Periodico di Matematica (IV) Vol. V (1) marzo 2023, pp. 11-28

Le rappresentazioni grafiche nella risoluzione dei problemi

Ferdinando Casolaro* Giovanna Della Vecchia**

*Direttore di redazione del «Periodico di Matematica»; ferdinando.casolaro@unina.it

** DIARC_Università di Napoli; giovanna.dellavecchia@unina.it

DOI : 10.53159 /PdM(IV).v5n1.103

Sunto: *Il presente lavoro intende rimarcare l'importanza delle rappresentazioni grafiche nell'insegnamento della Matematica e nell'interpretazione, in generale, dei problemi di Scienze applicate. Si farà una riflessione sul significato fisico delle costanti arbitrarie - relativamente all'integrazione indefinita - nei problemi di Meccanica classica e nella risoluzione del problema di Cauchy nel caso in cui la curva integrale sia rappresentata da una funzione non esprimibile elementarmente. Si faranno altresì alcune interessanti osservazioni, sempre di carattere grafico, sul confronto tra le aree di opportuni rettangoloidi calcolate con i metodi classici ed i risultati ottenuti con i noti metodi di integrazione.*

Parole Chiave: *Rappresentazioni grafiche; problemi di Scienze applicate.*

Abstract: *In this article we are suggesting a fen observations about the importance of the graphic visual in order to teaching Mathematics and interpret some applied sciences problems; we are particularly dwelling on the physical meaning of the arbitrary constants - regarding indefinite integration - in the classical mechanics problems and on the resolution of a Cauchy problem, in the case the integral curve of the differential equation in the problem is not expressible elementarily. Some interesting observations will be made of graphic kind about the comparison* *between the areas of specific rectangles calculated by classical methods and the results obtained by the know integration methods.*

Keywords: *Graphical representations; applied science problems.*

1 - Introduzione

Il presente lavoro intende dimostrare l'importanza e la funzione pedagogica dell'utilizzo dei grafici nell'insegnamento della Matematica quale metodologia didattica privilegiata, indispensabile anche al fine di interpretare correttamente i dati di un problema assegnato e trovare soluzioni in maniera più agevole verificando concretamente la correttezza delle argomentazioni addotte. L'utilizzo delle rappresentazioni grafiche deve costituire, a nostro avviso, ordinaria prassi didattica, anche per evitare che gli studenti possano vedere nella matematica una sterile applicazione di regole e formule preconfezionate: ciò li allontanerebbe dallo studio di questa disciplina straordinaria ma avvertita troppo spesso come arida, difficile e noiosa.

Si propongono alcuni esempi significativi utilizzabili alcuni in una scuola secondaria di secondo grado, altri in un corso universitario di Analisi Matematica.

2 - Dall'integrazione indefinita al problema di Cauchy nelle questioni di Fisica classica

Nello studio della Meccanica Classica, riferita a sistemi continui, si passa spesso da una grandezza ad un'altra, per derivazione e integrazione della funzione che gestisce il fenomeno.

Già nello studio del moto si rileva che in ogni punto della traiettoria di una particella che, soggetta ad una forza F, subisce uno spostamento Δs in un intervallo di tempo Δt, la velocità si ottiene derivando la grandezza spazio rispetto alla variabile tempo; analogamente, l'accelerazione che la particella subisce per una qualsiasi variazione di velocità Δv, nel tempo Δt, si ottiene derivando la velocità rispetto al tempo.

Viceversa, il passaggio dall'accelerazione alla velocità (che, nei limiti in cui si può considerare costante la massa, è equivalente al passaggio dalla forza alla variazione della quantità di moto) e dalla velocità allo spostamento, si ottengono, rispettivamente, per integrazione dell'accelerazione (o della forza) e della velocità rispetto al tempo.

In tal caso, nel calcolo delle primitive, *l'integrazione indefinita determina una classe di infinite funzioni che differiscono per una costante*. I grafici di tali funzioni si ottengono uno dall'altro per traslazione, cioè:

se $y = F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, un'altra primitiva $Y =$ G(x) si ottiene da $y = F(x)$ mediante la seguente traslazione:

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y + c \end{cases} \tag{2.1}$$

da cui si deduce che un problema di Fisica classica non è univocamente determinato da tali operazioni.

Ciò non crea problemi dal punto di vista fisico, perché sappiamo che *le leggi della Meccanica Classica sono invarianti per traslazione*, per cui lo studio del particolare fenomeno che ci interessa è legato ad altri aspetti, primo fra tutti *il problema delle condizioni iniziali di Cauchy*.

Analizziamo, ad esempio, il seguente problema relativo al secondo principio della dinamica:

Studiare il moto di un punto materiale P di massa m che si muove su una retta (asse x) sotto l'azione di una forza f dipendente dal tempo t, dalla posizione di P [ascissa $x(t)$ di P] e dalla velocità di P [coefficiente angolare $x'(t)$ della retta tangente alla traiettoria di P].

Tale problema, nei limiti in cui si può considerare costante la massa m, si traduce, nel seguente (Casolaro, 1995) :

$$f = ma \quad \Leftrightarrow \quad f[t, x(t), x'(t)] = mx''(t)$$

cioè:

$$x''(t) = \frac{1}{m} f[t, x(t), x'(t)] \qquad (2.2)$$

che è un'equazione differenziale del secondo ordine che ha per soluzioni una famiglia di curve, dipendenti da due parametri, c_1 e c_2, che rigano l'intero piano.

È evidente che, nell'analisi di tale problema, non interessa la determinazione di tutti i possibili moti del punto P sotto l'azione della forza $f[t, x(t), x'(t)]$, ma è significativo lo studio di quel particolare moto nel quale il punto P parte, nell'istante t_0, da un'assegnata posizione iniziale x_0, con una data velocità iniziale v_0; ciò si traduce nella risoluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x''(t) = \dfrac{1}{m} f[t, x(t), x'(t)] \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = v_0 \end{cases} \qquad (2.3)$$

Geometricamente, le (2.3) richiedono di determinare una curva integrale che passi per il punto $P_0(x_0, y_0)$ e che in tale punto abbia retta tangente con coefficiente angolare uguale a v_0.

Tali condizioni ci permettono di determinare univocamente le costanti c_1 e c_2, dette 'arbitrarie' ma impropriamente, perché nelle applicazioni esse dipendono esclusivamente dalle condizioni iniziali richieste: sono quindi strettamente legate al problema di Cauchy.

Pertanto, nell'introdurre il calcolo delle primitive, è opportuno sottolineare come la risoluzione del problema dipenda dalla scelta delle condizioni iniziali.

Ancora relativamente al problema di Cauchy, si può verificare che la risoluzione dell'equazione differenziale preveda il calcolo di un integrale che non sia esprimibile elementarmente. In tal caso un grafico approssimativo della curva integrale richiesta può essere realizzato per altra via.

Si consideri, ad esempio, il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = 1 + xy \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{2.4}$$

in cui l'integrale generale dell'equazione è espresso dalla formula:

$$y = e^{\frac{x^2}{2}}\left[\int e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx + c\right] \tag{2.5}$$

e l'integrale presente non è calcolabile elementarmente (Casolaro 2021).

Si dovrà operare con i noti teoremi di integrazione per serie (sicuramente la scelta migliore per analizzare l'andamento locale della primitiva) dopo aver sviluppato in serie di potenze la funzione

$$\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Dal punto di vista didattico, riteniamo invece che, sempre nell'ottica di fornire competenze matematiche che consentano di visualizzare geometricamente le questioni analitiche, sia interessante fare alcune osservazioni che mettano in evidenza il legame tra le derivate del primo e del secondo ordine della funzione rappresentata dalla curva integrale da determinare e la funzione integranda, e analizzare i risultati graficamente. Ciò permette, tenendo conto della condizione iniziale di Cauchy, di avere un andamento approssimato della curva integrale richiesta dal problema.

Per comprendere la questione nella sua generalizzazione, sia

$$y' = f(x, y)$$

un'equazione differenziale del primo ordine, con $f(x, y)$ di classe C^1 in un opportuno aperto del piano.

L'equazione

$$f(x, y) = 0 \qquad [y' = 0] \tag{2.6}$$

rappresenta il luogo geometrico dei punti a tangente orizzontale, eventuali punti estremanti o punti di flesso orizzontale delle curve integrali.

Nel caso dell'equazione

$$y' = 1 + xy$$

da:

$$y' = 0$$

si ha:

$$y = -\frac{1}{x} \tag{2.7}$$

che è il luogo dei punti a tangente orizzontale; nella regione di piano compresa tra i due rami di iperbole (fig. 2.1) ci saranno i tratti di curve integrali crescenti, nelle due regioni esterne all'iperbole i rami delle curve decrescenti.

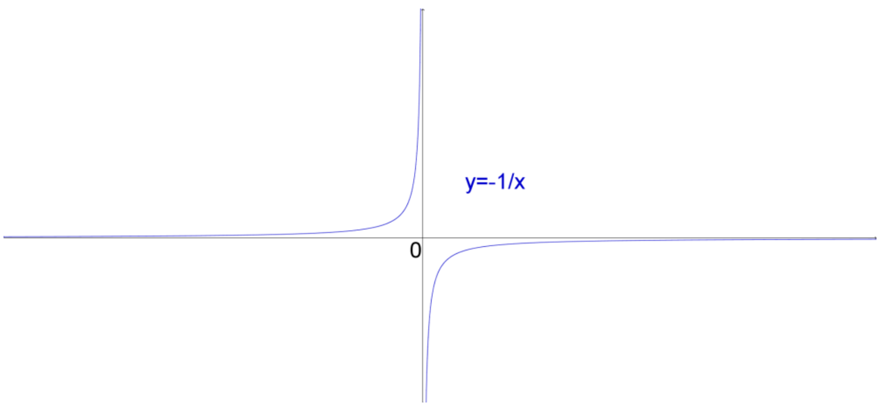

fig. 2.1

L'equazione:

$$y'' = 0 \tag{2.8}$$

con y' ≠ 0, rappresenta il luogo dei punti di flesso non verticali.

Nel caso dell'equazione

$$y' = 1 + xy$$

da:

$$y'' = 0$$

si ha:

$$y + x + x^2 y = 0$$

$$y = -\frac{x}{1+x^2} \tag{2.9}$$

Se sono verificate opportune condizioni si osserva che- il grafico della (2.9) divide il piano in due regioni: nella regione di piano (fig. 2.2) al di sopra del grafico sono situati i rami di curve integrali che volgono la concavità verso l'alto, nella regione al di sotto del grafico sono situati i rami che volgono la concavità verso il basso.

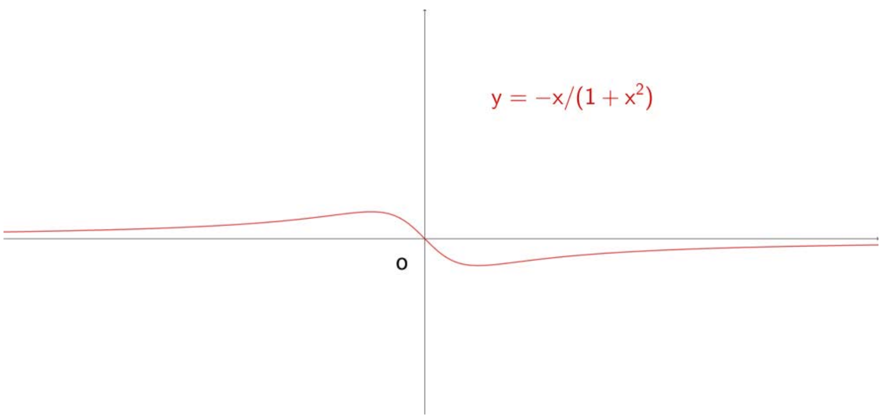

fig. 2.2

È evidente, allora, che la curva integrale che rappresenta la soluzione del problema di Cauchy (2.4) è localmente individuata, in un opportuno intorno di 0, analizzando i dati determinati (fig. 2.3).

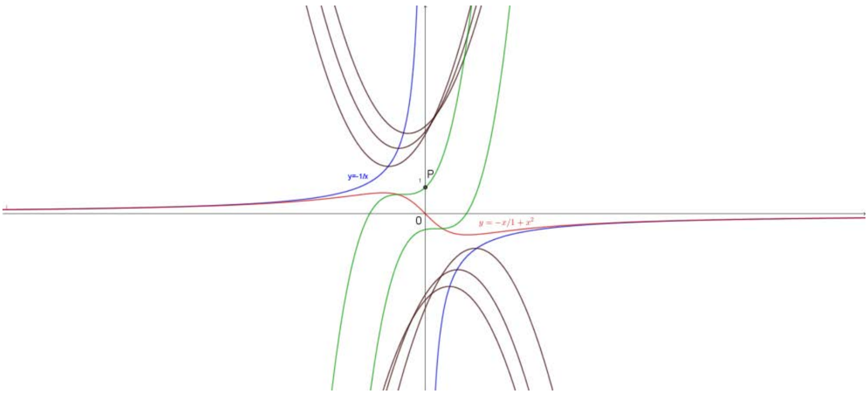

fig. 2.3

3 - La misura e i metodi di integrazione

Non sempre il calcolo dell'integrale di una funzione assegnata è immediato per cui nella risoluzione degli esercizi si ricorre spesso a trasformazioni anche troppo ricercate della funzione integranda o alle usuali regole di integrazione. In qualche caso può risultare utile ricorrere a semplici rappresentazioni grafiche.

3.1 – Integrazione per sostituzione

Nell'esempio che segue si intende proporre agli studenti la ricerca di un integrale indefinito, notoriamente svolta per sostituzione o per parti, con il solo ausilio di una appropriata rappresentazione grafica. Si consideri il seguente integrale:

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}\, dx;$$

una primitiva della funzione integranda, che si determina usualmente per sostituzione, per r = 1 (condizione che non lede la generalità del problema) è:

$$F(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}arcsenx$$

Ovviamente, operando per parti, con $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ e $d\,f(x)$= dx, si perviene allo stesso risultato.

È interessante osservare che tale risultato può essere dedotto geometricamente osservando la figura 3.1 in cui è:

$$\varphi = \widehat{AB} = arcsenx$$

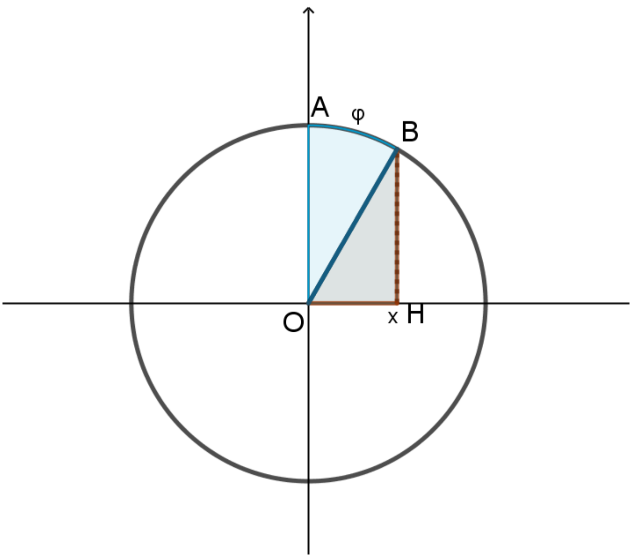

fig. 3.1

ed essendo $\overline{OB} = 1$:

$$Area\ AOB = \frac{1}{2} arcsenx$$

$$Area\ OHB = \frac{1}{2}\ \overline{OH} \cdot \overline{BH} = \frac{1}{2}\ x\sqrt{1-x^2}$$

Dalla figura, integrando tra 0 e x, risulta:

$$\int_0^x \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2} arcsenx + \frac{1}{2}\ x\sqrt{1-x^2}$$

3.2 – Integrazione per parti

Relativamente al problema dell'integrazione per parti, si ritiene ancora una volta che il ricorso ad una rappresentazione grafica possa costituire una valida giustificazione della nota formula di risoluzione.

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni di classe C^1 definite in un intervallo reale $[a, b]$ in modo che il luogo geometrico dei punti del piano di coordinate $[f(x), g(x)]$ individui una curva regolare Γ del piano nel riferimento $O\ u\ v$, con $u = f(x)$ e $v = g(x)$.

Supponiamo inoltre che $f(x)$ e $g(x)$ siamo entrambe strettamente monotone in $[a, b]$.

La variabile v può essere espressa in funzione di u e la curva Γ è il grafico di tale funzione, che risulta essere strettamente monotona. Per fissare le idee consideriamo il caso in cui $f(x)$ e $g(x)$ siano strettamente crescenti e quindi v strettamente crescente rispetto ad u (fig. 3.2).

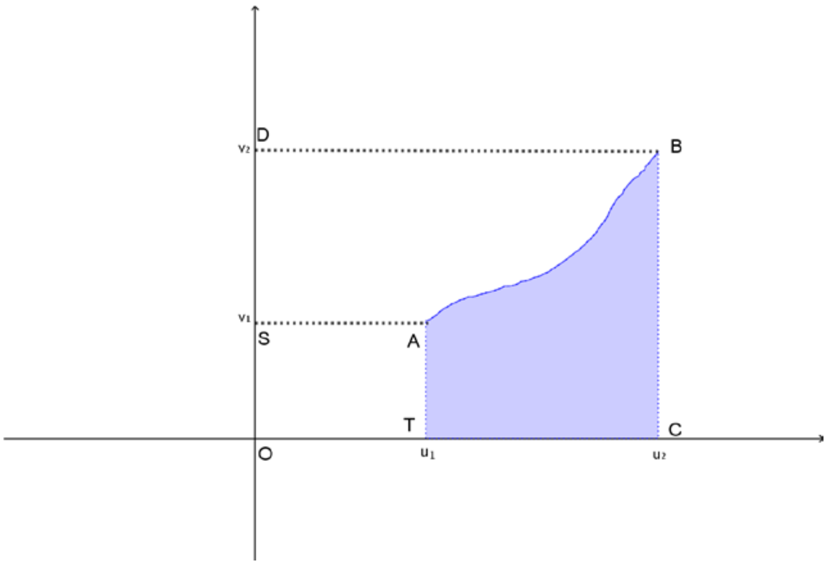

fig. 3.2

posto:

$$u_1 = u(x_1) \qquad\qquad v_1 = v(x_1)$$
$$u_2 = u(x_2) \qquad\qquad v_2 = v(x_2)$$

si può osservare che:

$$Area\ (OCBD) = u_2 v_2 \qquad Area\ (OTAS) = u_1 v_1$$

$$Area\ (TCBA) = \int_{u_1}^{u_2} v\ du \qquad Area\ (SABD) = \int_{v_1}^{v_2} u\ dv$$

ed essendo:

$$Area\ (TCBA) = Area\ (OCBD) - Area\ (OTAS) - Area\ (SABD)$$

si ha:

$$\int_{u_1}^{u_2} v\, du = u_2 v_2 - u_1 v_1 - \int_{v_1}^{v_2} u\, dv$$

cioè:

$$\int_{u_1}^{u_2} v\, du = [u\, v]_{u_1 v_1}^{u_2 v_2} - \int_{v_1}^{v_2} u\, dv$$

che, col significato attribuito alle variabili u e v, esprime la nota formula di integrazione per parti:

$$\int_{x_1}^{x_2} g df(x) = [f(x) \cdot g(x)]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} f(x) dg(x)$$

Lo studio della teoria integrale da buona parte dei docenti della scuola secondaria di secondo grado è spesso finalizzato al solo calcolo delle primitive di una funzione, operazione che, con le tecniche informatiche attuali, si potrebbe ridurre all'utilizzo di opportune applicazioni.

Noi riteniamo, invece, che il compito del docente sia proprio quello di fare acquisire agli studenti quelle competenze matematiche che consentano di risolvere i problemi non attraverso una sterile applicazione di formule ma cogliendone tutti gli aspetti algebrici e grafici, formulando congetture personali e identificando tutte le possibili inferenze logiche.

4 - Una notevole relazione tra la lunghezza di una curva chiusa e l'area della parte di piano da essa limitata

Un'altra questione particolarmente interessante, al fine di potenziare la capacità di operare deduzioni e risolvere problemi, è stata attinta dalla proposta del secondo quesito della prova suppletiva di Matematica assegnata agli esami di Stato 1999/2000, per l'indirizzo scientifico tradizionale.

Considerate le formule:

$$V = \frac{4}{3}\pi x^3 \qquad S = \pi x^2$$

che danno rispettivamente il volume di una sfera di raggio x e l'area di un cerchio sempre di raggio x, se ne illustrino i risultati della derivazione rispetto a x.

Si ha immediatamente:

$$V(x) = \frac{4}{3}\pi x^3 \Rightarrow V' = 4\pi x^2$$ (area della superficie sferica di raggio x)

$$S(x) = \pi x^2 \Rightarrow S'(x) = 2\pi x$$ (lunghezza della circonferenza di raggio x)

A parte l'importanza delle due relazioni e tutte le disquisizioni teoriche (anche di carattere storico) che si possono discutere con gli studenti, prendendo spunto dal citato problema vogliamo porre l'accento su una relazione che intercorre tra l'area di un dominio piano limitato e la lunghezza della curva chiusa che lo delimita.

Sia γ una curva piana regolare, semplice e chiusa e siano p e q le due rette tangenti alla curva nei punti A e B estremi della curva (fig. 4).

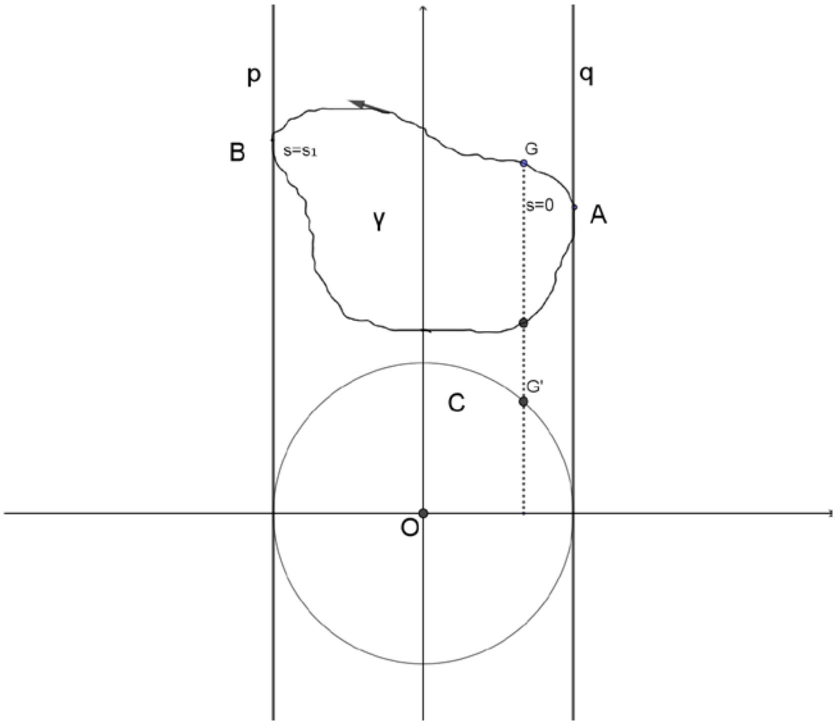

fig. 4

Posto d (p, q) = 2r, scegliamo opportunamente un sistema di riferimento in modo che la circonferenza C abbia centro nell'origine di tale riferimento e raggio r; in tal caso γ e C sono contenute nella stessa striscia di piano limitata dalle rette p e q.

Consideriamo una rappresentazione parametrica per le due curve C e γ mediante l'ascissa curvilinea *s* dell'arco di curva γ

$$C\begin{cases}X = X(s)\\ Y = Y(s)\end{cases} \qquad \gamma\begin{cases}x = x(s)\\ y = y(s)\end{cases}$$

in modo che esse siano positivamente orientate e nei punti A e B di tangenza con p e q si abbia rispettivamente $s_A = 0, s_B = s_1$.

Essendo *X(s)=x(s)*, si ha:

$$Area\ C = \pi r^2 = -\int_0^l Y(s)x'(s)ds$$

$$Area\ \gamma = \int_0^l x(s)y'(s)ds$$

da cui:

$$Area\ \gamma + AreaC =$$

$$= \int_0^l [x(s)y'(s) - Y(s)x'(s)]ds \leq$$

$$\leq \int_0^l \sqrt{[x(s)y'(s) - Y(s)x'(s)]^2}ds \tag{4.1}$$

Ma, nell'espressione sotto radice all'ultimo membro, risulta:

$$[xy' - Yx']^2 = (xy')^2 + (Yx')^2 - 2(xx')(Yy')$$

dove, dalla nota relazione tra media aritmetica e media geometrica, è

$$(xx')(Yy') \leq \frac{(xx')^2 + (Yy')^2}{2}$$

Si ha allora:

$$[xy' - Yx']^2 \leq (xy')^2 + (Yx')^2 + (xx')^2 + (yy')^2 =$$

$$= (x^2 + Y^2)\left(x'^2 + y'^2\right)$$

Dunque, risulta:

$$[xy' - Yx']^2 \leq (x^2 + Y^2)\left(x'^2 + y'^2\right)$$

La (4.1) diventa:

$$\begin{aligned} Area\,\gamma + AreaC \\ &\leq \int_0^l \sqrt{(x^2 + Y^2)\left(x'^2 + y'^2\right)}ds \\ &= \int_0^l \sqrt{(x^2 + Y^2)}ds \end{aligned}$$

$$Area\,\gamma + AreaC \leq \int_0^l r\,ds = r \cdot l$$

Posto: $Area\,\gamma = A_\gamma$ si ha:

$$A_\gamma + \pi r^2 \leq r \cdot l$$

ed essendo:

$$A_\gamma + \pi r^2 \geq 2\sqrt{A_\gamma \cdot \pi r^2}$$

segue:

$$r \cdot l \geq 2\sqrt{A_\gamma \cdot \pi r^2}$$

da cui:

$$l^2 \geq 4\pi A_\gamma$$

dove l'uguaglianza è verificata solo nel caso in cui la curva γ sia una circonferenza. In tal caso risulta infatti:

$$(2\pi r)^2 = 4\pi(\pi r^2).$$

Bibliografia

Casolaro F. (1995). La Matematica nell'insegnamento della Fisica, Atti del Convegno Nazionale Mathesis "Una presenza nella cultura e nell'insegnamento", Roma 1995, pag. 363-368.

Casolaro F., Prosperi R. (2001). La Matematica nelle Scienze applicate: equazioni algebriche ed equazioni differenziali nei programmi degli istituti tecnici, *Atti del Congresso nazionale Mathesis Mantova 2001, pagg. 173-186.*

Casolaro F. (2001/2002). L'insegnamento dell'analisi matematica nella scuola secondaria superiore, *Appunti del corso di Perfezionamento in Didattica della Matematica - Università di Napoli.*

Casolaro F. (2002). Aspetti qualitativi delle equazioni differenziali nei temi degli esami di Stato degli Istituti tecnici, Atti del Convegno Nazionale "La Matematica agli esami di Stato ed il suo ruolo nell'insegnamento", Agerola 2002, pag. 175-188.

Casolaro F. (2021). Decisione per integrali indefiniti. Periodico di Matematica n. 2- 10 giugno 2021, pagg. 125-134

Fiorenza R., Greco D. (1986). *Lezioni di Analisi Matematica II,* Napoli: Liguori Editore.