

La crisi dei fondamenti

Dal paradiso di Cantor all'inferno di Gödel

Giovanna Della Vecchia *

* DIARC_Università di Napoli; giovanna.dellavecchia@unina.it



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v5n2.112

Sunto: *La ricerca dei fondamenti della Matematica diede origine, tra la fine del XIX e l'inizio del XX secolo, alla nascita di nuove teorie e all'insorgere di diverse scuole di pensiero impegnate a creare più solide basi logiche e filosofiche della Matematica. Il presente lavoro intende fare alcune riflessioni intorno alla corrente dei "logicisti" che riconducevano i fondamenti della Matematica ai principi della logica e al loro progressivo tentativo di identificare la matematica con la logica.*

Il progetto logicista era destinato a subire però un duro colpo con l'insorgere dei paradossi e soprattutto del paradosso di Russell; gli sforzi compiuti per risolvere il problema impegnò i maggiori matematici del tempo fino a quando, nel 1931, un giovane matematico austriaco, Kurt Gödel, con i suoi teoremi di incompletezza e coerenza, infierì un duro colpo sia al sogno logicista sia all'aspirazione di altri matematici impegnati a risolvere la questione, mettendo ufficialmente fine alla crisi dei fondamenti.

Parole Chiave: *I fondamenti della Matematica, logicismo, paradossi, crisi dei fondamenti.*

Abstract: *The search for the foundations of Mathematics gave rise, in the late 19th and early 20th centuries, to the emergence of new theories and the rise of various schools of thought committed to creating more solid logical and philosophical foundations of Mathematics. This paper aims to make some*

reflections around the current of the "logicians" who saw the foundations of mathematics in the principles of logic and attempted to identify mathematics with logic. However, the logicist project suffers a severe blow with the emergence of paradoxes and especially Russell's paradox; the efforts made to solve the problem engaged the leading mathematicians of the time until, in 1931, a young austrian mathematician, Kurt Gödel, with his incompleteness and coherence theorems, dealt a severe blow to both the logicist dream and the aspiration of other mathematicians committed to solving the question, officially ending crisis of the foundations of mathematics.

Keywords: *The foundations of mathematics, logicism, paradoxes, foundation crisis.*

1 - I fondamenti della matematica

L'attività che più ha impegnato i matematici tra la fine del XIX e i primi decenni del XX secolo si concentra soprattutto sulla ricerca dei «fondamenti», con l'intento di risalire alle basi logiche e filosofiche della Matematica e dare risposte soddisfacenti ai mille problemi riguardanti la natura della Matematica e la validità della Matematica deduttiva.

L'analisi matematica, inaugurata nel XVII secolo da Newton e Leibniz, aveva ottenuto un grosso riscontro tra i matematici e si era sviluppata con enorme successo, ma appariva ancora fragile e priva di fondamenta solide. I concetti di infinitesimo, di differenziale, di limite, efficaci dal punto di vista applicativo, non erano però ben definiti, facevano riferimento all'intuizione geometrica e risultavano privi di uno statuto matematico rigoroso.

Anche d'Alembert avvertiva che si rimaneva un po' nel vago nella presentazione corretta del calcolo infinitesimale, ma incoraggiava coloro che ne intraprendevano lo studio con la frase: «Andate avanti, e la fede vi verrà».

Nel corso del XIX secolo nasceva perciò tra i matematici, soprattutto dell'area tedesca, l'esigenza di dare all'analisi matematica un assetto più rigoroso: particolarmente sensibile a questa tematica si rivelava l'Università di Berlino che annoverava tra i suoi professori Karl Weierstrass. Presso tale Università aveva conseguito il dottorato nel 1867 George Cantor la cui formazione culturale era dunque maturata in questo clima di rigorizzazione dei fondamenti dell'analisi matematica.

Nella mente del giovane tedesco e degli altri matematici suoi contemporanei si faceva sempre più ferma la convinzione che tutta la matematica sviluppata fino ad allora poggiasse su concetti primitivi dati per scontati, su troppi assiomi e postulati ritenuti di per sé evidenti.

In merito a ciò Bertrand Russell affermava successivamente e provocatoriamente che *«postulare è un po' come rubare rispetto al guadagnarsi il pane onestamente»*.

L'esigenza di una fondazione corretta di tutta la Matematica diventava perciò di fondamentale importanza e suscitava un interesse generale anche alla luce di importanti fatti nuovi come la scoperta delle geometrie non euclidee o l'emergere della teoria degli insiemi, elementi di cui era necessario valutare le conseguenze sul piano epistemologico.

2 - La Matematica pura

Grazie alle ricerche e alle conquiste del XIX secolo la comunità scientifica sembrava riconoscere nella Matematica non una scienza naturale ma una creazione dell'intelletto

umano, tanto è vero che Bertrand Russell nel 1901 scriveva sull'International Monthly:

Il XIX secolo, che si vanta di avere inventato la macchina a vapore e la teoria dell'evoluzione, potrebbe a maggior ragione andar fiero della scoperta della matematica pura.

Cantor invece nel 1883 aveva detto:

La matematica è completamente libera nel suo sviluppo e i suoi concetti trovano una limitazione soltanto nella necessità di non essere in contraddizione e di essere coordinati ai concetti introdotti in precedenza da precise definizioni... L'essenza della Matematica sta nella sua libertà.

Tra la fine del XIX e l'inizio del XX secolo, cominciava prepotentemente a maturare l'idea che la Matematica fosse una forma di pensiero assiomatico in cui, partendo da premesse arbitrarie è possibile trarre conclusioni valide.

Che i postulati fossero veri o no non aveva alcuna importanza e ciò portò Russell ad affermare scherzosamente:

La Matematica è quella disciplina in cui nessuno sa di che cosa parli né se ciò che dice sia vero.

L'attenzione dei matematici si spostava dalla ricerca della verità alla ricerca della coerenza.

3 - Le scuole di pensiero intorno ai fondamenti

Gli studi e le ricerche intorno ai fondamenti della Matematica nascevano dunque dall'esigenza di rigore che già

aveva caratterizzato fortemente la matematica ottocentesca e dalla necessità di rifondare l'intero edificio della Matematica su basi assiomatiche. Il tentativo di dare una rigorosa giustificazione formale all'insieme di definizioni e deduzioni su cui si basa l'aritmetica, aveva fatto nascere vere e proprie scuole di pensiero le cui tre principali sono senza dubbio:

- Il logicismo di Russell,
- L'intuizionismo di Brouwer,
- Il formalismo di Hilbert.
-

Il problema monopolizzò l'interesse della comunità scientifica per almeno un trentennio, si deve però riconoscere che non si giunse mai a conclusioni definitive o comunque universalmente condivisibili.

In questo lavoro ci limiteremo ad analizzare alcune questioni riguardanti il progetto logicista e le vicende che condussero al fallimento del tentativo di costruire la matematica sulle fondamenta della logica.

4 - Georg Cantor: *Je le vois, mais je ne le crois pas!*

La storia della ricerca dei fondamenti della Matematica non può non partire da Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor (1845/1918) e dalla sua famosa Teoria degli insiemi che, elaborata a fine 800, era al centro del dibattito sui fondamenti.

Georg Cantor è considerato uno dei fondatori della matematica moderna; con la sua «Teoria degli insiemi» dà una

forte spinta al tentativo di dare alla matematica un assetto logico rigoroso e formalmente ineccepibile.

Si deve a lui il concetto di «numero transfinito» con il quale la matematica, nei limiti del possibile, riesce a manipolare anche gli insiemi aventi infiniti elementi e sottoporli ad una analisi rigorosa e formale.

Uno degli aspetti più interessanti della sua teoria è proprio il problema del confronto tra insiemi infiniti che affronta attraverso i seguenti passaggi:

- fissa il concetto di corrispondenza biunivoca tra due insiemi
- definisce gli insiemi equipotenti
- chiama numerabile ogni insieme equipotente ad N
-

Verifica così facilmente che risultano numerabili:

- Il sottoinsieme di N costituito dai quadrati dei numeri naturali (basta associare ad ogni n il suo quadrato n^2)
- L'insieme Z (basta associare ad ogni n il valore $-n/2$, se n è pari, $(n+1)/2$, se n è dispari)
- L'insieme Q dei numeri razionali (procedimento diagonale).

In merito alla potenza dell'insieme R fa le seguenti osservazioni:

- L'insieme $]0; 1[$ non è numerabile (reductio ad absurdum)
- L'insieme dei punti di una retta è equipotente all'insieme dei punti di un segmento (fig 1)

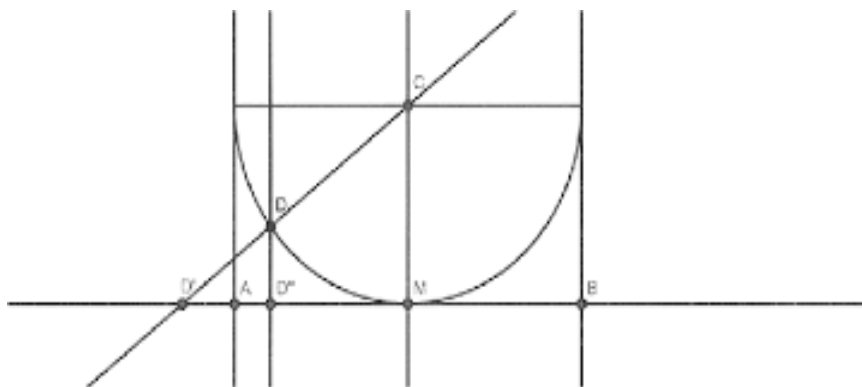


Fig.1

Poiché l'insieme $]0; 1[$ è non numerabile, allora anche l'insieme \mathbb{R} è non numerabile.

I due insiemi hanno la stessa potenza che chiama la "potenza del continuo".

Il problema era chiedersi che relazione esiste tra la cardinalità di \mathbb{N} e la cardinalità di \mathbb{R} , e se esistono insiemi di potenza più elevata del continuo.

Dal teorema di Cantor (ogni insieme A ha potenza minore della potenza di $P(A)$) si ha:

$$|\mathbb{N}| < |P(\mathbb{N})|$$

Posto $|P(\mathbb{N})| = c$ e denotato con \aleph_0 (aleph-zero) la cardinalità di ogni insieme numerabile, risulta dunque

$$c > \aleph_0$$

Se si denota con $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ l'insieme delle applicazioni di \mathbb{N} in $\{0,1\}$, si dimostra che $|P(\mathbb{N})| = |\{0,1\}^{\mathbb{N}}|$.

Infatti, la legge che:

$$\begin{aligned} \text{ad ogni } f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} &\rightarrow X_f = \{n \in \mathbb{N} / f(n) = 1\} \in P(\mathbb{N}) \text{ e} \\ \text{ad ogni } X \in P(\mathbb{N}) &\rightarrow f_X = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in X \\ 0 & \text{se } x \notin X \end{cases} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \end{aligned}$$

è una corrispondenza biunivoca tra gli insiemi $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ e $P(\mathbb{N})$, pertanto è anche

$$c = |\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = 2^{\aleph_0}.$$

Si dimostra poi abbastanza agevolmente che la cardinalità di \mathbb{R} è uguale alla cardinalità di $P(\mathbb{N}) = c = 2^{\aleph_0}$

Nel passare da un insieme al suo insieme delle parti, dunque, la cardinalità aumenta e a partire da \aleph_0 , che è sicuramente il più piccolo numero transfinito (basta pensare che un sottoinsieme di \mathbb{N} o è finito o è numerabile), si riesce a costruire una sequenza di numeri cardinali transfiniti

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \dots$$

Ci si chiede se tra \mathbb{N} ed \mathbb{R} esistono insiemi di cardinalità intermedia che equivale a chiedersi se tra \aleph_0 e $\aleph_1 (= c)$, esistono altri numeri transfiniti.

Cantor non seppe trovare una risposta a questa domanda per cui giunse a formulare una congettura nota come ipotesi del continuo: "Non esiste un insieme di cardinalità intermedia tra numerabile e continuo".

5 - Un aneddoto di Emmy Noether

Dedekind si esprimeva così nei confronti del concetto di insieme: egli si immaginava un insieme come un sacco chiuso, che contenga ben determinati oggetti, che però non si vedono, e dei quali non si sa altro se non che sono dati e determinati. Qualche tempo dopo Cantor diede a conoscere la sua rappresentazione di un insieme: drizzò la sua colossale figura, descrisse con il braccio alzato un gesto grandioso e

disse con uno sguardo sperduto nel vuoto: «io immagino un insieme come un abisso!».

(Dedekind, *Gesammelte Werke*, Brunswik 1932, vol.3 p.449)

6 - Quando la Filosofia incontra la Matematica

La settimana dal 1 al 5 agosto 1900 si tenne a Parigi un importante congresso internazionale di Filosofia: tra i partecipanti c'era, quale ospite d'onore, Giuseppe Peano, uno dei maggiori matematici italiani, e un giovane inglese ancora sconosciuto, Bertrand Russell. Il 3 Agosto Peano fece il suo intervento e parlò delle "definizioni matematiche": Russell rimase folgorato dalle idee di Peano e, a conclusione del convegno, lo avvicinò e gli chiese se avesse del materiale sul quale studiare. Peano aprì la borsa, estrasse delle bozze di suoi lavori e glielne regalò. Quei documenti diventarono l'origine degli studi del giovane inglese che, di lì a poco sarebbe diventato il più grande e famoso filosofo della matematica. Russell, oltre ad essere colpito dalla chiarezza e dall'autorevolezza con cui parlava delle sue ricerche, aveva soprattutto apprezzato il metodo con cui Peano portava avanti i suoi lavori: forse fu proprio quel metodo a suggerire al giovane inglese l'importanza del metodo della logica matematica.

7 - Gottlob Frege e il programma logicista

Oggi pare guadagnare sempre più sostenitori l'opinione che l'aritmetica sia una logica più ampia e che la

giustificazione più rigorosa delle leggi aritmetiche riporti indietro a leggi puramente logiche e solo ad esse. Sono anch'io di quest'opinione e su di essa fondo la richiesta d'includere la notazione aritmetica in quella logica.
(Gottlob Frege, *Funzione e concetto*)

Gottlob Frege (1848-1925), matematico, logico e filosofo tedesco, è stato il primo fautore del “logicismo”, teoria secondo la quale tutta l’aritmetica è riconducibile alla logica.

Il programma logicista di Frege perseguiva due obiettivi:

1. risolvere i concetti matematici, anche quelli considerati non ulteriormente definibili e perciò primitivi, in termini puramente logici;
2. dimostrare i teoremi della matematica mediante l'applicazione dei principi e delle regole di inferenza della logica.

In realtà, nel perseguire tali obiettivi Frege ricostruisce la teoria degli insiemi di Cantor in maniera logica per poi fondare l’aritmetica sull’insiemistica.

Nell’opera *Ideografia*, un linguaggio in formule del pensiero puro a imitazione di quello aritmetico (*Begriffsschrift, Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denken*, 1879) Frege sviluppò un linguaggio simbolico in grado di formalizzare i ragionamenti ed enunciò uno dei principi cardine della teoria degli insiemi, il principio di comprensione (implicitamente presente nella teoria di Cantor), secondo il quale ogni proprietà definisce un insieme: per ogni proprietà $\phi(x)$ che contiene x come variabile libera, esisterà l’insieme $\{x : \phi(x)\}$ i cui membri sono esattamente quegli oggetti che soddisfano $\phi(x)$.

In effetti, Frege considera gli insiemi come «estensioni» di predicati «intensionali».

Poiché «estendere» significa «tirar fuori» e «intendere» vuol dire «tirar dentro», secondo Frege gli insiemi evidenziano in modo esplicito ciò che i predicati asseriscono in modo implicito: dunque ogni predicato definisce un insieme.

8 - Il paradosso di Russell e la crisi dei fondamenti

Se è vero il principio di comprensione secondo il quale ogni proprietà definisce un insieme, è possibile considerare la proprietà di essere un insieme che appartiene a se stesso oppure la proprietà di essere un insieme che non appartiene a se stesso e definirne i relativi insiemi.

Ad esempio è immediato affermare che l'insieme delle tazze da tè non appartiene a se stesso perché non è una tazza da tè (l'esempio è fornito dallo stesso Russell); invece l'insieme delle idee astratte, essendo esso stesso un'idea astratta, appartiene a se stesso. Anche l'insieme degli insiemi contenenti più di un determinato numero di oggetti (ad esempio più di tre oggetti) appartiene a se stesso.

Sia R l'insieme di tutti gli insiemi che non appartengono a se stessi, cioè

$$R = \{x / x \notin x\}$$

Ci chiediamo se R appartiene oppure no a se stesso: in realtà R appartiene a se stesso se e solo se non appartiene a se stesso; viceversa R non appartiene a se stesso se e solo se appartiene a se stesso

allora $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$.

Dunque Russell scopre con sorpresa che la Matematica, ritenuta da sempre immune da contraddizioni, ne può risultare invece contagiata!

Il famoso “paradosso di Russell” è in realtà un’antinomia se si tiene conto del significato delle due parole:

paradosso = parà + doxa = contro l’opinione

antinomia = anti + nomos = contro la legge.

Numerose sono le metafore linguistiche del paradosso di Russell che aiutano meglio a comprenderne il significato; se ne riportano quelle più note e, a mio avviso, più accessibili a chi non è particolarmente esperto di teoria degli insiemi.



Escher, Mani che disegnano

8.1 - Il paradosso dell'eterologicità (Grelling-Nelson,1908)

Un aggettivo si dice autologico se possiede la proprietà che esso denota.

Ad esempio l’aggettivo “corto” è autologico perché la parola “corto” è effettivamente corta; anche “polisillabico” è

un aggettivo autologico. Viceversa un aggettivo si dice eterologico se non è autologico cioè se la proprietà che definisce non è applicabile a se stesso. Ad esempio gli aggettivi "lungo" e "monosillabico" sono eterologici.

Si supponga di ripartire tutti gli aggettivi in due insiemi costituiti uno dagli aggettivi autologici e l'altro dagli eterologici.

Ci si chiede a quale insieme appartenga l'aggettivo "eterologico". Se "eterologico" è autologico allora deve riferirsi a se stesso quindi deve essere eterologico; se "eterologico" è eterologico non si riferisce a se stesso, e quindi deve essere autologico.

In entrambi i casi si ottiene una contraddizione; in altre parole, l'aggettivo "eterologico" è autologico se e solo se è eterologico.

8.2 - Il paradosso del barbiere (Russell, 1918)

Un certo villaggio ha tra i suoi abitanti un solo barbiere. È ben sbarbato e fa la barba a tutti quelli che non si fanno la barba da soli. Ci si chiede allora: Chi rade il barbiere? Se si rade da solo non può radersi da solo per la premessa fatta. Se non si rade da solo deve farsi radere dal barbiere, cioè da sé stesso e quindi si deve radere da solo!

8.3 - Il paradosso del bibliotecario (Gonseth o Skolem?)

Al responsabile di una grande biblioteca viene affidato il compito di produrre gli opportuni cataloghi. Egli compie una prima catalogazione per titoli, poi per autori, poi per argomenti, poi per numero di pagine e così via. Poiché i

cataloghi si moltiplicano, il nostro bibliotecario provvede a stendere il catalogo di tutti i cataloghi. A questo punto nasce una constatazione. La maggior parte dei cataloghi non riporta se stessa, ma ve ne sono alcuni (quali il catalogo di tutti i volumi con meno di 5000 pagine, il catalogo di tutti i cataloghi, ecc.) che riportano se stessi. Per eccesso di zelo, lo scrupoloso bibliotecario decide, a questo punto, di costruire il catalogo di tutti i cataloghi che non includono sé stessi. Il giorno seguente, dopo una notte insonne passata nel dubbio se tale nuovo catalogo dovesse o non dovesse includere se stesso, il nostro bibliotecario chiede di essere dispensato dall'incarico.

http://it.wikipedia.org/wiki/Paradosso_del_bibliotecario

8.4 - Il paradosso di Jourdain (Jourdain, 1913)

Su una facciata di un foglio di carta leggiamo “la proposizione sul retro è vera”, sull'altra “la proposizione sul retro è falsa”. Così, se vogliamo dar fede alla prima affermazione dobbiamo ammettere che essa è falsa, viceversa se la riteniamo falsa vuol dire che la proposizione sul retro deve essere falsa, ma ciò implica che la proposizione sull'altra facciata è vera!!! Purtroppo dobbiamo prendere atto che il primo enunciato è vero esattamente se è falso.

9 - Solatium miseris, socios habuisse malorum!

Il 16 giugno del 1902 Bertrand Russell scrisse a Frege una lettera in cui gli comunicava che i *Grundgesetze der Arithmetik*, da lui pubblicati nel 1893, contenevano una

contraddizione, o meglio, una antinomia, cioè un paradosso logico.

Caro collega,

da un anno e mezzo sono venuto a conoscenza dei suoi Grundgesetze der Arithmetik, ma solo ora mi è stato possibile trovare il tempo per uno studio completo dell'opera come avevo intenzione di fare. Mi trovo completamente d'accordo con lei su tutti i punti essenziali, [...].

C'è solo un punto in cui ho trovato una difficoltà. Lei afferma (p. 17) che anche una funzione può comportarsi come l'elemento indeterminato. Questo è ciò che io credevo prima, ma ora tale opinione mi pare dubbia a causa della seguente contraddizione. Sia w il predicato "essere un predicato che non può predicarsi di se stesso". w può essere predicato di se stesso? Da ciascuna risposta segue l'opposto. Quindi dobbiamo concludere che w non è un predicato. Analogamente non esiste alcuna classe (concepita come totalità) formata da quelle classi che, pensate ognuna come totalità, non appartengono a se stesse. Concludo da questo che in certe situazioni una collezione definibile non costituisce una totalità[...].

*Molto rispettosamente suo
Bertrand Russell.*

La lettera, che fu spedita dal giovane Bertrand Russell proprio mentre Frege stava ultimando la stampa del II volume dei *Grundgesetze der Arithmetik*, è considerata l'episodio che apre ufficialmente la crisi dei fondamenti.

L'antinomia di Russell ebbe infatti una risonanza devastante, sembra che abbia gettato nello sconforto i maggiori specialisti di logica matematica.

Lo stesso Frege, nel 1903, in un'appendice al II volume dei suoi *Grundgesetze* scrisse:

Nulla di più indesiderabile può capitare a uno scienziato del fatto che una delle fondamenta del suo edificio si incrina dopo che l'opera è finita. E' questa la situazione in cui mi trovo in seguito ad una lettera (contenente il paradosso) inviata mi dal sig. Bertrand Russell proprio mentre si stava ultimando la stampa di questo (secondo) volume... Solatium miseris, socios habuisse malorum!

Anch'io ho questo sollievo, se sollievo lo possiamo chiamare: infatti chiunque nelle sue dimostrazioni abbia fatto uso di estensioni di concetti, di classi, di insiemi (compresi i sistemi di Dedekind) si trova nella mia stessa posizione. Non è soltanto questione del mio particolare modo di gettare le fondamenta, ma è in questione la possibilità o meno di dare all'aritmetica un qualsiasi fondamento logico.

10 - I «Principia Mathematica»

Nel 1903 Bertrand Russell, che intanto continua a lavorare sul progetto logicista dà della Matematica la seguente definizione:

La Matematica pura è la classe di tutte le proposizioni aventi la forma "p implica q" dove p e q sono proposizioni contenenti una o più variabili, le quali sono le stesse in entrambe le proposizioni, e né p né q contengono alcuna costante ad eccezione delle costanti logiche.

In realtà egli afferma che la caratteristica principale della Matematica è costituita dalla sua struttura logica, e non da qualunque asserzione che possa scaturire dall'intuito o dal mondo delle sensazioni.

Nel tentativo di superare la sua stessa antinomia dà alla luce, assieme ad Alfred North Whitehead, i tre ponderosi volumi dei "Principia Mathematica", pubblicati tra il 1910 e

il 1913, opera che rappresenta il più grandioso tentativo di realizzare il sogno di Frege di una fondazione logica della matematica.

Nei «Principia Mathematica» Russell e Whitehead realizzano fin nei minimi particolari un programma volto a dimostrare che la Matematica non è distinguibile dalla Logica e che tutta la matematica pura può essere dedotta da un numero ristretto di principi logici fondamentali.

Per superare quell'antinomia che tanto aveva messo in crisi il pensiero logicista, Russell elabora la teoria dei tipi: gerarchie di livelli degli enti logici, organizzati dai più semplici ai più complessi e definiti riferendosi ad enti già dati (Livello 0: gli elementi. Livello 1: gli insiemi di elementi. Livello 2: gli insiemi di insiemi di elementi. E così via).

Più nel dettaglio chiama:

- “elementi primitivi” quegli oggetti che non siano essi stessi insiemi
- “insiemi del primo ordine” quegli insiemi i cui elementi sono elementi primitivi
- “insiemi del secondo ordine” quegli insiemi i cui elementi sono insiemi del primo ordine
- “insiemi del terzo ordine” quegli insiemi i cui elementi sono insiemi del secondo ordine e così via.

Ad esempio:

- $A = \{1,2\}$ è un insieme del primo ordine
- $B = \{\{1,2\}, \{3,4\}\}$ è un insieme del secondo ordine.

Ovviamente esistono anche insiemi del tipo $C = \{1, \{1,2\}\}$.

Chiama poi “omogeneo” un insieme se i suoi elementi sono primitivi o, comunque, tutti dello stesso livello.

Prendendo in considerazione solo insiemi omogenei Bertrand Russell crea un sistema di sicurezza per evitare le antinomie derivanti dalla teoria degli insiemi in quanto nessuno dei suddetti insiemi può contenere se stesso.

Ma gli sforzi compiuti per risolvere il problema non sembrano così ben ripagati: purtroppo si scontrano con la sorprendente conclusione raggiunta nel 1931 da un giovane matematico austriaco, Kurt Gödel (1906-1978).

11 - La fine di un sogno

*Dio esiste perchè la Matematica non è contraddittoria,
e il diavolo esiste perchè non possiamo dimostrarlo
(H. Weyl)*

Nel 1931 Gödel pubblica l'articolo più famoso dell'intera logica matematica: *Über formal unentscheidbare Sätze der «Principia mathematica» und verwandter System I.*

I due principali risultati sono: l'incompletezza dei sistemi formali coerenti, che contengono l'aritmetica elementare; l'impossibilità di dimostrare, all'interno di quei sistemi, la loro coerenza.

Teorema di incompletezza

Senza entrare in tecnicismi di non immediata interpretazione, il lavoro di Gödel dimostra che, all'interno di un sistema rigidamente logico come quello che Russell e Whitehead avevano sviluppato per l'aritmetica, è possibile formulare proposizioni che sono indecidibili o indimostrabili

nell'ambito degli assiomi del sistema. Cioè all'interno del sistema esistono proposizioni che non possono essere né dimostrate né invalidate.

Questo risultato di Gödel si applica, oltre che al sistema di Russell Whitehead, al sistema di Zermelo-Fraenkel e all'assiomatizzazione della teoria dei numeri tanto cara a Hilbert e ai formalisti: praticamente costituisce un duro colpo alle principali correnti di pensiero nate proprio con lo scopo di aggirare la trappola dei paradossi.

Teorema di coerenza

Sia T una teoria matematica sufficientemente espressiva da contenere l'aritmetica: se T è coerente, non è possibile provare la coerenza di T all'interno di T .

Cioè «nessun sistema, che sia abbastanza coerente ed espressivo da contenere l'aritmetica, può essere utilizzato per dimostrare la sua stessa coerenza».

Il secondo teorema di Gödel è di centrale importanza nella crisi dei fondamenti della matematica perché ha storicamente cancellato la possibilità di basare la validità di tutta la matematica sulla coerenza dell'aritmetica formalizzata, non essendo la coerenza dimostrabile con i soli mezzi dell'aritmetica stessa.

Gli sforzi compiuti per perseguire il rigore fino all'exasperazione avevano condotto a un'impasse.

Il dibattito sui fondamenti si protrasse per molti anni ancora, ma andò via via affievolendosi; la crisi dei fondamenti della matematica può considerarsi chiusa proprio nel 1931.

12 - Conclusione

Gödel non credeva che i suoi teoremi avrebbero messo in discussione la fede nella matematica: disse infatti semplicemente che la completezza dell'aritmetica non poteva essere dimostrata dagli assiomi dell'aritmetica, occorreva qualcos'altro.

Infatti i problemi sollevati dai teoremi di Gödel furono affrontati fuori dell'aritmetica, attraverso una nuova branca della logica matematica sviluppatasi verso la metà del XX secolo e nota come metamatematica.

Mi piace perciò terminare con le parole di quei matematici che scrivono sotto lo pseudonimo di Nicholas Bourbaki e che sicuramente incoraggiarono i matematici a uscire dall'impasse e proseguire nel loro lavoro con l'entusiasmo di sempre:

È da venticinque secoli che i matematici hanno l'abitudine di correggere i loro errori e vedere così la loro scienza arricchita, e non impoverita; ciò dà loro il diritto di guardare al futuro con serenità. (N.Bourbaki 1949).

Bibliografia

BOYER Carl Benjamin (1990). *Storia della matematica*. Milano: Oscar Mondadori.

KLINER Morris (1999). *Storia del pensiero matematico II*. Torino: Einaudi.

MESCHKOWSKI Herbert (1973). *Mutamenti nel Pensiero Matematico*. Torino: Boringhieri.

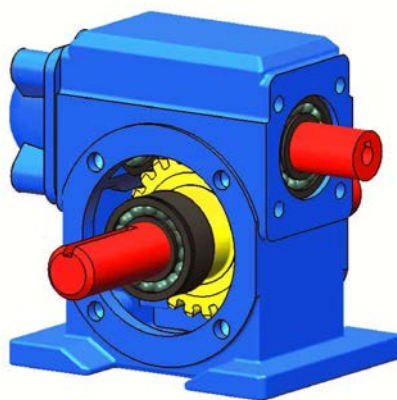
RUSSELL Bertrand (1995). *Introduzione alla filosofia matematica*. Roma: Newton.

ODIFREDDI_Piergiorgio (n.d.). *Vite da logico* 13
<https://www.youtube.com/watch?v=I-dsgyucG9o>

Ingegneria industriale assistita dal computer

La progettazione meccanica con CATIA V5

Luca Nicotra



in riga
edizioni 
Tecnologia
e Innovazione

La modellazione geometrica 3D nella progettazione meccanica con il sistema CAD integrato CATIA V5 della Dassault Systemes (Bologna: InRiga Edizioni, maggio 2023).