SVILUPPO STORICO DELLA TRIGONOMETRIA

ANNAMARIA VICECONTE

Questo lavoro si occupa dello sviluppo storico della trigonometria.

L'interesse per tale argomento è nato dal fatto che la trigonometria si insinua, nelle linee generali, di una parte notevole dell'iter storico-geometrico delle formule e dei teoremi che sono parti della matematica. Cercheremo pertanto di ripercorrere, in linea di massima, gli spunti e le considerazioni di partenza dei matematici, che più di tutti, hanno apportato validi contributi a tale branca.
Il nostro lavoro abbraccia il periodo greco-romano, arabo, del XVI secolo e del XVII secolo.
La trigonometria costituisce quel capitolo delle matematiche che si propone il calcolo e la misura degli elementi di un triangolo, quando siano note le misure di alcuni elementi sufficienti a determinare il triangolo stesso.
Da questa prima definizione appare chiaro che tale branca non costituisce un capitolo avulso dal resto delle matematiche: infatti molto spesso essa riproduce in un linguaggio diverso, quelli che sono i classici teoremi di geometria.
Tale parte della matematica nasce, si pensa, intorno al III e II sec. A.C. soprattutto come ausiliaria dell'astronomia. A tale proposito è bene ricordare che la trigonometria viene suddivisa in «sferica» e «piana», a seconda che il triangolo sia rappresentato da una porzione di sfera o da una porzione di piano.
Bisogna però sottolineare che la trigonometria sferica ha preceduto e ha dato vita, in un certo senso, a quella piana. Infatti la trigonometria sferica raggiunse un alto grado di perfezione in Grecia, grazie anche al contatto che questo paese aveva con i Caldei e i Babilonesi, popoli che tra i primi si occuparono dello studio dei fenomeni celesti.
Ci proponiamo ora di dare degli accenni utili all'introduzione e alla denominazione delle funzioni che costituiscono la base della trigonometria.
È bene precisare innanzitutto che il vocabolo trigonometria non è contemporaneo al capitolo delle matematiche che sta ad indicare.
Infatti tale denominazione appare per la prima volta nel 1595 come titolo di un opuscolo

TRIGONOMETRIA SIVE DE SOLUTIONE TRIANGOLORUM TRACTATUS BREVIS ET PERSPICUUS,

dovuto a Bartolomeo Pitisco, teologo, matematico, predicatore alla corte dell'elettore palatino Federico IV.
Etimologicamente la parola trigonometria deriva dal greco *τριγωνοσ* (triangolo) e *μετρον* (misura).
Espressa l'etimologia della parola trigonometria e di conseguenza compreso di cosa tale disciplina si occupi, vogliamo ora evidenziare l'etimologia e il significato delle funzioni della trigonometria stessa. Esse sono tutte relative alla circonferenza trigonometrica, cioè avente

centro nell'origine di un sistema di assi cartesiani ortogonali e raggio assunto come unità di misura.
Le funzioni fondamentali sono tre: seno, coseno e tangente più le rispettive inverse cosecante, secante e cotangente.
La parola *seno* (fig. 1) fu introdotta dall'astronomo arabo Al Battani, detto anche Albategno (850/929). Egli indicò tale funzione con la parola *Gaib* che letteralmente significa piega (di una veste). Ne segue che l'odierno termine seno dovrebbe significare corda piegata (su se stessa).
Il nome seno è dovuto al fatto che i traduttori latini sostituirono il termine arabo con la parola sinus, cosi come si legge in molto testi.
In verità questa spiegazione etimologica dal nome assegnato alla più importante fra le funzioni goniometriche non è generalmente condivisa ed accettata, poiché le opinioni degli storici sono tuttora discordi tanto che, ormai da tempo, si discute senza peraltro pervenire ad una conclusione in quanto vi è chi sostiene che la parola seno abbia tutt'altra origine, derivando essa dall'abbreviazione «S. INS.», contrazione dell'espressione latina semissis inscriptae (cordae) che significa appunto semicorda inscritta e, ovviamente, non mancano fondamenti a sostegno di quest'ipotesi. Trigonometricamente il termine seno sta ad indicare il rapporto tra l'ordinata dell'estremo P dell'arco PA di una circonferenza (trigonometrica) e il raggio della circonferenza stessa.

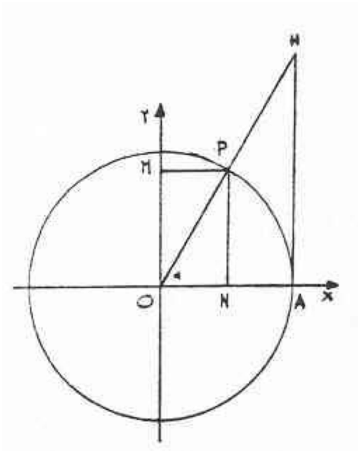


Fig. 1

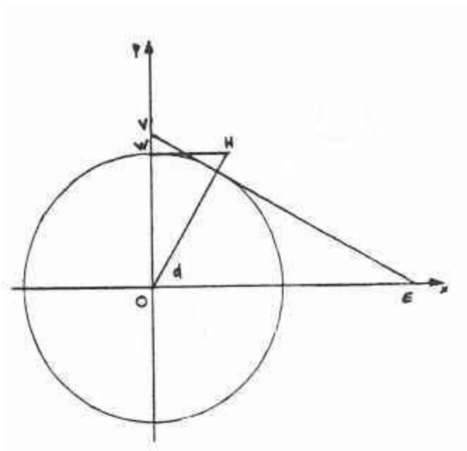


Fig. 1 bis

$\overline{PN} = SEN\alpha$
$\overline{MP} = COS\alpha$
$\overline{AH} = TG\alpha$

$\overline{OZ} = SEC\alpha$
$\overline{OV} = COSEC\alpha$
$\overline{WH} = CTG\alpha$

Della funzione coseno (fig. 1) intesa come distanza della corda dell'arco doppio dal centro della circonferenza, si ha traccia presso gli astronomi dell'antica India.
Essa in Occidente fu introdotta dal Viéte come «sinus residuae» e solo più tardi indicata come «complementi sinus» per la proprietà che ha di essere uguale al seno dell'angolo complementare, solo in seguito fu abbreviata in «co-sinus» donde il nome di coseno oggi dato a quella funzione trigonometrica. In trigonometria il termine coseno sta ad indicare il rapporto fra l'ascissa dell'estremo P dell'arco PA di una circonferenza (trigonometrica) e il raggio della circonferenza stessa.
Le funzioni tangente e cotagente vennero introdotte dai matematici arabi allorché approfondirono le ricerche occorrenti per tracciare esattamente i quadrati degli orologi solari.
Vi accenna l'astronomo Al Battani, ma prima di lui Habash al Hasib (770/870) aveva costruito la prima tavola di tangente e cotangente (860). Esse furono dette dapprima, per via della loro apparenza sul quadrante solare «umbra recta» (tangente) e «umbra versa» (cotagente) - (fig. 1).

La denominazione di tangente (fig. 1) data a questa funzione è di evidente origine geometrica in quanto essa rappresenta la misura di un segmento di tangente, condotta ad una circonferenza da un suo punto, ed apparve, come si è accennato, piuttosto tardi nella trigonometria, precisamente sul finire del 16° sec. in un trattato di Tommaso Fink (1561/1656) dal titolo «Geometria rotundi», edito a Basilea nel 1583. Il nome si ritrova poi nella citata opera di Pitisco e nel «Canon triangolorum» (1620) dell'inglese Edward Gunter (1581/1626), inventore del regolo calcolatore, ricordato anche per avere per primo pubblicato tavole logaritmico-trigonometriche. Trigonometricamente la tangente indica il rapporto fra seno e coseno del punto P della circonferenza (trigonometrica).

Le tre funzioni inverse cotagente, secante e cosecante hanno origine analoga a quella di tangente, coseno e seno (fig. 1 bis).

Il nome cotangente ha origine analoga a quello di coseno, ossia è un'abbreviazione di «complementi tangens», cioè tangente dell'arco complementare. Il nome secante deriva dallo stesso problema che ne suggerì l'introduzione e che consiste nel determinare, secondo l'altezza del Sole, la linea d'aria che congiunge l'estremità di un bastone, posto verticalmente, con l'estremità della sua ombra. Il nome cosecante deriva invece da «complementi secans».

In ordine storico, lo sviluppo sistematico della trigonometria sferica ha preceduto quello della piana, come ausilio indispensabile dell'astronomia.

Conoscenze trigonometriche, seppur limitate, dovevano possedere i Babilonesi, dai quali ci proviene la misura a base sessagesimale degli angoli e del tempo; ma fu presso i Greci che la trigonometria assunse, come capitolo introduttivo all'astronomia, uno sviluppo notevole; e nozioni già vaste dovevano essere esposte nelle opere disperse di Aristarco di Samo (sec. III a.C.) e di Ipparco di Nicea (sec. II a.C.). L'età in cui si svolge la loro attività fu più che mai un ritorno - rispetto all'età precedente - ai tempi astronomici e matematici, e al calcolo, per via della nascente trigonometria che aveva limiti e intenti più pratici e applicativi, meno speculativi che non la precedente indagine geometrica, compendiata dal nome di Euclide. Un ritorno, dunque, all'antica terra del Nilo.

Aristarco, insieme ad Eratostene e Ipparco, applicò la geometria alla misura della terra e delle distanze celesti.

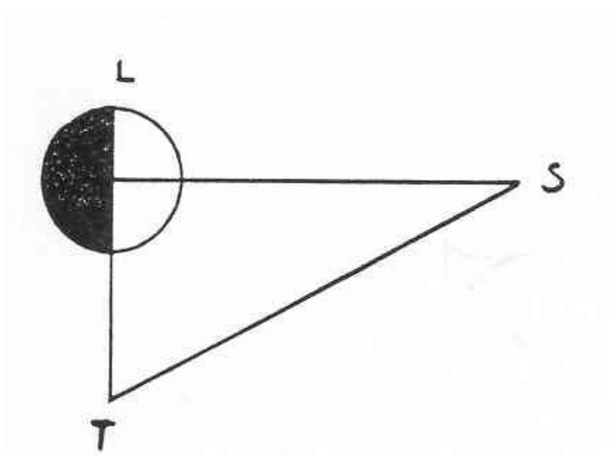
Fu anche quindi un eminente astronomo teorico, lo dissero «l'antico Copernico». Fu probabilmente discepolo di Stratone Lamsaco, che diresse la scuola peripatetica per molti anni. Appartiene all'età Alessandrina, ma non all'ambiente di Alessandria.

Ciò che ora ci interessa è un piccolo capolavoro geometrico giunto fino a noi «Sulla grandezza e le distanze del Sole e della Luna», in cui egli stabilisce il rapporto fra le distanze terra/sole e terra/luna.

Questo scritto è ricco di osservazioni e proposizioni geometriche originali, e condotto con rigore logico. Uno dei primi risultati a cui giunge Aristarco con il suo nuovo metodo è che «il rapporto delle distanze della terra dal sole e dalla luna è compreso fra 18" e 20"».

Quando la luna L appare esattamente illuminata per un quarto (cioè si trova in dicotomia: illuminata per metà dal sole) l'angolo in L è retto (fig. 2).

Fig.2



Si può allora stabilire mediante l'osservazione - con uno strumento di mira - l'angolo in *T* - così la forma del triangolo è conosciuta, e il rapporto fra l'ipotenusa $\overline{TS}$ (distanza Terra/Sole) e il cateto $\overline{TL}$ (distanza Terra/Luna) può essere calcolato.
Oggi la cosa è semplice, con il calcolo trigonometrico, ma la trigonometria vera e propria, ebbe i suoi inizi con Ipparco, vissuto un secolo dopo Aristarco. Questi dovette perciò sostituirla con faticose considerazioni geometriche, tenendo conto della similitudine dei triangoli. Le grandezze in questione sono archi, angoli, corde e semicorde.
Così egli è appunto fra i matematici che fanno sentire il bisogno della trigonometria, anche se non dà ancora vero inizio a questo ramo della matematica.
Anche Erone, il più celebre fra i grandi ingegneri Alessandrini, occupa un piccolo posto tra i precursori della trigonometria.
La sua fama è da far risalire al fatto che scrisse un'infinità di opere, molte delle quali ci sono pervenute, su molte delle discipline scientifiche allora conosciute.
Le sue ricerche furono animate da spirito pratico, infatti gli strumenti da lui ideati e descritti erano fondamentali per la conoscenza diretta della natura, per l'indagine scientifica tanto esaltata anche dai filosofi appena precedenti.
Gli ultimi capitoli dell'Arenario - una delle sue opere - ci offrono una veduta delle questioni pratiche affrontate a quell'epoca: determinare la differenza di livello tra 2 punti dati, la larghezza di un fiume, la distanza fra 2 punti inaccessibili. Misurare un campo (e nel metodo di risoluzione Cantor ha ravvisato una precedente delle coordinate cartesiane) nel quale non si può penetrare. Trovare l'area di un triangolo noti i tre lati; e questo è il famoso teorema di Erone:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

(*p* = semiperimetro del triangolo; *a, b, c,* misure dei lati).

La trigonometria è anche qui ai primi passi, e il geodeta alessandrino non usa ancora metodi propriamente trigonometrici - anche se affronta problemi di vera triangolazione, come il calcolo della distanza di punti molto lontani sulla superficie terrestre - ma si serve con molta perizia, della similitudine dei triangoli.
È d'obbligo a questo punto rifarsi ad Ipparco di Nicea, per capire come dallo stato embrionale in cui si trovava, la trigonometria passò ad essere un ramo fondamentale della matematica indispensabile da quel momento agli studiosi di molte discipline scientifiche.
Seguendo un ordine cronologico, avremmo dovuto porlo tra Aristarco ed Erone, in quanto visse dopo il primo, e circa 100 anni prima del secondo (161/126-50 a.C.), abbiamo preferito porlo a questo punto poiché la sua posizione segna la fine di un'era, a cui anche Erone apparteneva, e l'inizio di un'altra, nel campo da noi considerato.
Di lui non resta che uno scritto di minima importanza, il «Commentario ai Fenomeni», ma la sua opera è nota grazie ad antiche testimonianze, specie quella di Tolomeo, posteriori a lui circa tre secoli.
Sebbene taluni pensino che in Aristarco si trovi già la considerazione di rapporti che suggeriscono l'idea di tangente, è con Ipparco - e con i suoi calcoli sistematici delle corde dei vari archi - che ha inizio la trigonometria piana e sferica.
Un brano di Teone di Alessandria (Commento all'Almagesto di Tolomeo) riassume questi primi passi della nuova scienza: «Ipparco espose in 12 libri il metodo per trovare le rette (corde) inscritte in un cerchio - Menelao (I sec. d.c.) trattò anch'egli questa materia in 6 libri - Ma non si può fare a meno di ammirare la facilità con cui Tolomeo mediante alcuni teoremi semplici e poco numerosi (teoria delle funzioni trigonometriche) perviene a trovare tali valori».

L'opera di Ipparco andò perduta, al pari di quella in 6 libri, sul calcolo delle corde di Menelao di Alessandria (verso la fine del sec. I d.C.); ma attraverso versioni arabe, abbiamo di Menelao le «Sferiche» nelle quali fra l'altro si incontra il famoso teorema delle «sei quantità» (seno, coseno, tangente, cosecante, secante, cotangente), concernente i triangoli sia piani che sferici, chiamato *teorema di Menelao*, benché probabilmente già dovuto ad Ipparco.
Poi la trigonometria, soprattutto sferica, ha largo posto nell'Almagesto, composto verso il 165 d.C. da Claudio Tolomeo. In esso, secondo l'uso greco dovuto probabilmente da Ipparco, ogni arco è determinato mediante la corda che lo sottende; ma basta sostituire alla corda di ciascun arco (fig. 3) il doppio del seno dell'arco metà, per ritrovare nell'Almagesto molte proposizioni della moderna trigonometria.

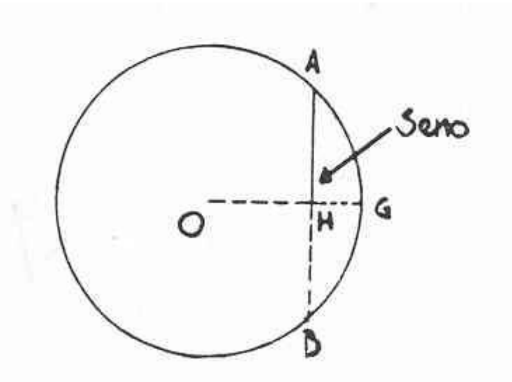


Fig. 3

Anche Ipparco, come i maggiori astronomi della sua età, si occupava di misure celesti. I suoi metodi sono vari e spesso alquanto elaborati dal punto di vista matematico. Ci limiteremo ad accennare ad una delle sue stime più famose (quella della distanza Terra/Luna) indicando l'essenza del metodo, ma semplificando alquanto il procedimento, e adottando i simboli oggi in uso:

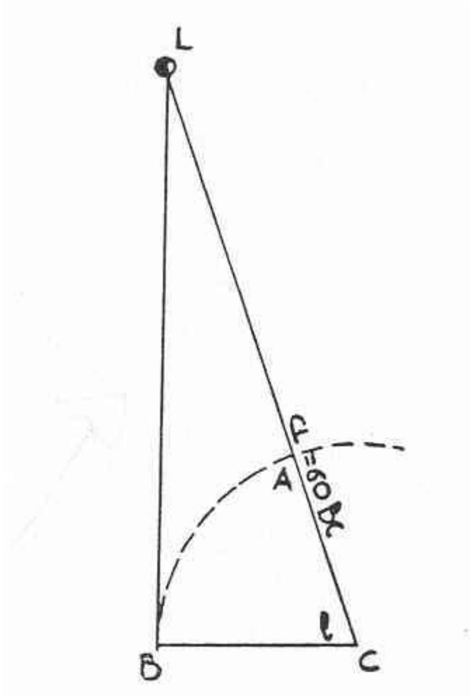


Fig. 4

Un osservatore *A* vede la luna *L* esattamente al suo zenit nell'istante in cui *B* posto alla stessa latitudine, ma separato da 1 gradi di longitudine, vede sorgere la luna al suo orizzonte $\overline{BL}$. La posizione è allora quella della figura 4 dove l'angolo in *B* è retto. Del triangolo rettangolo *BCL* noi conosciamo dunque il cateto $\overline{BC}$, cioè il raggio terrestre *r* e l'angolo opposto $B\hat{L}C = 90° - 1$ sicché è facile risolvere il triangolo stesso, e determinare l'ipotenusa $\overline{CL}$, cioè la distanza fra la Terra e la Luna (valutata in raggi terrestri).
In un triangolo rettangolo $C\hat{B}L$ un cateto $\overline{CB}$ è uguale all'ipotenusa $\overline{CL}$ moltiplicata per il seno dell'angolo opposto $B\hat{L}C$. In altre parole si ha che $\overline{BC} = \overline{CL}\ senB\hat{L}C$.
Se si risolve questa relazione rispetto all'incognita $\overline{CL}$, si ha:

$$\overline{CL} = \frac{\overline{BC}}{senBLC}$$

Assumendo il raggio terrestre $\overline{BC}$ come unità di misura, ciò equivale a domandare: quanti raggi terrestri sono contenuti nella distanza $\overline{CL}$ fra terra e luna? Per un calcolo esatto, bisogna tener presente che l'angolo 1 è di circa 89° 3', così che l'angolo $B\hat{L}C$ risulta compreso fra 56' e 57'. Il suo seno è di circa 0,0164, e perciò abbiamo che

$$\overline{CL} = \frac{\overline{BC}}{0,0164} = \frac{1000\ \overline{BC}}{164} = 60\ \overline{BC}\quad circa$$

La conclusione è che la distanza fra la Terra e la Luna è di circa 60 raggi terrestri.
Notiamo da tutto questo che il metodo di indagine di Ipparco, seppur applicato all'astronomia, si era evoluto rispetto a quello prettamente geometrico di Aristarco, ed era divenuto un metodo propriamente trigonometrico.
Il libro più antico di trigonometria sferica giunto a noi è, come abbiamo già detto, la «Sphaerica» di Menelao (sec. I d.C.) nella quale sono avvertite le analogie del triangolo sferico col triangolo piano, si trovano enunciati i criteri di uguaglianza ed è dimostrato il teorema delle trasversali, che porta il nome di Menelao, fondamentale per la risoluzione dei triangoli sferici nell'antichità greca.
Menelao di Alessandria fu astronomo e matematico greco e diede assetto autonomo alla nuova scienza, distinguendola dalla stereometria da una parte e dell'astronomia dall'altra.
Caratteristica della trigonometria greca è, come già detto, l'uso delle corde invece dei seni; e dei valori delle corde, calcolabili da una tavola nell'Almagesto (pervenutoci attraverso gli Arabi) di Tolomeo opera fondamentale per la storia della trigonometria. In essa sono dimostrate formule (forse già note ad Archimede) analoghe alle formule di addizione del seno, e si deducono dal teorema di Menelao relazioni tra gli elementi dei triangoli sferici rettangoli, che vengono poi applicate alla relazione dei triangoli sferici qualunque, scindendoli in triangoli rettangoli.
Benché anche Tolomeo, in quanto rientrante nel filone dei matematici Greci, usasse in trigonometria le corde, anche in lui (ma non nell'Almagesto, bensì nell'Analemma, che insegna la proiezione ortogonale di una sfera su un piano) si ritrova se non la parola, certamente l'uso dell'idea di seno, secondo il procedimento dei matematici indiani, trasmesso poi agli arabi, e successivamente a noi.
Tolomeo giunge così ai teoremi di addizione degli archi deducendoli dal teorema geometrico che porta il suo nome esposto nel I libro dell'Almagesto: «Se un quadrangolo è inserito in un cerchio, il rettangolo delle diagonali è equivalente alla somma dei rettangoli dei lati opposti»; e non è affatto difficile, fatte le dovute trasformazioni, ravvisare in essi teoremi di grande

importanza, considerati importanti in ogni testo attuale di trigonometria, come quelli di addizione e sottrazione:

$$sen\,(x+y) = sen\,x\,cosy + cos\,x\,sen\,y$$

$$sen\,(x-y) = sen\,x\,cosy - cos\,x\,sen\,y$$

tanto per i seni che per i coseni, o la formula di bisezione:

$$sen^2\,\frac{1}{2}x = \frac{1-\cos x}{2}$$

Servendosi di queste, e di altre notevoli relazioni, Tolomeo giunge a calcolare la corda corrispondente all'angolo di 1°:

$$corda\ 1° = 1°\ 2'\ 50''$$

(ove il raggio R del cerchio è stato diviso in 60 parti; cioè si è posto $R = 60^p$).
Da questa egli deduce la corda di mezzo grado e infine le corde di tutti gli archi multipli di mezzo grado.
La sostituzione dei seni alle corde, e quindi l'inizio delle odierne funzioni circolari, si trova per la prima volta in India, cioè nell'astronomia di un anonimo, detta Surya-siddhanta (sec. IV d.C.); vi si danno i seni ed i senoversi per archi di 345' (la 96^a parte della circonferenza), facendo il raggio uguale a 3438 minuti.
Per la soluzione dei triangoli sferici gl'Indiani ricorsero alla proiezione ortografica (analemma) della sfera sul piano, che i Greci invece avevano usato soltanto per costruzioni grafiche.
I contributi originali degli Arabi, nel campo della scienza, non furono proporzionati né alla loro durevole potenza politica, né al loro inesausto impegno di traduttori ed eruditi. Essi si riassumono in qualche contributo alle vedute fondamentali dell'ottica e all'idea della piccola circolazione polmonare.
Gli Arabi presero dagli Indiani la sostituzione dei seni alle corde, ma dai Greci l'uso del raggio di 60 parti; introdussero la tangente, la cotagente e la cosecante dapprima in servizio della gnomica e in funzione dello gnomone diviso in 12 parti; poi, già con Habash (nel primo ventennio del sec. X), quali vere funzioni trigonometriche riferite al raggio di 60 parti.
Essi apportarono contributi notevoli allo sviluppo della trigonometria, applicando le nuove funzioni alla ricerca di relazioni fra gli elementi di un triangolo qualunque ed alla risoluzione dei triangoli.
Anche l'astronomia era intensamente coltivata ed il massimo astronomo arabo (Al Battani, latinamente Albategno, morto nel 929) perfezionò le osservazioni di Ipparco e di Tolomeo sul moto del Sole e della Luna, dette valori più precisi per l'obliquità dell'ellittica e la processione degli equinozi, e giunse fino a scoprire importanti anomalie secolari del moto solare. In altre parole - come vide poi Leonardo Eulero - ciò porta oggi a concludere che l'asse dell'ellisse descritta dalla terra nel suo moto annuo attorno al sole, si sposta lentissimamente (esso ha descritto un angolo di poco più di 5' dal tempo di Tolomeo).
Per queste ricerche, che dobbiamo notare a causa della loro precisione, gli arabi si servirono di strumenti adatti fra i quali il nuovo Astrolabio di loro invenzione. L'Astrolabio poteva servire tanto ad astronomi come a navigatori per osservazioni precise sugli angoli formati dalle stelle, sulla loro altezza rispetto all'orizzonte, o ad altre linee astronomiche fondamentali, sulla latitudine, sull'ora esatta. Poteva incutere un rispetto reverenziale, a chi attendeva ansiosamente il responso di un astrologo accigliato, ma serviva anche effettivamente, come una macchina

calcolatrice che permetteva di evitare i complicati procedimenti della trigonometria sferica. Al Battani applicò la proiezione ortografica a problemi di astronomia sferica e ideò alcune soluzioni eleganti, nelle quali è implicato il teorema del coseno per triangoli sferici qualsiasi.
Probabilmente ad Abi Nasir Mansur (seconda metà del sec. X) si deve il teorema dei seni per ogni specie di triangoli. La prima esposizione sistematica della trigonometria sferica, senza ricorrere al teorema delle trasversali di Menelao sembra essere quella contenuta nell'astronomia d'Abi'1 - Wafà (940/998); ma la separazione completa della trigonometria piana e sferica dall'astronomia, e quindi il suo massimo sviluppo, si incontra soltanto nell'apposito trattato di Nasir ad Din at-Tusi (1201/1274).
Nasir ad Din at-Tusi è autore di un trattato su questa materia, assai più progredito delle opere precedenti. Gli Alessandrini, infatti, usavano ancora lo scomodo procedimento che porta a ridurre i triangoli sferici obliquangoli a semplici triangoli sferici rettangolari, per ottenerne la risoluzione, mentre invece Nasir ad Din procede alla risoluzione diretta di triangoli sferici obliquangoli secondo un nuovo metodo originale. Non dobbiamo dimenticare che gli arabi appresero algebra, aritmetica e trigonometria dagli Indiani, più progrediti di loro. Tutto porta a credere che, in questi campi, essi operarono soprattutto un collegamento fra la scienza orientale e la sapienza greca, senza tener conto dell'eredità lasciata dagli antichi matematici babilonesi. A differenza dei greci, gli arabi usarono quelle semicorde le cui misure sono da noi denominate seni e coseni. Ma appunto una tavola di semicorde si trova già in uno scritto indiano che tratta di astronomia, e poi nelle ricerche di Aryabhata (500 circa), seguito da altri, fino a Bhaskara che dette già (1150) un procedimento per costruire una tavola di seni grado per grado.
Come si vede gli indiani ricorrevano già, come noi facciamo, al cerchio trigonometrico, il cui raggio, qualunque sia, è assunto come unitario sicché ne risulta la relazione fondamentale fra seno e coseno, conseguenza del teorema di Pitagora

$$sen^2 x + cos^2 x = 1$$

Conoscevano inoltre la formula di bisezione

$$sen\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - cosx}{2}}$$

Il teorema dei seni, che dal punto di vista pratico della triangolazione è il teorema principe della geometria piana (in un triangolo i lati sono proporzionali ai seni degli angoli opposti) era sostanzialmente noto a Tolomeo, e forse a Ipparco, tuttavia lo consideravano come proprietà delle corde, non come una relazione concernente le semicorde.
Solo Nasir ad Din, prima ancora di Levì Ben Gerson «*Omnium triangolorum rectilineorum talem proportionem una linea habet ad aliam, qualem proportionem unus sinus angolorum, quibus dictae lineae sunt subtensae, habet ad alium*». Il metodo seguito dal matematico indiano Aryabhata per calcolare una tavola di seni consisteva nell'assumere il sen 3° 45', pari all'arco corrispondente, e nel procedere poi con le regole che danno i seni dei multipli di tale angolo. Tolomeo seguiva un processo diverso e molto più complicato; gli arabi usarono metodi analoghi, ma seguirono anche un proprio procedimento, che conduceva all'equazione di terzo grado:

$$x^3 - a\,x + b = 0$$

Grande fama ebbe anche il provenzale Levi Ben Gerson «*Vir insignis et celeber mathematicus*» lo diceva Pico della Mirandola: autore di scritti filosofici e letterari oltreché di opere matematiche. Le sue ricerche più conclusive si svolsero nel campo della trigonometria ove egli

stabilì varie formule di relazione fra le funzioni di un arco e calcolò anche una tavola di seni. Egli considerò anche la saetta oggi di disuso.
Muoveva così incontro ai bisogni dei naviganti elaborando semplici e chiare nozioni di una trigonometria fatta ancella della geografia, e della necessità di stabilire - dal mare - distanze e posizioni geografiche. Attraverso il teorema dei seni, ad esempio, il geometra che opera sul terreno, il marinaio in mare, o l'astronomo, potranno così calcolare le distanze incognite $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ e passare anche a ricerche più complicate e più utili, implicanti la risoluzione simultanea di due o più triangoli: ad esempio la distanza fra due punti entrambi praticamente inaccessibili (come due punti della costa visti dal mare o due posizioni occupate dal nemico).
Con l'opera «*De Triangulis omnimodis libri quinque*» di Regiomontano (1436/1476) ha inizio l'ingresso della trigonometria in occidente. Opera certamente ispirata a fonti arabe, ma che segna un progresso con la enunciazione più generale dei teoremi del seno e del coseno e con la introduzione della tangente nei calcoli pratici. Si può dire che è dal 1533 (anno della pubblicazione) che la trigonometria procedette regolarmente verso la perfezione che doveva toccare durante il secolo XVIII.
Questo lavoro è la prima trigonometria europea basata sull'uso dei seni; con essa si diffuse la nozione di «seno verso» (saetta esprimibile come differenza fra il raggio e il coseno di un arco)

$$sen\ ver\ A = 1 - cos\ A; \qquad cos\ ver\ A = 1 - sen\ A$$

Queste funzioni trigonometriche furono destinate ad avere una vita breve e oggi sono completamente in disuso se non proprio dimenticate. In appendice alla suddetta opera si trovano alcune tavole che il Regiomontano calcolò per perfezionare gli ausiliari a disposizione degli Astronomi. Tali tavole, che erano tre, procedevano di un primo in un primo, una per il raggio di 60.000, una per il raggio 6.000.000 e la terra il raggio di 10.000.000.
Quest'ultima è molto importante perché oltre ad aversi i valori dei seni con sette decimali rappresenta la completa emancipazione dei matematici dal sistema sessagesimale per adottare definitivamente la base dieci con le sue potenze.
In seguito lo stesso Regiomontano eseguì calcoli per fissare i valori delle tangenti degli archi procedenti di 1° in 1° per il raggio di 100.000.
Al Retico si devono le tavole delle 6 funzioni circolari di angoli varianti di 10 secondi in 10 secondi con il raggio di 10^7 (le funzioni hanno sette cifre decimali). Esse sono intitolate «*Canon doctrinae triangolorum nunc primum a G. J. Rhaetico in lucem dedi*t» e furono pubblicate a Lipsia nel 1331.
Con il Retico per la prima volta le linee trigonometriche sono definite mediante un triangolo rettangolo e non mediante la circonferenza; ciò significa che non si mostra la connessione con gli archi del cerchio ma con gli angoli ad essi sottesi. Per le funzioni quali tangente, cotangente, secante e cosecante non sono adottati nomi particolari, ma sono indicate secondo le relazioni che hanno con il seno e il coseno:

$$\frac{secx}{r} = \frac{r}{cosx}; \qquad \frac{cosecx}{r} = \frac{r}{senx}$$

$$\frac{tgx}{r} = \frac{senx}{cosx}; \qquad \frac{ctgx}{r} = \frac{cosx}{senx}$$

Constatato il giusto e comprensibile successo delle Tavole, il Retico intraprese il calcolo delle linee trigonometriche supponendo il raggio di 10 elevato a potenza 15. Tale lavoro lasciato incompiuto dal Retico venne portato a termine da Bartolomeo Pitisco. Nella sua opera troviamo

l'uso costante dei termini tangente e secante, che erano stati poco prima diffusi fra gli scienziati, dalla «geometria rotundi» di Tommaso Finck (1593).
È ammirabile l'imponenza dei calcoli eseguiti e l'esattezza dei risultati ottenuti. Vi sono infatti registrati 32.400 valori e soltanto 110 vennero in un secondo tempo riconosciuti inesatti.
Anni dopo, nel 1633, Adriano Vlacq in un suo trattato riportò sia i valori naturali che i logaritmi delle funzioni circolari tutti con 10 cifre decimali.
Ritornando all'opera del Regiomontano dobbiamo dire che esercitò una certa influenza sui contemporanei. Tale affermazione è dimostrata da un trattato di trigonometria sferica «*De Triangulis per maximorum circolorum segmenta constructis libri V*» dovuto a un modesto prelato di Norimberga, Giovanni Werner (1468/1528).
Col tempo quest'opera andò smarrita ed ora si considera irrimediabilmente perduta, alcune cose tuttavia sono note per via indiretta e, anche se le notizie sono scarse, sono sufficienti per farci comprendere l'importanza che ebbe la stessa opera.
Risalgono al Werner le formule che servono a trasformare in prodotto la somma o la differenza di due coseni:

$$senx\ seny = \frac{1}{2}\left[cos\left(x-y\right)-cos\left(x+y\right)\right]$$

$$cosx\ cosy = \frac{1}{2}\left[cos\left(x+y\right)+cos\left(x-y\right)\right]$$

Da tali formule si giunge attraverso alcuni passaggi e artifici alle formule che oggi sono dette di prostaferesi.