

SVILUPPO STORICO DELLA TRIGONOMETRIA

III Parte

ANNAMARIA VICECONTE

Lo sviluppo nell'arco del settecento

È nel sec. XVIII che la trigonometria conosce quello che sarà l'assetto moderno, con grandi matematici quali Moivre, Bernoulli e Eulero.

Eulero fu il più grande matematico del sec. XVIII, nacque a Basilea nel 1707 e morì a Pietroburgo nel 1783. La prima educazione matematica gli fu impartita dal padre, allievo di Giacomo Bernoulli. Destinato agli studi teologici ebbe l'occasione di attrarre l'attenzione di Giovanni Bernoulli e di diventare allievo.

Nel 1735 per una congestione cerebrale dovuta ad eccesso di lavoro ebbe inizio quella progressiva cecità che lo afflisse per gran parte della sua vita.

Non vi è ramo delle matematiche cui Eulero non si sia dedicato. Si occupò di argomenti nautici, di astronomia, di geometria analitica esponendo teorie generali che fino ad allora non avevano avuto un assetto rigorosamente metodico.

Per le scarse conoscenze sulla natura e sulle variazioni delle funzioni circolari i matematici dei sec. XV, XVI, XVII, distinguevano numerosi casi di risoluzione dei triangoli, specialmente sferici, e davano un grande numero di formule che, con le formule moderne, risultano in gran parte riducibili a poche relazioni.

È con Eulero che ha inizio la trattazione moderna della trigonometria: dopo aver studiato più a fondo la natura delle funzioni circolari, Eulero ridusse la risoluzione dei triangoli ai suoi casi fondamentali, applicando minor numero possibile di relazioni dedotte tutte da una relazione fondamentale dimostrata direttamente.

Sulle tracce di Eulero si mosse anche l'opera di Lagrange, Legendre, Cagnoli, Gendemann, con l'ausilio dei quali la trigonometria assunse l'aspetto moderno.

Questi suoi successi vanno attribuiti anche al fatto che egli considerò il calcolo come puro modello formale valido indipendentemente dall'oggetto a cui lo si applica, e ritenendo quindi inutile verificare per via sperimentale la teoria dedotta da sicuri principi.

Questo è da notarsi soprattutto per lo sviluppo che arrecò alla fisica matematica ritenuta fino ad allora una scienza irrealizzabile.

Ecco dunque che la trigonometria assume la funzione che è anche odierna: ausilio per altre scienze, oltre che scienza a sé.

Al termine del nostro «lavoro» vogliamo citare alcuni esempi di misure di distanze di punti inaccessibili, della distanza Terra/Sole o Terra/Stella.

Ecco come si misura trigonometricamente l'altezza di un edificio qualsiasi, ad esempio un campanile (fig. 8).

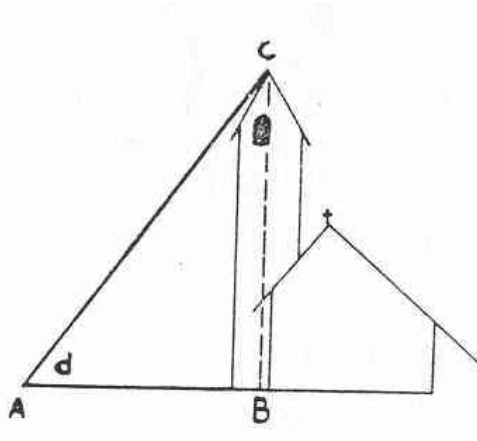


Fig. 8

$$\overline{AB} = 100 \text{ m}$$

$$x = 40^\circ$$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \operatorname{tg} x$$

$$\overline{BC} = \overline{AB} \operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{tg} 40^\circ = 0,83$$

$$\overline{BC} = m \ 100 \cdot 0,83 = m \ 83$$

1. Ci si pone ad una certa distanza $\overline{AB} = 100 \text{ m}$ dal campanile.
2. Si misura con apposito strumento l'angolo \hat{A} ($x = 40^\circ$).
3. Dalla relazione

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \operatorname{tg} x \Rightarrow \overline{BC} = \overline{AB} \operatorname{tg} x$$

e poiché sulle tavole si trova che $\operatorname{tg} 40^\circ = 0,83$ $\overline{BC} = 100 \cdot 0,83 = m \ 83$.

Abbiamo già risolto il problema della distanza di un punto inaccessibile mediante un triangolo rettangolo. Risolviamo ora lo stesso problema per mezzo di un triangolo qualunque (fig. 9).

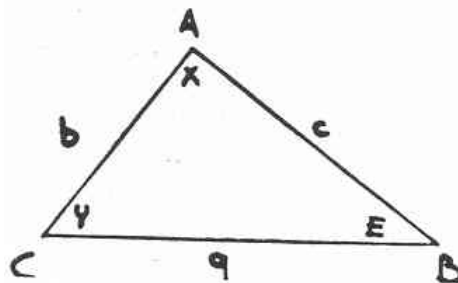


Fig. 9

$$\overline{BC} = a = 1500 \text{ m}$$

$$\hat{BAC} = x = 48^\circ 20' 12''$$

$$\hat{ABC} = y = 64^\circ 7' 10''$$

$$z = 180^\circ - (x + y) = 180^\circ - 112^\circ 27' 22'' = 67^\circ 32' 38''$$

$$\frac{b}{\text{senz}} = \frac{a}{\text{senx}} \Rightarrow b = \frac{a}{\text{senx}} \cdot \text{senz} = m 1087$$

$$\frac{c}{\text{seny}} = \frac{a}{\text{senx}} \Rightarrow c = \frac{a}{\text{senx}} \cdot \text{seny} = m 1855$$

Il problema da risolvere consiste nel determinare le distanze di un punto A del terreno da due punti B e C situati lungo una strada rettilinea alla distanza di $1.500 m$. Si supponga che l'operatore si trova nel punto A dove è situata una vecchia torre. Egli colloca il goniometro sulla torre e misura l'angolo $\hat{B}AC = x = 48^\circ 20' 12''$. Poi si dirige verso B e misura l'angolo $\hat{A}BC = y = 64^\circ 7' 10''$. Ora egli conosce due angoli e un lato $\overline{BC} = a = 1500 m$.

Il terzo angolo

$$z = 180^\circ - (x + y) = 180^\circ - (48^\circ 20' 12'' + 64^\circ 7' 10'') = 180^\circ - 112^\circ 27' 22'' = 67^\circ 32' 38''$$

Per il teorema dei seni si ha che $\frac{b}{\text{seny}} = \frac{a}{\text{senx}}$ da cui si ha che $b = \frac{a}{\text{senx}} \cdot \text{seny} = m 1807$.

S'intende che l'operatore ha trovato sulle apposite tavole i valori di $\text{sen } x$ e $\text{sen } y$.

Si ha poi che $\frac{c}{\text{senz}} = \frac{a}{\text{senx}} \Rightarrow c = \frac{a}{\text{senx}} \cdot \text{senz} = m 1855$.

Con questo e con altri teoremi si possono calcolare altre distanze e fare numerosi esempi. Possiamo semplicemente accennare che attraverso tale metodo si arriva a determinare l'altezza di una montagna.

CURIOSITÀ

Ecco come si calcola la distanza della Terra dal Sole (fig. 10).

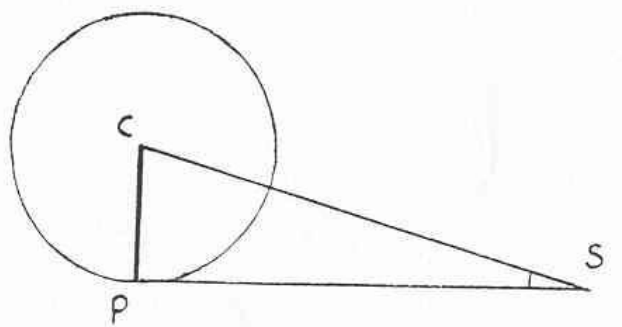


Fig. 10

$$\hat{C}SP = 8'',8$$

$$\overline{SP} = \overline{CP} \text{ sen} \hat{C}SP$$

$$\overline{CP} = Km 6367,397$$

$$\overline{SP} = 149.500.000 Km$$

Guardando il Sole da punti diversi della Terra, le visuali aventi origine in quei punti non formano nessun angolo apprezzabile data l'enorme distanza dal Sole. Quelle visuali, praticamente, sono parallele.

Allora si ricorre a questo espediente: si cerca di stimare l'angolo \widehat{CSP} sotto il quale, dal centro del Sole, si vedrebbe il raggio \overline{CP} della Terra. Tale angolo si dice parallasse del Sole rispetto al punto P della Terra.

In particolare si ha una parallasse orizzontale equatoriale quando la retta SP è tangente alla superficie della Terra e quindi perpendicolare al raggio CP . L'ampiezza di tale angolo è stata stimata, con delicati procedimenti di osservazione astronomica in $8'',8$ (8 secondi e 8 decimi di secondo). Si ha che $\overline{SP} = \overline{CP} \operatorname{sen}\widehat{CSP}$, poiché \overline{CP} è il raggio terrestre = $Km\ 6.367.397$ si ha $\overline{SP} = 149.600.000\ Km$

Ancora più laboric

a stella qualsiasi (fig. 11).

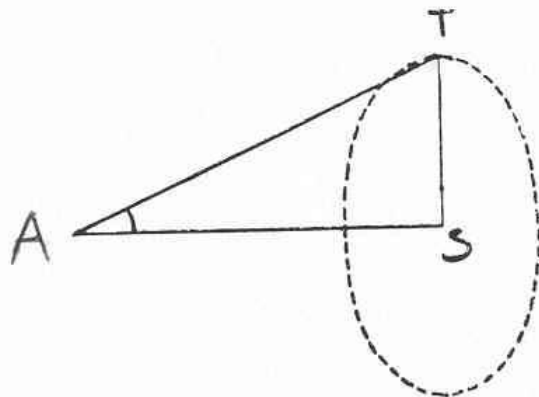


Fig. 11

In tal caso la lunghezza del raggio terrestre è insufficiente a stimare una parallasse della stella. Allora si considera il raggio dell'orbita terrestre che è di circa $150.000.000$ di Km in media. Il punto A è la stella, T è la Terra, S è il Sole, TS è il raggio (medio) dell'orbita terrestre, \widehat{TAS} è la parallasse annua della stella A , cioè l'angolo sotto il quale il raggio TS è visto da A quando la retta AS è perpendicolare al piano dell'orbita terrestre. Tutto sta nel determinare l'ampiezza di \widehat{TAS} perché poi si ricava $\overline{AT} = \overline{ST} \operatorname{sen}\widehat{TAS}$.

La prima parallasse stellare fu determinata nel 1837 dal matematico e astronomo Bessen per la 61^a stella della costellazione del Cigno ($0'',34$), la cui distanza dalla Terra fu calcolata poi fra i 9 e 10 anni luce.