Periodico di Matematica (IV) Vol. V (2) giugno 2023, pp. 37-66

Insiemi del V ordine contenenti punti dello spazio

Franco Francia*

*Docente attualmente in pensione; franco.francia40@virgilio.it

DOI : 10.53159 /PdM(IV).v5n2.111

Sunto: *L'articolo introduce allo studio degli insiemi di punti materiali completi del V ordine posizionati nello spazio, ottenuti mediante l'unione di insiemi completi di ordine inferiore appartenenti alla retta e al piano. Le applicazioni vertono sia sulla relazione intercorrente fra le masse dell'insieme completo I e i volumi dei tetraedri i cui vertici sono quaterne di punti del relativo insieme di sostegno J sia sulla possibilità di trasformare insiemi completi mediante sostituzione di punti.*

Parole Chiave: Insiemi completi del V ordine propri e impropri. Il complementare di un insieme completo. Insiemi volumetrici.

Abstract: *The article introduces the study of sets of complete material points of the fifth order positioned in space, obtained by the union of complete sets of lower order belonging to the straight line and to the plane. The applications concern both the relationship between the masses of the complete set I and the volumes of the tetrahedrons whose vertices are quads of points of the relative support set J and the possibility of transforming complete sets by substituting points.*

Keywords: *Proper and improper V-order complete sets. The complement of a complete set. Volumetric sets.*

1 – Insiemi del I, II, III ordine. Il complementare

Richiamiamo brevemente le condizioni di completezza degli insiemi di punti materiali del I, II, III ordine citando teoremi noti contenuti nell'articolo *Insiemi completi del terzo ordine*, Periodico di Matematica, edizioni AFSU, giugno – dicembre 2019.

1. L'insieme di punti $J = (P)$, del primo ordine, contenente un unico elemento, è di sostegno al solo insieme completo improprio: $I = (0\ P)$ (TH.1);
2. L'insieme di punti $J = (P, Q)$, del secondo ordine, è di sostegno al solo insieme completo improprio: $I = (0 \cdot P, 0 \cdot Q)$ (TH.2);
3. Essendo $J = (A, B, C)$ un insieme ternario di punti, si distinguono due casi:
   a. se A, B, C sono punti allineati, J è di sostegno ad un insieme completo proprio: $I = (m\ A, s\ B, n\ C)$ con $m, s, n \in R^*$ (TH.3);
   b. se A, B, C non sono punti allineati, J è di sostegno all'insieme completo improprio: $I = (0 \cdot A, 0 \cdot B, 0 \cdot C)$ (TH.6).

Con riferimento alla def. 7 e al TH.5 riscontrabili nell'articolo di cui sopra, introduciamo la seguente definizione:

Def. 1. Il punto materiale $x \cdot X$, essendo x la massa associata al punto X, è detto complementare dell'insieme binario $(m\ A, n\ B)$ se l'insieme ternario $I: (m\ A, n\ B, x\ X)$ è un insieme completo proprio.

Nota 1. Se $x \cdot X$ è il complementare di *(m A, n B)* devono sussistere le condizioni di completezza di $I = (m\, A, n\, B, x \cdot X)$:

1. $m + n + x = 0$ da cui $x = -(m + n)$;
2. *A, B, X* devono essere punti allineati;
3. Deve risultare:

$$\left|\frac{d(A,B)}{x}\right| = \left|\frac{d(B,X)}{m}\right| = \left|\frac{d(X,A)}{n}\right| = K, \qquad con\ K \in R^*$$

Def. 2. Il punto materiale $y \cdot Y$, essendo *y* la massa associata al punto *Y*, è detto complementare dell'insieme ternario *(m A, n B, s C)* se l'insieme quaternario *(m A, n B, s C,* $y \cdot Y$*)* è un insieme completo, proprio.

Nota 2. Se $y \cdot Y$ è il complementare di *(m A, n B, s C)* devono sussistere le condizioni di completezza di $I = (m\, A, n\, B, s\, C, y \cdot Y)$:

1. $m + n + s + y = 0$ da cui $y = -(m + n + s)$;
2. *A, B, C, Y* devono essere punti complanari;
3. Deve risultare:
   $$\left|\frac{S_{BCY}}{m}\right| = \left|\frac{S_{ACY}}{n}\right| = \left|\frac{S_{ABY}}{s}\right| = \left|\frac{S_{ABC}}{y}\right| = K, con\ K \in R^*$$
   essendo S_{XYZ} il simbolo con il quale rappresentare l'area del triangolo di vertici *X, Y, Z*.

2 – Definizione di punti esterni, punti interni

Def. 3. Sia $J_3 = (A, B, P)$ un insieme ternario di punti allineati. Il punto *P* è detto "punto interno di J_3" se appartiene al segmento *]A,B[;* in caso contrario è detto "punto esterno di J_3".

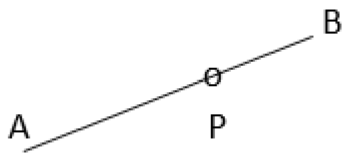
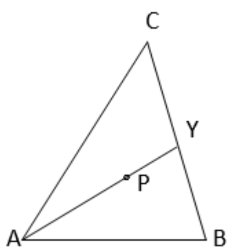
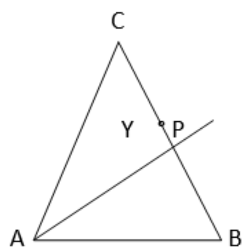


Fig. 1

Def. 4. Siano *A, B, C* tre punti non allineati. Il punto *P* dell'insieme $J_4 = (A, B, C, P)$ è detto "punto interno di J_4" se appartiene al segmento *]X,Y[* essendo *X* un vertice del triangolo $T(J_3)$, con $J_3 = (A, B, C)$, e *Y* un punto del lato opposto al vertice *X*. In caso contrario *P* è detto "esterno di J_3". Il punto *P* è detto "aderente a J_4" se appartiene ad uno dei lati del triangolo $T(J_3)$.





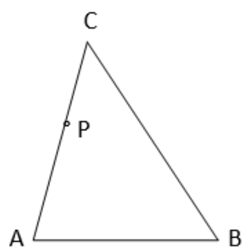


Fig. 2 **Punto interno**	**Fig. 3** **Punto esterno**	**Fig. 4** **Punto aderente**

Def. 5. Sia J_5 un insieme del V ordine contenente quaterne di punti non complanari. Un piano π è detto interno a J_5 se entrambi i semispazi con origine π contengono punti di J_5. Se uno dei due semispazi è vuoto il piano è detto esterno a J_5.

Nota 3. Naturalmente un insieme del V ordine non contenente quaterne di punti non complanari non contiene neppure terne di punti allineati.

Def. 6. Se P è il solo punto di J_5 appartenente al semispazio S′ con origine π, è detto "punto esterno di J_5". È il vertice del poliedro $P(J_5)$.

Def. 7. Un piano π, esterno all'insieme J_5 e contenente almeno un punto di questo insieme, è detto aderente a J_5. Anche gli elementi esterni di J_5, appartenenti ad un piano aderente a π, sono detti "punti aderenti al piano π".

Def. 8. Sia J_5 un insieme del V ordine contenente quaterne di punti non complanari. Sia $J_3 = (A, B, C)$ un sottoinsieme ternario di punti di J_5, aderenti al piano π. Chiamiamo faccia del poliedro $P(J_5)$, il triangolo $T(J_3)$. Diciamo "superficie del poliedro $P(J_5)$", l'insieme di tutte le facce di J_5 che indichiamo così: $S(J_5)$.

Def. 9. Sia Z un punto di J_5, insieme del V ordine contenente quaterne di punti non complanari. Diciamo che Z è punto interno di J_5 se è interno a (X, Y) essendo x un qualsiasi punto di J_5 e Y un punto interno ad un sottoinsieme ternario di J_5, non contenente X

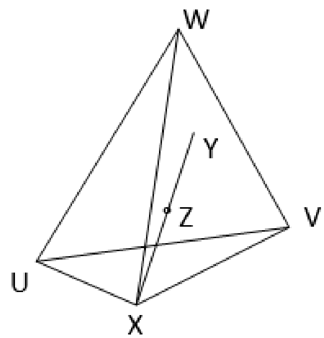


Fig. 5 - Il punto Z è interno al segmento] X Y [essendo X un vertice della piramide e Y un punto interno della faccia triangolare di vertici (U,V,W)

3 – Insiemi completi del V ordine dello spazio generati dall'unione di due insiemi del III e IV ordine completi

Nota 4. Siano $I_3 = (m_1\ A_1,\ m_2\ A_2,\ m_3\ A_3)$, $I_4 = (n_1\ B_1,\ n_2\ B_2,\ n_3\ B_3,\ n_4\ B_4)$ due insiemi completi propri del terzo e quarto ordine; i relativi sostegni siano:
$J_3 = (A_1,\ A_2,\ A_3)$, $J_4 = (B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4)$. Gli elementi di J_4 appartengano al piano π, gli elementi di J_3 a r, retta intersecante π in un punto. Dall'unione di J_3 e J_4 si ottiene un insieme completo del settimo ordine di punti, non tutti complanari, appartenenti allo spazio S. Tuttavia, se i due insiemi, J_3 e J_4, hanno un elemento in comune è possibile ricavare un insieme completo del quinto ordine contenente quaterne di punti materiali non complanari. Ipotizzando un punto in comune fra J_3 e J_4, se J_4 ha un punto interno, si hanno i seguenti casi:

a. Il punto interno A_j di J_3 coincide con il punto interno B_K di

J_4

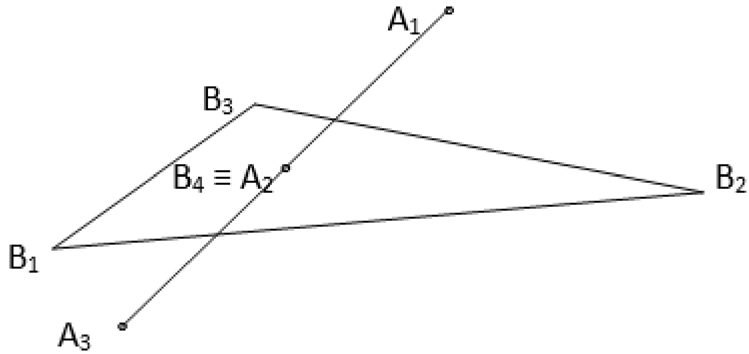


Fig. a - Ai ≡A_2 e B_K ≡ B_4

b. Il punto esterno A_j di J_3 coincide con il punto interno B_k di J_4

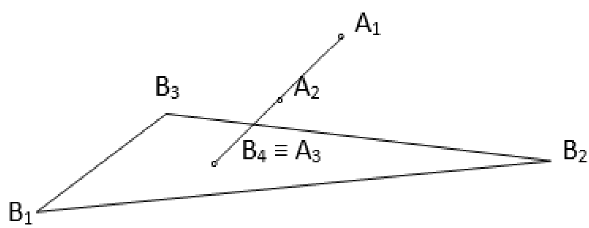


Fig. b - A_i ≡A_3 e B_K ≡ B_4

c. Il punto interno A_i di J_3 coincide con il punto esterno B_k di J_4

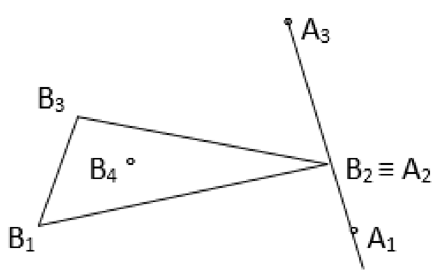


Fig. c - A_i ≡A_2 e B_K ≡ B_2

d. Il punto esterno A_i di J_3 coincide con il punto esterno B_k di J_4

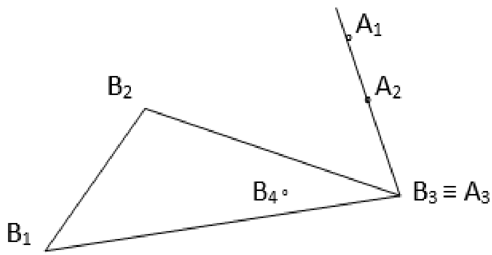


Fig. d - $A_i \equiv A_3$ e $B_K \equiv B_3$

Seguono due casi che si differenziano dai precedenti essendo J_4 un insieme di punti esterni:

e. Il punto esterno A_j di J_3 coincide con il punto esterno B_K di J_4 essendo J_4 un insieme i cui punti sono tutti esterni

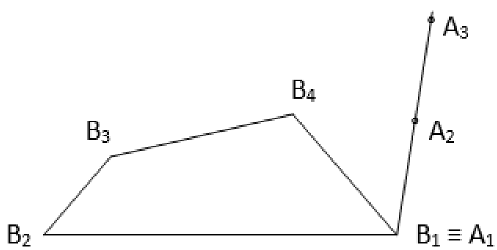


Fig. e - $A_i \equiv A_1$ e $B_K \equiv B_1$

f. Il punto interno A_j di J_3 coincide con il punto esterno B_K di J_4

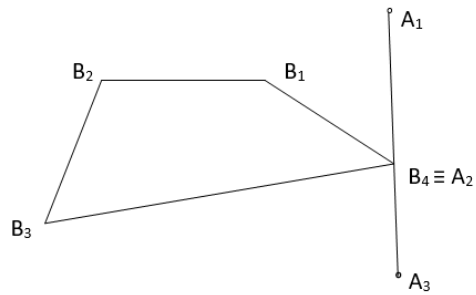


Fig. f - $A_i \equiv A_2$ e $B_K \equiv B_4$

Ricaviamo l'insieme completo del quinto ordine utilizzando le ipotesi contenute nel caso a).

Siano $J_3 = (A_1, A_2, A_3)$, $J_4 = (B_1, B_2, B_3, B_4)$ i sostegni, rispettivamente, degli insiemi completi:

$I_3 = (m_1 A_1, - m_2 A_2, m_3 A_3)$, $I_4 = (n_1 B_1, n_2 B_2, n_3 B_3, - n_4 B_4)$

Avendo posto, convenzionalmente, $m_i > 0$ e $n_j > 0$, il segno negativo dei punti materiali $-m_2\ A_2$ e $-n_4\ B_4$ indica la posizione interna dei punti A_2 *e* B_4, rispettivamente, in J_3 e J_4[1]

Nell'ipotesi che sia: $B_4 \equiv A_2$, come risulta in fig. a, è possibile ricavare due insiemi completi I'_3 e I'_4 equivalenti, rispettivamente, a I_3 e I_4 aventi un punto materiale opposto: moltiplicando I_3 e I_4, rispettivamente, per n_4 e m_2 si ha: $I'_3 = n_4 \cdot I_3$ *e* $I'_4 = m_2 \cdot I_4$; sottraendo membro a membro, si ottiene l'insieme completo:

$I' = I'_4 - I'_3 = m_2 \cdot I_4 - n_4 \cdot I_3$. Sviluppando si ha:

$I' = (n_1 m_2 B_1, n_2 m_2 B_2, n_3 m_2 B_3, -n_4 m_2 B_4, -n_4 m_1 A_1, n_4 m_2 A_2, -n_4 m_3 A_3)$

[1] Osservazione 1, pag. 209 e nota 10, pag 23, rispettivamente, delle riviste *Periodico di matematica* (giugno/dic 2019 e dicembre 2020).

Essendo opposti i punti materiali $-n_4\ m_2\ B_4$ e $n_4\ m_2\ A_2$, riducendo si ottiene:

$I' = (n_1\ m_2\ B_1,\ n_2\ m_2\ B_2,\ n_3\ m_2\ B_3,\ -n_4\ m_1\ A_1,\ -n_4\ m_3\ A_3)$ da cui

$I' = (v_1\ B_1,\ v_2\ B_2,\ v_3\ B_3,\ -v_4\ A_1,\ -v_5\ A_3)$

avendo posto

$v_1 = n_1m_2,\ v_2 = n_2m_2,\ v_3 = n_3m_2,\ v_4 = n_4m_1,\ v_5 = n_4m_3.$

Posto $B_1 = P_1,\ B_2 = P_2,\ B_3, = P_3,\ A_1 = P_4,\ A_3 = P_5$ si ottiene:

$I' = (v_1\ P_1,\ v_2\ P_2,\ v_3\ P_3,\ -v_4\ P_4,\ -v_5\ P_5)$

Essendo $m_1 - m_2 + m_3 = 0$ e $n_1 + n_2 + n_3 - n_4 = 0$ segue che $v_1 + v_2 + v_3 - v_4 - v_5 = 0$ considerando il caso b), nell'ipotesi che sia $B_4 \equiv A_3$, procedendo come sopra si ottiene il seguente insieme completo: $I'' = (v_1\ P_1,\ v_2\ P_2,\ v_3\ P_3,\ -v_4\ P_4,\ v_5\ P_5)$.

Nota 5. Se si esaminassero i casi successivi: c), d), e), f), operando come sopra, si otterrebbero insiemi completi del V ordine analoghi a quello precedentemente ricavato. Tutti questi insiemi risulterebbero ripartiti in due classi:

1. gli insiemi completi contenenti due punti materiali negativi e tre positivi (o viceversa);
2. gli insiemi completi contenenti un punto materiale negativo e quattro positivi (o viceversa).

4 – Punti interni e punti esterni di insiemi completi del V ordine

TH.1 Sia I_5 un insieme completo proprio del V ordine con sostegno $J_5 = (A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ A_5)$ contenente quaterne di punti non complanari. Se $n_i\ A_i,\ n_K\ A_K$ sono elementi di segno concorde di $I_5 = (n_1\ A_1,\ n_2\ A_2,\ n_3\ A_3,\ n_4\ A_4,\ n_5\ A_5)$, allora, $A_i,\ A_K$ sono punti esterni di J_5.

Sia $-(n_1 + n_2)X$ il complementare di una coppia di punti materiali, $n_1\ A_1,\ n_2\ A_2,$ che supponiamo scelta, in modo arbitrario, fra gli elementi di segno concorde di I_5. L'insieme $I' = [n_1\ A_1, -(n_1 + n_2)X,\ n_2\ A_2\ ]$ è completo così come l'unione $I'' = I_5 \cup [(-1)I']$; svolgendo si ha:

$$I'' = (n_3\ A_3,\ n_4\ A_4,\ n_5\ A_5,\ (n_1 + n_2)X)$$

il cui sostegno è: $J''= (A_3,\ A_4,\ A_5,\ X)$. Essendo l'insieme I'' completo, proprio, del IV ordine, *[§ 1, 4)]* i punti dell'insieme J'' devono essere complanari. Supponiamo appartengano al piano π.

Solo i punti A_1 *e* A_2, separati dal punto X, per ipotesi non appartengono a π, ma ai due semispazi S^+ *e* S^-, con origine π, pertanto, per la def. 6, A_1 *e* A_2 sono punti esterni di J_5.

<u>TH.2</u> Sia I un insieme completo proprio del V ordine contenente quaterne di punti materiali non complanari. Se I contiene due elementi di segno concorde, discorde rispetto ai rimanenti elementi dell'insieme, allora, tutti i punti di J, sostegno di I, sono punti esterni.

Esplicitando i segni di I relativi al caso considerato, supponiamo sia: $I = (n_1\ A_1,\ n_2\ A_2,\ n_3\ A_3,\ -n_4\ A_4,\ -n_5\ A_5)$.

Tutti i punti materiali di I appartengono ad almeno una delle seguenti coppie contenenti elementi di segno concorde:

$(n_1\ A_1,\ n_2\ A_2)$, $(n_1\ A_1,\ n_3\ A_3)$, $(-n_4\ A_4,\ -n_5\ A_5)$, $(n_2\ A_2,\ n_3\ A_3)$ pertanto, per il TH.1, tutti gli elementi di $J = (A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ A_5)$ sono punti esterni.

TH.3 Sia I un insieme completo, proprio, del V ordine contenente quaterne di punti non complanari. Se I contiene un punto materiale negativo e quattro positivi (o viceversa), il primo è punto interno di J, insieme di sostegno di I.
I rimanenti sono tutti punti esterni di J.

Sia $I = (n_1 A_1, n_2 A_2, n_3 A_3, n_4 A_4, - n_5 A_5)$, con $n_i > 0$, (1)
l'insieme completo contenente quattro elementi di segno concorde posizionati in (A_1, A_2, A_3, A_4) che, in virtù del TH.1, sono tutti punti esterni di J. Scelta una qualsiasi coppia di punti materiali di I, contenente l'elemento negativo $- n_5 A_5$ e un qualsiasi punto materiale positivo, ad esempio la coppia: $(n_4 A_4, - n_5 A_5)$, risulta definito il relativo complementare $(n_5 - n_4) X$ e l'insieme completo:

$$I' = [n_4 A_4, - n_5 A_5, (n_5 - n_4) X] \qquad (2)$$

Poiché la somma delle masse di (1) è:
$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 - n_5 = 0$, si ha: $n_5 - n_4 > 0$, $n_4 > 0$, $- n_5 < 0$, pertanto A_5 è punto interno della (2). Effettuando l'unione: $I \cup [(-1)I']$ si ottiene l'insieme completo

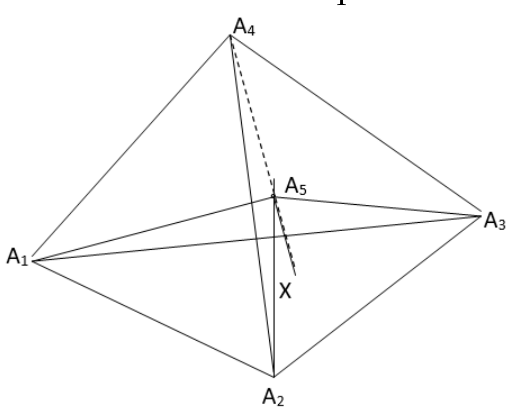


Fig. 6.

$I'' = [n_1 A_1, n_2 A_2, n_3 A_3, n_4 A_4, -n_5 A_5, -n_4 A_4, n_5 A_5, -(n_5 - n_4)X] =$
$= [n_1\ A_1,\ n_2\ A_2,\ n_3\ A_3,\ -\ (n_5\ -\ n_4)\ X]$ il cui sostegno è $J''= [A_1, A_2, A_3, X]$.

Poiché I'' è un insieme quaternario proprio, completo, e contiene un solo punto materiale negativo: $-(n_5 - n_4)\ X$, si ha:

1) A_1, A_2, A_3, X sono punti appartenenti allo stesso piano π;

2) il punto materiale $-(n_5 - n_4)X$, di segno discorde rispetto ai rimanenti punti materiali di I'', è posizionato internamente a J''. Essendo A_4 un punto di I, X interno a J'' e A_5 interno a J', per la def. 9, risulta che A_5 è interno a I.

Nota 6. Se $-\ 3\ k\ \cdot X$ è il complementare di $H = (k \cdot A,\ k \cdot B,\ k \cdot C)$, diciamo che il punto X è il baricentro di H.

Applicazione 1. Sia $J = (A,\ B,\ C)$ un insieme ternario di punti appartenenti al piano π. Sia H il baricentro dei vertici del triangolo $T(J)$ e risulti: $d(A,\ B) = 10,\ d(B,\ C) = 4\sqrt{13}$, $d(A,\ C) = 2\sqrt{37}$. Siano M e N due punti allineati con H, appartenenti, rispettivamente, ai semispazi S^+ e S^- con origine π. Essendo $\frac{d(M,H)}{d(H,N)} = \frac{1}{2}$ e sapendo che $d(A,\ N) = 2\sqrt{11}$, $d(B, N) = 2\sqrt{26}$, $d(C, N) = 2\sqrt{34}$, calcolare $d(M, N)$ e $d(M, B)$.

Essendo H il baricentro di $T(J_1)$, con $J_1 = (A,\ B,\ C,\ H)$, l'insieme $I_1 = (A, B, C, -3\ H)$ è completo. Essendo

$\frac{d(M,H)}{d(H,N)} = \frac{1}{2}$, l'insieme $I_2 = (2\ M, -3\ H, N)$ è completo.

Anche l'insieme $I = I_1 \cup\ (-\ I_2) = (A,\ B,\ C,\ -2\ M,\ -\ N)$ è completo.

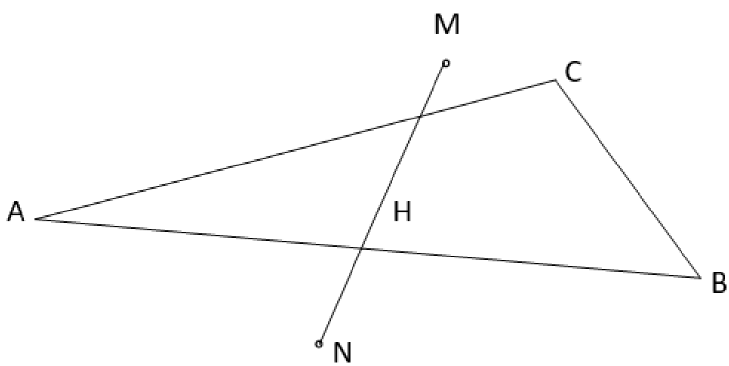


Fig. 7.

Applicando il TH.12 si ha:
$(A, B, C, -2\ M, -N, 2\ M, -2\ N)^2 = (2\ M, -2\ N)^2$ da cui
$(A, B, C, -3\ N)^2 = (2\ M, -2\ N)^2$

Svolgendo si ha l'equazione:
$[d(A, B)]^2 + [d(A,C)]^2 - 3\ [d(A,N)]^2 + [d(B,C)]^2 - 3\ [d(B,N)]^2 +$
$-3\ [d(C,N)]^2 = -4\ [d(M,N)]^2$ la cui soluzione è:
$d(M,N) = 3\sqrt{11}$.

Per calcolare $d(M, B)$ utilizziamo ancora il TH.12:
$(A, B, C, -2\ M, -N, 2\ M, -2\ B)^2 = (2\ M, -2\ B)^2$
$(A, -B, C, -N,)^2 = (2\ M, -2\ B)^2$
$-[d(A, B)]^2 + [d(A, C)]^2 - [d(A, N)]^2 - [d(B, C)]^2 + [d(B,N)]^2 +$
$-[d(C,N)]^2 = -4\ [d(B, M)]^2$ da cui $d(B, M) = \sqrt{59}$.

Applicazione 2. Sia $J = (A, B, C, M, N)$ un insieme contenente quaterne di punti non complanari. Sia π il piano contenente (A, B, C), origine dei semispazi S^+ e S^- contenenti, rispettivamente, M e N, punti appartenenti alla retta t intersecante π in H. Essendo $\frac{d(B,H)}{d(H,T)} = 2$ con T appartenente ad *[A, C]*, soddisfacente la condizione: $\frac{d(A,T)}{d(T,C)} = \frac{3}{5}$, sapendo che *d(A, B) = 12, d(B, C) =* $4\sqrt{5}$, *d(A,C) =* $8\sqrt{25}$, *d(A,N) =* $\sqrt{30}$, *d(B, N) =* $3\sqrt{6}$, d(C, N) = $\sqrt{62}$, *d(C, M) =* $\sqrt{32}$, calcolare *d(M, N)*, *d(A, M)*.

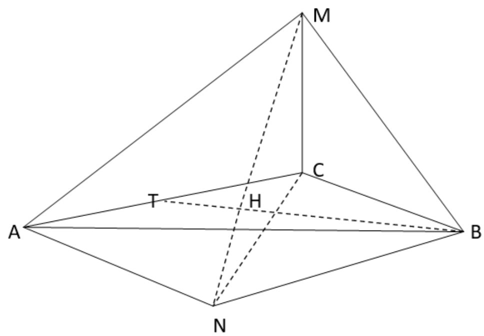


Fig. 8.

Un insieme completo con sostegno *(B, H, T)* è *I′ = (B, –3 H, 2T).*

Un insieme completo con sostegno *(A, T, C)* è *I′′=(5 A,– 8T, 3C).*

Mediante gli insiemi *I′* e *I′′*ricaviamo l'insieme completo con sostegno *(A, B, C, H)*:

I′′′ = [(4 I′) ∪ I′′] = (5 A, 4 B, 3 C, – 12 H).

Attribuendo, in modo arbitrario, massa eguale a 12 ad *H*, indicando con *x* la massa incognita di *M*, l'insieme completo con sostegno *(N, H, M)* diviene:

I^{IV} *= [(x – 12) N, 12 H, – x M]*. Dall'unione di *I′′′* e I^{IV} si ottiene l'insieme completo: *I = I′′′ ∪* I^{IV} *= [(5 A,4 B, 3 C, –x M, (x – 2)N].*

Applicando il TH. 12 citato nella applicazione 1, si ha:

$[I \cup (x\,M, -x\,C)]^2 = (x\,M, -x\,C)^2$

$\{[5\ A\ ,4\ B,\ 3\ C,\ -x\ M,\ (x-12)N] \cup (x\ M,\ -x\ C)\}^2 =$
$=(x\ M\ ,\ -x\ C)^2$
$[5\ A,\ 4\ B,\ (3-x)\ C,\ (x-12)N]^2 = (x\ M,\ -x\ C)^2.$

Sviluppando:
$20\ [d(A,B)]^2 + 5(3-x)\ [d(A,C)]^2 + 5(x-12)\ [d(A,N)]^2 + 4(3-x)\ [d(B,C)]^2 + 4(x-12)\ [d(B,N)]^2 + (3-x)(x-12)\ [d(C,N)]^2 =$
$= -x^2\ [d(M,C)]^2$
$5x^2 - 56x + 144 = 0$ da cui $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{36}{5}$.

Corrispondentemente, sostituendo x_1, x_2 in I si ottengono i due insiemi:
$I_1 = (5\ A,\ 4\ B,\ 3\ C,\ -4\ M,\ -8\ N)$, $I_2 = (25\ A,\ 20\ B,\ 15\ C,\ -36\ M,\ -24\ N)$

Per ricavare $d(M,N)$, $d(A,M)$, relativamente all'insieme I_1, utilizziamo il TH. 12:
$[I_1 \cup (4\ M,\ -4\ N)]^2 = (4\ M,\ -4\ N)^2$
$(5\ A,\ 4\ B,\ 3\ C,\ -4\ M,\ -8\ N,\ 4\ M,\ -4\ N]^2 = (4\ M,\ -4\ N)^2$
$(5\ A,\ 4\ B,\ 3\ C,\ -12\ N)^2 = (4\ M,\ -4\ N)^2$
$20\ [d(A,B)]^2 + 15\ [d(A,C)]^2 - 60\ [d(A,N)]^2 + 12\ [d(B,C)]^2 + - 48\ [d(B,N)]^2 - 36[d(C,N)]^2 = -16\ [d(M,N)]^2$ da cui $d(M,N) = \sqrt{34}$.

Analogamente, per ricavare $d(A,M)$ sviluppiamo l'equazione
$[I_1 \cup (4\ M,\ -4\ A)]^2 = (4\ M,\ -4\ A)^2$
$(5\ A,\ 4\ B,\ 3\ C,\ -4\ M,\ -8\ N,\ 4\ M,\ -4\ A]^2 = (4\ M,\ -4\ A)^2$
$(A,\ 4\ B,\ 3\ C,\ -8\ N]^2 = (4\ M,\ -4\ A)^2$
$4\ [d(A,B)]^2 + 3\ [d(A,C)]^2 - 8\ [d(A,N)]^2 + 12\ [d(B,C)]^2 + - 32\ [d(B,N)]^2 - 24[d(C,N)]^2 = -16\ [d(M,A)]^2$ da cui $d(M,A) = 4\sqrt{6}$.

Operando in modo analogo, nel caso si consideri l'insieme completo I_2, si calcolano $d(M,N)$, $d(A,M)$.

Nota 7. Nell'applicazione successiva si utilizza il metodo esposto nel § 3 per generare un insieme del VI ordine.

Applicazione 3. Due piramidi abbiano in comune la base triangolare i cui vertici, appartenenti al piano π, siano A, B, C. Siano M e N i vertici delle due piramidi, appartenenti, rispettivamente, ai due semispazi S^+ e S^- con origine π. Siano S e T due punti degli spigoli $[N, B]$ e $[M, C]$ e risulti:

$$\frac{d(B,S)}{d(S,N)} = \frac{3}{2}\ ,\ \frac{d(C,T)}{d(T,M)} = 1\ . \qquad (3)$$

Essendo completo l'insieme $I = (8\,A, 5B, 5\,C, -10\,M, -8\,N)$ e sapendo che $d(A, B) = 10$, $d(B, C) = 4\sqrt{10}$, $d(A, C) = 6\sqrt{5}$, $d(A,N) = d(B, N) = d(C, N) = 5\sqrt{3}$, trovare $d(S,T)$.

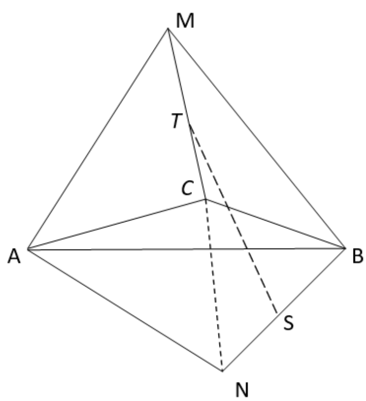


Fig. 9

Dalla (3) si ricavano i due insiemi completi

$I' = (C, -2T, M)$ e $I'' = (2\,B, -5\,S, 3\,N)$.

Dall'unione di I e $(10\,I')$, equivalente ad I', si ha:

$I''' = I \cup (10 \cdot I') = (8\,A, 5B, 5\,C, -10\,M, -8\,N, 10C, -20T, 10\,M)$
$= (8\,A, 5\,B, 15\,C, -8\,N, -20T)$.

(l'insieme I'' è completo e non contiene M). Dall'unione di I''' e $[(-4)I'']$, si ottiene l'insieme del VI ordine:
$I^{IV} = I''' \cup [(-4)I''] = (8\,A, 5\,B, 15\,C, -8\,N, -20T, -8\,B, 20S, -12\,N) =$
$= (8\,A, -3B, 15\,C, -20\,N, -20T, 20S)$.

L'insieme completo I^{V} così ottenuto contiene i due punti materiali: $-20\ T$, $20\ S$ aventi masse opposte. Dovendo calcolare $d(T, S)$, applichiamo il TH.12, citato nella nota 1:
$[I^{IV} - (20\,S, -20T)\,]^2 = (20\,S, -20T)^2$ da cui
$(8\,A, -3\,B, 15\,C, -20\,N)^2 = (20\,S, -20T)^2$
$-24\,[d(A, B)]^2 + 120[d(A, C)]^2 - 160\,[d(A, N)]^2 - 45\,[d(B, C)]^2 +$
$+60\,[d(B,N)]^2 - 300\,[d(C, N)]^2 = -400\,[d(S, T)]^2$ da cui:
$[d(S, T)]^2 = 45$, $d(S, T) = 3\sqrt{5}$.

5 – Relazione fra masse di punti in un insieme completo e volumi

Nota 8. Nella nota 2 del §.1 del Periodico di Matematica del settembre 2021, Ed. AFSU, venivano introdotti i simboli S_{ABC} e S_{ABCD} per indicare l'area di triangoli e quadrilateri. Dovendo trattare, nei paragrafi successivi, solidi geometrici, conveniamo di introdurre simboli analoghi. Per rappresentare il volume di un tetraedro di vertici (A, B, C, D), scriviamo: V_{ABCD}.

TH. 4. Sia $J' = (A, B, C, H)$ un insieme quaternario contenente terne di punti non allineati appartenenti al piano π, con H interno a J'. Sia r la retta intersecante il piano π in H, contenente i punti M e N, con H interno a $J'' = (M, H, N)$.

L'insieme $J = (A, B, C, M, N)$ è di sostegno all'insieme completo:

$$I = (V_{BCMN} \cdot A,\ V_{ACMN} \cdot B,\ V_{ABMN} \cdot C,\ -V_{ABCN} \cdot M,\ -V_{ABC\,M} \cdot \mathrm{N}).$$

Ciascuna massa, associata ad un punto $X \in J$, è il volume del tetraedro i cui vertici sono quaterne di punti di J non contenenti X.

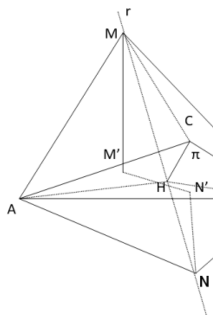


Fig. 10

L'insieme $J' = (A, B, C, H)$ è di sostegno all'insieme completo:

$$I' = (S_{BCH} \cdot A,\ S_{ACH} \cdot B,\ S_{ABH} \cdot C,\ -S_{ABC} \cdot H)$$

essendo la massa di un punto $X \in J'$ eguale all'area del triangolo i cui vertici sono la terna di punti di J' non contenente X. Siano M', N' le proiezioni ortogonali di M e N su π. L'insieme $J'' = (M, H, N)$ è di sostegno all'insieme completo

$$[d(N, H) \cdot M,\ -d(N, M) \cdot H,\ d(M, H) \cdot N] \qquad (4)$$

Posto $d(M, M') = h_1$, $d(N, N') = h_2$, $d(N, M) = h_1 + h_2 = h_0$, essendo simili i triangoli $T(M, M', H)$, $T(N, N', H)$, si ha:

$$d(M, H) = K\, h_1,\ d(N, H) = K\, h_2,\ d(N, M) = K(h_1 + h_2) = K\, h_0\,,$$
$$con \quad K \in R^{+} \qquad (5)$$

Sostituendo le (5) nella (4), dividendo per *K*, si ha:

$$I'' = [h_2\, M,\ - h_0\, H,\ h_1\, N]$$

Moltiplicando *I′* per $\frac{1}{3}\, h_o$ e *I′′* per $\frac{1}{3}\, S_{ABC}$ e sottraendo al primo prodotto il secondo:

$[\frac{1}{3}\, h_0\, (I')] \cup [\frac{1}{3}\, S_{ABC}\, (- I'')]$ si ha:

$[\frac{1}{3} h_0\, S_{BCH}\, A,\ \frac{1}{3} h_0\, S_{ACH}\, B,\ \frac{1}{3} h_0\, S_{ABH}\, C,\ - \frac{1}{3} h_0\, S_{ABC}\, H,\ - \frac{1}{3} h_2\, S_{ABC}\, M,$
$\frac{1}{3} h_0\, S_{ABC}\, H, - \frac{1}{3} h_1\, S_{ABC}]$

Riducendo l'insieme diviene:

$$[\frac{1}{3} h_0\, S_{BCH}\, A,\ \frac{1}{3} h_0\, S_{ACH}\, B,\ \frac{1}{3} h_0\, S_{ABH}\, C,\ - \frac{1}{3} h_2\, S_{ABC}\, M,\ - \frac{1}{3} h_1\, S_{ABC}\, N] \qquad (6)$$

Poiché si ha:
$\frac{1}{3} h_0\, S_{BCH} = V_{BCMN}, \frac{1}{3} h_0\, S_{ACH} = V_{ACMN}, \frac{1}{3} h_0\, S_{ABH} = V_{ABMN}, \frac{1}{3} h_2\, S_{ABC} =$
$= V_{ABCN}, \frac{1}{3} h_1\, S_{ABC} = V_{ABCM}$, sostituendo nella (6) si ottiene la tesi.

Nota 9. Nell'ipotesi che *H* risulti punto esterno di *J′= (N, M, H)*, procedendo come sopra, si ottengono risultati analoghi.

TH. 5. Sia *J′= (A, B, C, H)* un insieme quaternario contenente terne di punti non allineati appartenenti al piano *π*, con *H* interno a *J′*. Sia *r* la retta intersecante il piano *π* in *H* contenente i punti *M* e *N*, con *M* interno a *J′′ = (M, H, N)*. L'insieme
J = (A, B, C, M, N) è di sostegno all'insieme completo:

$$I = (V_{BCMN} \cdot A,\ V_{ACMN} \cdot B,\ V_{ABMN} \cdot C,\ V_{ABCM} \cdot N,\ - V_{ABC\,N} \cdot M).$$

Ciascuna massa, associata ad un punto $X \in J$, è il volume del tetraedro i cui vertici sono quaterne di punti di J non contenenti X.

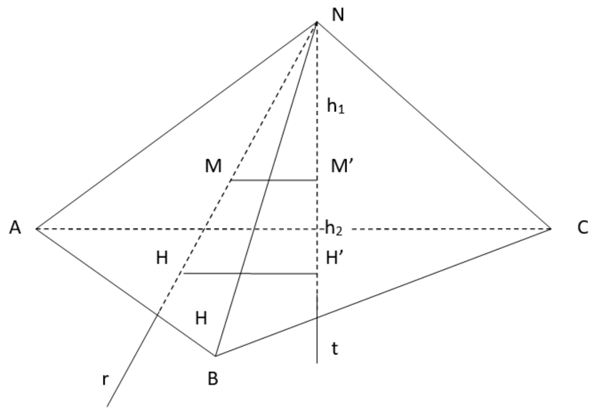


Fig. 11

L'insieme $J' = (A, B, C, H)$ è di sostegno all'insieme completo

$I' = (S_{BCH} \cdot A, S_{ACH} \cdot B, S_{ABH} \cdot C, - S_{ABC} \cdot H)$. (7)

L'insieme $J'' = (M, N, H)$ è di sostegno all'insieme completo

$[d(M, H) \cdot N, - d(N, H) \cdot M, d(N, M) \cdot H]$ (8)

Sia H' la proiezione ortogonale di N su π. Sia t la retta passante per N e H'.

Sia M' la proiezione ortogonale di M su t. Posto:

$d(N, M') = h_1$, $d(M', H') = h_2$, $d(N, H') = h_1 + h_2 = h_0$, dalla similitudine dei triangoli $T(N, M, M')$ e $T(N, H, H')$, si ha:

$d(N, M) = K \cdot d(N, M') = K h_1$, $d(M, H) = K \cdot d(M', H') = K h_2$,
$d(N, H) = K \cdot (h_1 + h_2) = K h_0$ con $K \in R^*$. (9)

Sostituendo le (9) nella (8) e dividendo per K si ha:

$I'' = (h_2 N, -h_0 M, h_1 H)$ (10)

Moltiplicando la (7) per $\frac{1}{3} h_1$ e la (10) per $\frac{1}{3} S_{ABC}$, effettuando l'unione dei due insiemi così ottenuti, si ha:

$[\frac{1}{3} h_1 I'] \cup [\frac{1}{3} S_{ABC} I''] =$

$= [\frac{1}{3} h_1 S_{BCH} \cdot A, \frac{1}{3} h_1 S_{ACH} \cdot B, \frac{1}{3} h_1 S_{ABH} \cdot C, -\frac{1}{3} h_1 S_{ABC} \cdot H,$
$\frac{1}{3} h_2 S_{ABC} \cdot N, -\frac{1}{3} h_0 S_{ABC} \cdot M, \frac{1}{3} h_1 S_{ABC} \cdot H].$

Riducendo si ha:

$[\frac{1}{3} h_1 S_{BCH} \cdot A, \frac{1}{3} h_1 S_{ACH} \cdot B, \frac{1}{3} h_1 S_{ABH} \cdot C, \frac{1}{3} h_2 S_{ABC} \cdot N,$
$-\frac{1}{3} h_0 S_{ABC} \cdot M]$ (11)

Il volume del tetraedro V_{BCHN} può essere così sviluppato:

$V_{BCHN} = \frac{1}{3} h_0 S_{BCH} = \frac{1}{3} h_1 S_{BCH} + \frac{1}{3} h_2 S_{BCH} = \frac{1}{3} h_1 S_{BCH} + V_{BCHM}$

da cui

$\frac{1}{3} h_1 S_{BCH} = V_{BCHN} - V_{BCHM} = V_{BCMN}$

Procedendo in modo analogo possiamo disporre delle seguenti corrispondenze:

$V_{BCMN} = \frac{1}{3} h_1 S_{BCH}$, $V_{CAMN} = \frac{1}{3} h_1 S_{ACH}$, $V_{ABMN} = \frac{1}{3} h_1 S_{ABH}$,
$V_{ABCM} = \frac{1}{3} h_2 S_{ABC}$, $V_{ABCN} = \frac{1}{3} h_0 S_{ABC}$. *(12)*

Sostituendo le (12) nella (11) si ha:

$I = (V_{BCMN} \cdot A, V_{ACMN} \cdot B, V_{ABMN} \cdot C, V_{ABCM} \cdot N, -V_{ABCN} \cdot M).$

Nota 10. Nell'ipotesi che H risulti punto esterno di $J' = (A, B, C, H)$, procedendo come sopra, si ottengono risultati analoghi a quelli ricavati mediante il TH.5 con la variante di avere due punti materiali di segno concorde, discorde rispetto ai rimanenti.

TH.6. L'insieme del V ordine $J = (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$, contenente quaterne di punti non complanari, sia il sostegno di due insiemi completi, propri:
$I' = (m_1 P_1, m_2 P_2, m_3 P_3, m_4 P_4, m_5 P_5)$ e $I'' = (n_1 P_1, n_2 P_2, n_3 P_3, n_4 P_4, n_5 P_5)$.
Si ha: $n_i = K \cdot m_i$ per $i = 1 \cdot 2, \cdot \cdot \cdot, 5$ con $K \in R^*$.

Posto $K = \frac{n_1}{m_1}$, si ha: $K \cdot I' = (n_1 P_1, \frac{n_1}{m_1} m_2 P_2, \frac{n_1}{m_1} m_3 P_3, \frac{n_1}{m_1} m_4 P_4, \frac{n_1}{m_1} m_5 P_5)$.

Sottraendo $K\,I'$ a I'', si ha:
$I''' = (n_1 P_1, n_2 P_2, n_3 P_3, n_4 P_4, n_5 P_5, -n_1 P_1, -\frac{n_1}{m_1} m_2 P_2, -\frac{n_1}{m_1} m_3 P_3, -\frac{n_1}{m_1} m_4 P_4, -\frac{n_1}{m_1} m_5 P_5) = [(n_2 - \frac{n_1}{m_1} m_2) P_2, (n_3 - \frac{n_1}{m_1} m_3) P_3, (n_4 - \frac{n_1}{m_1} m_4) P_4, (n_5 - \frac{n_1}{m_1} m_5) P_5]$.

Essendo completi gli insiemi $(K \cdot I')$ e I'' anche la relativa unione I''' è un insieme completo; essendo del IV ordine e contenendo per ipotesi quaterne di punti non complanari, I''' deve risultare improprio e quindi almeno la massa di un punto di I''' deve risultare nulla: $(n_i - \frac{n_1}{m_1} m_i) = 0$.

L'insieme I''', ridotto del punto $(n_i - \frac{n_1}{m_1} m_i) P_i$, essendo del terzo ordine, non contenente punti allineati, è improprio pertanto le masse di ciascun punto sono tutte nulle:
$(n_2 - \frac{n_1}{m_1} m_2) = 0$, $(n_3 - \frac{n_1}{m_1} m_3) = 0$, $(n_4 - \frac{n_1}{m_1} m_4) = 0$,

$(n_5 - \frac{n_1}{m_1} m_5) = 0$ da cui

$\frac{n_1}{m_1} = \frac{n_2}{m_2}$, $\frac{n_1}{m_1} = \frac{n_3}{m_3}$, $\frac{n_1}{m_1} = \frac{n_4}{m_4}$, $\frac{n_1}{m_1} = \frac{n_5}{m_5}$, eguaglianze che possiamo riscrivere così: $\frac{n_1}{m_1} = \frac{n_2}{m_2} = \frac{n_3}{m_3} = \frac{n_4}{m_4} = \frac{n_5}{m_5} = K$

da cui segue $n_i = K \cdot m_i$.

Def. 10. Due insiemi completi del V ordine, propri, aventi stesso sostegno:

$I'' = (u_1 P_1, u_2 P_2, u_3 P_3, u_4 P_4, u_5 P_5)$,

$I'' = (v_1 P_1, v_2 P_2, v_3 P_3, v_4 P_4, v_5 P_5)$

sono detti equivalenti.

Def. 11. Indichiamo con U la classe di insiemi equivalenti con sostegno $J = (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$.

Se $I = (m_1 P_1, m_2 P_2, m_3 P_3, m_4 P_4, m_5 P_5)$ appartiene ad U e le masse m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 coincidono, rispettivamente, con i volumi dei tetraedri i cui vertici appartengono a J: V_{2345}, V_{1345}, V_{1245}, V_{1235}, V_{1235}, diciamo che I è l'insieme volumetrico della classe di equivalenza.

Applicazione 4. Sia $J = (A, B, C, M, N)$ un insieme del V ordine contenente quaterne di punti non complanari. Il volume del tetraedro $T(A, B, C, N)$ risulti: $V_{ABCN} = 16$ essendo:

$d(A,B) = 8$, $d(B,C) = 6\sqrt{2}$, $d(A,C) = 2\sqrt{10}$, $d(A,N) = 3$, $d(B,N) = \sqrt{41}$, $d(C,N) = \sqrt{29}$. Sapendo che H è punto interno sia di $J' = (A, B, C, H)$ sia di $J'' = (N, H, M)$, trovare le distanze $d(MA)$, $d(M,B)$, $d(M,C)$, $d(M,N)$ affinché i volumi dei tetraedri: $T(B, C, N, M)$, $T(A, B, N, M)$, $T(A, C, N, M)$ siano: $V_{B,C,N,M} = 24$, $V_{A,B,N,M} = 8$, $V_{A,C,N,M} = 16$.

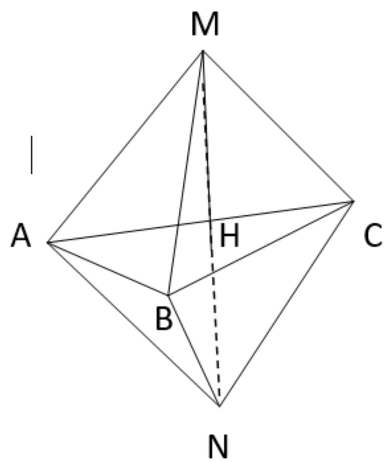


Fig. 12

Posto $m_i > 0$, gli insiemi completi aventi sostegno, rispettivamente, J' e J'', sono:
$I' = (m_1 A, m_2 B, m_3 C, - m_4 H)$ e $I'' = (m_5 N, m_6 M, - m_7 H)$.

Moltiplicando I' per m_7, I'' per m_4 e sottraendo al primo insieme il secondo si ha:
$m_7 I' - m_4 I'' = (m_1 m_7 \cdot A, m_2 m_7 \cdot B, m_3 m_7 \cdot C, - m_4 m_7 \cdot H, - m_4 m_5 \cdot N, - m_4 m_6 M, m_4 m_7 \cdot H) =$
$= (m_1 m_7 \cdot A, m_2 m_7 \cdot B, m_3 m_7 \cdot C, - m_4 m_5 \cdot N, - m_4 m_6 M)$. (13)

Per il TH.6 si ha: $m_1 m_7 = K \cdot V_{BCNM}$, $m_2 m_7 = K \cdot V_{ACNM}$, $m_3 m_7 = K \cdot V_{ABNM}$, $m_4 m_5 = K V_{ABCM}$, $m_4 m_6 = K \cdot V_{ABCN}$ con $K \in R^*$. Sostituendo nella (13) si ha:
$(K V_{BCNM} \cdot A, K V_{ACNM} \cdot B, K \cdot V_{ABNM} \cdot C, - K \cdot V_{ABCM} \cdot N, - K \cdot V_{ABCN} \cdot M)$.

Dividendo per K si ottiene l'insieme volumetrico:
$I_v = (V_{BCNM} \cdot A, V_{ACNM} \cdot B, V_{ABNM} \cdot C, - V_{ABCM} \cdot N, - V_{ABCN} \cdot M)$.

Essendo $V_{ABCM} = (V_{BCNM} + V_{ACNM} + V_{ABNM}) - V_{ABCN} =$ $= (24 + 16 + 8) - 16 = 32$, l'insieme volumetrico I_V diviene: $(24 \cdot A, 16 \cdot B, 8 \cdot C, -32 \cdot N, -16 \cdot M)$
da cui l'equivalente $I = (3 \cdot A, 2 \cdot B, C, -4 \cdot N, -2 \cdot M)$.

Calcoliamo $d(M, A)$ mediante il TH.12 (Nota 1): $[I \cup (2M - 2A)]^2 = (2M - 2A)^2$ da cui $(A, 2 \cdot B, C, -4 \cdot N)^2 = (2M - 2A)^2$. · Sviluppando, si ha:
$2\,[d(A, B)]^2 + [d(A, C)]^2 - 4\,[d(A, N)]^2 + 2\,[d(B, C)]^2 +$
$- 8\,[d(B, N)]^2 - 4\,[d(C, N)]^2 = -4\,[d(A, M)]^2$
$2 \cdot 64 + 40 - 36 + 144 - 328 - 116 = -4\, d(A, M)]^2$ da cui $d(A, M) = \sqrt{42}$.

Procedendo in modo analogo si ricava: $d(M, B) = \sqrt{26}$, $d(M, C) = 5\sqrt{2}$, $d(M, N) = 5\sqrt{3}$.

Applicazione 5. Sia $T(A, B, C, D)$ il tetraedro regolare inscritto nella sfera di raggio R e centro M . Sia Q il punto che divide il segmento $[A, M]$ secondo il rapporto $\frac{d(M,Q)}{d(Q,A)} = \frac{1}{4}$. Trovare i volumi del tetraedri $T(A, B, C, Q)$, $T(A, B, D, Q)$, $T(B, C, D, Q)$, $T(A, C, D, Q)$.

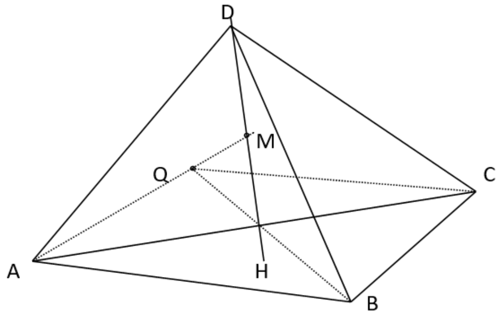


Fig. 13

L'insieme completo con sostegno $J' = (A, B, C, D, M)$ è $I' = (A, B, C, D, -4M)$.

L'insieme completo con sostegno $J'' = (A, Q, M)$ è $I'' = (A, -5Q, 4M)$.

Effettuando l'unione di I' e I'' e riducendo, si ha: $I''' = (2A, B, C, D, -5Q)$.

L'insieme volumetrico equivalente a I' è:
$I_V' = (v \cdot A, v \cdot B, v \cdot C, v \cdot D, -4v \cdot M)$ essendo $4v = V_{ABCD} = \frac{8}{27} R^3 \sqrt{3}$. L'insieme volumetrico equivalente a I''' è
$I_V''' = (2K \cdot A, K \cdot B, K \cdot C, K \cdot D, -5K \cdot Q)$. Essendo la massa $(5K)$ di Q eguale a V_{ABCD}, si ha:

$(5K) = V_{ABCD} = \frac{8}{27} R^3 \sqrt{3}$ da cui $K = \frac{8}{27 \cdot 5} R^3 \sqrt{3}$. Sostituendo la K in I_V''' si ha:

$$I_V''' = \left(\frac{16}{27 \cdot 5} R^3 \sqrt{3} \cdot A, \frac{8}{27 \cdot 5} R^3 \sqrt{3} \cdot B, \frac{8}{27 \cdot 5} R^3 \sqrt{3} \cdot C, \frac{8}{27 \cdot 5} R^3 \sqrt{3} \cdot D, - \frac{40}{27 \cdot 5} R^3 \sqrt{3} \cdot Q \right)$$

da cui:

$$V_{BCDQ} = \frac{16}{27 \cdot 5} R^3 \sqrt{3},\ V_{ACDQ} = \frac{8}{27 \cdot 5} R^3 \sqrt{3},\ V_{ABDQ} = \frac{8}{27 \cdot 5} R^3 \sqrt{3},$$
$$V_{ABCQ} = \frac{8}{27 \cdot 5} R^3 \sqrt{3}.$$

TH.7 Sia $I' = (m_1P_1, m_2P_2, m_3P_3, m_4P_4, m_5P_5)$ un insieme completo proprio con sostegno $J' = (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$. Se la massa m_i di un qualsiasi punto materiale $m_i P_i$ di I' è eguale al volume del tetraedro i cui vertici sono $\{J'\} - \{P_i\}$, allora, I' è l'insieme completo, volumetrico, della classe di appartenenza di I'.

Supponiamo, per assurdo, che l'insieme volumetrico, appartenente alla stessa classe di equivalenza di I', sia: $I'' = (v_1P_1, v_2P_2, v_3P_3, v_4P_4, v_5P_5)$. Per il TH.6, fra le masse di I' e I'' intercorre la seguente relazione:

$v_i = K \cdot m_i$, con $K \in R^*$ (14)

pertanto si ha: $K \cdot I' = (K \cdot m_1P_1, K \cdot m_2P_2, K \cdot m_3P_3, K \cdot m_4P_4, K \cdot m_5P_5) = (v_1P_1, v_2P_2, v_3P_3, v_4P_4, v_5P_5) = I''$ (15)

Poiché, per ipotesi, $m_i = v_i$, dalla relazione (14) risulta $K = 1$. Sostituendo $K = 1$ nella (15) si ha: $I' = I''$.

Applicazione 6. Sia $J = (A, B, C, N, M)$ l'insieme del V ordine, contenente quaterne di punti non complanari, sostegno dell'insieme completo volumetrico

$$I_v = [\frac{20}{3}A, \frac{16}{3}B, 4\,C - 20\,M, 4\,N]$$

Sia P un punto allineato con A e M, con M interno a $J' = (A, M, P)$, e risulti: $\frac{d(P,M)}{d(M,A)} = \frac{2}{1}$. Calcolare i volumi dei tetraedri i cui vertici appartengono a $J'' = (A, B, C, N, P)$.

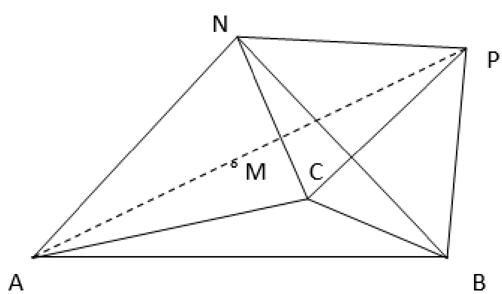


Fig. 14

L'insieme completo I', con sostegno J', è $I' = (2\ A, -3\ M, P)$.

Indichiamo con I'' l'insieme $(3 \cdot I_V) \cup (-20\ I')$. Si ha:

$$I'' = (20\ A, 16\ B, 12\ C, -60\ M, 12\ N, -40, 60\ M, -20\ P).$$

Riducendo si ha:

$$I'' = (-20\ A, 16\ B, 12\ C, 12\ N, -20\ P).$$

L'insieme completo I'' è volumetrico in quanto sia la massa del punto materiale $20\ M$, appartenente a I_V, sia la massa del punto materiale $20\ P$, appartenente a I'', corrispondono al volume dello stesso tetraedro $T(A, B, C, N)$.

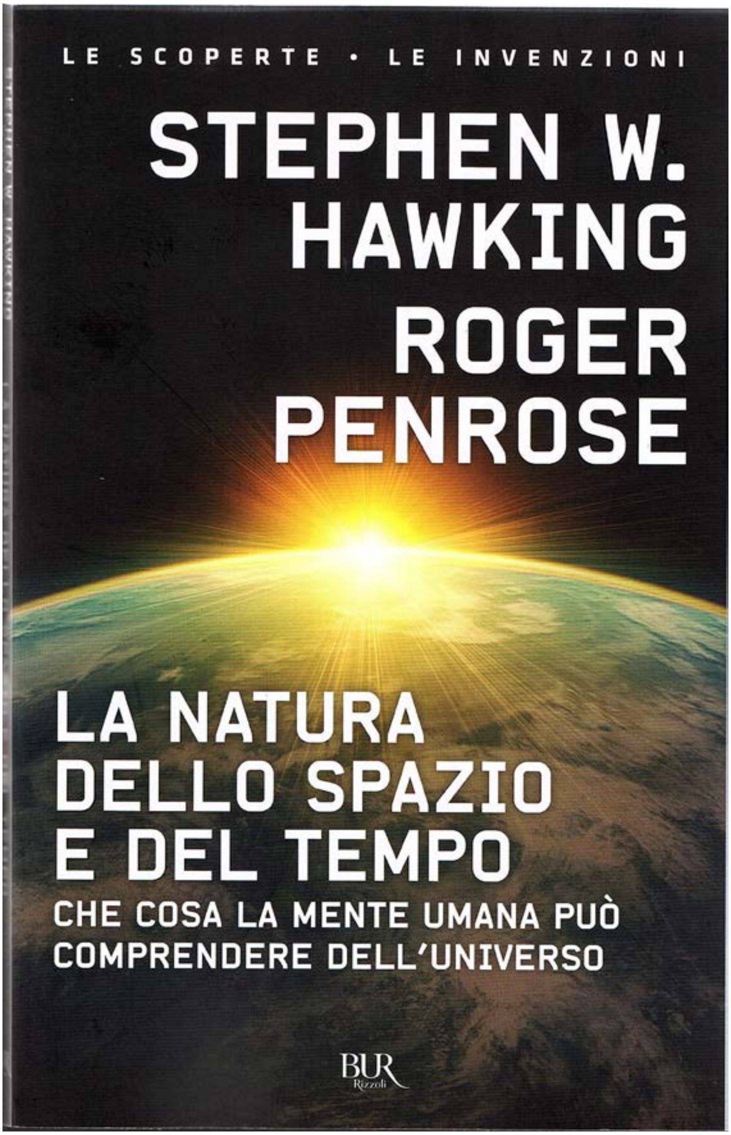
Per il TH.7, poiché la massa del punto P è eguale a 20, l'insieme I'' è volumetrico; conseguentemente le masse degli elementi di I'' corrispondono ai volumi dei tetraedri i cui vertici appartengono a (A, B, C, N, P).

Bibliografia

FRANCIA Franco (1985). Insiemi di punti materiali.« *Archimede*».

FRANCIA Franco (2019). Insiemi completi del terzo ordine- «*Periodico di Matematica*» (IV), Vol. I (1-2). Roma:Edizioni AFSU.

FRANCIA Franco (2020). Insiemi completi del quarto ordine. «*Periodico di Matematica*» (IV), Vol. II (1). Roma:Edizioni AFSU.


LE SCOPERTE • LE INVENZIONI
STEPHEN W. HAWKING
ROGER PENROSE
LA NATURA DELLO SPAZIO E DEL TEMPO
CHE COSA LA MENTE UMANA PUÒ COMPRENDERE DELL'UNIVERSO
BUR
Rizzoli