Periodico di Matematica (IV) Vol. V (1) marzo 2023, pp. 83-98

Il Teorema di Pitagora “senza parole”

Angela Donatiello* Francesco Laudano**

* Dipartimento di Matematica – Università degli Studi di Salerno; adonatiello@unisa.it
** Liceo M. Pagano di Campobasso; francesco.laudano@unimol.it

DOI : 10.53159 /PdM(IV).v5n1.107

Sunto: *In questo lavoro mostriamo che è possibile insegnare e apprendere la geometria mediante un percorso che, partendo da un'esplorazione storica, si sviluppa attraverso l'analisi di dimostrazioni "senza parole". Riteniamo che questo approccio possa promuovere lo sviluppo di competenze matematiche poiché coinvolge gli studenti, anche mediante l'uso della geometria dinamica, nella ricerca di nuove semplici estensioni del teorema di Pitagora. Gli argomenti proposti possono essere uno spunto per la costruzione di attività in classe.*

Parole Chiave: *Teorema di Pitagora; prova senza parole; geometria dinamica; ceviana.*

Abstract: *In this paper we show that it is possible to teach and learn geometry through a pathway that, starting with a historical exploration, develops by means of the analysis of "without word" demonstrations. We believe that this approach can promote the development of mathematical skills as it engages students, including the use of dynamic geometry, in finding new simple extensions of the Pythagorean theorem. The proposed topics can be a starting point for constructing classroom activities.*

Keywords: *Pythagorean theorem; proof without words; dynamic geometry; cevian.*

1 – Introduzione

Ad almeno 2500 anni dalla sua scoperta, il teorema di Pitagora è ancora una fonte inesauribile di spunti di riflessione, un tesoro in grado di rivelare molte sorprese e di attrarre gli studenti verso la matematica. L'indiscutibile fascino del "Teorema" è dovuto alla sua doppia natura algebrico-geometrica ed alla possibilità di dimostrarlo ed estenderlo in molti modi, alcuni davvero spettacolari (tra le prove più recenti segnaliamo (Molokach, 2019), (Heo, 2017), (Nicollier, 2018), (Luzia, 2016), (Rahim, 2003), (Wares, 2017). Tuttavia, il teorema di Pitagora viene spesso insegnato in classe considerandone solo l'aspetto aritmetico, sebbene esistano centinaia di prove geometriche, alcune delle quali molto formative (Loomis, 1968).

Come mostrato in (Merzbach, 1968, p. 44), Pitagora di Samo (570 - 495 a.C.) fondò a Crotone la nota scuola matematico-filosofica, che ricorda in parte i culti orfici. La caratteristica più evidente dell'ordine pitagorico era la fiducia che manteneva negli studi filosofici e matematici come base per la condotta di vita. Secondo Proclo, la nuova enfasi posta sulla matematica è dovuta principalmente ai Pitagorici per i quali la matematica era più strettamente legata all'amore per la saggezza che alle necessità della vita pratica. Pitagora e la sua scuola rimangono comunque avvolti ancora nell'oscurità, anche a causa della perdita di documenti relativi a quell'epoca, (Merzbach, 1968). Lo stesso teorema di Pitagora ha probabilmente origini babilonesi, ma è possibile che i pitagorici siano stati i primi a fornirne dimostrazioni grafiche. In (Heath, 1981) l'autore suggerisce che Pitagora conoscesse la nota dimostrazione dei due quadrati contenenti quattro triangoli rettangoli, riassemblati in modi diversi.

Nel corso dei secoli, il teorema è stato generalizzato in vari modi, fornendo dimostrazioni valide nelle geometrie euclidea, sferica ed iperbolica (Foote, 2017), (Veljan, 2000). Altre generalizzazioni recenti si trovano in (Cook, 2013), (Hwang, 2020), (Ferland, 2017), (Putz, 2003), (Zhan, 2007), (Nelsen, 2014), (Laudano, 2021a) e (Laudano, 2021b). È appena il caso di ricordare che l'interesse per il teorema di Pitagora abbraccia molti campi della conoscenza umana, dalle arti musicali alla crittografia, come si può vedere, ad esempio, in (Prabhu, 2014) e (Cubarsi, 2020).

Nelle pagine seguenti mostriamo alcune dimostrazioni visive del teorema di Pitagora ed alcune sue generalizzazioni, che possono essere sviluppate in classe, anche utilizzando software di geometria dinamica. Questo approccio può avere ricadute didattiche positive, in quanto consente agli studenti di esplorare autonomamente la possibilità di estendere il teorema, seguendo le intuizioni che l'esplorazione della figura suggerisce.

2 – Dimostrazioni effettuate mediante dissezione e composizione

Il Teorema di Pitagora ha incuriosito da sempre i più illustri scienziati che ne hanno fornito, in epoche anche molto lontane, diverse dimostrazioni. Alcune delle più interessanti sono dovute a Leonardo da Vinci (Lemmermeyer, 2016), e Christiaan Huygens (Perng, 2019), (Alsina, 2010).

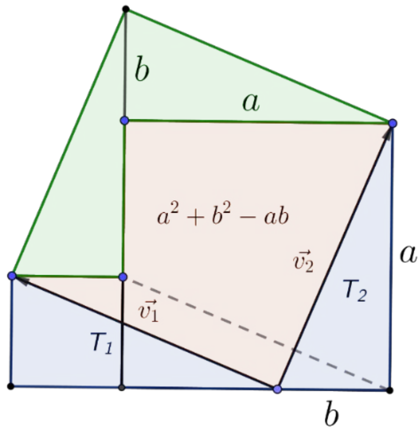

Figura 1. Le prove di Thābit ibn Qurra e Airy

Molte delle prove che verranno proposte in questo lavoro muovono dalla "prova socratica", citata nel Menone di Platone e ripresa da Thābit ibn Qurra nel IX secolo, come fondamento di un metodo più generale da lui chiamato "metodo di dissezione e composizione" (Sayili, 1960). Nella figura 1 è riportata la prima dimostrazione di Thābit ibn Qurra, nota come prova poetica di Sir George Airy, un astronomo inglese del XIX secolo che compose una poesia per spiegare questa costruzione. Dati due quadrati come nella figura 1, attraverso la traslazione dei triangoli T_1 e T_2 per mezzo dei vettori v_1 e v_2 si crea un nuovo quadrato con lati pari all'ipotenusa di T_1. Il poligono arancione della figura seguente può, quindi, affermare:

Io sono, come potete vedere,
$a^2 + b^2 - ab$

Quando i due triangoli stanno su di me
nasce il quadrato dell'ipotenusa
ma se invece sto io su di loro
si ottengono i quadrati di entrambi i lati

All'indirizzo https://www.geogebra.org/m/jyz3kvm6 si può trovare uno schizzo dinamico di questa prova.

La seconda prova fornita da Thābit ibn Qurra si ottiene ribaltando il quadrato costruito sull'ipotenusa con una simmetria assiale, come nella figura 2. Esplorando questa prova con un software di geometria dinamica possiamo vedere che la dimostrazione socratica che compare nel Menone di Platone (Reale, 1992, pp. 950-954) è un caso particolare di questa costruzione per triangoli rettangoli isosceli. Un esempio è mostrato all'indirizzo https://www.geogebra.org/classic/eykhrdaa.

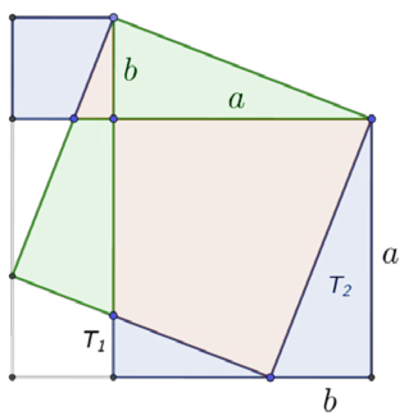

Figura 2. Prova di Thābit ibn Qurra

Le questioni precedenti sono collegate anche alla trisezione del quadrato: un problema che consiste nell'assemblare tre quadrati identici a partire da un quadrato più grande, utilizzando il minimo numero di pezzi. Il matematico persiano Abu'l Wafa, nel X secolo, propose una soluzione alla trisezione del quadrato utilizzando le tassellazioni. Tale costruzione rappresenta una famosa prova del teorema di Pitagora (Blanvillain, 2010). Questa prova fu ripresa e migliorata da H. Perigal nel 1875, che realizzò un'elegante costruzione per dissezione e composizione (Perigal, 1875). Dati i quadrati ABCD e BEFG, come nella figura 3, siano H e I i punti medi di AE e GC e O il centro del quadrato BEFG. Si può provare facilmente che tracciando le rette HO e IO tale quadrato viene diviso in quattro parti uguali. Inoltre, poiché risulta BC=LE, il segmento IL è congruente all'ipotenusa del triangolo rettangolo BCE. Costruendo, poi, il quadrato ONMP (di lato ON=CE) mediante simmetrie centrali e traslazioni, si può notare che esso, oltre al quadrato ABCD, contiene quattro quadrilateri ottenuti traslando le quattro parti uguali del quadrato BEFG.

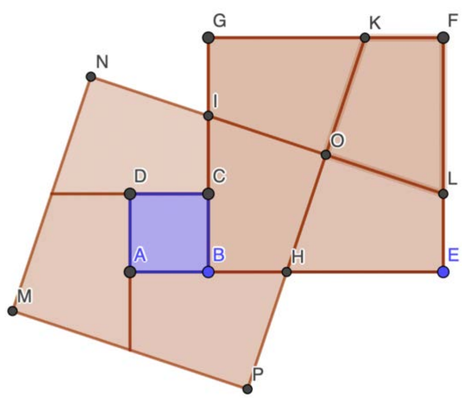

Figura 3. La prova di Perigal

La perfetta simmetria della divisione dei quadrati rende questa dimostrazione particolarmente elegante ed efficace. La costruzione di questa prova attraverso un software di geometria dinamica è mostrata all'indirizzo https://www.geogebra.org/m/cntjphaq .

È interessante notare che tutte le costruzioni di cui sopra si possono effettuare utilizzando solo traslazioni o simmetrie assiali e centrali. Queste attività possono dunque essere utili esercizi per avvicinarsi alle trasformazioni geometriche.

Si noti inoltre che le prove qui presentate richiamano il *tiling pitagorico*, una piastrellatura del piano euclideo con quadrati affiancati ed alternati di due dimensioni diverse, come nella figura 4, dove, effettuando opportuni tagli con rette perpendicolari, è possibile riconoscere molte dimostrazioni senza parole del teorema di Pitagora, tra cui anche le famose prove sopra citate.

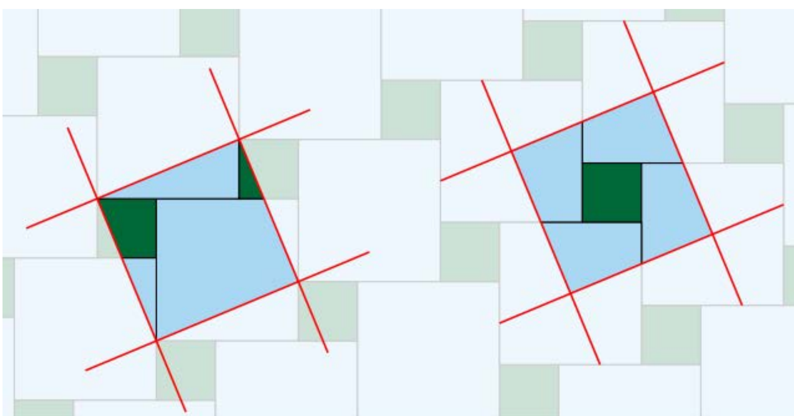

Figura 4. Ochtervelt Jacob, la dissezione di Thābit ibn Qurra (a sinistra) e la dissezione di Perigal (a destra) Di David Eppstein - Opera propria

Altre dimostrazioni interessanti ma poco conosciute del "teorema" si trovano in (Hoehn, 2000) e (Laudano, 2021b, p. 191).

Per concludere, sembra opportuno sottolineare che tutte le prove presentate possono essere utilizzate anche per dimostrare l'inverso del teorema di Pitagora: *Se in un dato triangolo il quadrato di un lato è uguale alla somma dei quadrati dei restanti lati, allora è un triangolo rettangolo*.

L'enunciato precedente, spesso identificato o incorporato nell'enunciato originale del Teorema di Pitagora, merita di essere approfondito anche in ambito didattico, in quanto fornisce uno strumento numerico per verificare la perpendicolarità tra due rette. Pertanto, ben si presta alla progettazione di attività didattiche di laboratorio. A questo proposito, facciamo riferimento alla classica dimostrazione fatta da Euclide, Proposizione I, 48 degli Elementi (Euclide, 1970, pp.149-150).

3 – Verso le generalizzazioni del teorema di Pitagora

L'importanza del teorema di Pitagora risiede principalmente nella possibilità di estenderlo in molte direzioni. Di seguito, quindi, analizziamo alcune generalizzazioni del teorema che potrebbero essere proposte agli studenti. Una delle generalizzazioni più semplici e interessanti ci permette di dire che

Teorema 3.1 *Un triangolo è rettangolo se e solo se qualsiasi poligono costruito sul suo lato maggiore è equivalente alla somma* *dei poligoni ad esso simili costruiti sugli altri lati (in modo che i lati del triangolo siano omologhi).*

Dimostrazione. Ricordiamo che il rapporto tra le aree di due poligoni simili è uguale al quadrato del rapporto tra due lati omologhi. Quindi, siano $a \geq b \geq c$ i lati di un triangolo T e P_a, P_b, P_c poligoni simili costruiti sui lati a, b, c (con a, b e c lati omologhi). Ponendo Area(P_a)=ka^2, poiché per l'enunciato precedente Area(P_a)/Area(P_b)= a^2/b^2, si ha Area(P_b)= kb^2, e analogamente Area(P_c)= kc^2. Pertanto, il poligono P_a è equivalente alla somma di P_b e P_c se e solo se $a^2 = b^2 + c^2$.

È evidente che il Teorema 3.1 può essere ulteriormente esteso a figure simili non poligonali, come i semicerchi.

La dimostrazione del teorema di Pitagora attribuita a Einstein è un esempio di brillante applicazione delle considerazioni precedenti. Consiste nell'osservare che ogni triangolo rettangolo viene diviso dall'altezza relativa all'ipotenusa in due triangoli rettangoli simili al primo (Schroeder, 2012), come nella figura 5. Pertanto, per il Teorema 3.1, il quadrato dell'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati dei cateti.

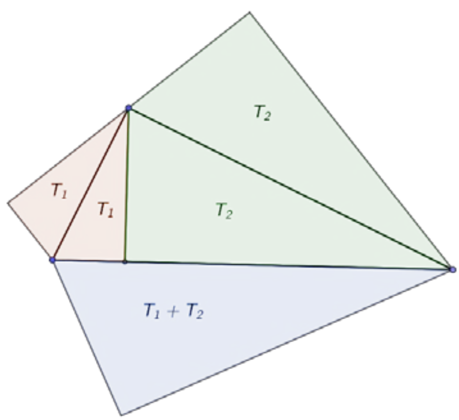

Figura 5. La prova di Einstein

Potrebbe essere interessante dal punto di vista didattico estendere alcune prove del Teorema di Pitagora, con l'aiuto di un software di geometria dinamica. Questo è possibile, ad esempio, per la classica prova del riarrangiamento, come si vede nella figura 6, ottenendo la seguente affermazione.

Teorema 3.2. *Siano a, b, c, con $c \geq a$, le lunghezze dei lati di un triangolo. Sia d la lunghezza della proiezione di c su b, ottenuta tracciando la ceviana congruente a b. Allora $c^2=a^2+bd$. In particolare, se l'angolo opposto al lato a è retto allora $c^2= a^2+b^2$.*

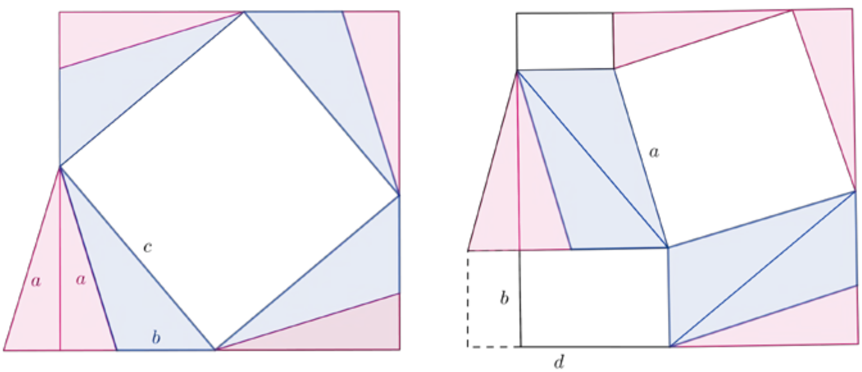

Figura 6. Una recente estensione della prova classica

Come mostrato in (Laudano, 2021a), la precedente generalizzazione vale sia per triangoli acutangoli che per triangoli ottusangoli. Inoltre è facile comprendere che dal Teorema 3.2 segue immediatamente il teorema del coseno, essendo $d = b - 2a \cos \gamma$.

Una delle più interessanti generalizzazioni del teorema di Pitagora fu enunciata da Thābit ibn Qurra nel IX secolo

(Merzbach, 1968, p. 213) e può essere ottenuta con la seguente Figura 7.

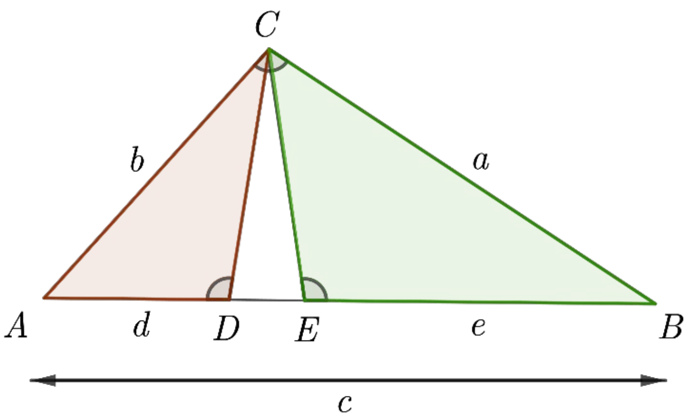

Figura 7. Prova estesa di Thābit

Sia ABC un triangolo, con la solita convenzione che *a*, *b*, *c* sono le lunghezze dei lati BC, CA, AB rispettivamente. Siano D ed E i punti di AB prodotti in modo tale che gli angoli ADC, BCA e CEB siano uguali. Sia *d* la lunghezza di AD ed *e* la lunghezza di EB. Poiché i triangoli ADC e ACB sono simili, si ha che $d : b = b : c$, cioè $b^2 = dc$. Con lo stesso ragionamento sui triangoli CED e ACB, possiamo dimostrare che $a^2=ec$. Allora $a^2+b^2=c(d+e)$ e possiamo enunciare la seguente estensione del teorema di Pitagora.

Teorema 3.3. *In un triangolo qualsiasi, la somma dei quadrati di due lati è uguale al rettangolo le cui dimensioni sono il terzo lato e la somma delle proiezioni dei lati minori sul maggiore, ottenuta dalle ceviane che formano angoli congruenti all'angolo maggiore.*
In particolare, un triangolo è retto se e solo se la somma dei quadrati dei lati minori è uguale al quadrato del lato maggiore.

Una recente dimostrazione della precedente generalizzazione, basata sull'equiscomponibilità, si trova in (Vincenzi, 2021, p. 235-237).

4 – Riflessioni conclusive

Con questo lavoro sul teorema di Pitagora, vogliamo mostrare che, partendo dalla storia della matematica, è possibile inserire l'insegnamento della geometria in un contesto formativo più ampio e significativo. Inoltre, utilizzando il software di geometria dinamica, è possibile condurre gli studenti verso il pensiero geometrico, evitando la ripetizione di ragionamenti preconfezionati, in modo che essi costruiscano, almeno in parte, le proprie competenze geometriche.

Vogliamo, infine, sottolineare la maggiore fruibilità delle prove visive rispetto alle prove algebriche nell'apprendimento a distanza, dove risulta più difficile mantenere l'attenzione degli studenti su lunghe sequenze di calcoli. Le prove visive, configurandosi come veri e propri rebus da decifrare, risultano spesso più intriganti e per il loro carattere manipolativo ed esplorativo, favoriscono l'approccio all'argomentazione.

Bibliografia

Alsina C. (2010). Proof Without Words: New Pythagorean-like Theorems, *The College Mathematics Journal, 41(5), 370; doi:10.1080/07468342.2010.11922451*

Blainvillain, C. &. (2010). Square trisection: Dissection of a square in three congruent partitions,. *BIAA, 86, 7-18*.

Cook, W. J. (2013). An n-dimensional Pythagorean Theorem. *The College Mathematics Journal, 44(2), 98-101; doi:10.4169/college.math.j.44.2.098*

Cubarsi, R. (2020). An alternative approach to generalized Pythagorean scales. Generation and properties derived in the frequency domain. *Journal of Mathematics and Music; doi:10.1080/17459737.2020.1726690*

Euclide. (1970). *Gli Elementi (a cura di A. Frajese e L. Maccioni*). UTET.

Ferland, K. K. (2017). Extending Two Classic Proofs of the Pythagorean Theorem to the Law of Cosines. *Mathematics Magazine, 90(3), 182-186; doi:10.4169/math.mag.90.3.182*

Foote, R. L. (2017). A Unified Pythagorean Theorem in Euclidean, Spherical, and Hyperbolic Geometries. *Mathematics Magazine, 90(1), 59-69; doi:10.4169/math.mag.90.1.59*

Heath, S. T. (1981). "The 'Theorem of Pythagoras'". *A History of Greek Mathematics. Oxford: Dover Publications, Inc.*

Heo, N. G. (2017). Proof Without Words: Pythagorean Theorem via Ptolemy's Theorem. *Mathematics Magazine, 90(3), 187-187; doi:10.4169/math.mag.90.3.187*

Hoehn, L. (2000). A neglected Pythagorean-like formula. *The Mathematical Gazette, 84(499), 71-73.*

Hwang, S. G. (2020). A Determinant Proof of a Generalized Pythagorean Theorem,. *The American Mathematical Monthly, 127(3), 269-272; doi:10.1080/00029890.2020.1693228*

Laudano, F. (2021a). c2=a2+bd, a visual generalization of the Pythagorean theorem. *The Mathematical Gazette, 105(564), 520-521;*

doi:https://doi.org/10.1017/mag.2021.125

Laudano, F. (2021b). Visual argumentations in teaching trigonometry. *Annales Mathematicae et Informaticae, 54, 183 – 193; doi:10.33039/ami.2021.10.002.*

Lemmermeyer, F. (2016). Leonardo da Vinci's Proof of the Pythagorean Theorem. *The College Mathematics Journal, 47(5), 361-364; doi:10.4169/college.math.j.47.5.361*

Loomis, E. S. (1968). *The Pythagorean Proposition: Its Demonstrations Analyzed and Classified and Bibliography of Sources for Data of the Four Kinds of "Proofs," 2nd* ed. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Luzia, N. (2016). A Proof of The Pythagorean Theorem After Descartes. *The American Mathematical Monthly,, 123(4), 386-386.*

Merzbach, U. C. (1968). *A History of Mathematics*. Hoboken, New Jersey.: John Wiley and Sons, Inc.

Molokach, J. (2019). Proof Without Words: The Pythagorean Theorem. *Mathematics Magazine, 92(4), 287-287; doi:10.1080/0025570X.2019.1586232*

Nelsen, R. (2014). Proof Without Words: Pythagorean Quadruples. *The College Mathematics Journal, 45(3), 179-179; doi:10.4169/college.math.j.45.3.179*

Nicollier, G. &. (2018). Pythagorean Theorem: A Proof Without Words. *Mathematics Magazine, 91(5), 382-383; doi:10.1080/0025570X.2018.1473701*

Perigal, H. (1875). On Geometric Dissections and Transformations. *Messenger of Mathematics, 19; doi:http://sunsite.ubc.ca/DigitalMathArchive/Euclid/perigal/perigal.html*

Perng, C. T. (2019). A Variant of the Proof of the Pythagorean Theorem by Huygens. *Mathematics Magazine, 92(1), 70-71;*

doi:10.1080/0025570X.2019.1541685

Prabhu, S. K. (2014). Cryptographic Applications of Primitive Pythagorean Triples. *Cryptologia, 38(3), 215-222; doi:0.1080/01611194.2014.915257*

Putz, J. F. (2003). On Generalizing the Pythagorean Theorem. *The College Mathematics Journal, 34(4), 291-295; doi:10.1080/07468342.2003.11922020*

Rahim, M. H. (2003). A new proof of the Pythagorean using a compass and unmarked straight edge. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 34(1), 144-150;*

doi :10.1080/0020739031000158227

Reale, G. (1992). *Platone, Tutti gli scritti*. Milano: Rusconi.

Sayili, A. (1960). Thābit ibn Qurra's Generalization of the Pythagorean Theorem,. *Isis, 51(1), 35-37; doi:10.1086/348837.*

Schroeder, M. R. (2012*). Fractals, Chaos, Power Laws: Minutes from an Infinite Paradise*. Courier Corporation.

Veljan, D. (2000). The 2500-Year-Old Pythagorean Theorem. *Mathematics Magazine, 73(4), 259-272;*

doi: 10.1080/0025570X.2000.11996853

Vincenzi, G. (2021). On a Proof of the Thābit Ibn Qurra's Generalization of the Pythagorean Theorem. *Journal for Geometry and Graphics, 25(2), 231--241.*

Wares, A. (2017). Looking for Pythagoras between the folds. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 48(6), 938-941; doi:10.1080/0020739X.2017.1286526*

Zhan, M. Q. (2007). Structural analysis of Pythagorean monoids. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 38(3), 402-407; doi:10.1080/00207390600967349*