccole oscillazioni del pendolo si osservano sperimentalmente isocrone utilizzando un cronometro. In questo modo, l'importante osservazione della proporzionalità universale tra periodi di diversi sistemi oscillanti attorno a una posizione di equilibrio è sostituita da una banale tautologia.

Cercheremo di mostrare che il moto del pendolo può essere accuratamente esaminato attraverso la procedura di discretizzazione descritta nelle sezioni precedenti. In particolare, il processo può essere implementato su un foglio elettronico e permette di analizzare il moto oscillatorio di un pendolo, per generiche condizioni iniziali, in presenza di attrito viscoso e termini forzanti (ad esempio utilizzabile per modellare lo scappamento dell'orologio a pendolo). In effetti, il calcolo numerico delle soluzioni della (2.1) è applicabile identicamente ai casi di oscillazioni generate da forze confinanti che dipendono anche non linearmente dallo spostamento rispetto alla posizione di equilibrio.

Le equazioni di ricorrenza per un pendolo nell'intervallo di tempo [0,T], in presenza di attrito viscoso e di un termine forzante sono

$$\begin{aligned} \alpha_i &= -\frac{\beta}{m}\omega_i - \frac{g}{l}\sin\theta_i \\ \omega_i &= \omega_{i-1} + \alpha_{i-1}\tau \\ \theta_i &= \theta_{i-1} + \omega_{i-1}\tau \end{aligned} \tag{2.7}$$

a cui si può aggiungere un termine forzante del tipo

$$\mu e^{-10\theta_i^2}\,(1 + \mathrm{sgn}\omega_i)$$

come modello di scappamento di un orologio a pendolo.

Nella (2.7) a_i (rispettivamente ωi, θi) è l'accelerazione angolare (rispettivamente la velocità angolare e la posizione angolare al tempo $i\tau$ con $\tau = T/N$, β è il coefficiente di smorzamento e μ è il parametro di ampiezza del termine forzante. Quest'ultimo è un breve impulso che agisce solo quando il pendolo si trova vicino alla posizione verticale. Il termine $(1 + \mathrm{sgn}\omega_i)$ rende l'impulso attivo solo quando il pendolo attraversa la posizione verticale da sinistra a destra.

Gli studenti possono esaminare varie caratteristiche del moto. In particolare possono analizzare la dipendenza del periodo di oscillazione T dai parametri delle forze. Si può ad esempio verificare che

- -il periodo mostra variazioni trascurabili per piccole ampiezze di oscillazione ($\theta < 5^\circ$).
- -l'isocronismo si perde per grandi ampiezze di oscillazione.
- -il periodo dipende in modo trascurabile dallo smorzamento: anche se l'ampiezza dell'oscillazione diminuisce.

- -lo scappamento ripristina l'energia persa dall'attrito viscoso senza modificare l'oscillazione

Simulazioni e presentazione grafica dei risultati sono disponibili sul sito http://www.les. unina.it/?page_id=4812.

Con la stessa procedura descritta sopra, è possibile indagare la dinamica dei campi classici. Oltre a ciò che è stato fatto nei casi precedenti, l'analisi numerica di un sistema spazialmente continuo richiede anche un'esplicita discretizzazione delle coordinate spaziali.[3] I campi classici diventano così *funzioni su un reticolo spazio-temporale discreto* e le equazioni di evoluzione sono date come *matrici di transizione* che collegano reticoli spaziali corrispondenti a tempi successivi.

Le vibrazioni longitudinali di una corda elastica sono l'esempio più semplice di dinamica dei corpi deformabili. Un modello di corda elastica uni-dimensionale discretizzato può essere dato da una catena di N punti materiali che interagiscono con i loro vicini attraverso molle elastiche di massa trascurabile, costante elastica k e lunghezza a riposo pari alla spaziatura del reticolo spaziale Δx. Denotando con $s(j\Delta x, n\Delta t)$ lo spostamento rispetto alla posizione di equilibrio della massa j-esima al tempo $n\Delta t$, la forza agente su tale massa risulta

$$F_{j\Delta x,n\Delta t} = k[s((j+1)\Delta x,n\Delta t) - s(j\Delta x,n\Delta t)] - k[s(j\Delta x,n\Delta t) - s((j-1)\Delta x,n\Delta t)] = k[s((j+1)\Delta x,n\Delta t) - 2s(j\Delta x,n\Delta t) + s((j-1)\Delta x,n\Delta t)]. \tag{2.8}$$

3 Si noti che tale discretizzazione è comunque implicita in qualunque calcolo numerico che coinvolge coordinate spaziali, in virtù del numero inevitabilmente finito di cifre decimali utilizzate.

e l'equazione del moto diventa

$$\begin{cases} s(j\Delta x,(n+1)\Delta t) - s(j\Delta x, n\Delta t) = v(n\Delta t)\,\Delta t \\ v((n+1)\Delta t) - v(n\Delta t) = \frac{1}{m}\,F_{j\Delta x, n\Delta t}\,\Delta t \end{cases} \tag{2.9}$$

dove j ha valori da −N/2 a N/2 e n misura il tempo discretizzato. Assegnati s(jΔx) e le velocità v(nΔx) al tempo t=0, la soluzione della equazione di ricorrenza da spostamenti e velocità di ogni punto materiale ad ogni tempo $n\Delta t$.

Gli studenti potranno esaminare come l'evoluzione dipende dalle condizioni iniziali e dai parametri dinamici. Potranno inoltre individuare onde che si propagano e onde stazionarie.

3 – Conclusioni

Il nostro obiettivo era quello di pianificare una strategia unificata per presentare agli studenti delle scuole superiori aspetti teorici e computazionali delle equazioni di evoluzione della fisica classica e moderna. Le difficoltà tecniche che si incontrano nell'affrontare sistemi dinamici complessi in maniera analitica ha spesso impedito di inserire questi argomenti in qualsiasi programma di scuola superiore.

Il tentativo è stato quello di presentare le leggi di evoluzione dei sistemi fisici in maniera comprensibile a una platea studentesca che non conosca l'Analisi Matematica. Ci siamo però proposti di non rinunciare a presentare le idee-forza alla base di ciascuna legge di evoluzione e di fornire agli studenti la possibilità di calcolarne le soluzioni, così da poter valutare la loro efficacia. La proposta delineata sopra è stata presentata nel corso universitario "Didattica della Fisica" rivolto agli studenti del secondo anno in fisica e matematica e in un corso di formazione per insegnanti di scienze delle scuole superiori. Maggiori dettagli e tutte le animazioni e le simulazioni ottenute con l'utilizzo del foglio elettronico o con software a oggetti sono disponibili nella sezione "Risorse Didattiche" del sito http://www.les.unina.it.

Bibliografia

http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/_decreto_indicazioni_nazionali.pdf

BENACKA, J. (2016) "Numerical Modelling with Spreadsheets as a Means to Promote STEM to High School Students". In: «*Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*», *12, 4, 947-964.*

DELLA CORTE A. and RUSSO L. (2016). *La bottega dello scienziato. Introduzione al metodo scientifico*. Bologna: Il Mulino.

GOODSTEIN D. and GOODSTEIN J. (1996). *Feynman's Lost Lecture: The Motion of Planets Around the Sun.* New York: W. W. Norton. Trad. Italiana: *Il moto dei pianeti intorno al Sole. Una lezione inedita di Richard Feynman* (1997). Bologna: Zanichelli.

GRAFFI S. and DEGLI ESPOSTI M. (2003). *Fisica matematica discreta*. Springer Science & Business Media.

ISRAEL G. (1996). *La visione matematica della realtà. Introduzione ai temi e alla storia della modellistica matematica*. Roma-Bari: Laterza.

LEVRINI O. and FANTINI P. (2013). "Encountering Productive Forms of Complexity in Learning Modern Physics". In: «*Science & Education*», *22, pp. 1895-1910.*

MAYO D. G. (1996). *Error and the Growth of Experimental Knowledge*. Chicago: Chicago University Press.

SJØBERG S. (2002). "Science and technology education current challenges and possible solutions". In: E. Jenkins (Ed.), *Innovations in science and technology education*, Vol 8. Paris: UNESCO.

VISTNES, A. I. and HJORTH-JENSEN M. (2005). "Numerical Methods as an Integrated Part of Physics Education", 9th Workshop on Multimedia in *Physics Teaching and Learning (Graz, Austria 9-11 September 2004). arXiv:physics/0505116 [physics.ed-ph].*

WEBER, J. and WILHELM, T. (2020) "The benefit of computational modelling in physics teaching: a historical overview." In: «*European Journal of Physics*», *41, 034003.*


ARTE SCIENZA
magazine
Alessandra Calo', Anna Avelli, Anna Dell' Agata, Anna Maria Pertoldi,
Antonio Castellani, Carlo Rovelli, Caterina Marrone, Franco Valobra,
Fulvio Guerrieri, Georgi Gospodinov, Giuseppe Castelluzzo, Isabella de Paz,
Loretta Cappanera, Luca Nicotra, Luigi Campanella, Luigi Zanni, Paola Dallavalle,
Pierluigi Assogna, Roberto D'Alessandro, Sonia Morganti, Stefano Torossi,
Susanna Schimperna, Ugo Locatelli, Viola Spicuglia
L'IMPERO DEI SENSORI
IMMAGINANDO L'ALDILÀ
LA DIVA SCIENZIATA
CONTINUITÀ E DISCONTINUITÀ NELLA SCIENZA
LA MENTE BICAMERALE
QUANDO IL PUBBLICO TI MANDA ALL'INFERNO
UMANESIMO DIGITALE
Anno IV - N.5 giugno 2023 - Supplemento di ArteScienza
http://www.assculturale-arte-scienza.it
Direttore Responsabile: Luca Nicotra - Direttore di redazione: Isabella De Paz
Registrazione n.194/2014 del 23 luglio 2014 Tribunale di Roma - ISSN online 2385-1961 - Proprietà dell'A. P. S. "Arte e Scienza"