Periodico di Matematica (IV) Vol. IV (3) settembre 2022, pp. 65-82

Ancora sulla improbabile “probabilità frequentista”

Paolo Manca*

*Già Professore Ordinario di Matematica Finanziaria all’Università di Pisa; paolo.severino.manca@gmail.com

DOI : 10.53159 /PdM(IV).v4n3.89

Sunto: *Viene ricordata, per matematici distratti, l’unica definizione operativa di probabilità e cioè quella proposta da de Finetti: la cosiddetta probabilità soggettiva. Viene altresì ricordato e mostrato come, in casi specifici, la probabilità soggettiva debba coincidere con la “probabilità classica”. Viene ancora indicato come la probabilità (soggettiva) sia in grado di venire modificata attraverso la formula di Bayes utilizzando la frequenza empirica osservata, recuperando così, in modo opportuno, l’approccio frequentista.*

Parole Chiave*: probabilità soggettiva, Von Mises, de Finetti, legge empirica del caso.*

Abstract: *For distracted mathematicians, the only operational definition of probability is remembered and that is the one proposed by de Finetti: the so-called subjective probability. It is also recalled and shown how, in specific cases, the subject probability must coincide with the "classical probability". It is also indicated how the (subjective) probability is able to be modified through the Bayes formula using the observed empirical frequency, thus appropriately recovering the frequentist approach.*

Keywords: *subjective probability, Von Mises, de Finetti, empirical law chance.*

1 - La "probabilità frequentista" [1]

Sotto un profilo puramente formale la probabilità è una misura normalizzata cioè una funzione θ, additiva e non negativa, definita su un'algebra di eventi :

$$(1) \qquad 1 \geq \theta \geq 0\,, \;\; \theta(A + B) = \theta(A) + \theta(B) \quad \text{se } A \cap B = \Phi$$

Sempre sotto un profilo formale il calcolo delle probabilità è una estensione della logica classica nel senso che questa associa ad un evento un valore di verità pari a zero o a uno, mentre quello un valore di verità compreso tra zero e uno.

Ma cosè la probabilità?

Riporto, inorridito, quanto affermano due fra i tanti , Alan Agresti e Barbara Finlay, in *Metodi statistici di base e avanzati*, Pearson, 2012: «La probabilità di una osservazione è la proporzione di volte in cui essa dovrebbe verificarsi in una lunghissima sequenza di osservazioni»,[2] e mi dispiace per il loro ispiratore, Richard Von Mises, che era una persona e uno studioso di valore.

Richard von Mises (1883-1953) era un ingegnere matematico che diede contributi importanti all'idrodinamica e

[1] Paolo Manca : *Te la do io la probabilità* (ed.goware 2018).

[2] Tanto per capire il livello dei due autori ricordo come definiscono una variabile casuale: «Una variabile deve assumere almeno due differenti valori. Per un campione casuale o per un esperimento casuale ciascun possibile risultato ha una probabilità di verificarsi. La variabile viene quindi definita come variabile casuale».

all'aerodinamica e che volle anche occuparsi di probabilità, almeno riferita a esperimenti "ripetibili".

Von Mises nel libro del 1919 dal titolo *Wahrscheinlichkeitsrechnung* tentò di tradurre in termini formali e assiomatici l'idea, non nuova, di una probabilità intesa come "limite" della frequenza empirica verificata su un numero "sufficiente di prove".

Egli ridusse l'oggetto del calcolo delle probabilità ai "*Kollektiv*": successioni infinite di prove di uno stesso esperimento suscettibile di essere replicato più volte e praticamente nelle stesse condizioni.

E poichè la frequenza gode delle proprietà (1) , Von Mises, di autorità assunse vere tali proprietà anche per il loro "limite" (che non c'è.)

Tenuto conto del livello di conoscenza dei tempi, tenuto conto che la formalizzazione di Kolmogoroff è del 1925, che i primi lavori sulla probabilità di de Finetti sono del 1927 , i contributi di Von Mises sono da considerarsi straordinari.

Von Mises volle dare dignità scientifica a una convinzione diffusa secondo la quale la probabilità di alcuni esperimenti/fenomeni/eventi, che possono dar luogo a diversi risultati e che sono "ripetibili", sia una "proprietà fisica" e, in questo senso, oggettiva, del fenomeno stesso: tale "proprietà" si manifesta attraverso la frequenza con cui tali risultati hanno luogo.

Secondo Von Mises, ripetendo "indefinitamente" l'esperimento e calcolando la frequenza con cui si presenta ciascuno dei possibili risultati cui può dare luogo, si ottiene una misura di questa "probabilità".

In sintesi la probabilità sarebbe una proprietà fisica, e dunque in qualche modo oggettiva, che caratterizza un esperimento , così come la massa e la densità sono proprietà fisiche che caratterizzano la materia.

Dunque una moneta ben equilibrata, oltre al peso, alle dimensioni, al metallo di cui è composta, possederebbe anche la proprietà fisica di cadere mostrando più o meno lo stesso numero di volte sia testa che croce.

Ma lanciata come e in che luogo ? Sulla Terra, sulla Luna o su un diverso campo gravitazionale? Lanciata da un apparecchio apposito o da un giocatore di *baseball* ?

Entro quale intervallo di temperature?

Purtroppo sia la definizione di evento "ripetibile" che la definizioni di probabilità di un evento ripetibile non hanno trovato altro sostegno e restano un dogma ascientifico.

Anche i terrapiattisti hanno le loro ragioni, ma certamente sono migliori le ragioni di chi sostiene che la terra è circa sferica. Allo stesso modo chi parla di probabilità frequentista qualcosa di sensato la dice ma certamente si possono dire cose più sensate.

2 - La legge empirica del caso

L'idea della probabilità oggettiva non è tuttora tramontata e alcuni seguaci di Von Mises hanno pensato di giustificarla grazie alla "legge empirica del caso" : questa afferma, in termini piuttosto nebulosi, che "in base all' esperienza accade che la frequenza relativa al verificarsi di un evento, dall'esito incerto ma ripetibile, tende a stabilizzarsi" .

In effetti in semplici casi, in cui , in base a ragionamenti vari di simmetria, si definisce la probabilità classica di un evento come rapporto tra casi favorevoli e casi possibili, si constata empiricamente che la frequenza relativa risulta "genericamente prossima" al valore di probabilità classica , nel senso che maggiore è il numero di prove ``meno frequentemente" accade di osservare "grandi scarti" della frequenza dal valore di probabilità classica.

La legge empirica del caso, che operativamente non giustifica e non consente di calcolare una probabilità qualsivoglia, ha trovato un sostegno perché i fedeli assertori della probabilità frequentista la hanno identificata con la "legge dei grandi numeri", un teorema del calcolo delle probabilità formulato per la prima volta da Jakob Bernoulli , (1654-1705), e successivamente ampiamente generalizzato.

La legge dei grandi numeri prende in considerazione una successione di variabili casuali $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ indipendenti e identicamente distribuite di valore medio μ e la variabile casuale valor medio $S_n = 1/n. \ (X_1 + X_2 + \dots + X_n)$ e dimostra che S_n tende a μ in probabilità.[3]

Per enunciare con rigore il teorema e le sue generalizzazioni occorrerebbe introdurre alcune nozioni di convergenza debole e forte che risultano eccessivamente tecniche; restando a un livello più elementare possiamo dire che la "legge dei grandi numeri" è un teorema del calcolo delle probabilità il quale afferma che, una volta definita la probabilità di un even-

---

[3] Teorema di Kincin : Sia {Xn} una successione di v.a. i.i.d. con media finita $E[X_i] = \mu, \forall i$, sia $S_n = 1/n \ (X_1 + X_2 + \dots + X_n)$, allora la successione di v.a. {Sn} tende in probabilità a μ : $S_n \Rightarrow_p \mu$, cioè per ogni □ > 0 risulta : $P(|X_n - \mu| >$ □ $) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$.

to, sia μ , e una volta ammesso che questo evento possa essere ripetuto, allora la variabile casuale che misura la frequenza relativa, con cui le "ripetizioni" di tale evento si verificano, tende in probabilità a μ e ciò significa in parole semplici che al crescere del numero delle ripetizioni "diventa sempre meno probabile" che tale frequenza si discosti molto da μ.

Si tratta di affermazioni completamente diverse e occorre insistere che mentre la legge dei grandi numeri presuppone che si sia definita prima la probabilità, la legge empirica del caso viene utilizzata per cercare di definire la probabilità.

Tra l'altro tuttora la cosiddetta legge empirica del caso, oltre a causare seri danni all'utilizzo della scienza statistica, incoraggia non poche tragedie tra i cosiddetti giocatori incalliti: quelli che, anche se hanno perso cifre consistenti, sono certi che "prima o poi si rifaranno" [4] . Grazie alla legge empirica del caso infatti essi giustificano la legge "degli eventi ritardatari": come se la pallina della roulette o le palline da estrarre al gioco del lotto avessero memoria indelebile degli esiti precedenti . [5]

[4] Illuminante il commento di una madre sul vizio del figlio: "non mi addoloro per ciò che ha perso, ma sono terrorizzata dal fatto che vuole rifarsi." Del resto già Tacito avvertiva che "la speranza di diventare ricchi è la più diffusa causa di povertà".

[5] Trucchi a parte come quando all'estrazione del lotto provvedevano i bambini bendati e le palline da estrarre venivano scaldate. E a questo punto occorrerebbe ricordare cosa suggerisce la teoria della rovina del giocatore.

3 - Ma allora cos'è la probabilità?

Uso indifferentemente le parole incertezza, casualità,[6] aleatorietà, stocasticità, sottolineando la differenza con termini come imprecisione, genericità, vaghezza, indeterminatezza.

L'incertezza è un aspetto che caratterizza l'intera nostra vita e il mondo che ci circonda e la necessità di prendere decisioni in condizioni di incertezza è quotidiana.

Purtroppo nella nostra civiltà buona parte dell'impostazione della conoscenza ha una connotazione deterministica e l'incertezza viene vista come un disturbo, una sgradevole incidentale anomalia , mentre dovrebbe essere una caratteristica essenziale, fisiologica, di molti modelli e nelle scienze e nelle discipline sociali.[7]

In un mondo in cui regna l'incertezza, di un evento, di un fatto, di una circostanza, di un avvenimento, di una affermazione, di una proposizione, suscettibili di essere veri o falsi, non sempre possiamo affermare se siano tali ma soltanto esprimere, in base alle informazioni che possediamo, un certo grado di fiducia sulla loro verità/falsità.

Quando siamo in grado di poter esprimere con un numero questo grado di fiducia possiamo parlare di probabilità pur-

[6] Casualità richiama il termine caso dal latino "*casus*" (caduta) usato nel senso "che ci cade addosso"; aleatorietà richiama il termine "*alea*" che in latino significa dado (da cui la celebre frase di Cesare: *alea iacta est*); stocastico deriva dal greco "*stocasticos*" che, letteralmente, significa congetturale.

[7] A volte l'incertezza è intrinseca perché riguarda eventi futuri, a volte legata a carenza di informazioni che potrebbero essere acquisite ma che rinunciamo ad ottenere per costi rilevanti e/o per tempi di acquisizione troppo lunghi.

chè sia possibile introdurre questo numero in termini operativi.

Il riferimento alla richiesta di una definizione operativa merita qualche chiarimento. Come ha brillantemente illustrato il premio Nobel per la fisica Percy Williams Bridgman nel suo *La logica della fisica moderna* (1927), molti concetti della fisica e della scienza in generale, ritenuti universali (quali ad esempio il tempo, la massa) e dunque immediatamente noti, hanno un puro valore nominalistico: per dare un contenuto reale alla definizione di tali concetti occorre non tanto precisare che cosa sono ma fornire una procedura univoca per misurarli.

In altre parole in campo scientifico noi conosciamo una grandezza solo se abbiamo una procedura operativa che ci consente di misurarla.[8]

Per giungere dunque a una definizione operativa di questo numero-probabilità accettiamo con Bruno de Finetti: [9]

[8] Ad esempio e' proprio partendo dal processo di misurazione del tempo che scopriamo la relatività dei concetti quali il prima e il dopo.Di più , senza far cenno alla relatività einsteniana, scopriamo che il tempo, quello della fisica, esiste solo se esiste lo spazio e il cambiamento.

[9] Bruno de Finetti (1906-1985:) un genio italiano e un insigne maestro. Invito i lettori ad approfondirne la conoscenza leggendo, anche su internet, notizie sui suoi contributi scientifici e sulla sua vita. Spiritoso quanto basta si ricordano alcuni suoi neovocaboli che non sono ancora passati di moda: "burosauri" per burocrati, "trinomite" per malattia di molti insegnanti fissati sugli esercizi inutili e fastidiosi quali quelli sul trinomio, "adhoccherie" per dimostrazioni " ad hoc", speciose, pesanti, prive di luce e fantasia.

Al concetto di probabilità soggettiva era giunto anche Frank Plumpton Ramsey (1903-1930), matematico, logico, statistico ed economista inglese, con l'articolo *Truth and Probability* del 1926 e pubblicato postumo nel 1931. Le critiche e le discussioni sulla probabilità soggettiva di Ramsey e de Fi-

- di essere coerenti.
- di esprimere il nostro grado di certezza sulla verità di un evento *E* stabilendo quale somma **s** riteniamo sia equo pagare/ricevere per partecipare ad una scommessa che prevede una vincita/perdita R se e solo se l'evento *E* si rivelerà vero.[10] Il rapporto s/R misura la probabilità che il soggetto attribuisce all'evento *E*.

La formulazione della regola della coerenza in termini più rigorosi potrebbe apparire macchinosa e la evitiamo, diciamo solo che la coerenza non permette che si possano definire le probabilità di più eventi in modo da trovare una combinazione di scommesse che consenta una vincita certa: nessun soggetto razionale accetterebbe una tale attribuzione di probabilità.

La condizione di coerenza va letta all'interno di un'algebra di eventi: il soggetto nell'attribuire una probabilità ad eventi, nel contesto di un'algebra di eventi, deve rispettare la regola che nessuna combinazione di scommesse su tali eventi consenta di acquisire un guadagno certo.

---

netti e l'approccio successivo di L. J. Savage e quanto ne è seguito superano i limiti del presente lavoro.

[10] Ovviamente per dare significato univoco all'ammontare di tale posta, che altrimenti sarebbe "la minima possibile" (o "la massima possibile"), la notazione pagare/ricevere , vincita/perdita sta a significare che il soggetto, deve stabilire il valore di s con equità e dunque, stabilito il valore s , deve ritenere indifferente partecipare alla scommessa o come banco o come scommettitore.

Nel caso di un unico evento *E*, che genera l'algebra formata dagli eventi ($E, \neg E, \Phi, \Omega$) la coerenza impone semplicemente che se *p* è la probabilità di *E* allora *1-p* deve essere la probabilità di $\neg E$ e viceversa.

In conclusione la probabilità di un evento *E*, secondo l'opinione di un dato individuo, è il prezzo che egli stima equo attribuire all'importo unitario esigibile al verificarsi di *E* , per cui valuta indifferente partecipare alla scommessa come scommettitore o come banco.

Concludo il paragrafo con un minimo di osservazioni.

La probabilità è per sua natura soggettiva e questo termine viene purtroppo inteso infelicemente in senso negativo come se esistesse anche una probabilità oggettiva.

Quando, in base alle informazioni disponibili, si ritiene , come nei "giochi di azzardo", che nessun esito del gioco sia privilegiato, per coerenza si deve attribuire ai medesimi esiti la stessa probabilità e dunque si adotta la probabilità "quella classica" : si tratta ovviamente di avere fiducia sulla imparzialità di colui che distribuisce le carte, ovvero che lancia i dadi, ovvero del meccanismo di estrazione dei numeri al lotto e così via.

Circa la "probabilità classica" è mia opinione personale che essa non possa essere che "un caso particolare di probabilità soggettiva" (l'unica probabilità possibile).

Infatti, accettando di definire la probabilità come rapporto tra casi favorevoli e casi possibili, accettiamo di fatto che i casi siano tutti egualmente possibili, infatti, se un soggetto coerente giudica non sussistano motivi di preferenza tra gli eventi $E_1, \ldots E_N$ di una partizione, allora il soggetto deve essere disposto a pagare/ricevere la somma 1/N per partecipare ad una scommessa che prevede una vincita/perdita pari ad 1 se e solo se l'evento E_i si rivelerà vero e ciò per ciascuno degli eventi E_i ; infatti combinando N scommesse, ciascuna di importo s per ciascuno degli N eventi, e dunque pagando/ricevendo s.N , riceverebbe /pagherebbe con certezza 1. Se fosse $s.N \neq 1$ si avrebbe un arbitraggio.[11]

Termino il paragrafo con qualche elementare osservazione.

Se si deve valutare la probabilità relativa all'esito di una partita di calcio nessuno si sogna di invitare i giocatori a ripetere un centinaio di volte l'incontro, piuttosto si leggono i giornali specializzati, si interrogano gli esperti, si considerano le quotazioni dei bookmaker.

Se , lanciando una moneta a cui attribuisco inizialmente la stessa probabilità, riscontro 10 volte la stessa faccia, sono disposto ovviamente a modificare la mia opinione : esiste per questo il teorema di Bayes (vedi par. 4).

Non tutti gli eventi per noi incerti sono modellizzabili in modo soddisfacente nel contesto della probabilità (ovviamente soggettiva).

Esistono situazioni decisionali che presentano una tale genericità, vaghezza, indeterminatezza e contemporaneamente tali rilevanti conseguenze che nessun individuo ragionevole accetta di modellizzarle nel contesto della probabilità: la totale ignoranza non coincide con l'equiprobabilità.[12]

---

[11] Respirare e rileggere.

[12] Rimando in particolare alla logica fuzzy.

4 - Il calcolo delle probabilità

Ogni teoria scientifica può essere considerata:

- sia ***sintatticamente,*** cioè come un insieme di simboli combinabili tra loro attraverso le regole logiche e definite dagli assiomi, (aspetto formale)

- sia ***semanticamente*** cioè in relazione al significato "intuitivo-reale" (aspetto interpretativo nel dominio della realtà),

- sia in ***senso pratico***, cioè in funzione delle applicazioni.

Affinchè la teoria si riveli degna di interesse è necessario che sia rilevante l'aspetto semantico.

L'aspetto semantico riguarda il significato e l'interpretazione dei simboli che devono essere ritrovati in una "rappresentazione reale" o "dominio della realtà", cioè in un modello reale in cui si trova corrispondenza tra gli enti non definiti del sistema assiomatico ed enti del modello reale e in modo tale che gli enti reali verifichino le proprietà previste dai postulati.

Nel modello formale, originariamente proposto da Kolmogoroff e universalmente accettato, nessuna attenzione è, volutamente, dedicata all'aspetto semantico e alla determinazione di una rappresentazione "reale".

Il Calcolo delle probabilità, sotto l'aspetto sintattico, è una disciplina matematica che utilizza il linguaggio della teoria della misura : si tratta di una misura normalizzata che può essere σ-addittiva o addittiva.

Ma il Calcolo delle probabilità non è una branca della teoria della misura.

Semanticamente il Calcolo delle probabilità, nel caso dell'unica probabilità possibile, è un'estensione della logica classica in un mondo dove regna l'incertezza, è la proposta che la scienza offre a un soggetto ragionevole per fornirgli strumenti adeguati a comprendere e gestire con razionalità una porzione considerevole dell'incertezza che lo circonda.

Quanto alle applicazioni del Calcolo delle probabilità sono ubiquitarie ma la più importante riguarda la statistica : il Calcolo delle probabilità è il linguaggio della statistica inferenziale.

Una volta stabilito che la condizione di coerenza è formalmente equivalente alle proprietà che caratterizzano una misura, il Calcolo delle probabilità diventa dunque lo strumento indispensabile per trarre deduzioni coerenti a partire da valutazioni coerenti in un mondo dove regna l'incertezza con le regole formali della teoria della misura.

5 - La probabilità condizionale e il teorema di Bayes

La probabilità di un evento è un numero che esprime il nostro grado di fiducia sulla verità di un evento in base alle informazioni di cui disponiamo e nel rispetto di elementari condizioni di coerenza.

La probabilità dipende dunque dal complesso di informazioni che possediamo.

In questo senso, a rigore, nell'indicare la probabilità di un evento A , secondo l'opinione di un certo individuo ad un determinato istante t, dovremmo sempre utilizzare il simbolo $P(A,\Delta, t)$ per sottolineare la dipendenza, oltre che dall'evento, dal momento della valutazione, t, e dalle informazioni a quel tempo disponibili, Δ : è scontato infatti che al sopraggiungere di nuove informazioni una valutazione di probabilità può modificarsi, anche notevolmente.

Se dunque, dopo aver valutato la probabilità di un evento A , veniamo a conoscenza che un altro evento B ha avuto luogo, ci chiediamo se e come questa nuova informazione può modificare, nel rispetto della coerenza, la nostra iniziale precedente valutazione.

Si parla in questo senso di probabilità a priori e a posteriori.

Il teorema di Bayes mostra appunto come modificare il soggettivo grado di fiducia al sopraggiungere di nuove informazioni nel rispetto della coerenza ed è proprio grazie a Bayes che le "intuizioni" di Von Mises restano "in qualche modo" recuperabili.

Indichiamo con P(A) la probabilità iniziale o a priori e con P(A|B) la probabilità di A subordinata al verificarsi di B, probabilità finale o a posteriori o probabilità condizionale : [13]

P(A) indica il nostro grado di fiducia sulla verità di A non sapendo se B sia vero o no, P(A|B) indica il nostro grado di fiducia sulla verità di A sapendo ovvero nell'ipotesi che B sia vero.

P(A|B) è il prezzo che giudichiamo equo scommettere a fronte della vincita unitaria se si verifica l'evento A avendo saputo che l'evento B si è verificato.

In base al principio di coerenza/equità si dimostra deve essere: [14]

---

[13] La probabilità condizionale è una probabilità in quanto soddisfa gli assiomi che definiscono una probabilità Precisamente definita una probabilità sull'algebra di eventi Π e introdotto un evento H con $P(H)\neq 0$ allora $P(\cdot|H)$ è una probabilità definita sull'algebra degli eventi che si ottengono dagli eventi dell'algebra Π facendo intersezione con l'evento H.

$$(2) \qquad P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$$

Come noto a partire dalla (2) si ricava la formula di Bayes che dunque mostra come si deve modificare la propria probabilità iniziale al sopraggiungere di nuove notizie rispettando la coerenza :

$$(3) \qquad P(A_i \mid B) = P(B \mid A_i)P(A_i) \Big/ \sum_{j=1,..,k} P(B \mid A_j)P(A_j)$$

essendo $A_1,\ldots,A_k$ una partizione dell'evento certo (o come si dice universo).

A livello mnemonico-intuitivo possiamo interpretare la formula di Bayes come quella che permette di risalire alle "cause", A_i, in base all'osservazione "degli effetti" , B, e delle probabilità iniziali delle cause.

Senza addentrarmi in un tema delicato e che richiede ampi approfondimenti, mi limito ad un esempio, spero, istruttivo per capire come utilizzare correttamente la formula stessa.

Un'urna contiene N palline di cui alcune rosse. Ho la possibilità di procedere a successive estrazioni con ripristino per

---

[14] È importante notare che la formula (1), che nell'approccio formale di Kolmogorov viene assunta come definitoria, trova nell'approccio soggettivo piena giustificazione in quando traduce la condizione di coerenza.

Solo la probabilità soggettiva riesce a giustificarla compiutamente: essa esprime la condizione necessaria e sufficiente per mantenere la coerenza al sopraggiungere di nuova informazione.

Questa considerazione è essenziale per capire la portata e le conseguenze della formula di Bayes che, pur dimostrata attraverso una semplice manipolazione di simboli, acquista, lo ripetiamo, con la definizione (unica possibile) di probabilità soggettiva, il significato di condizione necessaria e sufficiente di coerenza.

cercare di migliorare la mia opinione iniziale sul numero di palline rosse effettivamente contenute.

Il numero di palline rosse potrebbe essere pari a 1, o a 2, ..., o a N, dunque il numero di palline rosse è una variabile casuale *H* che può assumere i valori 1, ..., N.

Indico con $P(A_j)$, con j= 1, ….., N, le probabilità che traducono l'idea iniziale che mi sono fatto sulla composizione dell'urna.[15]

Procedo a 6 successive estrazioni con ripristino e trovo 4 palline rosse e 2 bianche, cioè una frequenza osservata di palline rosse pari a 2/3 . Indico con B questo evento.

Trovo ragionevole ammettere, subordinatamente a ciascuna delle ipotesi fatte per la variabile casuale *H*, che le estrazioni siano indipendenti ed equidistribuite. Nell'ipotesi che sia vera l'ipotesi *H* = h, allora la probabilità di estrarre una pallina rossa è: $p_h = h/N$, non rossa è $q_h = N- h/N$.

Dunque la probabilità di avere 4 rosse e due non rosse vale

$$P(B\,|\,A_h) = C_{N,h}\, p_h^4 . q_h^2$$

A questo punto modifico le $P(A_i)$ iniziali e accetto per coerenza con Bayes:

$$P(A_i\ |B) = P(B\,|\,A_i)P(A_i)\ /\ \sum P(B\,|\,A_j\,)P(A_j).$$

[15] La scelta delle $P(A_j)$ dipende dalle informazioni possedute : ad esempio, se l'urna modellizza una popolazione umana e le palline rosse sono individui portatori di specifiche caratteristiche genetiche, un addetto ai lavori riesce subito a circoscrivere l'ordine di grandezza delle percentuali di tali portatori.

Certo la formula risultante è assai più complicata che prendere "tout court" la frequenza 4/6 a prescindere delle informazioni che già possiedo. E tuttavia se da tali risultati dovesse dipendere la vita di qualcuno penso che costui si fiderebbe senza esitazioni della formula complicata.

Si può intuire come dalla (3), e per questo esempio, all'aumentare dell'informazione, espressa dalla frequenza osservata, la probabilità iniziale si modifichi appunto verso la frequenza osservata e ciò per buona pace dei "frequentisti". L'argomento supera i limiti della presente nota e rimando ad un buon testo di statistica bayesiana.

6 - Commento finale

Poche pagine scritte con impegno attraverso le quali mi auguro di ottenere "molte conversioni" , e non per me, ma per la coerenza scientifica e per onorare la memoria di un genio italiano non sufficientemente riconosciuto dai suoi compatrioti : Bruno de Finetti.

Per gli increduli che non ho convinto lascio comunque una riflessione consolatoria di George Box (1979): *Models of course are never true but fortunately it is only necessary that they be useful.*

Risponderò comunque volentieri a contestazioni "garbate".

****

Matematica e maschilismo

Due matematici David e Bob sono al bar. Bob afferma che le donne non capiscono e non capiranno mai nulla di matematica.

David, che ha adocchiato la bella cameriera Mary abbastanza appariscente, ad alta voce sostiene che le donne hanno una grande attitudine per la matematica, certamente più di quanto Bob possa immaginare.Bob, è perplesso, si alza e va al gabinetto. In sua assenza David chiama la cameriera e la istruisce:

- Ascolta Mary, tra poco, quando Bob sarà tornato , io ti farò una domanda e tu mi dovrai rispondere: "meno logaritmo del modulo di cosen iks". Capito? Prova a ripetere.

Lei ripete: - Meno il ritmo... del cosacco? E David: - Ci siamo quasi: "meno logaritmo del modulo di cosen iks".

*E lei: - Meno lo garitmo delmodu lodi cosicchiso? E lui, che ha visto Bob uscire dalla toilette, le dice: - Va bene,... va b*ene...vai, vai... Bob, intanto, ritorna al banco e David gli propone di fare una prova:

- Secondo me anche le cameriere dei bar conoscono il calcolo integrale.

- Ma va? Impossibile!-

Vogliamo fare una prova? Ora chiederò a quella cameriera di risolvere un integrale e vedremo cosa risponderà. Chiama la cameriera e le chiede: - Signorina, scusi, può dirmi quanto vale l'integrale della tan*gente di x* in dx?
La cameriera ci pensa un attimo poi risponde, decisa: - Meno logaritmo del modulo di cosen x - e mentre se si allontana, ancheggiando vistosamente, si volta indietro e dice con un sorriso smagliante: - Più una costante, naturalmente!

****