

## ASPETTI DIDATTICI DELLE MATROIDI

Fernando Di Gennaro  
*Dipartimento di Matematica*  
*Università della Basilicata*  
*Via Nazario Sauro, 85*  
*85100 POTENZA (Italy)*

### 1. Introduzione e motivazione

Le *matroidi* sono una generalizzazione di vari concetti che sono alla base di alcune teorie matematiche quali, ad esempio, le matrici ed i grafi. La teoria delle matroidi estende alcune proprietà geometriche relative al piano, allo spazio ordinario, agli spazi vettoriali e, più in generale, a spazi aventi come sostegno un numero finito di punti.

Il termine *matroide* deriva dalla generalizzazione astratta del termine *matrice* e la loro teoria risale al 1935, anno in cui Hassler Whitney pubblicò l'articolo pionieristico *On The Abstract Properties Of Linear Dependence*. Whitney in questo lavoro fece notare delle analogie tra i grafi e le matrici, proponendo una teoria più generale che avesse casi particolari le due teorie. Lo sviluppo della teoria delle matroidi si è avuto soltanto nel 1965, quando cioè sono stati pubblicati i primi importanti lavori sull'argomento.

Tale teoria, mediante le diverse assiomatizzazioni equivalenti con cui può essere sviluppata, esprime il carattere unificante della matematica.

Le matroidi possono essere definite mediante una delle seguenti assiomatizzazioni:

- I. Matroide definita mediante *insiemi indipendenti*.
- II. Matroide definita mediante la *funzione rango*.
- III. Matroide definita mediante gli *operatori di chiusura* o *insiemi chiusi*.

Nell'assiomatizzazione basata sugli insiemi indipendenti, il concetto di matroide non è altro che una generalizzazione di quello di matrice considerata come insieme dei suoi vettori colonna, cioè come sottoinsieme finito di uno spazio vettoriale, mentre in

quella basata sulla funzione rango o sull'operatore di chiusura, si mette in evidenza l'analogia tra il concetto di matroide e quello di spazio topologico.

Per avere un'idea compiuta del concetto unificante della matematica, in questo articolo presentiamo i diversi assiomi di definizione fornendo una dimostrazione elementare della loro equivalenza. Concludiamo infine con una significativa applicazione della teoria nell'ambito della ottimizzazione combinatoria.

## 2. Matroide definita mediante gli indipendenti

In questo paragrafo prendiamo gli assiomi di definizione di una matroide dati mediante le proprietà astratte della lineare dipendenza. Prendiamo, ad esempio, le proprietà che hanno i sistemi liberi di colonne di una data matrice  $M$ . Diremo che  $r$  colonne  $M_1, M_2, \dots, M_r$  di  $M$  sono linearmente indipendenti se:

$$\forall a_1, a_2, \dots, a_r \in \mathbf{R}, a_1 M_1 + a_2 M_2 + \dots + a_r M_r = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_r = 0$$

Sia  $S$  l'insieme delle colonne di  $M$ . Con  $\mathcal{P}(S)$  indichiamo l'insieme delle parti di  $S$  e con  $\mathfrak{I}$  una famiglia di parti di  $S$ . La coppia  $(S, \mathfrak{I})$  si dice che è uno *spazio di indipendenza* se  $\mathfrak{I}$  soddisfa i seguenti assiomi:

$$(2.1) \quad \emptyset \in \mathfrak{I}$$

$$(2.2) \quad \forall A \in \mathfrak{I} \text{ e } B \subseteq A \Rightarrow B \in \mathfrak{I}.$$

L'insieme vuoto,  $\emptyset$ , di colonne è linearmente indipendente perché non può non esserlo. Infatti, se non lo fosse, dovrebbe esistere una combinazione lineare nulla di colonne dell'insieme vuoto a coefficienti non tutti nulli, ma l'insieme vuoto è privo di colonne.

Ogni sottoinsieme di un sistema libero è libero. Infatti, estendendo la combinazione lineare a tutto il sistema libero, completandola con coefficienti nulli, si ottiene la nullità di tutti i coefficienti.

Da notare che l'assioma (2.2) ha una simpatica interpretazione sociologica. In ogni assemblea, quando si devono distribuire delle risorse, si formano delle coalizioni per deciderne la destinazione. Le coalizioni perdenti hanno la proprietà (2.2), cioè ogni sottoinsieme di una coalizione perdente è perdente.

Uno spazio di indipendenza che verifica che verifica la:

$$(2.3) \quad \forall A, B \in \mathfrak{I} : |B| = |A| + 1 \Rightarrow \exists x \in A - B : B \cup \{x\} \in \mathfrak{I}$$

(  $|X|$  sta ad indicare la cardinalità dell'insieme  $X$ ), viene chiamato *matroide di sostegno*  $S$  e l'indicheremo con  $M' = (S, \mathfrak{I})$ . Per non appesantire la trattazione non ci

soffermiamo su questo terzo assioma; semplicemente diremo che è l'astrazione dei teoremi di completamento e di equicardinalità delle basi degli spazi vettoriali. Gli elementi di  $\mathfrak{I}$  si dicono *indipendenti* della matroide, mentre quelli di  $\mathcal{P}(S) - \mathfrak{I}$  si dicono *dependenti*. Denoteremo con  $\mathcal{D}$  l'insieme dei dependenti.

Consideriamo la matroide  $M' = (S, \mathfrak{I})$  ed un insieme  $B \subseteq S$ . l'insieme  $B$  si dice *massimale indipendente* se sono verificate le seguenti proprietà:

$$(2.4) \quad B \in \mathfrak{I}$$

$$(2.5) \quad \forall N \in \mathcal{P}(S) : B \subseteq N, B \neq N \Rightarrow N \notin \mathfrak{I}.$$

Allora l'assioma (2.3) che definisce la matroide di sostegno  $S$ , può allora essere riformulato nella maniera seguente:

$$(2.3)' \quad \forall I, J \in \mathfrak{I}; I, J \subseteq X \subseteq M', I, J \text{ massimali in } X \Rightarrow |I| = |J|$$

L'assioma (2.3) inoltre è equivalente alla seguente proprietà, detta *assioma dell'aumento*.

$$(2.3)'' \quad \forall X, Y \in \mathfrak{I} : |X| < |Y| \Rightarrow \exists Z \subseteq Y - X : X \cup Z \in \mathfrak{I}, |X \cup Z| = |Y|.$$

### 3. Matroide definita mediante la funzione rango

In questo paragrafo definiamo la matroide mediante una opportuna funzione detta *funzione rango*.

Una funzione

$$\rho : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathbf{Z}$$

si dice *funzione rango* se  $\forall A, B \subseteq S$  sono verificate le seguenti proprietà:

$$(3.1) \quad \rho(\emptyset) = 0$$

$$(3.2) \quad 0 \leq \rho(A) \leq |A|$$

$$(3.3) \quad A \subseteq B \Rightarrow \rho(A) \leq \rho(B)$$

$$(3.3) \quad \rho(A \cup B) + \rho(A \cap B) \leq \rho(A) + \rho(B).$$

La coppia  $(S, \rho)$  dicesi *matroide di rango  $\rho$* .

Gli assiomi (3.2), (3.3) e (3.4) possono essere formulati in maniera più concisa mediante i due assiomi seguenti:

$$(3.2)' \quad \rho(A) \leq \rho(A \cup \{x\}) \leq \rho(A) + 1$$

$$(3.3)' \quad \rho(A \cup \{y\}) = \rho(A \cup \{z\}) = \rho(A) \Rightarrow \rho(A \cup \{y\} \cup \{z\}) = \rho(A)$$

per ogni  $A \subseteq S$  e per ogni  $y, z \in S$ .

#### 4. Matroide definita mediante gli operatori di chiusura (o con gli insiemi chiusi)

In questo paragrafo definiamo la matroide mediante un opportuno operatore detto *operatore di chiusura*. Sia :

$$— : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathcal{P}(S)$$

un operatore tale che  $\forall A, B \in \mathcal{P}(S)$  e  $\forall x, y \in S$  risulti:

$$(4.3) \quad A \subseteq \overline{A}$$

$$(4.4) \quad A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$$

$$(4.5) \quad \overline{\overline{A}} = \overline{A}.$$

L'operatore  $—$  si dice *operatore di chiusura* e la coppia  $(S, —)$  si dice *spazio di chiusura*. Le (4.4) e (4.5) possono essere formulate in modo equivalente mediante il seguente assioma:

$$(4.5)' \quad A \subseteq \overline{B} \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}.$$

L'operatore di chiusura può avere la seguente *proprietà di scambio*:

$$(4.6) \quad A \subseteq S; x, y \in S : x \in \overline{A}, x \in \overline{y \cup A} \Rightarrow y \in \overline{x \cup A}.$$

Le (4.3), (4.4) e (4.5) sono di immediata verifica.

Chiameremo *matroide* uno spazio di chiusura finito  $(S, \mathcal{C})$  soddisfacente all'assioma di scambio (4.6).

### 5. Equivalenza delle varie definizioni

A questo punto è interessante mostrare l'equivalenza tra le varie definizioni date di matroide, e dimostriamo ciò seguendo lo schema seguente:

$$\textit{indipendenti} \Rightarrow \textit{rango} \Rightarrow \textit{chiusura} \Rightarrow \textit{indipendenti}.$$

a)  $\textit{indipendenti} \Rightarrow \textit{rango}.$

Vediamo come è possibile, mediante una famiglia degli indipendenti di una matroide, costruire una funzione rango.

Ad ogni matroide  $M = (S, \mathfrak{I})$ , definita tramite gli indipendenti, si può associare una funzione rango:

$$\rho : \mathbf{P}(S) \longrightarrow \mathbf{Z}$$

mediante il seguente assioma:

$$\forall A \subseteq S \quad \rho(A) = \max \{ |x| : X \subseteq A, X \in \mathfrak{I} \}.$$

Proviamo che la funzione  $\rho$  è una *funzione rango*, cioè dimostriamo che verifica gli assiomi (3.1), (3.2), (3.3) e (3.4).

Dimostriamo la validità della (3.4) poiché le altre seguono direttamente dalla definizione.

Sia  $X$  un sottoinsieme massimale di  $A \cap B$ , cioè  $X \subseteq A \cap B$ . In virtù della (2.3)', si ha:

$$\rho(A \cap B) = |X|.$$

Mediante la (2.3) estendiamo  $X$  in  $A \cup B$  in modo da ottenere un sottoinsieme  $Y \subseteq A \cup B$  tale che  $X \subseteq Y$ , con  $Y$  massimale indipendente di  $A \cup B$ . Dalla (2.3)' si ha:

$$\rho(A \cup B) = |Y|$$

e risulta:

$$|Y \cap A| + |Y \cap B| = |Y| + |X|$$

e poiché  $Y$  è indipendente, lo sono anche  $Y \cap A$  e  $Y \cap B$ . Pertanto si ha :

$$|Y \cap A| \leq \rho(A) \quad |Y \cap B| \leq \rho(B)$$

da cui segue subito che:

$$\rho(A) + \rho(B) \geq |Y \cap A| + |Y \cap B| = |Y| + |X| = \rho(A \cup B) + \rho(A \cap B).$$

b) *funzione rango*  $\Rightarrow$  *operatore di chiusura*

Costruiamo l'operatore di chiusura mediante la funzione rango. A tale scopo consideriamo una matroide  $M = (S, \rho)$  definita tramite la funzione rango. Per ogni  $A \subseteq S$  e  $x \in S$ , diremo che  $x$  dipende da  $A$  se:

$$\rho(A) = \rho(A \cup \{x\}).$$

Definiamo un operatore  $\bar{\phantom{A}} : \mathbf{P}(S) \longrightarrow \mathbf{P}(S)$  nel modo seguente:

$$\forall A \subseteq S, \bar{A} = \{x \in S : x \text{ dipende da } A\}$$

e dimostriamo che  $\bar{\phantom{A}}$  è un operatore di chiusura, cioè proviamo che esso soddisfa gli assiomi (4.3), (4.4), (4.5) e (4.6).

Poiché ogni  $x \in A$  dipende in modo ovvio da  $A$ , la (4.3) segue quindi in modo immediato dalla definizione.

Dimostriamo la (4.4). Supponiamo che  $A \subseteq B$  e dimostriamo che  $\bar{A} \subseteq \bar{B}$ . A tale scopo consideriamo un  $x \in \bar{A}$  e proviamo che  $x \in \bar{B}$ . Poiché  $x \in \bar{A}$  risulta:

$$\rho(A \cup \{x\}) = \rho(A)$$

dalla (3.3), essendo  $A \subseteq B$ , si ha che  $\rho(A) \leq \rho(B)$ . Se vale il segno di uguaglianza, cioè se  $\rho(A) = \rho(B)$ , si ha:

$$\forall b \in B - A \Rightarrow \rho(A \cup \{b\}) = \rho(A) = \rho(B)$$

ed essendo  $\rho(A \cup \{x\}) = \rho(A)$ , si ha:

$$\forall b \in B - A \Rightarrow \rho(A \cup \{x\} \cup \{b\}) = \rho(A)$$

e quindi

$$\rho(B \cup \{x\}) = \rho(A) = \rho(B).$$

Supponiamo invece ora che  $A \subseteq B$  e  $\rho(A) < \rho(B)$ . Poniamo  $h = \rho(B) - \rho(A)$ . Allora, per la (3.2)' e (3.3)', esistono  $b_1, \dots, b_h \in B - A$  tali che:

$$\rho(A \cup \{b_1\} \cup \dots \cup \{b_h\}) = \rho(B)$$

e poiché è  $\rho(A \cup \{x\}) = \rho(A)$ , per la (3.2)' si ha:

$$\rho(A \cup \{x\} \cup \{b_1\} \cup \dots \cup \{b_h\}) = \rho(A) + h = \rho(B).$$

Poiché per la (3.3) si ha:

$$\rho(B) = \rho(A \cup \{b_1\} \cup \dots \cup \{b_h\}) \leq \rho(A \cup \{x\} \cup \{b_1\} \cup \dots \cup \{b_h\}) \leq \rho(B)$$

risulta:

$$\rho(A \cup \{x\} \cup \{b_1\} \cup \dots \cup \{b_h\}) = \rho(B).$$

Inoltre, poiché  $\{b\} \cup A \cup \{b_1\} \cup \dots \cup \{b_h\} \subseteq B$ ,  $\forall b \in B - A$ ,  $b \notin \{b_1, \dots, b_h\}$  si ha:

$$\rho(B) = \rho(A \cup \{b_1\} \cup \dots \cup \{b_h\}) \leq \rho(A \cup \{b_1\} \cup \dots \cup \{b_h\} \cup \{b\}) \leq \rho(B)$$

e quindi,  $\forall b \in B - A$ ,  $b \notin \{b_1, \dots, b_h\}$ , si ha:

$$\rho(A \cup \{b_1\} \cup \dots \cup \{b_h\} \cup \{b\}) = \rho(B).$$

Per la (3.3)' risulta poi:

$$\forall b \in B - A, b \notin \{b_1, \dots, b_h\}, \rho(A \cup \{x\} \cup \{b_1\} \cup \dots \cup \{b_h\} \cup \{b\}) = \rho(B)$$

e perciò, infine, si ha:

$$\rho(B \cup \{x\}) = \rho(B).$$

Per dimostrare la (4.5) dobbiamo provare che  $\overline{A} = \overline{\overline{A}}$ . Dalla (4.3) si trae  $\overline{A} \subseteq \overline{\overline{A}}$ .  
Ci basta perciò dimostrare che  $\overline{\overline{A}} \subseteq \overline{A}$ .

Si ha:

$$\rho(\overline{A} \cup \{x\}) = \rho(\overline{A}).$$

Proviamo che  $\rho(A) = \rho(\overline{A})$ .

A tale scopo sia  $\overline{A} = \{x_1, \dots, x_k\}$ . Poiché  $\{x_1, \dots, x_k\} \in \overline{A}$ , si ha:

$$\rho(A) = \rho(A \cup \{x_1\}) = \dots = \rho(A \cup \{x_1\} \cup \dots \cup \{x_k\}) = \rho(\overline{A}).$$

Pertanto, dalla (3.3) si ricava:

$$\rho(A \cup \{x\}) \leq \rho(\overline{A} \cup \{x\}) = \rho(\overline{A}) = \rho(A) \leq \rho(A \cup \{x\}).$$

Ne segue allora che  $\rho(A \cup \{x\}) = \rho(A)$  e quindi  $x \in \overline{A}$ .

Proviamo infine la (4.6).

Consideriamo  $y \in S : y \notin \overline{A}$  ma  $y \in \overline{A \cup \{x\}}$  e dimostriamo che  $x \in \overline{A \cup \{y\}}$ .

Poiché  $y \notin \overline{A}$ , si ha:

$$\rho(A \cup \{y\}) = \rho(A) + 1$$

e poiché  $y \in \overline{A \cup \{x\}}$ , si ha anche:

$$\rho(A \cup \{x\} \cup \{y\}) = \rho(A \cup \{x\}).$$

Ora, se  $x$  non appartenesse ad  $\overline{A \cup \{y\}}$  risulterebbe:

$$\rho(A \cup \{x\} \cup \{y\}) = \rho(A \cup \{y\}) + 1 = \rho(A) + 2$$

il che è assurdo.



c) *operatore di chiusura*  $\Rightarrow$  *indipendenti*.

Vediamo infine come è possibile costruire una famiglia di indipendenti partendo da un operatore di chiusura.

Sia  $M = (S, \text{---})$  una matroide definita tramite l'operatore di chiusura; con  $\mathfrak{I}$  indichiamo la famiglia delle parti di  $S$  definita da:

$$\mathfrak{I} = \{A \subseteq S : \forall x \in A, x \notin \overline{A - \{x\}}\}.$$

Dimostriamo che  $\mathfrak{I}$  soddisfa gli assiomi (2.1), (2.2) e (2.3)'.

La (2.1), ossia  $\emptyset \in \mathfrak{I}$ , è ovvia.

Dimostriamo la (2.2), cioè dimostriamo che  $\forall A \in \mathfrak{I}$  e  $B \subseteq A \Rightarrow B \in \mathfrak{I}$ . Consideriamo  $A \in \mathfrak{I}$  e  $B \subseteq A$  e proviamo che anche  $B \in \mathfrak{I}$ . Si ha:

$$\forall x \in B \quad x \notin \overline{A - \{x\}}$$

ed essendo  $B - \{x\} \subseteq A - \{x\}$  dalla (4.4) segue che:

$$\overline{B - \{x\}} \subseteq \overline{A - \{x\}}$$

e poiché  $x \notin \overline{A - \{x\}}$ , allora si avrà anche che  $x \notin \overline{B - \{x\}}$  e quindi  $B \in \mathfrak{I}$ . Prima di dimostrare la validità della (2.3)' occorre però mostrare che vale la proprietà:

$$(5.1) \quad X \in \mathfrak{I}, X \cup \{y\} \notin \mathfrak{I} \Rightarrow y \in \overline{X}.$$

Siano  $X \in \mathfrak{I}$  e  $y \in S$  con  $X \cup \{y\} \notin \mathfrak{I}$ . Allora esiste un  $z \in X \cup \{y\}$  tale che  $z \in \overline{X \cup \{y\} - \{z\}}$ , e poiché  $X \in \mathfrak{I}$  e  $z \in X$ , risulta  $z \notin \overline{X - \{z\}}$ . Applicando l'assioma dello scambio si ha:

$$x \notin \overline{X - \{z\}}, \quad z \in \overline{X \cup \{y\} - \{z\}} \Rightarrow y \in \overline{X - \{z\} - \{z\}} = \overline{X}$$

dopo aver premesso che un elemento  $I \in \mathfrak{I}$ , essendo  $I \subseteq X$ , si dice *massimale in X* se:

$$\forall J \subseteq X : I \subseteq J \Rightarrow J \notin \mathfrak{I}$$

dimostriamo che:

$$I \subseteq X \subseteq S, I \in \mathfrak{I} \text{ massimale in } X \Rightarrow \overline{I} = \overline{X}.$$

Per la (4.4) si ha:

$$I \subseteq X \quad \bar{I} \subseteq \bar{X}.$$

Sia ora  $z \in X - I$ . Poiché  $I$  è *massimale*, risulta  $I \cup \{z\} \notin \mathfrak{I}$ , e dalla (5.1) segue che  $z \in \bar{I}$  e quindi  $X \subseteq \bar{I}$ . Dalle (4.5)' e (4.5) segue che:

$$\bar{X} \subseteq \bar{\bar{I}} = \bar{I}$$

e quindi:

$$\bar{I} = \bar{X}.$$

Ora proviamo che:

$$X \in \mathfrak{I}, Y \subset X, Y \neq X \quad \Rightarrow \quad \bar{Y} \subset \bar{X}, \bar{Y} \neq \bar{X}.$$

A tale scopo consideriamo un elemento  $x \in X - Y$ . Allora  $x \in \bar{X}$  e  $x \notin \overline{X - \{x\}}$ . Poiché  $Y \subseteq X - \{x\}$ , dalla (4.4) segue che  $\bar{Y} \subseteq \overline{X - \{x\}}$ , e quindi  $x \notin \bar{Y}$ , da cui  $x \in \bar{X} - \bar{Y}$ .

A questo punto possiamo dimostrare la (2.3)'. Dimostriamo cioè che, dati

$$I, J \in \mathfrak{I}, I \subseteq X \subseteq S, J \subseteq X \subseteq S, I, J \text{ massimali in } X, \text{ risulta } |I| = |J|.$$

Procediamo per assurdo supponendo che  $|I| < |J|$  e  $|I \cap J|$  sia massima. Poiché  $I, J \in \mathfrak{I}$  e sono massimali in  $X$ , risulta che  $I \not\subset J$ . Consideriamo l'elemento  $y \in I - J$ . si ha che  $y \notin \overline{J - I - \{y\}}$ . Inoltre  $\overline{J - \{y\}}$  è un sottoinsieme proprio di  $\bar{X}$ . Infatti, poiché  $J \in \mathfrak{I}$  e  $J - \{y\} \subset J$  si ha che  $\overline{J - \{y\}} \subset \bar{J}$ . D'altronde, essendo  $J \in \mathfrak{I}$ ,  $J$  *massimale in*  $X$ , risulta pure  $\bar{J} = \bar{X}$ , e si ha:

$$\overline{J - \{y\}} \subset \bar{X}, \quad \overline{J - \{y\}} \neq \bar{X}.$$

Aggiungiamo ora a  $J - \{y\}$  gli elementi  $x_1, x_2, \dots, x_k$  appartenenti ad  $I$  finché si ottiene:

$$\overline{(I - \{y\}) \cup \{x_1\} \cup \dots \cup \{x_k\}} = \bar{X}$$

e il processo fino al più  $k = |I|$  passi, poiché è  $\bar{I} = \bar{X}$ .

Consideriamo ora l'insieme  $J_1 = (J - \{y\}) \cup \{x_k\}$  e dimostriamo che  $J_1 \in \mathfrak{I}$ . Per assurdo supponiamo che  $J_1 \notin \mathfrak{I}$ . Allora esiste  $z_1 \in J_1$  tale che  $z_1 \in \overline{J_1 - \{z_1\}}$ .

Si possono presentare i seguenti casi:

$$a) \quad z = x_k.$$

In questo caso si ha:

$$x_k \in \overline{J_1 - \{x_k\}} = \overline{J - \{y\}}.$$

$$b) \quad z \neq x_k.$$

In questo caso si ha:

$$\exists z \in Y - \{y\} : z \in \overline{J_1 - \{z\}} = \overline{(J - \{y\} - \{x_k\}) - \{z\}}.$$

Escludendo il caso a) perché  $\overline{J - \{y\}} \subset X$ , rimane che  $x_k \notin \overline{J - \{y\}}$ , e di conseguenza  $z \in \overline{(J - \{y\} - \{x_k\}) - \{z\}}$ . Dalla (4.4) si trae che  $\overline{J - \{y\}} \in \mathfrak{I}$  e quindi

$$\forall x \in J - \{y\}, \quad x \notin \overline{J - \{y\} - \{x\}}$$

e poiché  $z \in J - \{y\}$ , si ha che  $z \notin \overline{J - \{y\} - \{z\}}$ , e per l'assioma dello scambio risulta:

$$x_k \in \overline{J - \{y\} - \{z\} \cup \{z\}} = \overline{J - \{y\}}.$$

Siamo così arrivati ad una contraddizione, perché si ha che  $|J_1 \cap I| > |J \cap I|$ , contro l'ipotesi che  $|J \cap I|$  è massima.

## 6. Applicazioni

La teoria delle matroidi trova applicazione soprattutto nella risoluzione di problemi di ottimizzazione combinatoria; in questo paragrafo ne esaminiamo due esempi.

**a) Algoritmo goloso.**

Tramite questo algoritmo è possibile determinare un sistema indipendente di peso massimo. Nel 1926 Borukva scoprì che l'algoritmo goloso è ottimale se applicato alla famiglia di indipendenti di una matroide.

Consideriamo una matroide  $M = (S, \mathfrak{I})$  definita tramite gli indipendenti, e sia:

$$c : S \longrightarrow \mathfrak{R}_+$$

una funzione definita sui punti di  $S$  ed a valori in  $\mathfrak{R}_+$ , che chiameremo *funzione peso*. Tale funzione può essere estesa ai sottoinsiemi di  $S$  ponendo:

$$\forall A \subseteq S \quad c(A) = \sum c(a).$$

Il problema che ci poniamo è quello di determinare un sottoinsieme  $X \in \mathfrak{I}$  di peso massimo, cioè ci proponiamo di ottimizzare la funzione peso sugli indipendenti. Per fare questo dobbiamo determinare il  $\max_{X \in \mathfrak{I}} c(X)$ . L'algoritmo che ci fornisce la soluzione ottima è appunto quello che in letteratura viene chiamato *algoritmo goloso*, la cui struttura è la seguente:

- Step 1.** Prendi l'input:  $S$  e  $\mathfrak{I}$ .
- Step 2.** Inizializza l'insieme SOL. ( $SOL = \emptyset$ ).
- Step 3.** Inizializza l'insieme RIM. ( $RIM = S$ ).
- Step 4.** Ordina RIM in modo decrescente rispetto al peso.
- Step 5.** Fino a quando SOL non è un indipendente massimale, togli a RIM il primo punto e mettilo nell'insieme SOL.
- Step 6.** Fornisci l'output: SOL. Fine.

Si dimostra che l'output SOL dell'algoritmo è un indipendente di peso massimo. La dimostrazione si fa per assurdo. Sia:

$$SOL = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

con

$$c(a_1) \geq c(a_2) \geq \dots \geq c(a_n)$$

e supponiamo che SOL non sia un indipendente di peso massimo, cioè supponiamo che  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ , con  $c(b_1) \geq c(b_2) \geq \dots \geq c(b_n)$ , sia un indipendente tale che:

$$\sum c(a_i) < \sum c(b_i).$$

Sia  $k$  il primo indice tale che  $c(a_k) < c(b_k)$  e consideriamo i sottoinsiemi:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_{k-1}\} \quad \text{e} \quad B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}.$$

Dalla (1.2) segue che  $A, B \in \mathfrak{I}$ , ed essendo  $|A| < |B|$ , per la (2.3) esiste sicuramente un punto  $b \in B$  tale che  $A \cup \{b\} \in \mathfrak{I}$ ; si ha:

$$c(b) \geq c(b_k) \geq c(a_k).$$

Quindi, al passo  $k$ -esimo, l'algoritmo goloso ha scelto l'elemento  $a_k$  nell'insieme RIM invece che l'elemento  $b$  di peso maggiore. Siamo così giunti ad una contraddizione, per cui è provato l'asserto che SOL è un indipendente di peso massimo.

Proviamo ora che uno spazio di indipendenza, nel quale l'algoritmo goloso fornisce sempre la soluzione ottima, verifica la:

$$(6.1) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{I} : |X| < |Y| \Rightarrow \exists Z \subseteq Y - X : X \cup Z \in \mathfrak{I}, |X \cup Z| = |Y|$$

(detta *assioma dell'aumento*), ed è pertanto una matroide.

Sia  $(S, \mathfrak{I})$  uno spazio di indipendenza tale che, per qualunque peso assegnato, l'algoritmo goloso fornisca un indipendente di peso massimo. Anche in questo caso procediamo per assurdo.

Supponiamo che  $(S, \mathfrak{I})$  non sia una matroide e che quindi non soddisfa la (6.1). Sarà quindi vero che:

$$\exists X, Y \in \mathfrak{I}, |X| < |Y| : \forall Z \subseteq Y - X, \text{ con } X \cup Z \in \mathfrak{I} \Rightarrow |X \cup Z| \neq |Y|.$$

Poiché è  $|X \cup Z| \neq |Y|$ , deve aversi:

$$\exists X, Y \in \mathfrak{I}, |X| < |Y| : \forall Z \subseteq Y - X, \text{ con } X \cup Z \in \mathfrak{I} \Rightarrow |X \cup Z| < |Y|.$$

Consideriamo  $X, Y \in \mathfrak{I}$  in modo che  $X$  sia massimale rispetto a tale proprietà, nel senso che:

$$\exists X, Y \in \mathfrak{I}, |X| < |Y| : \forall y \in Y - X \Rightarrow X \cup \{y\} \notin \mathfrak{I}$$

e poiché  $|X| < |Y|$  risulta  $|X - Y| < |Y - X|$ . Si ha pertanto:

$$\frac{|X-Y|}{|Y-X|} < 1.$$

Per arrivare all'assurdo dimostriamo che è possibile associare ad  $S$  una funzione peso in modo tale che la soluzione SOL, fornita dall'algoritmo goloso, non è un indipendente di peso massimo. A tale scopo definiamo la funzione peso nel modo seguente:

$$\forall s \in S \quad c(s) = \begin{cases} a & \text{se } s \in X \\ b & \text{se } s \in Y-X \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad 0 < \frac{|X-Y|}{|Y-X|} a < b a.$$

La soluzione dell'algoritmo goloso è l'indipendente massimale  $X$ . Da come abbiamo definito la funzione peso  $c$ , si ha che gli elementi di peso maggiore appartengono all'indipendente  $X$  ed inoltre, poiché:

$$\forall y \in Y-X \Rightarrow X \cup \{y\} \notin \mathfrak{I}$$

gli elementi di  $Y-X$  non possono essere scelti e quindi SOL è costituito soltanto dagli elementi di  $X$  e risulta:

$$c(\text{SOL}) = c(X) = \sum_{s \in X} c(s) = |X-Y|a + |X \cap Y|a.$$

Poiché:

$$0 < \frac{|X-Y|}{|Y-X|} a < b < a$$

risulta:

$$|X-Y|a + |X \cap Y|a < |Y-X|b + |X \cap Y|a$$

ed essendo:

$$c(Y) = |Y-X|b + |X \cap Y|a$$

si ha:

$$c(\text{SOL}) < c(Y).$$

Essendo  $Y$  indipendente, la soluzione SOL rispetto alla funzione peso  $c$  non è l'indipendente di peso massimo. Da ciò l'assurdo.

*b ) Gredoide*

Definiamo ora una nuova struttura, più generale di quella di matroide, chiamata *gredoide*.

Sia  $S$  un insieme finito non vuoto, e sia  $\mathcal{F}$  una famiglia di parti di  $S$ . Se  $\mathcal{F}$  soddisfa gli assiomi:

$$(6.2) \quad \emptyset \in \mathcal{F}.$$

$$(6.3) \quad \forall X \in \mathcal{F}, |X| \geq 1 \Rightarrow \exists x \in X : X - \{x\} \in \mathcal{F}$$

$$(6.4) \quad \forall X, Y \in \mathcal{F}, |X| = |Y| + 1 \Rightarrow \exists x \in X - Y : Y \cup \{x\} \in \mathcal{F}$$

La coppia  $(S, \mathcal{F})$  viene detta *gredoide*.

Si può dimostrare che applicando alla famiglia  $\mathcal{F}$  dei sottoinsiemi di un gredoide l'algoritmo goloso, esso fornisce la soluzione ottima.

A tale scopo consideriamo l'insieme:

$$S = \{a, b, c, d\}$$

e sia:

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{c, d\}\}.$$

Proviamo che è possibile associare ad  $S$  una funzione peso in modo che la soluzione fornita dall'algoritmo goloso è quella ottimale.

Definiamo la funzione peso nel modo seguente:

$$\forall s \in S \quad c(s) = \begin{cases} 2 & \text{se } s = a \\ 1 & \text{se } s = b \text{ oppure } s = c. \\ 3 & \text{se } s = d \end{cases}$$

Poiché il sottoinsieme  $\{c, d\}$  ha peso massimo, invece la soluzione fornita dall'algoritmo goloso è  $\{a, b\}$  oppure  $\{a, c\}$ , segue l'asserto.

## BIBLIOGRAFIA

- [ 1 ] M. Cerasoli, F. Eugeni, M. Protasi, *Elementi di Matematica discreta*, Zanichelli Bologna 1988.
- [ 2 ] A. Maturo, N.Cera Di Biase, *Introduzione alla teoria delle matroidi*, Monfelfro edizioni, Urbino 1980.
- [ 3 ] G. Tallini, *Geometrie d'incidenza e matroidi*, Quaderni IAC, serie III – n. n.127, Roma 1981.
- [ 4 ] H. Whitney, *On The Abstract Properties Of Linear Dependence*, Amer. J. Math., 57, 1935, 509 – 533.