

Curve patologiche nei primi anni del XX secolo

Rigore contro intuizione

Loredana Biacino*

*Già professore associato Università di Napoli Federico II;
loredana.biacino2@unina.it



DOI: 10.53159 /PdM(IV).v3n2.044

Sunto: *Si espone una breve storia di alcune curve variamente patologiche introdotte nell'Ottocento e nei primi anni del Novecento durante il processo di rigorizzazione che ha investito la matematica, con la conseguente crisi dell'intuizione. Si sottolinea come tale processo si inserisca in un generale movimento di astrazione della scienza che ha tra i suoi esiti la nascita della teoria della misura secondo Lebesgue e, più di recente, l'affermarsi della teoria dei frattali.*

Parole chiave: *La curva di Peano, insiemi di Cantor, dimensione frattale.*

Abstract: *Some pathological curves were introduced in mathematics in the eighteenth century and at the beginning of the twentieth century: a brief history of them is sketched and the consequent crisis of intuition as a guideline in the study of mathematics is investigated. This process is inserted in a general movement toward abstraction of the science: among its consequences there were the born of Lebesgue measure theory and more recently the achievement of fractal theory.*

Keywords: *Peano's curve, Cantor's sets, fractal dimension.*

1 - Introduzione

... la matematica non è altro che un'arte; una sorta di scultura in una materia estremamente dura e resistente come certi porfidi che a volte usano, credo, gli scultori.
(André Weil, S. e A. Weil, *L'arte della matematica*, p.18)

All'inizio del ventesimo secolo, il grande fermento della scienza e delle arti degli ultimi trent'anni del secolo precedente approda ad uno sviluppo tumultuoso di molti aspetti della vita sociale e culturale: a livello politico esso è infatti caratterizzato dai segni premonitori della Grande Guerra e della successiva rivoluzione bolscevica.

Nelle arti spesso sfocia in movimenti ispirati all'innovazione e al vitalismo e in alcuni casi evolve verso l'astrattismo. Così alcune forme artistiche dei secoli passati sono profondamente messe in discussione: soprattutto uno dei principi fondamentali su cui si basava la cultura occidentale - lo stretto legame tra l'arte e il mondo reale - è in molti casi completamente spezzato.

In matematica si osserva un capovolgimento del punto di vista in qualche modo simmetrico e contrario a quello avvenuto più di duemila anni prima con la scoperta delle grandezze incommensurabili. In quel caso si era constatato in modo sconvolgente che i numeri interi naturali non riuscivano a dar conto di tutte le costruzioni geometriche e poiché nell'antichità solo i numeri naturali erano a disposizione, si considerò la geometria come fondamento di tutta la matematica, una geometria però in cui il punto era senza dimensioni e tutte le figure schematizzazioni astratte di analoghi reperibili nel mondo fisico, anche se non ad essi

riducibili. All'inizio del Novecento gli studi effettuati nell'ultimo trentennio del secolo precedente e l'apparizione di funzioni e di curve in vario modo patologiche, non suscettibili di rappresentazione grafica, portano all'evidenza che non tutta la conoscenza matematica può fondarsi sull'intuizione geometrica e la matematica deve costituirsi come pura teoria astratta. In questo lavoro si intende dare uno sguardo da vicino a questi oggetti matematici emergenti. E anche a constatarne l'utilità nella modellizzazione di alcuni fenomeni del mondo reale.

2 - Le funzioni, gli insiemi e le curve patologiche: una galleria di mostri¹

Abbandonare l'intuizione geometrica dello spazio rappresentò un momento conflittuale per i matematici: ma essi vi furono gradualmente costretti per il successivo emergere nell' '800 di una serie di insiemi, curve e funzioni molto particolari, che non si possono rappresentare graficamente in quanto mancano loro i requisiti che permettono di apparentarli a un disegno o a un'immagine reale. Il contatto dei sensi forniva infatti una sensazione di conforto e di sicurezza, basata sul presupposto, conscio o meno, che il mondo che si tocca con i sensi sia completamente non contraddittorio: abbandonare il terreno sperimentale per

¹ «Museo d'arte» matematico secondo Vilenkin (Mandelbrot, 1987, p.12).

fondare le proprie argomentazioni su procedure puramente mentali causava riluttanza.²

La prima di questa serie fu una curva continua ma priva di tangente in un insieme di punti numerabile e denso sulla curva, ottenuta come limite di una successione di poligonali; tale curva fu trovata in un cassetto di Bernard Bolzano, il “padre dell’aritmetizzazione secondo Klein. Probabilmente Bolzano (1781-1848) non si rese nemmeno conto dell’importanza che la curva rivestiva e che fu studiata in seguito al ritrovamento, avvenuto nel 1921: è comunque un frutto del suo interessamento all’investigazione della relazione teorica tra continuità e derivabilità. Ovviamente

² Per comprendere lo spirito con cui in generale tali nuovi enti furono accolti, sono indicative le seguenti parole di Poincaré:

La logica talvolta genera mostri. Da mezzo secolo a questa parte si sono viste spuntare una miriade di bizzarre funzioni, che sembrano sforzarsi di assomigliare il meno possibile alle oneste funzioni che servono a qualcosa: niente continuità, oppure continuità ma non derivate, eccetera. Ma c’è di più: dal punto di vista della logica, sono proprio queste strane funzioni a essere le più generali, mentre quelle che si trovano senza averle cercate appaiono soltanto come casi particolari; sono relegate in un angolino.

Un tempo, se si inventava una nuova funzione, era in vista di una qualche applicazione pratica: oggi si inventano nuove funzioni apposta per cogliere in fallo i ragionamenti dei nostri predecessori, funzioni da cui non si trarranno mai altri frutti. Se la logica fosse l’unica guida del pedagogo, bisognerebbe cominciare dalle funzioni più generali, vale a dire da quelle più bizzarre; è al principiante che bisognerebbe far affrontare questo museo teratologico.” Aggiunge Poincaré: “... non possiamo tenere in così poco conto la realtà, e non intendo solo la realtà del mondo sensibile, che ha nondimeno il suo valore, giacché i nove decimi dei vostri studenti vi richiedono armi per lottare appunto contro di essa. Esiste una realtà più sottile, che costituisce la vita stessa degli enti matematici, e che è altro dalla logica. (Poincaré, 1997, p.107).

questo esempio passò del tutto inosservato dai contemporanei.

Nelle figure seguenti appaiono le prime fasi della costruzione di una curva continua che non ha tangente in alcun punto ottenuta col procedimento, molto simile a quello usato da Bolzano, esposto in (Hahn, 1933).



Figura 1

Partiamo dalla figura 1, molto semplice, costituita da una linea ascendente e da una discendente. Al posto della linea ascendente sostituiamo, come nella figura 2, una linea spezzata costituita da sei segmenti, di cui il primo dalla base arriva a metà dell'altezza della linea originale, il secondo ridiscende fino alla linea della base, il terzo risale fino a mezza altezza e continua poi fino all'intera altezza, il quinto ridiscende a metà altezza e il sesto risale fino al vertice della figura originaria. Similmente si sostituisce la linea discendente con una linea spezzata in 6 segmenti, simmetrica della precedente rispetto alla bisettrice dell'angolo originario. Si ottiene in tal modo una figura composta da 12 segmenti.

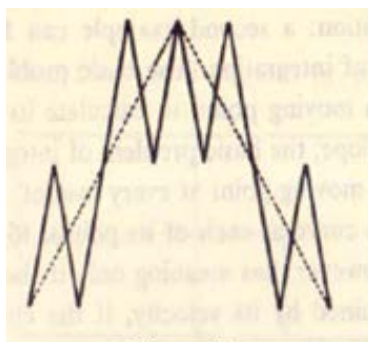


Figura 2

Con metodo analogo passiamo alla figura 3 che è una spezzata composta da 72 segmenti, che è stata ottenuta rimpiazzando ogni segmento della figura 2 con una spezzata costituita da 6 segmenti. La procedura impiegata può essere ripetuta e porta a figure ad ogni passo più complicate cui faticosamente può tener dietro l'intuizione. Si può dimostrare rigorosamente che la successione delle infinite figure geometriche che possono ottenersi con questa regola tende ad una curva continua sprovvista di tangente in ogni punto. Solo il pensiero e la logica possono immaginare lo strano oggetto matematico ottenuto come limite (ma già dopo poche altre iterazioni della procedura la figura perde la sua chiarezza e ci appare come un tutto indistinto). Conclude Hahn che se dovessimo attenerci all'intuizione dovremmo dedurre che non esistono curve continue sprovviste di tangente in ogni punto.

Una ventina di anni dopo il tentativo di Bolzano fu ideata da Riemann una funzione $f(x)$ limitata e continua tranne nei punti $x = \frac{p}{2n}$, con p e n primi tra loro, dove presenta delle discontinuità di prima specie, che è integrabile secondo Riemann.

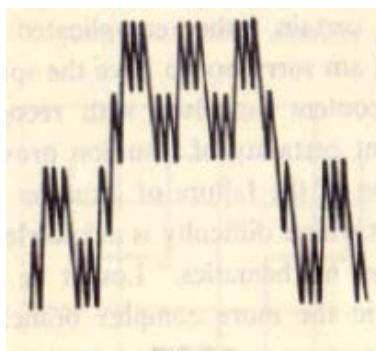


Figura 3

La funzione:

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

è una funzione continua non derivabile nell'insieme numerabile e denso costituito dai punti $x = \frac{p}{2n}$ con p e n primi fra loro.

Qualche anno dopo, nel 1861, ebbero anche grande risonanza le lezioni all'università di Berlino di Weierstrass, in cui veniva presentata la famosa funzione che porta il suo nome (pubblicata nel 1872 sulle Memorie dell'Accademia di quella città) e che inauguravano l'epoca della grande rigorizzazione dell'analisi. La funzione di Weierstrass è assegnata mediante una serie trigonometrica:

$$f(x) = \sum b^n \cos(a^n \pi x)$$

dove a è un intero dispari, $0 < b < 1$ e $ab > 1 + 3\pi/2$.

Si tratta di una funzione continua come si constata facilmente, che però non è dotata di derivata in alcun punto e questo si può provare con un calcolo arduo e complicato che evitiamo. Un'analogha funzione, ideata nel 1860, fu pubblicata solo nel 1890 da Cellierier.

Oltre alle precedenti funzioni, che possiamo definire di tipo Weierstrass, bisogna tenere presente che dopo la prima metà del secolo vengono introdotti altri nuovi insiemi e altre nuove funzioni particolarmente elaborati per costruire controesempi nell'ambito della teoria dell'integrazione di Riemann.

Il matematico tedesco Hankel (1839-1873), allievo di Riemann³, aveva cercato di dimostrare che è integrabile secondo Riemann una funzione discontinua ma tale che l'insieme delle sue discontinuità costituisca un insieme rado, cioè tale che nessun intervallo (non degenere) possa essere incluso nella sua chiusura⁴. Questo perché pensava che un siffatto insieme fosse trascurabile, cioè potesse essere incluso in una unione finita d'intervalli di ampiezza complessiva piccola a piacere. Il primo a provare l'erroneità di tale ragionamento, subito dopo la morte precoce di Hankel, fu H. J. S. Smith in un articolo sui *Proceeding of the London Mathematical Society* dove costruiva un insieme rado non trascurabile. Qualche anno dopo, nel 1881, V. Volterra proponeva un insieme dello stesso tipo grazie al quale poteva dimostrare che esistono funzioni derivate limitate non integrabili secondo Riemann⁵. Si tratta di insiemi

³ Hankel per primo pubblicò il controesempio ideato da Riemann della funzione continua non derivabile nei punti di un insieme denso.

⁴ Ad esempio l'insieme dei razionali dell'intervallo $[0, 1]$ non è rado, mentre un insieme con un numero finito di punti di accumulazione lo è (ed è trascurabile nel senso che ha misura di Peano-Jordan nulla).

⁵ Per rendersi conto delle difficoltà che un insieme di questo genere può presentare si ricorda che in (Volterra, 1881) ne è costruito uno al seguente modo: nell'intervallo $[0, 1]$ si consideri la successione decrescente a_1, \dots, a_n, \dots che tende a 0, con $a_1 = 1 - \frac{1}{2^2}$ e le distanze tra punti consecutivi minori di $\frac{1}{2^2}$; a sinistra di ciascuno di tali punti a_n si consideri

notevolmente complicati, a partire dai quali potevano essere costruite funzioni molto patologiche, ad esempio le loro funzioni caratteristiche. Sono insiemi anche molto lontani dagli insiemi cui ci ha abituato la geometria classica, la cui chiusura in generale è regolare, cioè coincide con la chiusura dell'interno.

Si ricordi che George Cantor nel 1872, studiando le serie trigonometriche, perviene non solo alla definizione dei numeri reali ma introduce anche il concetto di insieme derivato di un insieme di numeri reali. In quello stesso anno, per caso, incontra in Svizzera Dedekind, che ha appena pubblicato a sua volta, la sua teoria dei numeri reali. Si stabilisce tra i due un'amicizia, cui seguono numerose interessanti lettere. Il 7 dicembre del 1873 infatti in una lettera a Dedekind, Cantor fornisce la prima dimostrazione della non esistenza di una applicazione biunivoca tra N e $[0,1]$, teorema di enorme portata perché introduce in analisi ragionamenti di carattere completamente nuovo. Tre anni dopo, a più riprese, il 20, 22, 25 giugno del 1877 fornisce la prima dimostrazione della esistenza di una applicazione biunivoca dell'intervallo $[0,1]$ sul quadrato $[0,1] \times [0,1]$. Il 29 giugno chiede conferma

una successione a'_m che tenda decrescendo ad a_{n+1} , tale che la distanza tra a_n e a'_1 sia $\frac{1}{2^4}(a_n - a_{n+1})$ e le distanze fra due sue punti consecutivi siano tutte minori di $\frac{1}{2^4}(a_n - a_{n+1})$. A sinistra di ogni punto a'_n si consideri una successione a''_m che tenda decrescendo ad a'_{n+1} , tale che la distanza tra a'_n e a''_1 sia $\frac{1}{2^6}(a'_n - a'_{n+1})$ e le distanze fra due sue punti consecutivi siano tutte minori di $\frac{1}{2^6}(a'_n - a'_{n+1})$. Si continui indefinitamente allo stesso modo a partire dagli a''_m . Si consideri l'insieme costituito da tutti i punti che vengono così a formarsi e dai loro punti limite. Si dimostra che si tratta di un insieme rado e non trascurabile.

all'amico, che non gli ha ancora risposto, sull'esattezza della dimostrazione e afferma: «*Lo vedo ma non lo credo*». Nella successiva risposta di Dedekind appare come conseguenza la prima formulazione del teorema sulla non esistenza di un'applicazione biunivoca e continua tra R^n e R^m , con $n \neq m$.

A Cantor si deve la descrizione di un insieme chiuso, avente la potenza del continuo e privo di punti interni, di misura lineare nulla (Cantor, 1884, p. 386); anche questo insieme, come quelli di Smith e di Volterra (ma di più semplice enunciazione), si allontana da quanto intuitivamente pensiamo possa essere un insieme di numeri reali ed è all'origine di molti esempi e controesempi nella teoria della misura secondo Lebesgue.

Possiamo in generale considerare tutta una classe di insiemi del tipo Cantor al seguente modo: si consideri l'intervallo $[0,1]$ e si elimini da esso l'intervallo centrale aperto di ampiezza $\sigma < 1$, si elimini poi dalla parte centrale di ognuno dei due intervalli rimanenti un intervallo aperto di ampiezza σ^2 , e poi dalla parte centrale di ognuno dei quattro intervalli rimanenti un intervallo aperto di ampiezza σ^3 e si proceda allo stesso modo indefinitamente. L'ampiezza totale degli intervalli che si tolgono, la cui unione denotiamo con E, è data da $\sigma + 2\sigma^2 + \dots + 2^n \sigma^{n+1} + \dots = \frac{\sigma}{1-2\sigma}$.

Ora tale quantità vale 1 se $\sigma = 1/3$. In tal caso $[0,1]-E$ è un insieme chiuso, privo di punti interni, trascurabile e quindi misurabile secondo Peano-Jordan. I suoi elementi sono numeri reali del tipo $t = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \dots + \frac{a_n}{3^n} + \dots$, dove, per ogni n , a_n è in $\{0, 2\}$, e quindi sono tanti quanti i numeri del tipo $t = \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2^2} + \frac{b_3}{2^3} + \dots + \frac{b_n}{2^n} + \dots$, dove, per ogni n , b_n è in

$\{0, 1\}$, cioè sono tanti quanti i numeri dell'intervallo $[0,1]$. Ne segue che tale insieme, detto "insieme di Cantor" e denotato con C , ha la potenza del continuo.

Se $\sigma > 1/3$ è evidente che $[0,1]-E$ si riduce all'insieme vuoto, ma se $0 < \sigma < 1/3$, allora $\frac{\sigma}{1-2\sigma} < 1$, quindi il complemento $C_\sigma = [0,1]-E$ è un insieme chiuso, rado, non trascurabile, come quelli di Smith e di Volterra, la cui misura vale $1 - \frac{\sigma}{1-2\sigma} = \frac{1-3\sigma}{1-2\sigma}$: si tratta, però, in questo caso di un insieme di costruzione facilmente descrivibile. Consideriamo in particolare il caso $\sigma = 1/4$. Arntzenis⁶ chiama isole gli intervalli che via via si considerano e che qui abbiamo sottratto all'intervallo $[0,1]$ e arcipelago la loro unione E . In tal caso l'arcipelago ha misura $\frac{1}{2}$ e quindi il nostro insieme C_σ ha misura $\frac{1}{2}$. È chiuso e si verifica facilmente che nessun intervallo può essere incluso in esso, quindi è rado. Esso coincide con la completa frontiera dell'insieme E ; ne deduciamo che l'arcipelago E ha frontiera di misura positiva secondo Lebesgue e quindi, nonostante il nome suggestivo, non è misurabile secondo Peano-Jordan al pari di C_σ . Questo rende l'insieme controintuitivo: infatti l'intuizione ci porterebbe a credere che la misura di E anche in tal caso, come

⁶ Questo caso è studiato in dettaglio in (Arntzenius, 2012, p. 141 e segg.) dove le isole sono intervalli chiusi. L'insieme E differisce dal suo regolarizzato (il più piccolo insieme contenente E e coincidente con l'interno della sua chiusura), cioè l'intervallo $[0,1]$, per un insieme di misura positiva: questo è punto di partenza per un discorso in cui si sottolineano notevoli complicazioni nel definire una misura anche solo finitamente additiva sull'algebra di Boole degli insiemi regolari della retta che estenda la misura ordinaria degli intervalli.

nel caso del complemento dell'insieme di Cantor (ottenuto per $\sigma = 1/3$) sia eguale a 1 e quindi la misura di C_σ sia 0.

Con l'insieme di Cantor, a mio parere, arriviamo al limite estremo cui può spingersi la nostra intuizione geometrica nell'immaginare un insieme. È naturale pensare che la frontiera di un insieme ben fatto, un insieme che possiamo disegnare, abbia misura nulla. La frontiera di misura positiva ci fa pensare che essa presenti delle nebulosità e delle sfumature che mal si adattano alla nostra quotidiana esperienza degli oggetti e delle figure della geometria tradizionale, che, fatte alcune particolarissime eccezioni, hanno tutte un ben preciso contorno (nei problemi tradizionali ci sono magari piramidi e cerchi, ma sono esclusi gas in estensione, spugne, nuvole etc...). È allora il passaggio dalla classe degli insiemi misurabili secondo Peano-Jordan alla classe dei misurabili secondo Lebesgue il passo che ci porta dal mondo dell'intuizione geometrica ad un rigoroso universo dove tutte le proprietà della teoria della misura e dell'integrazione trovano la loro giusta collocazione, e che necessita di un più raffinato tipo di intuizione matematica per essere indagato.⁷

⁷ Sul ruolo positivo che gioca l'intuizione in matematica si sofferma Salomon Feferman nel suo saggio su Synthese del 2000 *Mathematical intuition vs. Mathematical monsters*, dove il mostro rappresenta la possibilità di percorsi alternativi. Paladino dell'inaffidabilità dell'intuizione è invece, come abbiamo già avuto modo di vedere, Hans Hahn, che in (Hahn, 1933) osserva che l'asserzione di Kant secondo la quale lo spazio è una delle forme dell'intuizione pura mentre poteva avere una sua motivazione nel Settecento, periodo dominato dalla fisica newtoniana e da una matematica di carattere geometrico, alla luce dei recenti studi di fisica, con l'apparizione della teoria della relatività da parte di Einstein, e della

Inoltre nel caso dell'insieme di Cantor abbiamo un insieme chiuso con la potenza del continuo che però può essere rinchiuso in un numero finito di intervalli commettendo un errore piccolo quanto si vuole, in altri termini tale insieme è limite di insiemi che dominiamo bene geometricamente. Con gli insiemi radi non trascurabili questo non avviene più: gli stessi insiemi approssimanti non sono di natura elementare e facilmente afferrabili intuitivamente.

Ritornando alle funzioni di tipo Weierstrass ricordiamo che, sull'onda della moda della ricerca di funzioni patologiche, a sua volta H. A. Schwarz, uno studente di Weierstrass, nel 1873 fornì l'esempio di una funzione molto singolare: si tratta di una funzione strettamente crescente non derivabile nell'insieme dei numeri razionali (Darboux, 1875, pp. 98-99). Un'idea più semplice di una tale funzione può essere fornita dalla scala del diavolo o funzione di Cantor: si tratta di una funzione crescente nell'intervallo $[0,1]$ e non derivabile in un insieme infinito non numerabile di punti, ottenuta, a partire dall'insieme di Cantor C , come limite della successione di funzioni: $f_0(x) = x$ per ogni x , e per ogni n : $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$, $f_n(x)$ continua e lineare a tratti e tale che in corrispondenza dei 2^{n-1} intervalli di lunghezza 3^{-n} eliminati all' n -simo passo della costruzione di C assume successivamente i valori: $\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{3}{2^{n+1}}, \frac{5}{2^{n+1}}, \dots, \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}$.

Il diagramma dei primi elementi di tale successione è tracciato nella figura 4. Si può dimostrare che la successione converge uniformemente nell'intervallo $[0,1]$ e quindi la

matematica astratta, dove sono state introdotte entità che non trovano alcuna giustificazione a livello intuitivo (quei fenomeni che abbiamo detto patologici), si è dimostrata del tutto inattendibile.

funzione di Cantor è continua, inoltre è evidente che non può essere derivabile nei punti dell'insieme di Cantor.

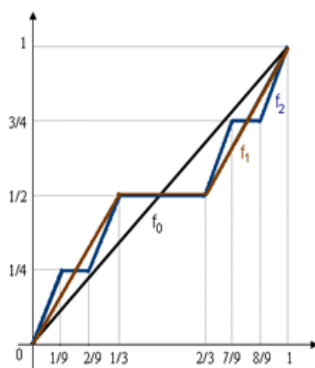


Figura 4

Darboux descrive molto bene la situazione che si era creata: fino all'apparizione della memoria di Riemann sulle serie trigonometriche nessun dubbio si era levato sull'esistenza della derivata delle funzioni continue. Dei bravissimi geometri, tra cui Ampère, avevano cercato di dare una dimostrazione rigorosa dell'esistenza della derivata. Nessuno di tali tentativi era stato coronato dal successo, ma ciò non di meno nessuno avrebbe dubitato dell'esistenza della derivata per le funzioni continue. Lo stesso Darboux fornisce un gran numero di esempi di funzioni continue che non hanno derivata in un numero infinito di punti: tra l'altro fornisce l'esempio di una funzione che non è né crescente né decrescente in nessun intervallo. Conclude la sua serie di esempi definendo la funzione:

$$f(x) = \sum_1^{\infty} \frac{\sin [(n+1)!x]}{n!}$$

che non ha derivata per nessun valore della variabile indipendente (Darboux, 1875).

Delle funzioni di Riemann e di Weierstrass vennero a conoscenza tutti i matematici del tempo: la funzione di Weierstrass ebbe un impatto maggiore di quella di Riemann in quanto comporta che la continuità non implica in alcun modo la derivabilità: ciò generò spesso reazioni di disappunto. Anche la memoria di Darboux ebbe grande influenza sulla comunità dei matematici. Hermite commentò il fatto in una lettera a Stieltjes del 1893 con le parole:

Mi ritraggo con spavento ed orrore da questa lamentevole disgrazia delle funzioni che non posseggono derivata.

La situazione quindi, in seguito alla scoperta dei casi singolari sopra descritti e di altri analoghi, faceva sorgere dei dubbi sui principi fondamentali dell'analisi e sulle sue dimostrazioni: in Germania alcuni valenti matematici, quali Schwarz di cui si è già detto e Heine, sollevavano nelle loro memorie negli anni 70-71 dubbi forse ancora maggiori e cercavano di porre su solide basi i principi dell'analisi infinitesimale: il matematico italiano Ulisse Dini, anch'egli assalito da dubbi analoghi, scrisse a Schwarz e da questi fu edotto sui metodi di Weierstrass e dei suoi allievi. Così venne a conoscenza dei lavori di Hankel, allievo di Riemann, e di Dedekind, Cantor, Heine: usò questo materiale per il suo corso di Analisi Superiore all'università a partire dall'a.a. 1871-72 e cominciò a stampare le sue lezioni. Il suo testo, pubblicato nel 1878 fu tradotto in tedesco. In esso tutta la materia intervenuta in modo disorganico negli esempi precedenti si avvia ad una rigorosa sistemazione. Le funzioni

continue trovano ampia discussione ma lo stesso avviene per le “punteggiate discontinue”, cioè quelle funzioni discontinue, introdotte da Hankel, tali che in ogni intervallo cada almeno un punto di continuità. Per queste funzioni l’allievo di Riemann aveva ideato il “principio di condensazione delle singolarità”, grazie al quale, data una funzione che presenta una singolarità (funzioni con un numero al più finito di singolarità sono di fatto la regola) se ne possono costruire altre con un numero infinito denso di singolarità. Dini trasforma questo principio in un metodo assolutamente rigoroso. Determina poi una classe di funzioni analitiche abbastanza semplici che non sono mai derivabili. Studia quindi le funzioni continue in relazione all’esistenza delle derivate: introduce la definizione di rapporto incrementale e per primo definisce le derivate destra e sinistra, inferiore e superiore, fornendo una grande quantità di risultati teorici.

Dini riteneva molto probabili funzioni definite e continue in un intervallo che abbiano in ogni sotto-intervallo massimi e minimi e siano ovunque derivabili (Dini, 1878, p. 283). Un primo tentativo in tal senso fu compiuto da Hankel (*Math. Annalen*, XX, 1882, p.81) ma la funzione ottenuta non era ovunque oscillante. Una costruzione molto complicata di una tale funzione fu data da Kopche (*Math. Ann.* XXXIV, 1889 e XXXV, 1890). La costruzione fu semplificata da Pereno (*Giornale di Matematica* XXXV, 1897).

È davvero interessante ricordare che, in seguito all’attenzione che Darboux e Dini riservano alle funzioni reali e in particolare a quelle singolari, anche in Italia l’argomento interessa alcuni matematici: ad esempio Peano ci informa nel 1889 che Genocchi, sebbene non ne avesse conoscenza prima

del 1875, aveva in seguito fatto dei seminari sulle funzioni continue sprovviste di derivata.

Il risultato più originale e famoso di Peano, quello che maggiormente risente del generale proposito di rigorizzazione dell'analisi e il più citato dei suoi lavori, è l'articolo sui *Math. Annalen* relativo alla curva continua che riempie un quadrato (Peano, 1890). Si tratta di un'applicazione continua dell'intervallo $I = [0,1]$ sull'intervallo I^2 , di equazioni parametriche $x = x(t)$, $y = y(t)$ con t appartenente ad I , essendo $x(t)$ e $y(t)$ funzioni continue. Peano non fornì in un primo momento una rappresentazione analitica di tale curva e nemmeno una rappresentazione geometrica, ma solo una formulazione algebrica.

L'anno dopo, sempre sui *Math. Annalen*, compare un articolo analogo da parte di Hilbert, dove viene data per la prima volta una rappresentazione geometrica di una curva simile a quella di Peano. Nella figura 5 seguiamo i primi sei passi della costruzione:

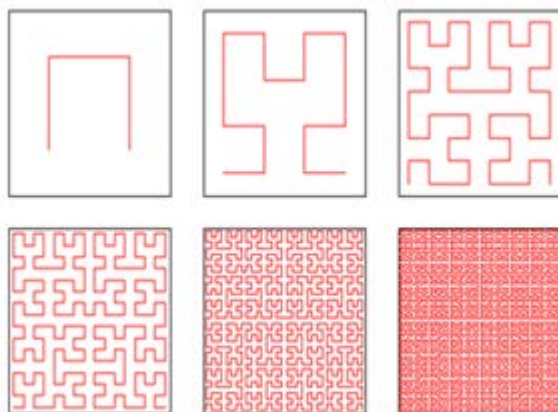


Figura 5

Le forchette che si rincorrono dalla terza delle precedenti immagini sembrano anche dominanti in figura 6, una veduta aerea dell'edificio del Bauhaus a Dessau, ideato dall'architetto Walter Gropius (1926).



Figura 6

Nel 1897 Cesaro pubblica la prima rappresentazione analitica della curva di Peano (Cesaro, 1897) e nel 1900 il matematico statunitense Moore fornisce una rappresentazione geometrica dei primi passi della costruzione (Moore, 1900), riprodotti in figura 7.

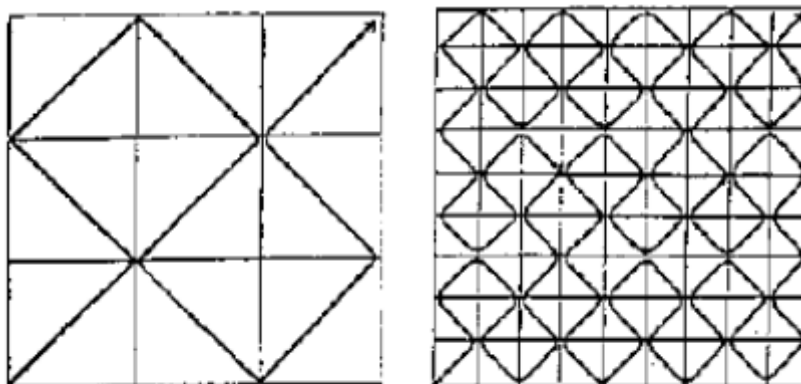


Figura 7

È un tratto caratteristico di Peano la sua ricerca del rigore e di controesempi che contraddistinguono gran parte della sua attività: così negli anni '90 egli propone anche un semplice esempio di una funzione crescente e discontinua in ogni intervallo (Peano, 1892). Successivamente nel suo *Formulario*, nel 1908, pubblicava una successione di curve come quelle di Hilbert. Inoltre, ammirandone la geniale formulazione geometrica, faceva pure costruire una curva della successione approssimante sul terrazzo della villa di Cavoretto, acquistata nell'estate del 1891: era formata da mattonelle nere che si stagliavano su uno sfondo bianco (H. C. Kennedy, 1983).

È interessante osservare come nel seguente dipinto di Mondrian del 1915, intitolato *Molo e oceano*, sia evidente un tentativo di afferrare la bidimensionalità con scarni tratti di linea retta.

Una rappresentazione algebrica molto semplice di una curva continua che riempie il quadrato unitario, analoga a quelle di Peano e di Hilbert, fu fornita da Lebesgue nelle sue *Leçons*.



Figura 8, Piet Mondrian, 1915, Pier and Ocean

Lebesgue pone, alla maniera di Peano e sulla scia di Cantor:

$$x = 1/2\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \frac{a_5}{2^3} + \dots + \frac{a_{2n-1}}{2^n} + \dots\right)$$

$$y = 1/2\left(\frac{a_2}{2} + \frac{a_4}{2^2} + \frac{a_6}{2^3} + \dots + \frac{a_{2n}}{2^n} + \dots\right)$$

in corrispondenza di $t = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \dots + \frac{a_n}{3^n} + \dots$, dove, per ogni n , $a_n = 0, 2$ cioè t appartiene all'insieme di Cantor C . Se t non appartiene a C allora esso appartiene a uno degli intervalli soppressi nella costruzione di C , sia (t_0, t_1) un tale intervallo, ai cui estremi corrispondono i punti (x_0, y_0) e (x_1, y_1) . Allora a ogni $t \in (t_0, t_1)$ si fa corrispondere il punto: $x(t) = x_0 + \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} (t - t_0)$; $y(t) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{t_1 - t_0} (t - t_0)$ e per $t \in (t_0, t_1)$ la curva si riduce ad un segmento. Le funzioni così definite sono continue: per questo basta provare che sono continue nei punti di C . Ora se $t \in C$ è molto vicino ad un punto $\vartheta \in C$ le prime $2n$ cifre di t , scritto in base 3, sono eguali alle prime $2n$ cifre di ϑ e quindi le prime n cifre di $x(t)$ e $x(\vartheta)$ sono eguali, come le prime n cifre di $y(t)$ e $y(\vartheta)$. È infine evidente che si tratta di un'applicazione suriettiva anche se non iniettiva. La

curva corrispondente è misurabile secondo Jordan, riempie tutto il quadrato unitario e quindi ha misura piana eguale a quella del quadrato; essa passa più volte per certi punti e non potrebbe essere altrimenti, in quanto se così non fosse il segmento base della rappresentazione ed il quadrato dovrebbero avere la stessa dimensione. Esistono però, come vedremo, delle curve senza punti multipli e non misurabili secondo Jordan (Lebesgue, 1904, p.44).⁸

Questi esempi ponevano un serio problema a proposito della dimensione: fino ad allora si era ritenuto che la dimensione di una figura fosse rappresentata dal minimo numero di parametri atti a determinarne un punto. Ad esempio un punto di una figura triangolare piana è determinato da due parametri, le coordinate cartesiane; una curva era ritenuta un ente a una dimensione, perché basta un parametro per rappresentarla, ma ora questo risultava ben strano visto che già Cantor aveva messo in relazione biunivoca un segmento con un quadrato: Si poteva obiettare che quella già sorprendente relazione era non continua, ma ora si provava che le curve, continue, di Peano e di Hilbert riempiono un quadrato. Non si tratta di curve di Jordan, in

⁸ Si osservi che, procedendo con le stesse notazioni usate in precedenza, se consideriamo la curva dello spazio di equazioni:

$$x = 1/2 \left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_4}{2^2} + \frac{a_7}{2^3} + \dots + \frac{a_{3n-2}}{2^n} + \dots \right)$$

$$y = 1/2 \left(\frac{a_2}{2} + \frac{a_5}{2^2} + \frac{a_8}{2^3} + \dots + \frac{a_{3n-1}}{2^n} + \dots \right)$$

$$z = 1/2 \left(\frac{a_3}{2} + \frac{a_6}{2^2} + \frac{a_9}{2^3} + \dots + \frac{a_{3n}}{2^n} + \dots \right)$$

essa riempie il cubo unitario. In (Lebesgue, 1905, 211) è costruita in modo simile una curva che riempie un dominio dello spazio a un'infinità numerabile di dimensioni.

quanto non sono rappresentative di una corrispondenza biunivoca: delle curve definite come immagini biunivoche e continue di un intervallo, Jordan si occupa nella prima edizione del terzo volume del suo *Cours d'analyse* del 1887, dimostrando che se sono rettificabili hanno misura bidimensionale nulla, cioè sono rinchiudibili in un numero finito di intervalli del piano di misura complessiva piccola quanto si vuole (sono cioè trascurabili). All'inizio nel 1903 un matematico statunitense, William F. Osgood (1864-1943), avrebbe provato che quel teorema non sussiste più se la curva è non rettificabile fornendo l'esempio di una curva di Jordan, cioè una curva continua che non si sovrappone a sé stessa, che ha misura piana positiva (e quindi, pur essendo limitata, ha lunghezza infinita). Osgood negli anni 1887-90 era venuto in Europa, a Gottinga, per perfezionare i suoi studi con Klein: in Europa aveva trovato un'atmosfera matematica molto vivace ed attiva, attraversata dall'acceso dibattito ideale tra la liceità dell'uso dell'intuizione ed il riferimento ad argomenti di carattere fisico abituale in Riemann e nella sua scuola e lo stretto rigorismo delle definizioni e delle dimostrazioni di Weierstrass. Osgood, come molti, nella sua carriera scelse il meglio delle due scuole, usando l'intuizione nel momento in cui inventava possibili nuovi risultati che venivano poi in seguito rigorosamente dimostrati. Si interessò alle funzioni di variabile reale, nel 1897 scrisse un importante lavoro sull'integrazione termine a termine delle successioni limitate di funzioni continue e oltre a vari altri risultati fornì in particolare il precedente interessante risultato sulle curve (Osgood 2003).

Riguardo le curve che si auto intersecano, Waclaw Franciszek Sierpinski (1882-1969), fondatore della scuola matematica polacca, rappresentativo, al pari di Lebesgue, della visione platonica della matematica, nel 1912 presenta un lavoro su una curva continua che riempie un quadrato visibile in figura 9 e successivamente (Sierpinski, 1915) scrive un lavoro dove sono presentati il famoso tappeto di Sierpinski e la curva triangolare.

Nei primi anni del '900 era stata pubblicato un lavoro che poneva all'attenzione una curva continua e non dotata di tangente in nessun punto, la curva di von Koch (von Koch, 1903-04) cui era seguito uno studio delle curve piane da parte dello stesso autore (von Koch, 1906).

La curva di von Koch si ottiene come limite di una successione di curve poligonali partendo da un segmento di lunghezza unitaria, al primo passo a tale segmento è eliminata la parte centrale e sostituita da due segmenti di lunghezza eguale alla parte rimossa, che formano un triangolo privo di base; al secondo passo da ognuno dei quattro lati della figura ottenuta in precedenza si sottrae la parte centrale e la si sostituisce con due segmenti ognuno di lunghezza eguale a quella del segmento rimosso; si ottiene una poligonale con 16 lati eguali per la quale si può ripetere la precedente costruzione.

Si ottiene al passo n una poligonale costituita da 4^n lati tutti della stessa lunghezza 3^{-n} e quindi di lunghezza $\left(\frac{4}{3}\right)^n$. Ne segue che la curva che si ottiene al limite ammette come poligonali inscritte tutte le curve precedenti e quindi ha lunghezza infinita.

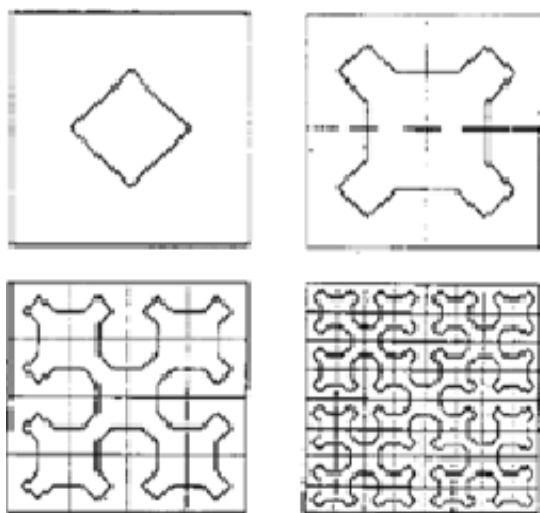


Figura 9

Ovviamente è una curva continua, ma sprovvista di tangente in ogni punto e priva di punti doppi, al contrario della curva di Peano, che ne presenta infiniti. Inoltre è auto-similare, cioè matematicamente generata da un processo che si ripete indefinitamente sempre eguale a sé stesso, sempre con lo stesso fattore di proporzionalità. Ovviamente se lo schema di partenza è diverso avremo uno sviluppo diverso, ma nello stesso ordine d'idee.

Della curva di von Koch si occupò Ernesto Cesaro, che approssima la funzione dall'esterno, al passo n mediante una congiungente i vertici delle figure triangolari ottenute nella costruzione della curva allo stesso passo (Cesaro, 1905). Come è evidente in figura 10, si viene così a formare una intercapedine, tra la poligonale al passo n della curva data e quella ottenuta da Cesaro, la cui area egli dimostra essere infinitesima.

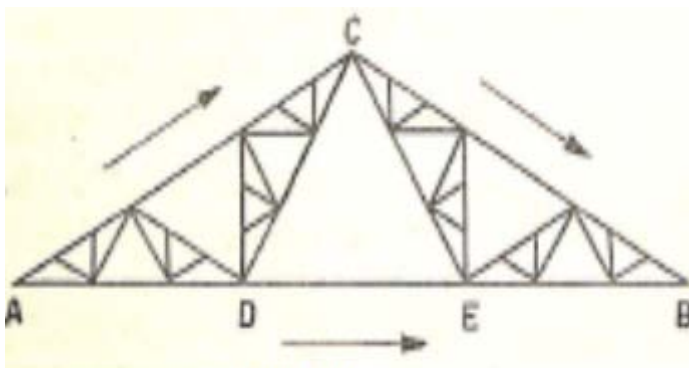


Figura 10

Quindi la curva pur non essendo rettificabile ha misura piana nulla (figura 11).

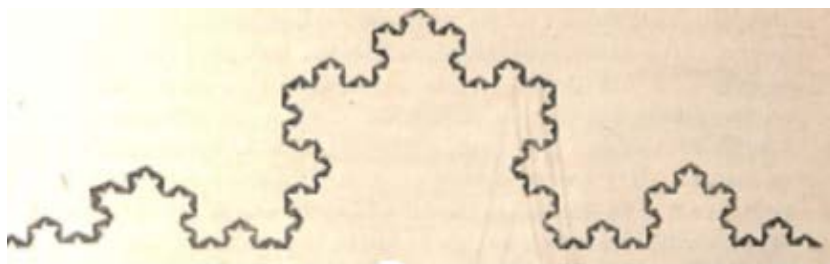


Figura 11

La maggior parte delle curve a misura positiva sono curve che non sono di Osgood, nel senso che si sovrappongono a sé stesse. Gli esempi forniti da Osgood sono però relativi a curve che intorno ad alcuni punti hanno misura positiva mentre hanno misura nulla intorno ad alcuni altri punti.

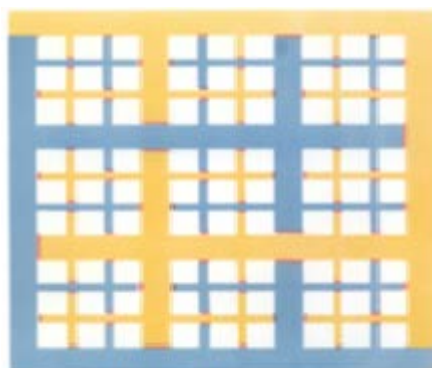


Figura 12

Può essere interessante confrontare la figura 12, che appare nell'articolo di Osgood con la figura 13, riproduzione di un quadro di Mondrian, dove, oltre a un simile intreccio di linee, troviamo esattamente gli stessi colori, blu, giallo, rosso e bianco che compaiono nell'articolo dello statunitense.

Nel 1917 Konrad Knopp (1882-1957) riuscì a migliorare l'esempio di Osgood determinando una curva che ha misura positiva nell'intorno di ogni suo punto. Essa si ottiene, alla maniera della curva di von Koch, considerando triangoli e disponendo sui lati di questi ricorsivamente triangoli più piccoli che costituiscono dei cunei triangolari come è mostrato in figura 14.

Se le ampiezze dei cunei introdotti ad ogni livello sono di 60° abbiamo al limite la curva di von Koch, se tali ampiezze si trovano comunque in un rapporto costante allora si ottiene al limite una curva del tipo von Koch, ma se il rapporto non è costante e diminuisce abbastanza rapidamente, si ottiene una curva uniforme di Osgood.



Figura 13 - Piet Mondrian, 1942, New York City I



Figura 14

3 - Un modo nuovo di guardare a curve e funzioni anomale.

Ciò che si era preso l'abitudine di classificare come patologia matematica deve essere ripreso in considerazione e riclassificato come espressione della "robusta complessità del reale" (Mandelbrot, 1987).

Grandi discussioni sorsero in seno ad alcuni gruppi di matematici circa le preesistenti nozioni topologiche relative alla dimensione delle figure date. Fu proprio uno dei fondatori della topologia moderna, F. Hausdorff (1868-1942), a chiarire molte nozioni al riguardo. In (Hausdorff, 1919) l'autore introduce un concetto di dimensione topologica in modo molto complesso. Il punto di partenza consiste nel fatto che oltre a figure geometriche di dimensione intera, possono esserci insiemi della retta di dimensione maggiore di 0 e minore di 1, curve piane limitate non rettificabili cioè di lunghezza infinita, che hanno una dimensione maggiore di 1 e minore di 2, superfici con dimensione superiore a 2 e minore di 3 e così via. Il matematico russo A. Besicovitch (1891-1970) avrebbe successivamente elaborato la definizione di Hausdorff e dato grandi contributi alla teoria della dimensione topologica, sviluppandone alcuni interessanti problemi. Qui daremo un'applicazione del calcolo della dimensione frattale in una forma estremamente semplificata, dimostrando che la curva di von Koch ha dimensione $\log_3 4$, cioè un numero non intero compreso tra 1 e 2.

Cominciamo con l'osservare che, dato il segmento unitario, lo possiamo ricoprire con 3^n segmenti tutti della stessa lunghezza 3^{-n} . Ognuno di questi segmenti può essere pensato, introdotto un parametro δ , come se avesse un peso $3^{-n\delta}$. Quindi nel valutare la somma totale dei pesi troviamo il valore

$$\frac{3^n}{3^{n\delta}} \quad (1)$$

Tale somma, al divergere di n , per $\delta < 1$ tende a $+\infty$, mentre per $\delta > 1$ tende a 0. Quindi, conformemente alla nostra concezione di dimensione, possiamo dire che la dimensione è data da $\delta = 1$, valore che si presenta come elemento di

separazione di due insiemi separati, il primo costituito dai $\delta < 1$ per cui (1) tende a $+\infty$ e il secondo costituito dai valori $\delta > 1$ per cui (1) tende a 0. Analogamente possiamo ricoprire il quadrato unitario con 3^{2n} quadrati di lato 3^{-n} che possiamo pensare abbiano un peso $3^{-n\delta}$ sommare i pesi ottenendo $3^{(2-\delta)n}$. In tal caso la dimensione, 2, è il valore tale che la somma precedente tende a 0 se $\delta > 2$, tende a $+\infty$ se $\delta < 2$.

Consideriamo ora la curva di von Koch e usiamo lo stesso metodo. Al primo passo abbiamo 4 segmenti che pesano ognuno $3^{-\delta}$. Al passo successivo ognuno di questi 4 segmenti dà luogo ad altri quattro segmenti che pesano $3^{-2\delta}$, per un contributo complessivo di $4^2 3^{-2\delta}$. Ripetiamo la stessa procedura in tutti i passaggi successivi, al passo n avremo 4^n segmenti ognuno dei quali pesa $3^{-n\delta}$, per un contributo complessivo di $\left(\frac{4}{3^\delta}\right)^n$. Tale quantità tende a 0 se $4 < 3^\delta$, cioè $\delta > \log_3 4$, tende a $+\infty$ se $0 < \delta < \log_3 4$. Ne segue che la dimensione della curva di von Koch non è intera, ma è eguale a $\log_3 4$, numero compreso tra 1 e 2. Si osservi che la lunghezza della curva è, come si è già detto, infinita.

Allo stesso modo si può provare che l'insieme di Cantor ha dimensione frattale eguale a $\log_3 2$. Fatto interessante: gli insiemi generalizzati di Cantor considerati in precedenza per valori positivi di $\sigma < 1/3$ hanno tutti dimensione 1. Infatti si vede subito che gli spazi fra due isole consecutive allo stesso passo della costruzione sono eguali e dopo il primo passo ci sono due spazi a lato dell'isola centrale di ampiezza $b_1 = 1/2(1-\sigma)$, dopo il secondo passo ci sono 4 spazi eguali di ampiezza $b_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(1-\sigma)-\sigma^2\right]$, dopo il terzo passo ci sono 8

spazi eguali di ampiezza $b_3 = \frac{1}{2} [\frac{1}{2}(1-\sigma)-\sigma^2-\sigma^3]$, dopo il quarto passo ci sono 16 spazi eguali di ampiezza

$$b_4 = \frac{1}{2} [\frac{1}{2} [\frac{1}{2}(1-\sigma)-\sigma^2] - \sigma^3] = \frac{1-\sigma-2\sigma^2-4\sigma^3-8\sigma^4}{2^4}$$

e in generale dopo n passi ci sono 2^n spazi eguali di ampiezza ciascuno:

$$b_n = \frac{1-\sigma-2\sigma^2-\dots-2^{n-1}\sigma^n}{2^n} = \frac{1-3\sigma+\sigma(2\sigma)^n}{2^n(1-2\sigma)}$$

Pertanto la somma da considerare al fine del calcolo della dimensione di C_σ è:

$$2^n \left(\frac{1-3\sigma+\sigma(2\sigma)^n}{2^n(1-2\sigma)} \right) \delta \tag{2}$$

Se $0 < \sigma < 1/3$ tale quantità tende a $+\infty$ se $\delta < 1$ e tende a zero se $\delta > 1$. Ne segue che in tali casi la dimensione frattale di C_σ è 1. Si noti che da (2) nel caso $\sigma = 1/3$ riotteniamo il valore $\log_3 2$ per la dimensione che presenta quindi una discontinuità quando σ passa dai valori compresi tra 0 e $1/3$, in corrispondenza dei quali essa vale 1, al valore $1/3$ in corrispondenza del quale essa assume il valore $\log_3 2$: ciò appare coerente con il fatto che se $0 < \sigma < 1/3$ la misura di C_σ è positiva, mentre è nulla per $\sigma = 1/3$ (ma la misura varia con continuità). Si osservi ancora che per $\delta = 1$ il limite di (2) fornisce la misura di C_σ , eguale a $\frac{1-3\sigma}{1-2\sigma}$, valore già determinato per altra via in precedenza.

Possiamo considerare un insieme piano, simile al tappeto di Sierpinski, costruito nello stesso ordine di idee dell'insieme di Cantor al seguente modo: dato il quadrato $Q = [0,1] \times [0,1]$, si divida Q in nove quadrati mediante i segmenti di equazione $x = \frac{i}{3}$ $i = 1,2$ e $y = \frac{i}{3}$ $i = 1, 2$. Si elimini il quadrato centrale aperto. Si divida ognuno degli 8 quadrati rimasti in 9 quadrati uguali di lato $1/9$ con lo stesso procedimento e si elimini poi il quadrato centrale aperto. Si iteri indefinitamente il procedimento. L'insieme di Cantor del piano C_2 è ciò che si ottiene eliminando successivamente tutti i quadrati così ottenuti. Si verifica subito che la misura di C_2 è zero. Per il calcolo della dimensione, poiché l'insieme è dato nel piano, ora lo ricopriremo con quadrati (o con cerchi) in modo opportuno: osserviamo che C_2 può essere ricoperto da 8 quadrati di lato $1/3$, 64 quadrati di lato $1/9$, in generale 8^n quadrati di lato $1/3^n$ che, al fine del calcolo della dimensione frattale, danno un contributo pari a $\frac{8^n}{3^{n\delta}}$, valore che tende a 0 se $8 < 3^\delta$ cioè se $\delta > \log_3 8$ e tende a $+\infty$ se $\delta < \log_3 8$, da cui si trae che la dimensione frattale di C_2 è $\log_3 8$. Si può ripetere il ragionamento precedente in dimensione 3 e si ottiene una polvere C_3 detta spugna di Menger, dal nome del matematico austriaco Karl Menger (1902-1985) che per primo la definì. La spugna di Menger ha misura tridimensionale nulla e dimensione frattale $\log_3 26$. Quindi:

$$\dim C < 1 < \dim C_2 < 2 < \dim C_3 < 3.$$

Possiamo anche considerare gli analoghi degli insiemi C_σ con $\sigma < 1/3$ in 2 dimensioni, dividendo il quadrato $Q = [0,1] \times [0,1]$ in nove rettangoli mediante i segmenti di equazione

$x = \frac{1-\sigma}{2}$, $x = \frac{1+\sigma}{2}$ e $y = \frac{1-\sigma}{2}$, $y = \frac{1+\sigma}{2}$. Si elimini il quadrato centrale aperto. Si divida ognuno degli 8 rettangoli rimasti in 9 rettangoli ottenuti allo stesso modo inserendo in ognuno di essi un quadrato centrale di lato σ^2 . Si eliminino i quadrati centrali aperti. Si iteri indefinitamente il procedimento.

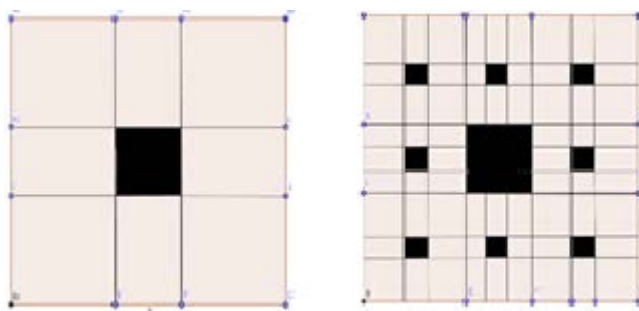


Figura 15

La misura complessiva dei quadrati che togliamo è $\sigma^2 + 8\sigma^4 + 64\sigma^6 + \dots = \frac{\sigma^2}{1-8\sigma^2}$ numero che è minore di 1 se $\sigma < 1/3$, eguale a 1 per $\sigma = 1/3$. Se ne deduce che la polvere bidimensionale che si ottiene in questo caso ha misura 0 per $\sigma = 1/3$, mentre ha misura positiva per $\sigma < 1/3$ data da $\frac{1-9\sigma^2}{1-8\sigma^2}$. Si può poi provare che per $\sigma < 1/3$ la polvere bidimensionale ha dimensione frattale eguale a 2, mentre la polvere tridimensionale ha dimensione eguale a 3. Infatti nel caso della polvere bidimensionale si vede che al passo n essa è ricoperta da più di $4n$ quadrati di lato b_n . Quindi la quantità da prendere in considerazione è minorata da $4nb_n^\delta$ e si verifica facilmente che essa tende a $+\infty$ se $\delta < 2$. Ne deduciamo che la dimensione della polvere bidimensionale non è inferiore a 2; poiché maggiore di 2 non può essere essa è proprio eguale a 2.

Quindi anche in questo caso la dimensione frattale presenta una discontinuità in corrispondenza di $\sigma = 1/3$ caso in cui, come si è detto, la dimensione è $\log_3 8$, numero strettamente compreso tra 1 e 2.

La curva di Koch e le altre figure frattali finora considerate si presentano come oggetti matematici risultanti dall'iterazione infinita di certe operazioni elementari, lineari, rispetto alle quali risultano poi invarianti. All'inizio del secolo Pierre Fatou (1878-1929) compiva studi sulla iterazione di funzioni complesse, che pubblicava nel 1917. Nello stesso periodo anche Gaston Julia faceva studi sullo stesso argomento e anche se con tecniche diverse approdava agli stessi risultati: ma entrambi dovevano arrestarsi per la difficoltà dell'elaborazione dei calcoli relativi alla loro analisi. B. B. Mandelbrot fu allievo di Julia all'École Polytechnique di Parigi e venne così messo al corrente di questo tipo di indagini.

Negli anni 78-79, dopo il grande sviluppo delle macchine calcolatrici, pensò di studiare al calcolatore oggetti matematici che fossero invarianti per trasformazioni non lineari: in particolare alla fine del 1979 pensò di studiare il comportamento della funzione z^2+c , dove la variabile z e la costante c sono numeri complessi. Si tratta dello studio di un processo iterativo in cui a ogni punto variabile x_n del piano complesso al passo n corrisponde un punto x_{n+1} al passo $n+1$ ottenuto dal precedente mediante la legge $x_{n+1} = x_n^2 + c$. Se si procede indefinitamente i punti all'interno del cerchio unitario tendono ad avvicinarsi al punto c , che rappresenta così un attrattore, quelli all'esterno tendono all'infinito, quelli della circonferenza unitaria tendono alla circonferenza di centro c e

raggio 1. Quindi il piano viene distinto in due diverse regioni di attrazione una esterna e l'altra interna al cerchio di centro c e raggio 1. Mandelbrot, come è descritto in (Devlin, 1999), vide al calcolatore che per valori di c diversi da zero ci può essere più di un attrattore e la figura compresa tra le due zone non è necessariamente una circonferenza, ma può avere un notevole interesse estetico. Nella figura 16 è rappresentato l'insieme di Mandelbrot, cioè l'insieme che appare per $-2,25 < Re c < 0,75$ e $-1,5 < Im c < 1,5$.

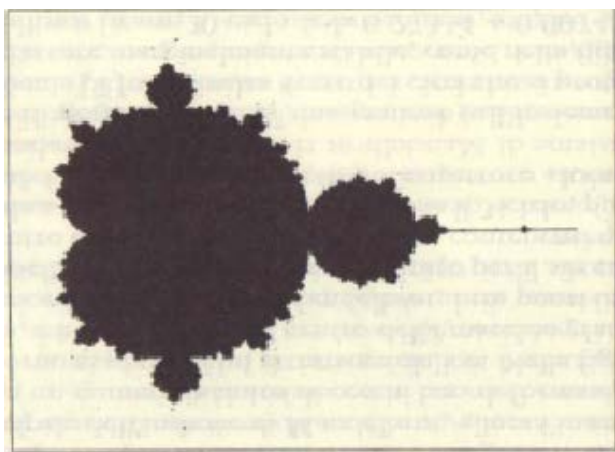


Figura 16

Se si osserva il comportamento della figura 16 in un intorno della zona di frontiera, usando un calcolatore come ingrandimento, che corrisponde ad ulteriori iterazioni, si osserva una figura del tutto simile alla figura complessiva. Questo era stato presagito da Fatou e Julia, in quanto l'intera frontiera si riproduce con la stessa legge che regola il tutto, ma i due matematici non avevano a disposizione dei calcolatori per poterlo andare a verificare. Per questo motivo a tale zona di frontiera, rappresentata nella figura 17, viene oggi dato il

nome di insieme di Julia. Come si vede l'insieme di Mandelbrot appare come una figura a forma di scarafaggio: questa caratteristica si presenta per particolari valori di c .

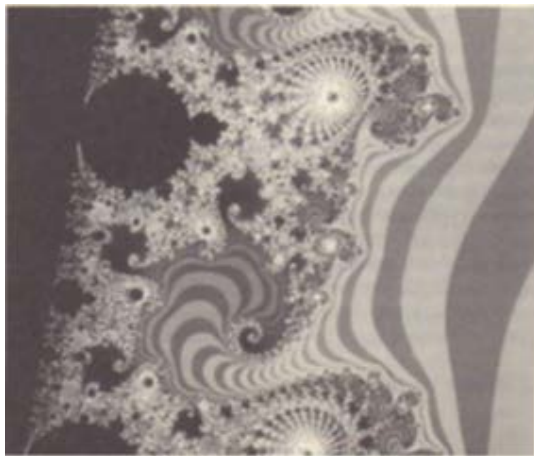


Figura 17

Quando si parla di curve senza tangente e di funzioni senza derivate si ritiene in generale che la natura non presenti simili complicazioni. Invece secondo Mandelbrot la complessità che simili condizioni comportano spesso sono presenti nel mondo reale, anche se non abbiamo la possibilità di rendercene conto; infatti se osserviamo un fiocco bianco di quelli che si ottengono salando l'acqua saponata si vede che mentre da lontano il suo contorno può apparire netto, avvicinandosi non si riesce più a fissare la tangente in un punto. Questo problema permane se si prende una lente e si ingrandisce il fiocco perché allora si vedono comparire delle nuove anfrattuosità.

Allo stesso modo, come è descritto nelle pagine 12 e 13 di (Mandelbrot, 1987), se si prende una carta della costa della

Gran Bretagna, la tangente in un punto varia a seconda della scala e comunque si può determinare perché la carta non può essere costruita in modo tale da rispettare strettamente il mondo reale. Ma se si guarda il litorale al naturale, è impossibile fissare la tangente perché si intravedono dettagli tali che ne rendono impossibile la determinazione. Allo stesso modo se osserviamo il moto browniano che agita una particella in sospensione in un fluido, siamo incapaci di trovare anche solo approssimativamente il limite della direzione di una retta che congiunge le posizioni della particella in due istanti vicini, in quanto tale direzione varia follemente al tendere a zero dell'intervallo di tempo.

Fatto interessante allora, la curva di von Koch può essere considerata come un modello sommario di un tratto di costa: però il modello risulta non accettabile, non perché sia troppo irregolare, ma perché al contrario è troppo regolare rispetto alle irregolarità che si presentano nella realtà. A questo problema Mandelbrot dedica molta attenzione e nel 1967 pubblica su *Science* il suo lavoro sulla lunghezza della costa della Gran Bretagna dove, come mostrano i ricoprimenti in figura 18, usa la teoria dei frattali allo scopo della determinazione della sua dimensione.

Concludendo abbiamo ricordato che la teoria di Hausdorff, dopo un lungo periodo di indifferenza, è stata ripresa nella seconda metà del '900 da Benoit B. Mandelbrot che la ha sviluppata al fine di trattare fenomeni fisici che non possono essere inquadrati negli schemi della matematica classica, fenomeni che egli inquadra nell'ambito della teoria dei frattali.



Figura 18

Questa teoria, che comunemente è nota perché ha permesso di costruire immagini con un interessante aspetto estetico ed è stata conseguentemente usata in ambito cinematografico per la creazione di paesaggi fantascientifici, ha anche il merito di aver rappresentato un momento di rinascita del punto di vista geometrico-costruttivista, perché nonostante le sue origini siano state determinate come abbiamo visto, dal lavoro di Hausdorff e dagli studi topologici di inizio del secolo XX, impregnati di considerazioni di carattere platonico, essa è strettamente legata all'uso della tecnica computeristica, che è la sola che permette di generare e indagare gli oggetti frattali.

Bibliografia

Arntzenius F. (2012). *Space, Time and Stuff*, Oxford University Press.

Cantor G. (1884). De la puissance des ensembles parfaits de points, *Acta Math.*, Vol. 4, 381-396.

Cesaro E. (1897). Sur la representation analytique des régions et des courbes qui le remplissent, *Bull.Sc. Math. (2) 21, Opere Scelte, Cremonese, Vol. II*, 1963, 423-431.

Cesaro E. (1905). Remarque sur la courbe de von Koch, *Atti Acc. Sci. Napoli* (2) 12.

Darboux G. (1875). Mémoire sur les fonctions discontinues, *Ann. Ec. Norm. Sup.* (2), t. IV, 57-112.

Devlin K. (1999). *Dove va la matematica*. Torino: Bollati Boringhieri.

Diedonné J. (1996). *Abregé d'histoire de mathématiques*. Paris: Herman.

Dini U. (1878). *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*. UMI, 1990.

Hahn H. (1933). *The crisis in intuition, The Word of Mathematics by James R. Newman*. New York, 1956-1976.

Hausdorff F. (1919). Dimension und äusseres Mass, *Mathematische Annalen*, LXXIX, 157-79.

Kennedy H. C. (1983). *Peano – Storia di un matematico*. Torino: Boringhieri.

Von Koch E. (1903-04). Sur une courbe continue sans tangente obtenu par une construction géométrique élémentaire. *Arkiv für Mathematik, Astronomie och Fysik I*, 681-702.

Von Koch E. (1906). Une méthode géométrique pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes. *Acta Math.* 30, 145-175.

Lebesgue H. (1904). *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*. Paris : Gauthier- Villars.

Mandelbrot B. B. (1987). *Gli oggetti frattali*, Biblioteca Einaudi (Prima edizione 1975).

Manheim J. H. (1964). *The Genesis of Point Set Topology*. Pergamon.

Moore E. H. (1900). On Certain Crikly curves. *Trans. AMS*, Vol 1, 72-90.

Osgood W. F. (1903). A Jordan curve of positive area. *AMS*, Vol. 4, No. 1, pp. 107-112.

Peano G. (1890). Sur une courbe qui remplit toute une aire plane. *Math. Annalen* 36, 157-160, anche in *Opere Scelte*, Vol. I, 110-114.

Peano G. (1892). Esempi di funzioni sempre crescenti e discontinue in ogni intervallo. *Rivista di Matematica*, 2, 41-42.

Poincarè J.H. (1997). *Scienza e metodo*. Torino: Einaudi.

Sierpinski W. (1915). Sur une courbe dont tout point est un point de ramification, *C.R. Ac.Sci. Paris* 60, 302-305.

Smith H. J. S. (1874-1875). On the Integration of Discontinuous Functions. *Proceeding of the London Math. Soc.*, 6, 140-153.

Volterra V. (1881). Alcune osservazioni sulle funzioni punteggiate discontinue. *Giornale di Matematiche*, XIX.

Numeri di Fibonacci primi

Sia $F(n)$ il generico numero di Fibonacci. Una interessante proprietà è la seguente:

$F(mn)$ è divisibile sia per $F(m)$ che per $F(n)$

ne consegue che, se un numero $F(k)$ è numero primo, anche l'intero k è primo, fatta eccezione per il caso che sia $F(4) = 3$. Infatti se fosse $k = mn$, con $m > 1$, $n > 1$, allora sarebbe $F(k)$ divisibile sia per $F(m)$ che per $F(n)$, con $F(m) > 1$, $F(n) > 1$, mentre $F(k)$ è primo.

Non è vero il contrario.

Il più grande numero di Fibonacci primo noto F sé tato segnalato in aprile 2001 da David Broadbent e Bouk de Water.

La serie di numeri indice dei numeri primi di Fibonacci, ad oggi nota, è la sequenza:

3, 4, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, 43, 47, 83, 131, 137, 359, 431, 433, 449, 509, 569, 571, 2971, 4723, 5387, 9311, 9677, 14431, 25561, 30757, 35999, 37511, 50833, 81839, 104911, 130021, 148091, 201107, 397379, 433781, 590041, 593689, 604711, 931517, 1049897, 1285607, 1636007, 1803059, 1968721, 2904353, 3244369, 3340367.
