Francesco Speranza

INTERAZIONI FRA GEOMETRIA E ALGEBRA

1 - La geometria, l'algebra e il rigore

Il rigore è qualcosa di relativo: sono perfettamente d'accordo con Bruno D'Amore. Un rigore assoluto è quasi sempre inattuabile; di fatto, è applicabile soltanto a qualche parte della logica e dell'aritmetica. L'importante è sapere usare metodi razionali, rendendosi conto quali sono più o meno rigorosi.

Di solito, avendo meno pretese sul livello di rigore, si possono ottenere risultati che altrimenti non si sarebbero conseguiti; privilegiando la "logica della scoperta", con metodi semplici si possono ottenere risultati difficili. Invece, si possono usare metodi difficili, perché rigorosi, per ritrovare cose semplici, se si vuol privilegiare l'esigenza del rigore. Insomma, bisogna decidere se si vogliono ottenere soprattutto dei risultati, o se si vuole cogliere l'occasione di affinare i metodi.

Da più di un secolo s'aggira per la nostra scuola lo spettro del rigore: esso ha indotto i padri fondatori della matematica scolastica italiana (Cremona, Brioschi, ...) a puntare a un altro standard (allora, quello degli *Elementi* di Euclide) da una certa classe in poi (inizialmente, dalla 5° ginnasio), cancellando la geometria dall'inizio della scuola elementare fino a quella classe. Questa scelta ha bloccato per lungo tempo la ricerca di quello che si doveva fare nelle classi precedenti (nel frattempo, la stessa geometria si è profondamente trasformata: il rigore euclideo è ritenuto ben inferiore a quello che si potrebbe pretendere; nuove impostazioni si sono affermate, come quella gruppale di Klein; la filosofia della matematica si è evoluta, per esempio a seguito dell'accettazione della geometria non euclidea, ...). Per la scuola media, qualche innovazione s'è vista negli ultimi decenni; con i programmi del 1979 si sono finalmente avute indicazioni teoriche e didattiche per un approccio "razionalizzante" della geometria. Nella scuola elementare, fino a qualche anno fa la geometria era restata a un livello assolutamente insufficiente: con i nuovi programmi si ha un impostazione costruttiva e sperimentale che contraddice naturalmente ogni pretesa di astratto rigore, ma che si adatta sia allo sviluppo intellettuale degli allievi e soprattutto alle necessità di un ulteriore sviluppo.

Tuttavia, le novità dei programmi scolastici si scontrano sempre, a tutti i livelli, con inveterate abitudini: occorre quindi un paziente lavoro di formazione in servizio degli insegnanti.

Il problema si sta riproponendo ora a un altro livello, in quanto si va diffondendo la convinzione che una trattazione assiomatica della geometria vada svolta solo nel triennio delle superiori (si deve tener conto degli sviluppi critici che hanno avuto luogo a partire dalla fine dell'Ottocento). Si pone allora il problema di individuarne una trattazione razionale (ma non ancora assiomatica) per il biennio (e secondo alcuni anche per l'inizio del triennio).

D'altra parte, l'algebra astratta appare in modo indiretto nel tema 7 dei programmi della scuola media ("Corrispondenze e analogie strutturali", il più forte filo conduttore del discorso matematico: le analogie di struttura si applicano bene al caso algebrico). Nelle superiori, essa appare in modo esplicito.

Lo spettro del rigore è ricomparso (soprattutto in Francia), quando si è cercato di rifondare la matematica scolastica sui principi bourbakisti; in particolare, di costruire la geometria a partire dall'algebra lineare: in questo caso, bisogna conoscere, prima di affrontare argomenti (anche elementari) di geometria, una consistente parte di algebra.

Comunque è altamente sconsigliabile far "cadere dall'alto" l'algebra astratta, riproponendo pretese di rigore analoghe a quelle che nel 1867 avevano ridotto la geometria agli *Elementi* di Euclide. Occorre costruirla, nelle scuole superiori (ma oserei dire anche all'università) a partire da contesti concreti. Un ambito che offre esempi in abbondanza è appunto la geometria, a vari livelli di approfondimento. Nei paragrafi successivi vedremo alcuni casi.

2 - Un caso elementare: le rotazioni d'un trifoglio

Parlo di "trifoglio" perché ho avuto l'occasione di constatare che l'argomento si può trattare in una terza elementare senza bisogno di particolari prerequisiti (la dizione "triangolo equilatero" era ignota ai bambini); abbiamo usato un linguaggio colloquiale: invece di parlare di "composizione di rotazioni" si diceva "facciamo girare la fig. 1 e poi di 2' (sottintesi "terzi di giro"). Non intendo consigliare di trattare l'argomento nella scuola elementare: interessava sapere se è possibile, e la risposta è stata positiva. Certamente l'argomento (o qualcosa d'analogo) è consigliabile nella scuola media.

In modo analogo si ottiene la tabella delle rotazioni d'un quadrato. Scriviamo qui sotto le due tabelle (l'elemento neutro è stato chiamato rispettivamente 3 e 4, per evitare difficoltà psicologica della "rotazione 0": correntemente, noi preferiamo parlare delle "ore dodici" piuttosto che dell' "ora zero"):

	1	2	3
1	2	3	1
2	3	1	2
3	1	2	3

	1	2	3	4
1	2	3	4	1
2	3	4	1	2
3	4	1	2	3
4	1	2	3	4

I bambini che hanno partecipato all'esperienza sono riusciti a leggere alcune proprietà algebriche nelle tabelle di sinistra; dovendo fare delle *congetture*, è utile avere davanti *due* tabelle, per poter subito controllare se le congetture valgano in entrambe. Eccone alcune possibili:

1) ogni riga e ogni colonna è formata da elementi diversi (con linguaggio algebrico, $a*b = b*c \rightarrow a = c$, $b*a = c*a \rightarrow b = c$);

2) in ogni riga e in ogni colonna compare ogni elemento (con linguaggio algebrico, dati a e b esiste una x tale che $a*x = b$, ed esiste un y che $y*a = b$);

3) le tabelle sono simmetriche.

A questo punto si vorrebbero controllare le congetture. Ma occorre fissare l'ambito in cui si pensa queste possano valere: in altre parole, presi gli individui rappresentati dalle due tabelle (due strutture algebriche), si deve prendere in considerazione una "specie" (in senso aristotelico, ma anche bourbakista!) alla quale essi appartengono. Potrebbe trattarsi:

a) del sistema delle rotazioni che portano un n-agono regolare in sé.

b) del sistema delle isometrie che portano una figura in sé,

...

c) della specie di strutture algebriche "gruppo".

Si sa che nel caso a) tutte e tre le congetture sono valide; nei casi b) e c) sono valide le prime due (che in un gruppo qualsiasi si possono *dimostrare* con facili calcoli algebrici); la terza è invece *falsificata*, per esempio, dal caso del paragrafo successivo.

3 - Le isometrie d'un quadrato: qualche avvertenza

Questo paragrafo intende soprattutto puntualizzare alcune difficoltà, dovute ai vari modi in cui si può intendere una "trasformazione geometrica": per leggere il resto dell'articolo (e quando si parla di trasformazioni in modo elementare) si può comunque evitare di prendere di petto tali difficoltà.

Una trasformazione geometrica può essere pensata come una corrispondenza fra punti dello spazio (o del piano) astrattamente intesi; oppure si può far riferimento al movimento (o più in generale alla deformazione) di un oggetto materiale, seguendone i punti che si spostano (nella cinematica dei sistemi continui si parla rispettivamente di *punto di vista euleriano* e di *punto di vista langrangiano*). Nel secondo caso il movimento trascina con sé gli elementi caratteristici della figura, per esempio i suoi assi di simmetria. Con il primo modo si ammette implicitamente che ogni posizione dello spazio ambiente resti comunque identificabile; e quindi che, "sotto" gli oggetti materiali, vi sia uno spazio indipendente dagli oggetti, da considerarsi (almeno provvisoriamente) come qualcosa di assoluto. Siamo così condotti a sfiorare una grande questione filosofica: lo spazio va considerato come qualcosa di indipendente da ciò che in effetti contiene, oppure è solo il contenitore degli oggetti?

La diversità dei due punti di vista viene evidenziata quando si compongono le trasformazioni. Per fare un esempio, consideriamo le isometrie che trasformano in sé un quadrato.

Il primo punto di vista è quello comunemente considerato in matematica. Individuiamo ogni punto del piano mediante le sue coordinate in un sistema che ha origine nel centro del quadrato, gli assi diretti come i lati, e come unità di misura metà della lunghezza d' un lato. I vertici del quadrato sono quindi sono quindi (fig. 1)

A (1,1) , B(1,-1) , C(-1,-1) , D(-1,1).

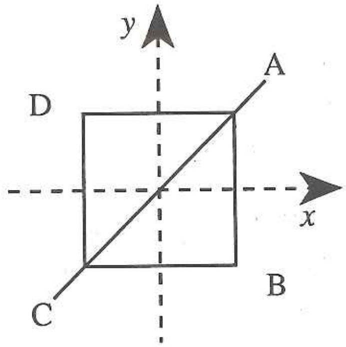

FIG. 1

Le isometrie cercate sono le rotazioni intorno all'origine d'ampiezza 0°, 90°, 180°, 270° (diciamo, in senso orario), e le simmetrie rispetto alle mediane e alle diagonali del quadrato. La rotazione di 90° (r) e la simmetria rispetto alla diagonale AC (s) hanno equazioni

$$r\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases} \qquad\qquad s\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

Applichiamo a un punto P (x,y) prima r e poi s: la trasformazione ottenuta si indica $s \circ r$. P', cioè r (P), ha coordinate x', y', date dalle equazioni di r; s (P'), o P", ha coordinate x'', y'', date da $x'' = y'$, $y'' = x'$. Sostituendo in queste le coordinate di P' si trova

$$x'' = -x \quad , \quad y'' = y$$

cioè la simmetria rispetto all'asse y.
Con calcoli analoghi si trova che $r \circ s$ è la simmetria rispetto all'asse x.

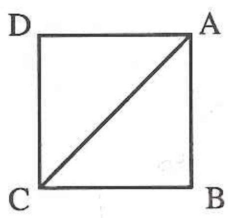

FIG. 2

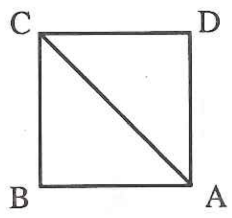

FIG. 3

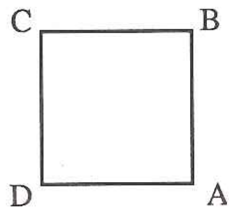

FIG. 4

Interpretiamo ora le trasformazioni come spostamenti materiali d'un quadrato. La figura 3 rappresenta il quadrato ruotato di 90° in senso orario; la figura 4 come si presenta dopo averlo ulteriormente ribaltato interno alla retta AC. Il risultato è la simmetria rispetto alla retta che congiunge i punti medi di AB e CD.

Ogni trasformazione di posizione del piano (primo modo) si può identificare a un movimento materiale (anzi, si può descrivere con le stesse parole). Quando si fanno composizioni, i risultati sono però differenti: possiamo dire che il secondo modo dà luogo a una diversa operazione $*$. Dagli esempi si vede che, chiamando allo stesso modo i due tipi di trasformazione si ha,

$$s * r = r \circ s \quad , \quad r * s = s \circ r \qquad (1)$$

Un' isometria del quadrato ABCD si può anche individuare come una sostituzione sui vertici. Per esempio, la rotazione r e la simmetria s si possono rappresentare così

$$r \begin{array}{c} \mathrm{A\,B\,C\,D} \\ \\ \mathrm{D\,A\,B\,C} \end{array} \qquad s \begin{array}{c} \mathrm{A\,B\,C\,D} \\ \\ \mathrm{A\,D\,C\,B} \end{array} \quad :$$

la prima si legge "A viene sostituito da D, B viene sostituito da A, ... "

Componendo le due sostituzioni

$$\begin{array}{cc} & \mathrm{A\quad B\quad C\quad D} \\ r & \\ & \mathrm{D\quad A\quad B\quad C} \\ s & \\ & \mathrm{B\quad A\quad D\quad C.} \end{array}$$

(complessivamente, A viene sostituito da B, B da A, ...)

Il risultato è la simmetria rispetto alla congiungente i punti medi di AB e CD. Ritroviamo così l'operazione $*$.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, dashed, "s"] \arrow[d, dashed, "r"'] & s(P) \arrow[d, dashed, "r"] \\ r(P) & r(s(P)) \end{tikzcd}$$

(1) Questa proprietà vale in generale. Siano r, s due trasformazioni. Comporre "nel secondo modo" prima r e poi s è come comporre "nel primo modo" prima r e poi *la trasformata di r mediante s*, cioè quella che trasforma r (P) in r (s (P)): in simboli $r \circ s \circ r^{-1}$ (cfr. il diagramma a lato). Quindi $s * r = (r \circ s \circ r^{-1}) \circ r = r \circ s \circ (r^{-1} \circ r) = r \circ s$.

Se qualcuno preferisse leggere la prima delle tabelle precedenti "A va al posto di D, B va al posto di A, . . . ", vi leggerebbe la rotazione r^{-1}: dove noi abbiamo letto s, $r*s$ si leggerebbe rispettivamente s^{-1}, $s^{-1} * r^{-1}$, e si sa che quest'ultimo vale $(r * s)^{-1}$. La nuova lettura ci riporta dunque all'operazione $\circ$.

4. Le isometrie d'un tetraedro

Capita assai più raramente di studiare le isometrie d'una figura solida in sé. Segnaliamo come si può impostare la ricerca per un tetraedro regolare (essendo regolare, ha "molte" isometrie; comunque, è il caso più semplice fra i poliedri regolari). Siano A, B, C, D i suoi vertici: rappresenteremo le isometrie come sostituzioni su essi (ma non sarà strettamente necessario tener conto delle precisazioni del paragrafo precedente).

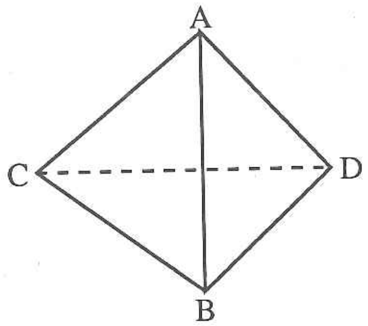

FIG. 5

Per ogni vertice , vi sono due rotazioni non identiche intorno a un asse passante per tale vertice. Componiamo una rotazione intorno all'asse per A e una intorno all'asse per B:

A	B	C	D
A	C	D	B
C	D	A	B

Il risultato è necessariamente un'isometria diretta, ma non è una rotazione: non può essere altro che una simmetria assiale, nel nostro caso rispetto alla retta che congiunge i punti medi degli spigoli AC e BD (due spigoli passanti per i punti lasciati fissi dalle due rotazioni). Di queste simmetrie ve ne sono tre; con le otto rotazioni già individuate e con l'identità si hanno 12 isometrie dirette.

Vi sono tuttavia anche delle isometrie non dirette che trasformano in sé il tetraedro: per esempio, le simmetrie rispetto ai piani che passano per uno spigolo e per il punto medio dello spigolo opposto. Una di esse è

$$\begin{matrix} A & B & C & D \\ A & B & D & C \end{matrix}$$

Esse sono tante quanti gli spigoli, cioè 6. Ma vi debbono essere altre isometrie non dirette. Infatti, quando un gruppo di isometrie è composto da isometrie dirette e da isometrie non dirette, il loro numero deve essere uguale: fissata un'isometria non diretta j, la corrispondenza che a ogni isometria diretta f associa $f \circ j$ è una biiezione fra i due insiemi. In tal modo abbiamo contato 24 isometrie del tetraedro in sé: non ve ne possono essere altre, poiché 24 è il numero delle sostituzioni sui 4 vertici.

Restano da caratterizzare le 6 isometrie non dirette che non sono simmetrie (si tenga presente che il tetraedro non ammette alcuna simmetria centrale). Esse si possono ottenere componendo una simmetria rispetto a un piano con una isometria diretta: prendiamo la simmetria che tiene fissi A e B e componiamola:

1) con una rotazione che tiene fisso A:

$$\begin{matrix} A & B & C & D \\ A & B & D & C \\ A & C & B & D \end{matrix}$$

si ottiene un'altra simmetria rispetto a un piano (passante per AD);

2) con una rotazione che tiene fisso un altro vertice, diciamo C:

A B C D

A B D C

B D A C

questa non è la simmetria rispetto a un piano;

3) con la simmetria assiale che scambia A con B:

A B C D

A B D C

B A C D

è una simmetria rispetto a un piano

4) con la simmetria assiale che scambia (per esempio) A con C e B con D:

A B C D

A B D C

C D B A

non è la simmetria rispetto a un piano.

Partendo da altre simmetrie planari si ottengono le rimanenti isometrie non dirette cercate.

5 - Lo "stesso" gruppo?

a) Confrontiamo il gruppo delle isometrie d'un rettangolo (che non sia un quadrato) e quello delle isometrie d'un rombo (che non sia un quadrato).

b) Confrontiamo il gruppo delle rotazioni d'un triangolo equilatero e quello $(Z_3,+)$ (gruppo additivo modulo 3).

Una prima risposta abbastanza spontanea è: in entrambi i casi si tratta dello stesso gruppo. In effetti, si sottintende "lo stesso gruppo *astratto*", cioè *considerato a meno isomorfismi*. In entrambi i casi, c'è un isomorfismo fra i due gruppi, cioè una biiezione che conserva le operazioni.

Nel caso a), tuttavia, l'analogia è più forte che nel caso b): in quest'ultimo, gli elementi dei due gruppi sono *essenzialmente* diversi: trasformazioni geometriche nel primo, classi resto nel secondo (non meravigli l'accenno alle *essenze*, che sembra un concetto messo al bando dalla matematica, anzi da buona parte della scienza moderna: il fatto è che, parlando di algebra astratta, i "fatti" aritmetici o geometrici su cui si costruiscono strutture algebriche sono "il concreto", e quindi, *rispetto ai fatti algebrici*, hanno una loro "essenza").

Nel caso a), possiamo addirittura immaginare di sovrapporre rombo e rettangolo in modo che le diagonali del primo coincidano con le mediane del secondo: dopo questa modifica, si tratta "oggettivamente" delle stesse trasformazioni. Ma se lasciamo stare il rombo e il rettangolo dove sono? (Fig. 6)

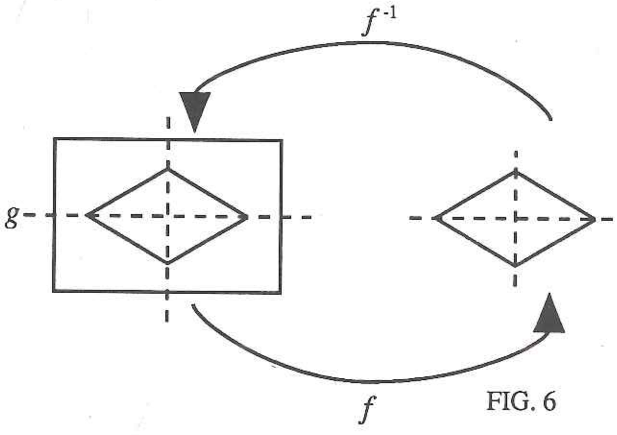

FIG. 6

Basta allora partire dalle figure "sovrapposte" e riportare (con un'isometria f) il rombo dov'era prima: prendiamo poi le isometrie del rettangolo; per avere le isometrie del rombo, basta prendere ogni una qualunque isometria g del rettangolo e trasformarla mediante f (cfr. la nota (1)). Al variare di g, $f \circ g \circ f^{-1}$ sono tutte e sole le isometrie del rombo. Si può dire che il gruppo del rombo e *isometrico* a quello del rettangolo. In generale, applicando a ogni trasformazione di un gruppo G una trasformazione f, si ottiene un nuovo gruppo, che risulta isomorfo a G. Abbiamo appena visto esempi di figure i cui gruppi sono isometrici; si pone la domanda: esistono figure i cui gruppi delle isometrie sono isomorfi ma non isometrici?

La risposta è affermativa: per esempio, il gruppo delle isometrie d'un triangolo isoscele non equilatero e quello d'un "romboide" (2) sono isomorfi (si tràtta di gruppi ciclici d'ordine 2), ma non sono isometrici: la isometria non identica è nel primo caso una simmetria assiale j e nel secondo una simmetria centrale k; orbene, se si trasforma j con una qualsiasi isometria (diretta o no), non si può ottenere un'isometria diretta come è invece k.

6. Esempi di gruppi di affinità in un piano finito

Gli assiomi dell'appartenenza e del parallelismo ammettono dei modelli (comunemente detti piani affini) finiti. Essi sono molto utili dal punto di vista metodologico e didattico, perché permettono di sperimentare direttamente molte proprietà geometriche.

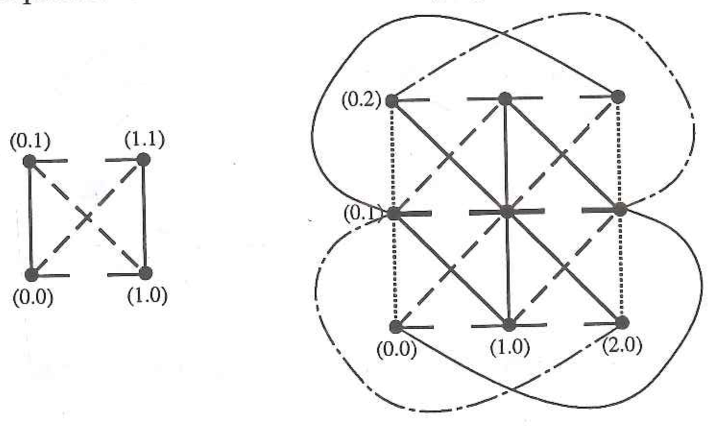

FIG. 7

(2) Sta per "parallelogramma che non sia né un rettangolo né un rombo". dopo tutto, qualche volta è utile parlare di "romboidi"!

I più semplici sono il piano d'ordine 2, formato da 4 punti, e quello d'ordine 3, con 9 punti (fig. 7: le linee tracciate rappresentano le rette). Essi possono realizzarsi prendendo come punti le coppie (x,y), dove x,y sono presi rispettivamente in Z_2 (perciò x,y = 0,1) e in Z_3 (x,y = 0,1,2).

Le affinità sono le biiezioni che trasformano rette in rette; le traslazioni sono le affinità d'un piano in sé che a una retta fanno corrispondere una retta parallela, e tali che le rette che congiungono punti corrispondenti siano parallele.

Nel piano d'ordine 2 tutte le biiezioni sono affinità: ve ne sono 24. Si constata facilmente (anche per verifica diretta: c'è un numero finito di punti!) che, presi due punti, esiste una traslazione che porta il primo nel secondo: vi sono dunque 4 traslazioni, ciascuna delle quali è involutoria. Il loro gruppo e isomorfo a quello delle isometrie d'un rettangolo.

In entrambi i piani le affinità si possono rappresentare come trasformazioni lineari invertibili: nel piano d'ordine 3, si calcola che esse sono 504. Anche in questo piano, dati due punti esiste una traslazione che porta il primo nel secondo: ve ne sono dunque 9 (la proprietà è generalizzabile ai piani costruiti in modo analogo su un corpo, ma non a qualsiasi piano affine). Esse formano un gruppo, che è isomorfo al "prodotto diretto" del gruppo ciclico d'ordine 3 per se stesso.

Le omotetie si definiscono come la affinità d'un piano in sé in cui rette corrispondenti sono parallele, e tali che le rette che congiungono punti corrispondenti passino per uno stesso punto (centro). Si constata facilmente che, preso un punto del piano d'ordine 3, esiste una sola omotetia che ha quel punto come centro: essa scambia su ogni retta per il centro fra loro i due restanti punti. Si constata (sperimentalmente, o scrivendone le equazioni) che il prodotto di due omotetie è una traslazione; quello d'un'omotetia e d'una traslazione è un'omotetia. Le omotetie e le traslazioni formano un gruppo (non commutativo), di 18 elementi.