SVILUPPO STORICO DELLA TRIGONOMETRIA

II Parte

ANNAMARIA VICECONTE

Le formule di prostaferesi

Etimologicamente il vocabolo *prostaferesi* deriva dalle parole greche «pròstesis» (somma) ed «afaíresis» (differenza). Anteriormente all'introduzione dei logaritmi stava ad indicare l'insieme di quelle formule che facilitavano i calcoli trasformando i prodotti, quozienti e potenze in somme e differenze. La scoperta dei logaritmi finì con l'invertire lo scopo e l'uso di queste formule e conseguentemente il significato del termine.
Qualche storico della matematica fa risalire a lui le formule di prostaferesi ma probabilmente al Werner si deve soltanto la formula che esprime la differenza dei coseni: $\cos p - \cos q$.
L'incertezza storica è accentuata dal fatto che come già detto, la sua opera non trovò nel suo tempo editori disposti a divulgarla, e tutto il manoscritto andò perduto. Alcune pagine furono scoperte nella biblioteca di Cracovia ed altre sono conservate nella Biblioteca Vaticana.
Tra i personaggi che occupano un posto nella storia della trigonometria bisogna ricordare Copernico e Brahe.
Non c'è da meravigliarsi che tali astronomi di fama mondiale si dedicassero agli studi trigonometrici, infatti nell'epoca di cui parliamo la trigonometria era sempre considerata come ausiliaria dell'astronomia.
Brahe (1546/1601) fu efficace promotore della prostaferesi cioè di quell'artificio, veramente prezioso prima dell'invenzione dei logaritmi applicando il quale si sostituisce una moltiplicazione con un'addizione.
La prostaferesi viene applicata nella risoluzione di un triangolo sferico determinato da due lati b e c dall'angolo compreso A. Da alcuni storici viene attribuito al Brahe il «Teorema delle proiezioni» che appare per la prima volta stampato nel «*Canon*» del Viéte.
Brahe deve essere ricordato anche per essere stato il precursore nell'introduzione del triangolo supplementare ad un dato che poi svilupperà ed analizzerà meglio il Viéte. Il riconoscimento dei suoi meriti che venne negato al Werner fu ampiamente accordato ad un altro ecclesiastico, quasi contemporaneo: Nicolò Copernico, il quale ispirandosi alle idee rivoluzionarie di Aristarco di Samo, sostituì alla concezione geocentrica dell'universo l'ipotesi che fosse il sole centro nostro sistema planetario. I capitoli XII e XIV del «*De rivolutionibus orbium coelestium*» fanno accordare a Copernico un posto nella storia della trigonometria.
Della trigonometria il celebre astronomo insegna soltanto quanto è necessario per esporre il sistema del mondo. Però alcune sue pagine lasciate manoscritte mostrano che egli si incontrò col Maurolico nell'introdurre la metodica considerazione della secante e si spinse fino a calcolare una tavola dei valori di questa linea trigonometrica.
Il maggiore matematico francese del XVI secolo fu Francesco Viéte. Era un giurista dedito alla vita politica. Possiamo definirlo come un «dilettante» che dedicava alla scienza il tempo disponibile.

Il suo stile era spesso molto oscuro tanto da far disperare del proprio lavoro un matematico francese intento a tradurre dal latino in francese una sua opera. Molti dei suoi scritti non vennero pubblicati immediatamente e furono stampati molti anni dopo la sua morte e portarono a ridurre la sua influenza sui suoi contemporanei. I suoi studi più proficui riguardano l'algebra e poi la trigonometria. Egli consacrò alla trigonometria tutte le proprie forze poiché la considerava la massima gloria dei matematici in quanto abilita a sottomettere in un calcolo meraviglioso cielo, terra e mare.
Gli scritti più importanti e decisivi a riguardo della trigonometria si trovano nel trattato intitolato «Variorum de rebus mathematicis responsorum lib. VIII» del 1593. Egli propose dei nomi speciali per le linee trigonometriche che però non trovarono benevola accoglienza da parte dei competenti e non entrarono a far parte del linguaggio comune.
Egli stabilì alcune formule fondamentali fra le quali possiamo ricordare il teorema del coseno che i Greci già conoscevano in forma geometrica

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos x$$

Dobbiamo poi ricordare le formule di moltiplicazione degli archi; esse non sono enunciate sotto la forma generale che è nota attualmente, ma con una serie di due colonne di relazioni congeneri ai cui è evidente la legge di formazione (esse si trovano enunciate a parole e prive di dimostrazione in uno scritto postumo ridatto dallo Anderson, fedele interprete del grande matematico, che fornì le dimostrazioni) (figura 4).
Viéte fornì in questo modo uno strumento utilissimo per il calcolo delle tavole goniometriche e per la trigonometria in genere. Il Viéte si spinse ancora oltre mostrando come le stabilite formule di moltiplicazione degli archi fornissero mezzi anche per risolvere le questioni inverse. Vero è che egli si limita alla divisione in 3, 5, 7 parti dell'angolo *x* ma dalle sue parole emerge che egli aveva compreso che si doveva procedere similmente in ogni caso. Nella stessa memoria in cui è contenuto il teorema del coseno (Variorum de rebus mathematicis responsorum lib. VIII 1593) si trova anche l'altrettanto famoso teorema delle tangenti

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{tg\,\frac{1}{2}(x+y)}{tg\,\frac{1}{2}(x-y)}$$

Esso era però -gà stato pubblicato nella Geometria rotundi dal danese Thomas Fink (1583).
Incontriamo anche le formule di prostaferesi ma esse erano già state scoperte dal Werner. Gli sviluppi davanti al Pewerbach e al Regiomontano sono ben noti al Viéte ed egli a sua volta trasmette il fecondo retaggio al proprio assistente Nataniele Torpley, all'astronomo Magini e al fisico Simone Stevino ai quali la trigonometria deve sensibili progressi.
Riferiamo alcune relazioni da lui esposte nello scritto del 1579

$sen\,x = sen\,(60 + x) - sen\,(60 - x)$ (figura 5)

$cosec\,x + ctg\,x = ctg\,\frac{x}{2}$ (figura 6)

$cosec\,x - ctg\,x = tg\,\frac{x}{2}$ (figura 7)

$sen\, x - sen\, y = \quad 2\, sen\, \frac{x-y}{2}\, cos\, \frac{x+y}{2}$

$cos\, y - cos\, x = 2\, sen\, \frac{x-y}{2}\, sen\, \frac{x+y}{2}$

Queste ultime due «vengono» da quelle del Werner. Lasciamo ora la teoria delle funzioni circolari per esaminare quanto debba al Viéte la trigonometria propriamente detta.
Riguardo a quella piana già nel 1549 si leggono le relazioni fondamentali che passano tra gli elementi di un triangolo rettangolo. Da esse, mediante un ragionamento fondato sulla considerazione della circonferenza circoscritta, si giunge al teorema dei seni per un triangolo qualsiasi che il Viéte scrive sotto la formula seguente:

$$\frac{a}{ctg\,\frac{B}{2}+ctg\,\frac{C}{2}}=\frac{b}{ctg\,\frac{C}{2}+ctg\,\frac{A}{2}}=\frac{c}{ctg\,\frac{A}{2}+ctg\,\frac{B}{2}}$$

Poiché per valutare il valore di un pensatore è utile considerare l'influenza da lui esercitata, possiamo citare un'opera intitolata «Diclites caelometrica» (1632) dovuta ad un inglese Nataniele Torpley che da giovane visse a lungo in casa del Viéte in qualità di segretario.

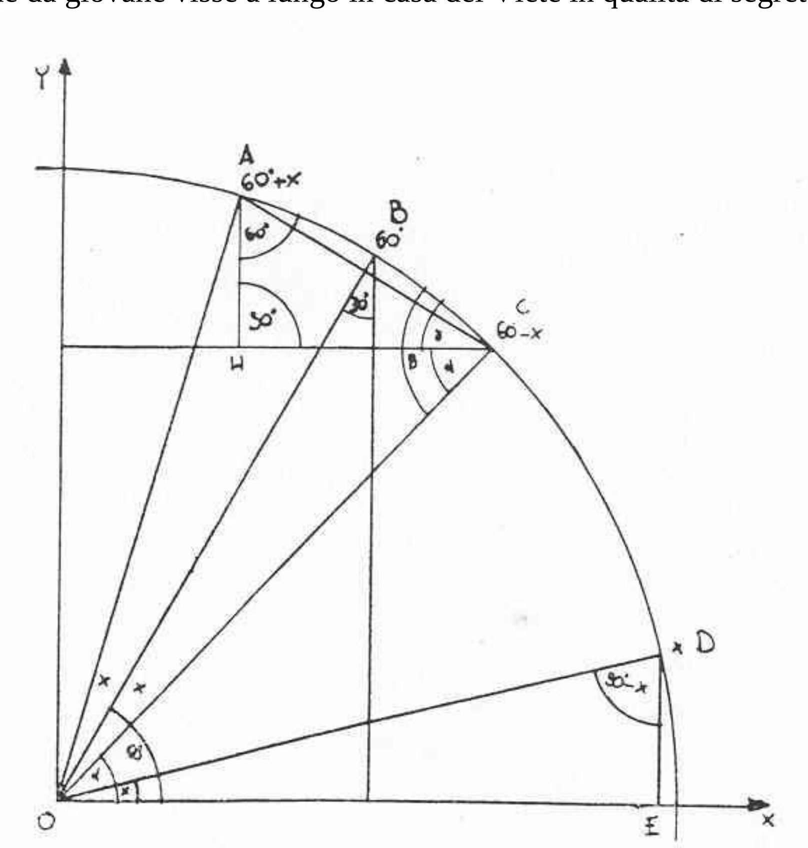

Fig. 5

$sen\, x = sen\,(60 + x) - sen\,(60 - x)$

$\overline{DE} = \overline{AH}$

$\overline{AC} = 2\overline{DE} \Rightarrow \overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{AC}$

$\alpha = 60° - x$

$\beta = 90° - x$
$\gamma = \beta - \alpha \quad \Rightarrow \quad 90° - x - 60° + x = 30° \quad \Rightarrow \quad \gamma = 30°$

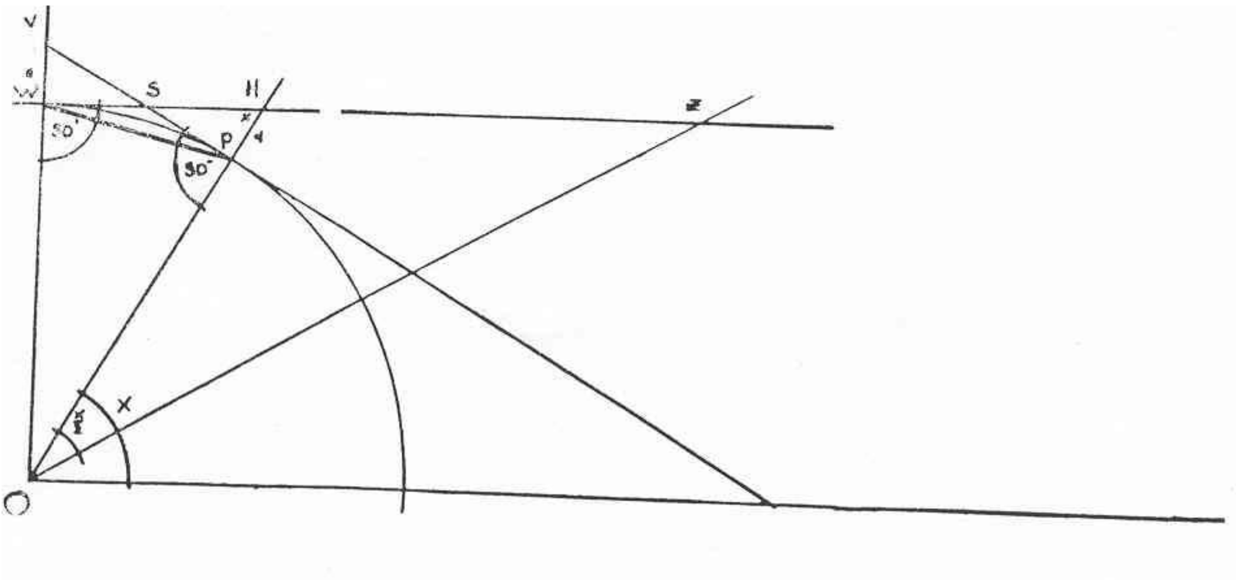

Fig. 6

$cosec\ x + ctg\ x = ctg\ \frac{x}{2}$
$\overline{OV} + \overline{WH} = \overline{WZ}$
$\overline{OV} = \overline{WZ} - \overline{WH}$
$\overline{OV} = \overline{HZ}$
$V\widehat{W}S \sim S\widehat{P}H$
$O\widehat{V}W$, $W\widehat{S}P$ isosceli
$\overline{WS} = \overline{SP}$
$W\widehat{S}V = S\widehat{P}H$
$\overline{OH} = \overline{OV}$
$\overline{OH} = \overline{AZ}$
$H\hat{O}Z = \frac{x}{2} = H\hat{Z}O$

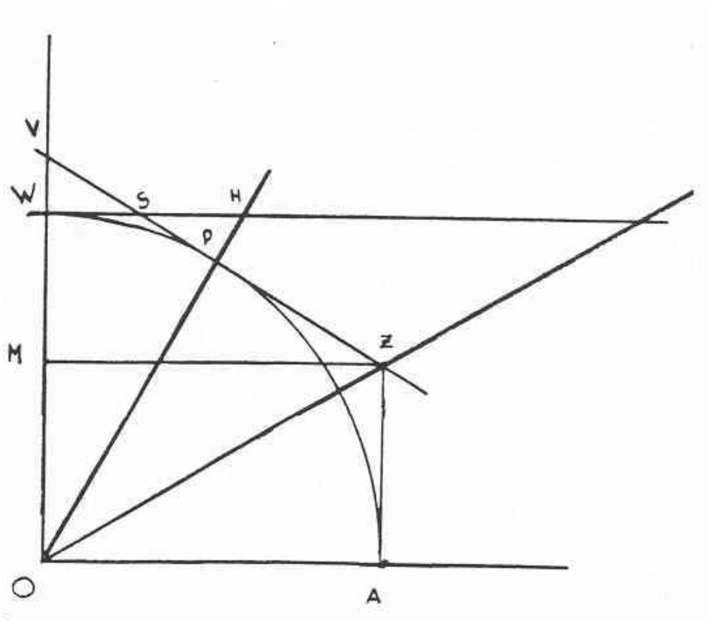

Fig.7

$cosec\ x - ctg\ x = tg\ \dfrac{x}{2}$

$\overline{OV} - \overline{WH} = \overline{AZ}$

$\overline{OV} - \overline{VP} = \overline{AZ}$

$\overline{MO} = \overline{AZ}$

$O\hat{Z}A = 90 - \dfrac{x}{2}$

$M\hat{O}Z = 90 - \dfrac{x}{2}$

$\overline{MZ} // \overline{OA}$

$\overline{MO},\ \overline{ZA} \perp \overline{OA}$

$MZOA$ = RETTANGOLO

$\overline{MO} = \overline{AZ}$

È un'opera imbevuta delle opere del grande matematico francese ma in cui furono notate alcune formule che furono scoperte poi da Nepero di cui di consueto recano il nome.
Degli scritti del Viéte seppe approfittare anche il noto astronomo Maggini nella cui opera «Primum mobile duodecim libris contentum» (1609) si rilevano i nomi di «Sinus secundus», «tangens secunda», «secans secunda».
Altra prova dell'influenza esercitata dal Viéte è offerta dalle opere dello Stevin. La trigonometria si presenta come semplice ausiliare della cosmografia.
Di maggiore celebrità gode lo Snellius che succedette al padre nella cattedra di matematica da lui occupata nell'Università di Leida. Nel volume postumo «Doctrinae triangolorum, canonicae libri quattuor» (1627) il calcolo delle corde e delle tangenti è basato su nuove formule che mostrano la sua originalità.
Inoltre si trovano due formule approssimate per il calcolo e l'ampiezza dell'angolo mediante le funzioni trigonometriche:

$$x = \frac{3 sen x}{2\cos x}; \qquad x = tg\frac{x}{2} + 2 sen\frac{x}{3}$$

Egli era anche dedito a sottili applicazioni pratiche ed è reputato padre della moderna geodesia (scienza che studia la forma, le dimensioni e la rappresentazione grafica del globo terrestre).
A lui si deve anche la soluzione del problema dei quattro punti che permette fra l'altro di determinare la posizione di una nave in vista di tre punti noti dalla costa. Non è certo sua la formula di bisezione nota sostanzialmente agli antichi Alessandrini e ai geometri Indiani del VI sec. d.C., ma la sua importante opera postuma contiene nuovi metodi per il calcolo delle corde basati su tali formule.
Non dobbiamo dimenticare che le grandi scoperte geografiche e le continue navigazioni simularono più precisi sviluppi trigonometrici.
Espressione del grande progresso della Cartografia fu l'opera del tedesco Kremer (Mercator) che pubblicò la grande carta d'Europa nella scala 1 : 4.360.000. In questa per rendere minime le distorsioni e le alterazioni della superficie sferica, egli usò la proiezione cilindrica consistente nel proiettare i singoli punti della superficie sferica su una superficie cilindrica tangente all'Equatore.
La sua carta d'Europa e il suo celebre «Atlante» gli dettero meritata celebrità.

L'Atlante fu pubblicato solo un anno dopo la sua morte e da allora questa denominazione fu usata per indicare una raccolta di carte geografiche.
Ben poco si conosce intorno ai casi della vita di Giovanni Nepier. L'oscurità che regna sul suo «curriculum » degli studi da lui compiuti rende impossibile determinare come, perché, in quale epoca della sua vita si sia dedicato alle matematiche.
La stessa oscurità avvolge il momento in cui Nepero si propose di scoprire espedienti per rendere meno grave il compito affidato ai calcolatori.
Egli si occupò di tale questione perché aveva riconosciuto che le cose più fastidiose nella matematica pratica erano le moltiplicazioni, le divisioni, l'estrazione di radici, operazioni che, oltre a richiedere molto tempo, erano esposte al pericolo di errori.
I suoi studi lo condussero cosi all'invenzione dei numeri artificiali o logaritmi. Tale invenzione incontrò una benevola accoglienza anche da parte di Enrico Briggs, il quale con l'assenso di Nepero, portò una modificazione al sistema introducendo i logaritmi di base 10.
Una certa influenza egli esercitò anche nel campo della trigonometria poiché il matematico scozzese ritenne giusto entrare in alcuni particolari per agevolare l'applicazione della sua invenzione alla ricerca degli elementi incogniti di triangoli piani o sferici.
Riguardo ai triangoli piani rettangoli le relazioni che passano tra i lati e gli angoli sono immediatamente calcolabili per logaritmi. Si può notare che scrivendo sotto forma di equazione le relazioni che prima venivano poste sotto forma di proporzioni, il Nepero ha introdotto il sistema di equazioni trigonometriche.
Pure calcolabili per logaritmi sono il teorema dei seni e del coseno.
Va inoltre osservato che alla ricerca di espedienti intesi ad abbreviare e ad alleggerire i calcoli aritmetici si doveva essere naturalmente spinti contemplando le immani fatiche sopportate dai costruttori di tavole trigonometriche.
Cavalieri nato a Milano nel 1598 ha prima e più di ogni altro contribuito alla diffusione in Italia della teoria e della pratica dei logaritmi di cui egli considerò in modo particolare le applicazioni alla trigonometria, disciplina alla quale arrecò importanti perfezionamenti.
Trigonometria e logaritmi nelle sue opere sono trattati come soggetti che si prestano scambievoli aiuti.
Il primo trattato è intitolato «Directionum generale uranimetricum» (1632).
È un volume formato di tre parti dedicato rispettivamente ai logaritmi, alla trigonometria piana e a quella sferica seguite da tavole di logaritmi e delle funzioni trigonometriche per il raggio di 10^{10}.
Vanno rilevate alcune innovazioni nel campo della nomenclatura: per indicare le tre confunzioni secondo l'esempio del Maggini il Cavalieri aggiunge la parola «secundus» a seno, tangente e secante, nomi questi a cui dove la chiarezza lo esige annette l'epiteto «primus». Seguono altri nomi speciali per designare i logaritmi di alcune funzioni trigonometriche, cioè: «mesologaritmus» per *log tg*, già usato da Keplero, «tomologaritmus» per *log sen*, «versilogaritmus» per *log senver*. La semplice parola «logaritmo» serve al Cavalieri come al Nepero per indicare il logaritmo seno.
Per la risoluzione dei triangoli sferici egli stabilisce parecchie formule utilissime e dà dimostrazioni soddisfacenti delle regole di Nepero.
Troviamo altre formule che si giudicherebbero errate per il fatto che ora alle linee trigonometriche si attribuisce un dato segno, ma che sono esatte se prese in valore assoluto

$sen(x - y) = sen[y + (-x)]$
$sen(x + y) = sen\, y - (-x)$