Periodico di Matematica (IV) Vol. IV (1) marzo 2022, pp. 57-86

Le geometrie non euclidee nel mondo reale

Su quale Geometria poggia la Fisica moderna?

Ferdinando Casolaro*- Umberto Salzano**

* Direttore di redazione Periodico di Matematica
ferdinando.casolaro@gmail.com
**I.S. Striano Terzigno umbertosalzano@gmail.com

DOI : 10.53159/PdM(IV).v4n1.066

Sunto: *Dopo un sintetico excursus storico sull'evoluzione della Geometria dall'antichità ad oggi, attraverso l'arte e l'astronomia, si presenta un percorso didattico da proporre nella Scuola secondaria di secondo grado, per l'introduzione del Modello di geometria sullo spazio curvo utilizzato da Einstein per lo sviluppo della Teoria della Relatività.*

Parole Chiave*: Storia, Geometria, spazio, relatività.*

Abstract: *After a brief historical excursus on the evolution of geometry from antiquity to today, through art and astronomy, an educational path is presented to be proposed in the secondary school, for the introduction of the geometry model on curved space. used by Einstein for the development of the Theory of Relativity.*

Keywords: *History, geometry, space, relativity.*

1 - Introduzione

In un precedente lavoro (Casolaro, 2020) è stata presentata una proposta didattica, con excursus storico, per l'inserimento delle nozioni fondamentali di Geometria Proiettiva nella Scuola secondaria di secondo grado, con l'obiettivo di ampliare il modello euclideo tenendo conto dei risultati degli ultimi due secoli.

In questo lavoro presenteremo un percorso analogo riferito alla geometria sullo spazio curvo secondo il modello di Riemann, indicato tra le "geometrie non euclidee" sviluppate nel XIX secolo (Casolaro, 2019).

La geometria euclidea resta ancora oggi - duemila anni dopo che Euclide ha scritto gli *Elementi* - uno degli strumenti di logica più forte a disposizione del docente di matematica ed è ritenuto, a ragione, un modello quasi perfetto.

Tale modello va però corretto secondo una revisione moderna che tiene conto dello sviluppo della fisica nell'ultimo secolo, in quanto lo studio dell'universo fa ipotizzare uno spazio che potrebbe non essere propriamente piatto.

Nella fisica classica lo spazio costituisce un sistema a cui si riferiscono tutti i fenomeni, per cui esso esiste indipendentemente dagli eventi che si verificano.

La teoria della Relatività ha radicalmente modificato il concetto di spazio mettendo in evidenza che non ha senso, dal punto di vista fisico, l'ammissione dell'esistenza dello spazio in assenza di fenomeni osservabili, per cui non esiste lo spazio assoluto, ma esiste uno spazio le cui proprietà sono relative allo stato di moto dei corpi.

Poiché il moto di un corpo rappresenta la variazione di posizione del corpo istante per istante, cioè nel tempo, non è possibile concepire uno spazio indipendentemente dal tempo, che rappresenta, con opportuni accorgimenti, una quarta dimensione del sistema di riferimento in cui si colloca ogni evento.

Ciò significa che l'universo fisico non incorpora come modello privilegiato la geometria euclidea, ma tiene conto di altri modelli. Infatti, secondo Einstein, l'universo piatto (modello euclideo) è un universo vuoto e privo di materia, in quanto la presenza di materia introduce una curvatura nello spazio.

In questo spazio curvo, i corpi, in assenza di forze non gravitazionali, percorrono la linea più breve (geodetica) in analogia al percorso rettilineo che è valido solo nello spazio piatto. Precisamente, secondo il concetto classico:

- la materia crea un campo gravitazionale e questo fa deviare i corpi;

invece secondo Einstein:

- il campo gravitazionale va interpretato come curvatura dello spazio e tale curvatura determina la sostituzione del concetto di retta con quello di geodetica.

Per fenomeni che avvengono all'interno del sistema solare, la Relatività Generale introduce modifiche lievi ed appena rilevabili rispetto alla teoria newtoniana. Su questa scala lo spazio è leggermente deformato, ma per distanze dell'ordine di miliardi di anni luce, la materia presente nell'Universo incide in maniera rilevante sulla natura dello spazio.

È quindi principalmente sulle grandi distanze che viene a cadere il modello euclideo (Casolaro, 2018).

Infatti, per formulare la teoria della relatività generale, Einstein ha utilizzato un modello di tipo ellittico analogo al modello di geometria non euclidea di Riemann (1826-1866).

Del resto, già mezzo secolo prima di Einstein, Riemann, nello strutturare la sua geometria su superfici, come k-varietà[1] di spazi a dimensione $n > k$, giunse alla conclusione che lo spazio fisico è una varietà tridimensionale a curvatura costante.

Tale congettura si può considerare come un'anticipazione di successivi risultati (in particolare di Levi-Civita e Ricci) che ha portato alla teoria della relatività generale di Einstein. Questo concetto sarà giustificato analiticamente nel paragrafo 5. di questo lavoro.

2 - Una breve analisi storica

I primi frammenti di geometria sferica li ritroviamo, nell'VIII-VII sec. a.C. ad opera dei Caldeo-Babilonesi, che hanno cercato di approfondire le proprietà dello spazio e il loro campo di studio era la Sfera (Kline, 1991; Casolaro, Pisano, 2011).

In seguito anche i greci, parallelamente allo studio della geometria piana, provavano interesse per la geometria sferica. Di ciò si è avuto notizia nel 1885, anno in cui sono stati pubblicati i due testi (Kline 1991) *Sulle sfere mobili* e *Il sorgere ed*

---

[1] Con il termine "*Varietà*" si indica una generalizzazione del concetto di spazio a più dimensioni. Pertanto, senza che se ne leda il concetto, a livello didattico si può sostituire ad esso la parola "*Spazio*".

il tramontare, scritti nel III sec. a.C. da un contemporaneo di Euclide, l'astronomo Autolico di Pitane.

I due trattati di Autolico sono i testi più antichi che sono stati trovati intatti. Nel testo *Sulle sfere mobili* Autolico tratta dei cerchi meridiani, dei cerchi massimi e dei paralleli. È significativo, come in queste due opere le proposizioni siano disposte in ordine logico, in modo tale che ogni proposizione viene prima enunciata in forma generale, poi ripetuta con esplicito riferimento alla figura e infine viene data la dimostrazione.

È questo lo stile usato da Euclide nella sua opera "gli Elementi" in cui riassume le principali ricerche dei matematici che lo precedettero, completandole e riordinandole dal punto di vista logico, in modo pressoché perfetto essendo ben determinata la deduzione di ogni teorema dai precedenti o dalle proposizioni primitive.

Lo stesso Euclide trattò alcune questioni di geometria sferica, come si trova nella sua opera *I fenomeni*", di cui esiste una pubblicazione del 1916 (Kline 1991). In essa si dà una definizione dinamica della sfera come superficie di rotazione di una circonferenza intorno al suo diametro, contrariamente alla definizione statica degli *Elementi* in cui la Sfera è definita come luogo geometrico dei punti dello spazio equidistanti da un punto fisso detto centro.

È in questa opera che compare per la prima volta, anche se non esplicitamente, il concetto di trasformazione geometrica, in considerazione delle varie posizioni che assume la circonferenza ruotando intorno a un proprio diametro.

È interessante osservare come l'autore dell'opera più importante della geometria piana a livello statico, abbia intuito le prime proprietà di una geometria di "movimento".

Il fatto, poi, che testi del terzo secolo a.C. siano stati tradotti nel XIX e nel XX secolo, fa ipotizzare che questi risultati potevano avere una loro importanza, seppur di carattere storico, per far comprendere come già nell'antichità si pensasse ad un Universo non euclideo.

Tale congettura è stata poi confermata nel periodo in cui (fine del XIX secolo) due matematici, Tullio Levi Civita (1873-1941) e Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925) stavano sviluppando "la teoria dei tensori", utilizzata da Einstein all'inizio del secolo successivo per lo sviluppo della "Teoria della Relatività".

Altri matematici che hanno lasciato tracce sulla Sferica sono (Casolaro 2002):

- Teodosio di Bitinia (circa 20 a.C.), che raccolse i risultati allora noti di geometria sferica nella sua opera "Sphericae"; ma in quel periodo quest'opera non risultò utile ad affrontare il problema fondamentale dell'astronomia greca, che era quello di determinare l'ora di notte osservando le stelle.

- Menelao (circa 98 d. C.), che nei suoi studi di trigonometria scrisse il trattato "Sphaerica", che ci è pervenuto in una versione araba in tre libri (c'era anche un testo greco che, però, è andato smarrito), tradotta da Francesco Maurolico da Messina (1494-1575). Nel libro I, dedicato alla geometria sferica, si trova il concetto di triangolo sferico, cioè della figura formata da tre archi di cerchio massimo di una sfera, ciascuno dei quali è minore di un semicerchio. Lo scopo del libro è quello di provare, per i triangoli sferici, dei teoremi pressoché analoghi a quelli dimostrati da Euclide per i triangoli piani.

Così, *la somma di due lati di un triangolo sferico è maggiore del terzo lato, la somma degli angoli di un triangolo è maggiore di due retti, lati uguali sottendono angoli uguali*.

Menelao prova poi un teorema che non ha alcun analogo per i triangoli piani: *se gli angoli di un triangolo sferico sono rispettivamente uguali a quelli di un altro, allora i due triangoli sono congruenti*.

Ci sono anche altri teoremi di congruenza e dei teoremi sui triangoli isosceli. Il libro II della Sphaerica è dedicato principalmente all'Astronomia e tocca solo indirettamente la geometria sferica. Il libro III tratta la trigonometria sferica.

- Tolomeo (II sec. d. C.): affronta vari problemi di trigonometria sferica, ma nei suoi lavori non vi è una presentazione sistematica e vengono provati soltanto i teoremi che sono necessari per risolvere specifici problemi astronomici. Tolomeo lavora con triangoli sferici, ma nel calcolare le corde degli archi, egli pone le basi teoretiche della trigonometria piana (conviene notare che la trigonometria fu creata per applicarla all'Astronomia, e poiché la trigonometria sferica era la più utile per tale scopo, essa fu la prima a essere sviluppata).

In seguito hanno lasciato tracce di geometria e trigonometria sferica gli arabi Al'Battn (858-929) e Abu'l Wefa (940-998), oltre al persiano Nasir-Eddin 1201-1274); queste opere non furono note in Europa fino alla metà del XV secolo quando gli studiosi tedeschi George Peurbach (Vienna, 1423-1461) ed un suo allievo Johann Müller Königsberg, noto come Regiomontano (1436-1476) iniziarono a tradurre le opere greche ed arabe. In particolare, Regiomontano nella sua opera *De triangulis* scritta tra il 1462 e il 1463 e pubblicata postumo nel 1533, raccolse in un sistema organico tutte le conoscenze disponibili di geometria sferica e di trigonometria sferica. Nel frattempo, però, Johann Werner (1468-1528) aveva migliorato le idee di Regiomontano nella sua opera *De triangulis Sphaericis* pubblicata nel 1514.

In queste opere la trigonometria sferica era assillata dalla necessità di utilizzare una moltitudine di formule; ciò era dovuto al fatto che il Regiomontano e il Werner (ed anche in seguito Copernico) avevano usato soltanto le funzioni seno e coseno. Fu un allievo di Nicolò Copernico (1473-1543), George Joachim Rhaeticus (1514-1576), che usa per la prima volta tutte e sei le funzioni trigonometriche.

La trigonometria sferica venne ulteriormente sistematizzata ed in parte ampliata da Francois Viète (1540-1603), che riesce a dare l'insieme completo delle formule necessarie per calcolare una parte di un triangolo sferico rettangolo ed una regola pratica per ricordare un insieme di formule che è oggi nota con il nome di regola di Napier (John Napier, 1550-1617). Nel XVII secolo, nozioni di geometria sferica vengono utilizzate (ed anche ampliate in alcuni scritti) dall'astronomo inglese Edmund Halley (1656-1742).

Nel XVIII secolo ha inizio, con Eulero (1707-1783), la trattazione moderna della trigonometria sferica tendente a derivare tutta la trigonometria da principi semplici; la generalizzazione delle formule della trigonometria sferica e l'interpretazione da un punto di vista superiore della geometria sferica è dovuta principalmente a Gauss (1777-1855), la cui idea di considerare *una superficie curva come spazio* *in se*, ha dato inizio ad uno studio generalizzato di geometrie su superfici curve: le geometrie non euclidee.

In realtà, all'inizio del XVIII secolo, l'interesse era rivolto principalmente alla geometria proiettiva e le ricerche sulla geometria non euclidea non attirarono i matematici inglesi, francesi e tedeschi, almeno fino a quando Gauss non si espresse positivamente sulla validità logica di esse e della possibilità di individuare uno spazio fisico che risponda alle sue proprietà.

Ciò avviene intorno al 1818, anno in cui un professore di giurisprudenza Ferdinand Karl Schweikart (1780-1859) inviò a Gauss un promemoria del 1816 in cui distingueva due geometrie: la geometria euclidea e la geometria che egli chiamava "geometria astrale" in quanto pensava che potesse valere nello spazio stellare (Casolaro, Santarossa 1997).

La teoria geometrica di Schweikart ebbe l'approvazione di Gauss, che, già dal 1813 stava lavorando per lo sviluppo di una geometria che non comprendesse il postulato delle parallele; in una lettera al suo amico Olbers - del 1817 - egli afferma che non è possibile dimostrare che la geometria euclidea sia necessaria per lo sviluppo dell'universo fisico; è quindi possibile costruire una altra geometria applicabile fisicamente.

I teoremi provati da Gauss nei suoi lavori sono in gran parte simili a quelli che si incontrano nelle opere di Nikolai Lobatchevsky (1793-1856) e di Wolfgang Bolyai (1775-1856) (Casolaro, Pisano 2011), i due matematici ai quali, insieme a Georg Bernhard Riemann (1826-1866) [1], si devono i risultati più importanti sulle geometrie non euclidee.

Per la nostra trattazione, faremo riferimento allo sviluppo della geometria ellittica (indirizzo metrico-differenziale) di Riemann (1826-1866), di cui la geometria sferica è un caso particolare (Casolaro, Pisano 2012).

3 - Costruzione di uno spazio euclideo

Cerchiamo di proporre un percorso didattico che, attraverso interrelazioni tra Matematica e Fisica, ci consenta di introdurre nella Scuola Secondaria di secondo grado concetti che sono oggetto di studio nei corsi universitari di Geometria.

Il percorso ha come obiettivo la comprensione delle proprietà di uno "spazio curvo" partendo dallo studio dello "spazio euclideo" (cosiddetto "spazio piatto") al fine di analizzare i fenomeni che avvengono nell'Universo; per lo studio di tali fenomeni, le grandezze che i fisici utilizzano in modo forte sono i vettori.

La "teoria dei vettori" è alla base del primo ampliamento della geometria euclidea in quanto caratterizza la geometria affine, il cui gruppo di trasformazioni conserva il parallelismo tra rette (come il gruppo euclideo) ma non conserva l'ampiezza degli angoli (Casolaro in Cundari, 1993).

3.1 – Definizione di vettore e concetto di iperpiano

In Matematica, un vettore è definito come classe di equivalenza di segmenti equipollenti (due segmenti del piano si dicono equipollenti se sono congruenti, paralleli ed equiversi).

L'equipollenza tra segmenti è una relazione di equivalenza. Una classe di equivalenza $\{\vec{v}\}$ di segmenti equipollenti prende il nome di vettore.

In Fisica, una grandezza si può definire come vettore quando:

1) vale la legge del parallelogramma;

2) è invariante rispetto ai sistemi di riferimento per traslazione.

Nel modello di spazio vettoriale lineare, la costruzione di uno spazio a n dimensioni, che indicheremo con S_n, richiede la conoscenza di n vettori linearmente indipendenti (base), in quanto tutti gli altri vettori dello spazio si esprimono come combinazione lineare di essi. In tale contesto i sottospazi di S_n ad n-1 dimensione sono detti "iperpiani" che indichiamo con S_{n-1} e si esprimono mediante un'equazione lineare di primo grado a n incognite del tipo:

$$a_0x_0 + a_1x_1 + ... + a_nx_n + q = 0$$

con a_0, a_1, ..., a_n, q numeri reali.

Ad esempio, una retta *r* di un piano (iperpiano di uno spazio S_2) è rappresentata da un'equazione di primo grado a due incognite del tipo $ax + by + c = 0$, dove i coefficienti *a*, *b* delle incognite sono le componenti di un vettore ortogonale alla direzione della retta *r*.

Analogamente, un piano dello spazio tridimensionale (iperpiano di S_3) è rappresentato da un'equazione di primo grado a tre incognite del tipo $ax + by + cz + d = 0$, dove i coefficienti *a, b, c* delle incognite sono le componenti di un vettore ortogonale alla giacitura del piano.

Un sottospazio di S_n ad n-2 dimensioni è rappresentato da un sistema lineare di due equazioni di primo grado ad n incognite (intersezione di due iperpiani di S_n) del tipo:

$$\begin{cases} a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + q_1 = 0 \\ a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + q_2 = 0 \end{cases}$$

in cui la matrice:

$$A \equiv \begin{pmatrix} a_{10} & a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \end{pmatrix}$$

ha rango ρ(A) = 2. Ad esempio, una retta (sottospazio S_1 di S_3) è rappresentata da un sistema di due equazioni di primo grado a tre incognite (intersezione di due piani):

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z + q_1 = 0 \\ b_1x + b_2y + b_3z + q_2 = 0 \end{cases}$$

In generale, un sottospazio di S_n ad n-k dimensioni è rappresentato da un sistema lineare di k equazioni ad n incognite del tipo:

$$\begin{cases} a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + q_1 = 0 \\ a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + q_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k0}x_0 + a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n + q_k = 0 \end{cases}$$

in cui la matrice:

$$B \equiv \begin{pmatrix} a_{10}a_{11}\ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{20}a_{21}\ldots\ldots\ldots a_{2n} \\ . \\ a_{n1}a_{n2}\ldots\ldots\ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

ha rango $\rho(B) = k$.

3.2 – Costruzione di S_1

Riferendoci all'Universo che ci circonda, già dalla scuola elementare si caratterizza la retta come "ente geometrico ad una dimensione" (spazio S_1), il piano "ente geometrico a due dimensioni" (spazio S_2) e lo spazio S_3 che ci circonda "ente a tre dimensioni" (spazio tridimensionale).

Definiremo in un secondo momento il cosiddetto "spazio quadridimensionale di "Minkowski" su cui Einstein ha sviluppato la Teoria della Relatività.

Dal punto di vista fisico, un *vettore* non nullo $\vec{u}$ è caratterizzato dal *modulo*, che è un numero reale positivo, da una *direzione* che è un fascio di rette parallele alla retta d'azione del vettore e da un *verso* che indichiamo con i segni più o meno.

Se $\vec{u}$ è un vettore non nullo di S_1, ogni altro vettore $\vec{v}$ di S_1 diverso dal vettore nullo, si può esprimere come prodotto del vettore $\vec{u}$ per il numero reale $\alpha \neq 0$

$$\vec{v} = \alpha\vec{u} \tag{3.2.1}$$

Infatti, in uno spazio ad una dimensione, tutti i vettori hanno la stessa direzione, per cui basta operare solo sul modulo e sul verso (che è individuato dal segno più o meno che precede il modulo); dunque, in S_1 il numero reale $\alpha = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}$ si può identificare come rapporto tra i numeri reali $|\vec{u}|$ e $|\vec{v}|$, rispettivamente moduli di $|\vec{u}|$ e di $|\vec{v}|$.

Definizione: *Due vettori* $\vec{u}$ e $\vec{v}$ *del piano si dicono linearmente dipendenti se hanno la stessa direzione*.

In tal caso, sussiste tra essi la (3.2.1).

Dalla (3.2.1) si ha:

$$\alpha\,\vec{u} + (-1)\vec{v} = \vec{0} \tag{3.2.2}$$

cioè: "*se due vettori sono linearmente dipendenti, esiste una combinazione lineare di essi con scalari non nulli che dà il vettore nullo*".

Allora, per ogni coppia di vettori rappresentati nel piano da segmenti orientati paralleli, posso dire che "fissato un vettore, l'altro si ottiene da esso moltiplicandolo per un numero reale". Pertanto, il sistema massimo di vettori linearmente indipendenti di uno spazio S_1 è costituito da un solo vettore $\vec{u}$ non nullo; la conoscenza di $\vec{u}$ è sufficiente per la costruzione dello spazio S_1.

3.3 – Costruzione di S_2

Definizione: *Tre vettori* $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ *dello spazio* S_3 *si dicono linearmente dipendenti se hanno la stessa giacitura, cioè se possono essere rappresentati con segmenti orientati sullo stesso piano* (superficialmente diciamo: *se esiste un piano che li contiene*).

La giacitura individuata da due vettori rappresentati da segmenti orientati non paralleli $\vec{u}_1$ *e* u_2 definisce, dunque, tutti e soli i vettori linearmente dipendenti dal sistema $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$.

Infatti, se $\vec{u}_1$ *e* u_2 sono due vettori non paralleli e non nulli del piano, un qualsiasi vettore $\vec{w} \equiv \vec{u}_3$, appartenente al piano individuato da $\vec{u}_1$ *e* u_2, si può decomporre lungo le direzioni di essi, cioè, si può esprimere come somma di due vettori $\alpha_1\vec{u}_1$, linearmente dipendente da $\vec{u}_1$, ed $\alpha_2\vec{u}_2$, linearmente dipendente da $\vec{u}_2$ (fig. 3.3.1):

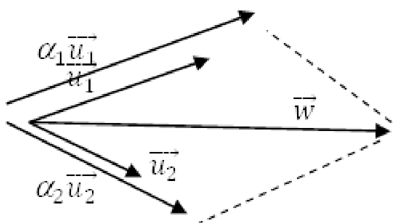

Figura 3.3.1

$$\vec{u}_3 = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2 u_2 \tag{3.3.2}$$

da cui:

$$\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = \vec{0} \tag{3.3.3}$$

Le (3.2.2) e le (3.3.3), esprimono, relativamente a spazi euclidei unidimensionali e bidimensionali, la classica definizione di sistema di vettori linearmente dipendenti (dell'algebra lineare). Da essa discende immediatamente:

- due vettori di uno spazio unidimensionale S_1 (retta o fascio di rette parallele) sono sempre linearmente dipendenti, quindi un sistema di vettori linearmente indipendenti di un S_1 è costituito da un solo vettore;

- tre vettori di uno spazio bidimensionale S_2 (piano o fascio di piani paralleli) sono sempre linearmente dipendenti, quindi un sistema massimo di vettori linearmente indipendenti di un S_2 è costituito da due vettori.

- In generale, n vettori di uno spazio ad n-1 dimensioni (spazio S_{n-1}) sono sempre linearmente dipendenti, quindi un sistema massimo di vettori linearmente indipendenti di uno spazio S_{n-1} è costituito da n-1 vettori (Casolaro 2019).

4 - Ampliamento della geometria euclidea alla geometria affine

Come accennato nel paragrafo 3. di questo lavoro, il primo ampliamento del Modello euclideo è la geometria nello spazio affine che si costruisce su uno spazio vettoriale (Casolaro, 1993).

Rimandando alla letteratura di tutti i testi in adozione le note proprietà dello spazio vettoriale, presentiamo un percorso che dal modello analitico di riferimento cartesiano negli spazi piatti, ci conduce ad un analogo modello sullo spazio curvo.

Teorema. *Se n vettori di uno spazio* S_n *sono linearmente dipendenti, la matrice delle loro componenti, in un opportuno riferimento di* S_n, *ha determinante uguale a zero.*

Proviamo il teorema per n = 2. Precisamente:

Se due vettori del piano sono linearmente dipendenti, la matrice costituita dalle componenti dei vettori ha determinante uguale a zero.

Dim. Se due vettori sono linearmente dipendenti, hanno la stessa direzione per cui, dalla rappresentazione cartesiana delle componenti (fig. 4.1) si deduce che

$$a_x : b_x : a_y : b_y \quad \Rightarrow \quad a_x b_y - a_y b_x = 0$$

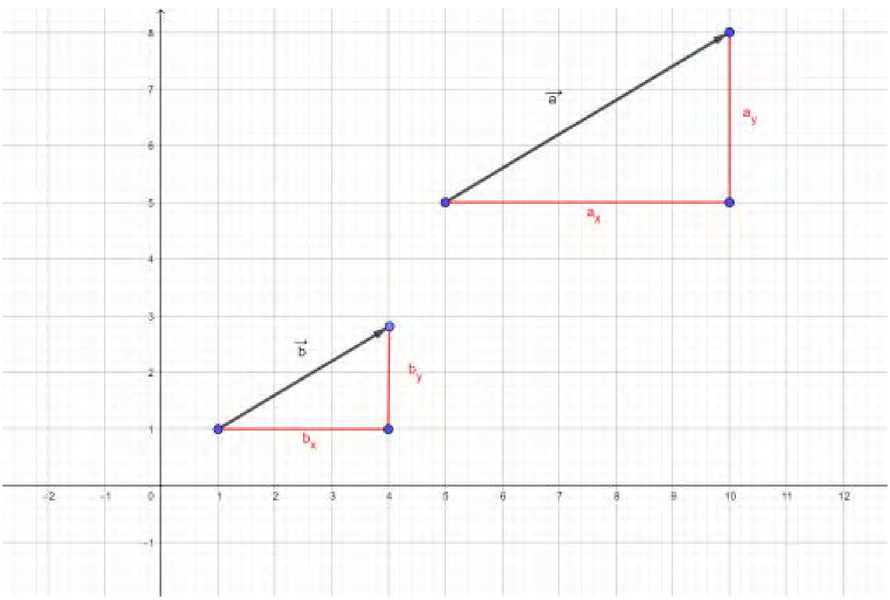

Fig 4.1

cioè

$$\det\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = 0$$

Pertanto, noto il teorema per n = 2, procedendo per induzione si dimostra la generalità. La ovvia conseguenza di tale teorema è:

n vettori di uno spazio S_n *sono linearmente indipendenti, se e solo se la matrice delle loro componenti, in un opportuno riferimento dello spazio, ha determinante diverso da zero.*

4.1 – Prodotto scalare

Il prodotto scalare è un'operazione tra vettori il cui risultato è uno scalare (un numero reale per i nostri obiettivi).

Se $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$ e $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j}$ sono due vettori del piano, si definisce prodotto scalare il numero reale ottenuto dal prodotto dei moduli per il coseno dell'angolo ϑ che essi formano:

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \vartheta$$

Applicando le proprietà delle operazioni negli spazi vettoriali (associativa e distributive) risulta:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j}\right) \times \left(b_x\vec{i} + b_y\vec{j}\right) =$$
$$= a_x b_x \left(\vec{i} \times \vec{i}\right) + a_x b_y \left(\vec{i} \times \vec{j}\right) + a_y b_x \left(\vec{j} \times \vec{i}\right) + a_y b_y \left(\vec{j} \times \vec{j}\right)$$

da cui, tenendo conto che:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = 1 \qquad\qquad \vec{i} \times \vec{j} = \vec{j} \times \vec{i} = 0$$

si ha:

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \vartheta = a_x b_x + a_y b_y$$

che esprime il prodotto scalare, nella rappresentazione cartesiana, come somma dei prodotti delle componenti omologhe.

4.2 – Equazione di retta e piano nello spazio affine

In un riferimento cartesiano del piano sia P (*x, y*) un punto diverso dall'origine, in modo che il segmento orientato $\vec{OP}$ identifichi il vettore che ha per componenti le coordinate *x* e *y* di P.

Se $\vec{n}(a,b)$ è un vettore ortogonale ad $\vec{OP}$, per definizione di prodotto scalare, si ha:

$$\vec{n} \times \vec{OP} = 0, \qquad \text{cioè} \qquad ax + by = 0 \quad (*)$$

La (*), equazione della retta OP in S_2, individua dunque il luogo geometrico dei punti P (*x, y*) del piano tali che il segmento OP è perpendicolare alla direzione del vettore $\vec{n}(a,b)$.

Se curvassi questa retta, otterrei un arco tale che il vettore perpendicolare in ogni punto alla retta tangente all'arco non avrebbe più direzione costante, quindi le componenti *a* e *b* del vettore $\vec{n}(a,b)$ risulterebbero funzioni delle coordinate del punto nel piano.

Anche per il piano in S_3 si può fissare un riferimento cartesiano ed un punto P (*x, y, z*) diverso dall'origine in modo che il segmento orientato $\vec{OP}$ identifichi il vettore che ha per componenti le coordinate *x, y* e *z* di P.

Se $\vec{n}(a,b,c)$ è un vettore ortogonale ad $\vec{OP}$, per definizione di prodotto scalare, si ha:

$$\vec{n} \times \vec{OP} = 0, \qquad \text{cioè} \qquad ax + by + cz = 0 \quad (**)$$

che rappresenta l'equazione del piano per l'origine e individua il luogo geometrico dei punti di S_3 tali che il segmento OP è perpendicolare alla direzione del vettore $\vec{n}(a,b,c)$.

Anche in questo caso concludo che *i vettori perpendicolari al piano in ogni punto, hanno la stessa direzione*. Così di seguito, operando su spazi piatti, di dimensione tre, quattro, … ecc, i vettori perpendicolari allo spazio hanno tutti la stessa direzione.

Se, invece, consideriamo uno spazio curvo, la direzione del vettore perpendicolare allo spazio cambia in ogni punto, per cui le componenti del vettore normale allo spazio in un punto (precisamente al piano tangente la superficie in quel punto) sono funzioni delle coordinate.

5 - Modello geometrico in uno spazio a curvatura non nulla.

Considerata una superficie come spazio in sé, vediamo, innanzitutto, come si può costruire su di essa una geometria analoga a quella del piano:

- Ai concetti intuitivi di punto, piano e retta associamo rispettivamente i concetti di punto stesso, superficie e geodetica. Ovviamente l'analogo del segmento rettilineo sarà l'arco di geodetica.

- Alla relazione di uguaglianza tra figure, in geometria euclidea:

Due figure piane sono uguali, se possono farsi corrispondere punto per punto in modo che le distanze rettilinee fra le coppie di punti corrispondenti, siano uguali,

corrisponde, per la geometria non euclidea:

Due figure su una superficie sono uguali se possono farsi corrispondere punto per punto in modo che le distanze geodetiche fra coppie di punti corrispondenti sono uguali.

- Le proprietà fondamentali dell'uguaglianza fra archi geodetici e angoli, corrispondono ai postulati della congruenza tra segmenti ed angoli.

In un discorso di carattere didattico, la generalizzazione di queste proprietà mediante l'intuizione, la si può dare utilizzando come superficie un foglio flessibile ed inestensibile, sì che, se su di esso vi sono figure uguali, con una flessione della superficie le possiamo sovrapporre una sull'altra.

Due superfici applicabili l'una sull'altra con una flessione senza estensione avranno la medesima geometria; ad esempio, su una superficie cilindrica si avrà una geometria assimilabile a quella di una superficie piana (ovviamente, bisogna definire opportunamente i concetti fondamentali).

Se abbiamo una geometria su una superficie sferica, essa sarà diversa da quella del piano, perché è impossibile rendere piana una porzione di sfera senza provocare contrazioni o dilatazioni.

Però, è facile verificare che anche sulla sfera valgono, per figure uguali, proposizioni analoghe ai postulati della congruenza nel piano, in quanto la sfera può muoversi liberamente su se stessa come il piano (non valgono le proprietà affini e le proprietà del parallelismo che si avvalgono del V postulato).

Quella superficie che si può muovere liberamente su se stessa, come accade per la superficie piana, è caratterizzata da una grandezza costante in ogni suo punto: la curvatura K.

La definizione rigorosa di curvatura richiede conoscenze che esulano da un'esposizione elementare. Però, come per i concetti di retta e di piano in geometria euclidea, riteniamo che si possa lasciare all'intuito dello studente di immaginare quelle superfici a curvatura zero (il piano), a curvatura costante (la sfera), a curvatura variabile (ellissoide, o banale esempio dell'uovo).

Rimandando alla Bibliografia (Casolaro, Santarossa, 1997) la caratterizzazione relativa alla suddivisione delle geometrie in base alla curvatura (non essenziale per il nostro scopo), ci limitiamo a far presente che ci riferiremo ad un modello di geometria di tipo ellittico, analogo a quello di Riemann, che trova applicazione nello spazio fisico.

Riemann riteneva che le proprietà che distinguono lo spazio fisico da altre varietà, possono essere ricavate solo dall'esperienza; di conseguenza, egli pensava che gli assiomi della geometria euclidea potessero essere veri solo approssimativamente per lo spazio fisico e, come Lobacewscki, riteneva che sarebbe stata l'Astronomia a stabilire la geometria che meglio si adatta allo spazio fisico.

Già nel 1854, Riemann, dedusse che lo studio della geometria non si può astrarre dall'evoluzione fisica.

In uno spazio in cui la curvatura cambia da un luogo all'altro per la presenza della materia, e da un istante all'altro per il moto della materia, le leggi della geometria euclidea non sono valide. Pertanto, egli riteneva che per determinare la vera natura dello spazio fisico, si dovesse associare fra loro spazio e materia (e di conseguenza il tempo). A tale scopo, così si esprimeva:

> *O la realtà soggiacente lo spazio forma una varietà discreta, oppure bisognerà cercare il fondamento delle sue relazioni metriche fuori di esso, nelle forze connettive che vi agiscono. Questo ci porta nel dominio di un'altra scienza, quella della fisica, in cui l'oggetto delle nostre ricerche non ci consente di entrare oggi.*

Quest'idea, che ha condotto poi alla Teoria della relatività, fu sviluppata da William Clifford (1845-1879) il quale sosteneva che:

"La variazione della curvatura dello spazio sia ciò che accade realmente in quel fenomeno che chiamiamo moto della materia, sia essa pesante o eterea".

6 - Modello di Riemann ed estensione della geometria alla Fisica.

Il modello formulato nel 1854 da Riemann (geometria ellittica), si può considerare una estensione della geometria differenziale di Gauss (Casolaro, 2002).

Riemann voleva dimostrare che gli assiomi di Euclide sono verità empiriche (e non verità evidenti) ed adottò l'approccio analitico proprio perché riteneva che nelle dimostrazioni geometriche si potesse essere indotti ad assumere come verità ciò che è soltanto una nostra percezione, in quanto conosciamo lo spazio solo localmente; da qui lo studio del comportamento locale dello spazio, cioè l'approccio metrico-differenziale.

Del resto l'ortogonalità tra vettori, per come è stata definita su un iperpiano di uno spazio piatto, non ha significato su una superficie curva; il prodotto scalare tra un vettore normale alla superficie in un suo punto ed un vettore del piano tangente alla superficie in quel punto è un'approssimazione corretta della realtà solo se operiamo in un intorno del punto abbastanza piccolo da poter identificare l'elemento infinitesimo di superficie con una parte infinitesima di piano.

Infatti sugli elementi lineari, Riemann definisce la distanza tra due punti, le cui coordinate corrispondenti differiscono solo per degli infinitesimi. Basandosi su alcune ipotesi, egli assume per la distanza un'espressione del tipo:

$$ds^2 = \sum_{i_{ij}} g_{ij} dx_i dx_j \tag{6.1}$$

in cui le g_{ij} sono funzioni delle coordinate $x_1, x_2, ... x_n$ tali che $g_{ij} = g_{ji}$ e l'espressione quadratica a secondo membro è sempre positiva. Dalla (6.1), con:

$$g_{ij} = 0,\ \forall i \neq j; \qquad g_{ji} = 1,\ \forall i = j,$$

si ottiene:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + ... + dx_n^2$$

che rappresenta la distanza nel modello euclideo.

Nella parte finale del suo lavoro, Riemann applica allo spazio ordinario questi risultati, concludendo che lo spazio fisico è una varietà a tre dimensioni a curvatura costante.

Tale conclusione sarà giustificata analiticamente dai risultati pubblicati nel 1885 da Tullio Levi-Civita e Gregorio Ricci Cubastro che hanno sviluppato il calcolo tensoriale che applicheremo, in modalità elementare, al Modello di seguito indicato.

Ad esempio, riferendoci ad una varietà tridimensionale di uno spazio a quattro dimensioni S_4, un'equazione lineare in quattro incognite del tipo:

$$g_{11}(x,y,z,t)\,dx + g_{22}(x,y,z,t)\,dy + g_{33}(x,y,z,t)\,dz + g_{44}(x,y,z,t)\,dt = 0 \quad (6.2)$$

ottenuta dal prodotto scalare tra il vettore[2] $\vec{g}\left(g_{12}, g_{12}, g_{13}, g_{14}\right)$ (normale alla superficie S_4) ed il vettore $d\vec{s}\left(dx, dy, dz.dt\right)$ (spostamento infinitesimo su S_4), individua un iperpiano S_3 dello spazio S_4, in cui le g_{ii} (i = 1, ..., 4) sono funzioni delle coordinate (*x, y, z, t*) analoghe a quelle introdotte da Riemann per la sua geometria non euclidea, in cui la metrica è definita dalla (6.1).

Allo stesso modo, i sistemi:

$$\begin{cases} g_{11}dx + g_{12}dy + g_{13}dz + g_{14}dt = 0 \\ g_{21}dx + g_{22}dy + g_{23}dz + g_{24}dt = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_{11}\,dx + g_{12}\,dy + g_{13}\,dz + g_{14}\,dt = 0 \\ g_{21}\,dx + g_{22}\,dy + g_{23}\,dz + g_{24}\,dt = 0 \\ g_{31}\,dx + g_{32}\,dy + g_{33}\,dz + g_{34}\,dt = 0 \end{cases}$$

in cui le matrici

---

2 In realtà abbiamo chiamato "vettore" impropriamente l'espressione $\vec{g}\left(g_{12}, g_{12}, g_{13}, g_{14}\right)$ che, secondo la teoria di Levi-Civita/Ricci Cubastro è definita "tensore", cioè un vettore a componenti variabili.

$$A_1 = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \end{pmatrix}$$

hanno rango $\rho(A_1) = 2$, $\rho(A_2) = 3$, rappresentano uno spazio S_2 (analogo al piano euclideo) iperpiano di S_3, ed uno spazio S_1 (analogo alla retta euclidea) iperpiano di S_2 .

Nell'idea di Einstein, le funzioni g_{ij} incorporano gli effetti delle masse gravitazionali nello spazio. Tali effetti, provocando una curvatura in ogni punto, sono la causa del cambiamento di direzione del vettore normale alla superficie in quel punto.

Con l'introduzione della coordinata-tempo, si ha poi una più corretta analisi dell'universo, identificato col cosiddetto spazio-tempo quadridimensionale (*x*, *y*, *z*, *t*) di Minkovsky (Casolaro, 2018), in cui l'insieme dei punti-eventi (*x*, *y*, *z*, *t*) definisce un continuo a quattro dimensioni che rappresenta uno spazio geometrico S_4.

In tale ottica, lo spazio S_3 dei punti (*x*, *y*, *z*) del modello euclideo, visto come sottospazio di S_4 , può essere assimilato ad un iperpiano dello spazio-tempo di Minkovsky.

Se analizziamo la struttura dei sottospazi di S_4, in analogia al modello analitico euclideo, possiamo trarre le seguenti conclusioni:

- per $dt = 0$ (ovvero t = costante), si ha l'iperpiano S_3, che è lo spazio geometrico euclideo tridimensionale, in cui valgono le leggi della cinematica classica;

- se invece è costante una delle coordinate *x, y, z*, (*dx*=*dy*=*dz*=*0*) si hanno iperpiani S_3 di S_4 che caratterizzano modelli cinematici relativistici su S_2, che è l'analogo del piano euclideo.

Ad esempio, l'insieme dei punti P (*x, y, 0, t*) ≡ P (*x, y, t*) è un S_3, le cui coordinate (*x, y, t*) individuano i punti-eventi del piano $S_2(x, y)$ che è prolungato alla cinematica con l'introduzione della coordinata tempo *t*.

In tale contesto, bisogna tener conto che la metrica è definita da:

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2-c^2dt^2 \qquad (6.2)$$

Tale relazione si può giustificare geometricamente, aggiungendo alla terna reale (O, *x, y, z*) del riferimento di S_3, un quarto asse immaginario ortogonale ad S_3 in cui la coordinata tempo è moltiplicata per l'unità immaginaria *i* e, per uniformità dimensionale, per la velocità della luce c.

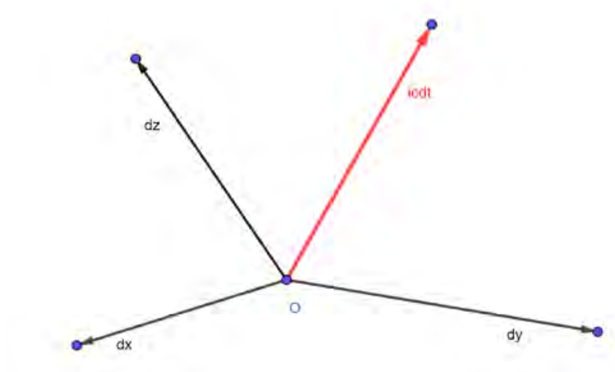

Fig. 6.1

Il vettore $d\vec{s}$ ha allora componenti (*dx, dy, dz, icdt*) (fig. 6.1) e quindi la metrica è definita da:

$$ds^2= dx^2+dy^2+dz^2+i^2c^2dt^2 \quad = \quad dx^2+dy^2+dz^2-c^2dt^2 \ ,$$

cioè la (6.2).

Ciò porta a concludere che la geometria non si può astrarre dall'evoluzione fisica.

Infatti, secondo la concezione classica, la geometria esprime un insieme di proprietà relative al movimento dei corpi ed alla propagazione della luce, che si ottengono facendo astrazione dal tempo e dalle forze. Quindi, con un'estensione della geometria alla cinematica (che è la teoria del movimento rispetto allo spazio-tempo) e successivamente alla dinamica (con l'introduzione delle forze) si avranno approssimazioni che ci avvicinano man mano ad un grado più concreto della realtà fisica, che troverà poi un'ulteriore correzione con la teoria della relatività generale.

Con tale teoria, Einstein sollevò anche una questione più ampia legata al significato delle g_{ij} il cui uso incorporava gli effetti gravitazionali delle masse nello spazio; infatti, le geodetiche del suo spazio-tempo sono precisamente le traiettorie degli oggetti che si muovono liberamente (come ad esempio la traiettoria della terra intorno al sole), analogamente alla legge newtoniana che ci fa individuare la retta come traiettoria descritta da un punto, non soggetto a forze, con velocità uniforme.

Dunque, il modello newtoniano che assegna una legge per il moto libero di un punto e vi aggiunge poi una forza, risulta essere solo un'astrazione nella nuova costruzione della dinamica di Einstein.

Tale concezione sarebbe reale se la materia fosse composta da piccole masse, poste a distanza tale una dall'altra da potersi muovere senza subirne la reciproca influenza; invece la materia si muove sotto l'influenza di altra materia che, secondo la dinamica newtoniana è la causa delle forze gravitazionali.

Bibliografia

Kline Morris (1991). *Storia del pensiero matematico*. Edizione Einaudi 1991.

F. Casolaro (1993), a cura di Cesare Cundari. "*Il Programma di Erlangen e le Trasformazioni geometriche*". Progetto del M.P.I. del Dipartimento di Progettazione e Rilievo dell'Università "La Sapienza" di Roma (11-15 dicembre 1990; 6-10 maggio 1991; 8-12 dicembre 1991): "Disegno e Matematica per una didattica finalizzata alle nuove tecnologie". Pubblicazione 1993, pagine 101-103

Casolaro F., Santarossa R. (1997). Geometrie non euclidee e geometria differenziale: note didattiche, *Atti del Congresso Nazionale Mathesis 1997: "Attività algoritmica e pensiero dialettico nell'insegnamento della Matematica"*. Caserta, 28-31 ottobre 1997; pagine 213-219

Casolaro F. (2002). Un percorso di geometria per la scuola del terzo millennio: dal piano cartesiano ad un modello analitico su uno spazio curvo. *Atti del Congresso Nazionale Mathesis "La Matematica fra tradizione e innovazione: un confronto europeo"* – 17-19 ottobre Bergamo 2002.; pag.185-198.

Casolaro F., Pisano R. (2006). Riflessioni sulla geometria nella Teoria della relatività, *Atti del XXVI Congresso Nazionale di "Storia della Fisica e dell'Astronomia"* (SISFA 15-17 giugno 2006), tenutosi il giorno 15/05/2006 presso la Facoltà di Architettura "Valle Giulia" dell'Università di Roma "Sapienza"; pag. 221-231.

Casolaro F., Pisano R. (2011). An Historical Inquiry on Geometry in Relativity: Reflections on Early Relatiosnship

Geometry-Physics (Part One) - *History Research* - Vol. 1, Number 1, December 2011; pag. 47-60.

Casolaro F., Pisano R. (2012). An Historical Inquiry on Geometry in Relativity: Reflections on Early Relationship Geometry-Physics (Part Two) - *History Research* - Vol. 2, Number 1, january 2012; pp. 57-65.

Casolaro F. (2018). Quale Geometria per lo spazio fisico. Quaderni dell'APAV n. 1 – 2018, pp. 57-68.

Casolaro F. (2019). Dal vettore nello spazio piatto al tensore nello spazio curvo secondo il Modello di Minkovschj. Corso di Formazione per l'insegnamento della Fisica nella Scuola Secondaria di secondo grado - Dipartimento di Architettura Università Federico II. *Quaderni APAV* n. 4; 2019, pp. 1-16

Casolaro F. (2020). Dalla Geometria euclidea alla Geometria proiettiva. Interrelazioni tra Matematica e Disegno. *Periodico di Matematica* n. 2, dicembre 2020; pp. 41-73.