SPAZIO E TEMPO

Cappelli editore

5

i seminari dei martedí

a cura di Emilio Luzi

da L. Bagolini, L. Cattabriga, P.L. Fortini, G. Melzi, A. Schiavo, T. Tyn

L'IDEA DI SPAZIO NELLA MATEMATICA MODERNA

dalla lezione di G. Melzi

Noi non possediamo nessun organo di senso che ci permetta di percepire lo spazio, o un qualche « oggetto » che possa essere chiamato con questo nome. Ma tutti i nostri sensi, specialmente il tatto e la vista, e ancora di piú ciò che chiamiamo talvolta il « senso interno », il quale ci permette di controllare la posizione del nostro corpo, ci fanno registrare infinite « relazioni spaziali » fra gli oggetti.
La prima pagina di un libro ideale di geometria ad uso dei postadolescenti potrebbe esibire la fotografia di una stanza piena di arredi e di oggetti in bell'ordine. La dediscalia chiede di rispondere in modo chiaro e razionalmente giustificato a domande del tipo: i fiori gialli sono piú lontani dell'elefante di cristallo? Quanto potrebbe essere largo un tasto bianco del pianoforte? La poltroncina verde potrebbe entrare nel vano del caminetto? Quanti dischi si potrebbero aggiungere a quelli sul ripiano? Siete in grado di documentare con delle precise argomentazioni le risposte? Perché ritenete che le risposte date « a occhio » siano o non siano migliorabili con qualche ragionamento? E cosí via.
Il libro potrebbe poi essere concepito come l'esposizione di una costruzione concettuale capace di fornire le tecniche per rispondere in modo inappuntabile a tutte le domande poste, e ad infinite altre ben piú impegnative.

Esiste un universo estremamente complesso di processi percettivi di relazioni spaziali. A questo universo partecipano anche gli animali che talvolta superano in « abilità spaziotemporali » anche l'uomo. Non è ragionevole negare che un cane che insegue un gatto, un cavallo al galoppo in un prato, le api alla ricerca dei fiori, partecipino in qualche modo ad un universo di percezioni spaziali dominato da ciò che noi umani chiamiamo « retta », « distanza », « circonferenza », e cosí via. Di fronte all'universo delle percezioni spaziali (ma anche temporali) si può tentare di interrogarsi e di rispondere con il linguaggio comune debitamente « sforzato » allo scopo. Detto un po' grossolanamente è quello che da sempre fanno i « filosofi ». Il punto piú alto raggiunto da questo tipo di speculazione è probabilmente la grandiosa sintesi kantiana, espressa nella *estetica trascendentale*, uno dei pilastri della « critica ». Per quanto è dato di capire ai non addetti ai lavori e per dirla con un linguaggio « povero », l'idea fondamentale di Kant è questa: le relazioni spaziali non sono inscritte nella « cosa estesa » ma sono i canoni in base ai quali la mente, una volta percepite le relazioni spaziali, le ordina e le inscrive in un ordine mentale supremo, trascendentale. Cosí si perviene ad una prima grandiosa concezione, autofondata, di *spazio*. Lo spazio non sarebbe piú « il luogo dove si trovano gli oggetti estesi » (notare lo strafalcione patetico!), ma l'insieme delle leggi supreme del funzionamento della nostra mente, osservando le quali essa riesce ad autodescriversi, nel modo che le è adeguato, il mondo esterno. Kant chiama queste leggi supreme, o piuttosto le entità da cui esse promanano, *categorie. Lo spazio è una categoria.* Kant elenca una decina di categorie (tempo, spazio, causa, ecc.) e istituisce la scienza trascendentale che descrive le categorie, i loro mutui rapporti, il loro apparire nei processi conoscitivi concreti. Lo storico della filosofia moderna e contemporanea ci spiegherà come il residuo di realismo che nel pensiero di Kant è qualcosa di irrinunciabile, venne gradualmente « sbaraccato » dai continuatori di Kant, coloro che a vario titolo e con diverse sfumature sono stati chiamati « idealisti ».

Questo breve discorso, volutamente semplificato e come tale non esente dal rischio di imperfezioni, ha come unico scopo quello di rendere chiaro per contrasto quanto diverso sia il cammino seguito dalle scienze positive, segnatamente la fisica e la matematica, per aiutare l'uomo a confrontarsi con il mistero dello spazio. Si può arrivare a comprendere la tipica mentalità matematica a proposito di spazio se proviamo a meditare su questo ipotetico discorso del matematico ideale, che non abita in nessun luogo e in nessun secolo, ma coincide con la media di tutti i matematici « che furono che sono e che saranno ». Dichiaratamente provocatorio e paradossale, il discorso è questo: « lo spazio è ciò che tutti sanno, anche i bambini e perfino, implicitamente, gli animali che dimostrano di conoscerlo per il solo fatto che sanno muoversi e camminare. Perciò la domanda 'che cos'è lo spazio?' non mi tange. Piuttosto vediamo che cosa si può fare mettendo rispettosamente da parte questa domanda, stipulando qualche accordo intersoggettivo e cercando di determinare tutte le conseguenze logiche degli accordi stipulati. Inoltre non infastiditemi con inutili domande su che cosa sia la logica: tanto le conseguenze delle nostre stipulazioni non risentono minimamente delle opinioni che potrebbero dividerci in proposito ».

Questo discorso può sembrare, a parte la possibile carica di arroganza di cui lo si potrebbe sospettare, una farneticazione infantile: che cosa possiamo aspettarci da una sedicente scienza che in apertura di discorso pretende di cancellare o almeno di ignorare i propri fondamenti?

Eppure avvengono questi tre miracoli naturali:

1. Il discorso, per ingenuo che possa sembrare, va molto avanti fino a diventare imprendibile dalla speculazione filosofica tradizionale che volesse pretendere di contestarlo.

2. La domanda fondamentale « che cos'è lo spazio? » si ripropone *dall'interno del discorso stesso* non appena questo sia abbastanza progredito, e trova *all'interno del discorso stesso* infinite risposte sempre piú evolutivamente complesse, neppure concepibili all'interno della speculazione filosofica della tradizione.

3. La problematica positiva, smentendo in pieno le attese della cultura filosofica tradizionale che pretenda ancora oggi di collocarsi « su un altro piano conoscitivo », è in grado di riproporsi come punto di partenza della metafisica, intesa come conoscenza del tutto a partire dall'esperienza comune concreta dell'uomo.

Non occorre sottolineare quanto impegnativa sia la dimostrazione non già della verità ma almeno della sensatezza di queste tre terribili affermazioni. Queste affermazioni, debitamente condotte fino alle loro estreme conseguenze naturali, sovvertono le basi stesse di ciascuna delle « due culture », sollecitandole, dopo averle debitamente inquietate, a qualche nuova forma superiore di unità sintetica.

Possiamo iniziare col descrivere il miracolo numero uno e dimostrare che esso avviene davvero quotidianamente in matematica. Sarà opportuno premettere che si parlerà di

« cose » sulla cui « natura » non si tenteranno spiegazioni, tali « cose » sono « punti », « rette », « piani », lo « spazio », gli « insiemi », magari i « numeri », le « grandezze »...
Mentre gli antichi avrebbero detto che questi « oggetti » posseggono per loro « natura » determinate « proprietà », che ne costituiscono l'« essenza », diremo semplicemente: ammettiamo che di questi oggetti si possa dire che « ... ». Il matematico ideale, senza nazione né secolo aggiungerebbe le solite veementi esclamazioni del tipo « e non mi importunate chiedendomi 'che cos'è un punto?, che cos'è una retta?, perché facciamo queste ammissioni?, ne potremmo fare delle altre?' ». L'elenco delle parole che entreranno nel discorso geometrico e l'elenco delle proprietà che descrivono i legami fra queste cose sono le prime due operazioni di partenza. L'operazione successiva è talmente importante che nessuno sentirebbe il bisogno di descriverla esplicitamente. Questa operazione, che viene reiterata infinite volte, è quella di cui si esprime la sempre rinnovata ripetizione con i « dunque ». Sulla parola « dunque » il nostro matematico ideale ci diffiderebbe dal fare qualsiasi domanda. Le parole elencate con l'esplicito rifiuto della definizione si chiamano *termini* o meglio *concetti primitivi*. Le asserzioni circa i legami fra gli oggetti primitivi, la cui verità o falsità ci rifiutiamo di dimostrare, si chiamano *assiomi* o *postulati*.
Le leggi in base alle quali una frase del tipo « ... e dunque... » deve essere riconosciuta « vera » o « falsa », vanno sotto il nome di *logica comune*, dove il termine « logica comune » non deve far pensare almeno per il momento, all'esistenza di una logica non comune, ma serve solo ad accentuare il carattere *fenomenico* del ripresentarsi storico della verità o falsità delle proposizioni geometriche.

Conviene ora concentrare bene l'attenzione su alcuni sistemi del tipo « concetti primitivi-assiomi-logica comune » quali la geometria euclidea.
Una terna costituita da un elenco di termini primitivi, un elenco di assiomi, un elenco di regole di inferenza si chiama una *teoria matematica*. Le regole di inferenza sono le stesse, usualmente, per ogni terna, ossia *a monte di tutte le teorie matematiche c'è una sola logica comune*, ma l'eventuale volontà di infrangere questa prescrizione non sconvolge che di poco il panorama che ci prepariamo a contemplare. Invece

il riconoscimento che si hanno infinite teorie (ossia infiniti elenchi di termini primitivi, infiniti elenchi di assiomi) ha la piú grande e delicata importanza speculativa: non esistono, in matematica, concetti assoluti e leggi universali, ossia non esiste un solo elenco di termini primitivi e una sola lista di assiomi « apodittici ». Se mai ci si può aspettare l'apoditticità delle leggi che descrivono, eventualmente, la struttura complessiva, comprensiva di tutte le teorie matematiche.

Il primo esempio che la storia ci fornisce di un tale tipo di teoria è costituito dalla *geometria euclidea*. Nella mente degli antichi, dei medioevali e dei moderni la geometria di Euclide non può essere concepita nel modo che prima è stato descritto. Essa appare loro come un insieme di verità assolute non connettibili con operazioni della mente che involgano l'idea di *statuto* o di *stipulazione*. Quando un geometra « vecchia maniera » afferma che un triangolo equilatero ha tre angoli uguali, egli è certo di affermare qualcosa di assoluto, necessario ed universale. Al contrario il « nuovo » matematico percepisce chiaramente che il fatto che un triangolo equilatero abbia tre angoli uguali è una proprietà di una teoria matematica e non una proprietà della « cosa triangolo ».

Il trapasso dal vecchio al nuovo regime coincide con gli eventi storici connessi con la scoperta delle *geometria non euclidee*.

Nella costruzione euclidea, com'è noto, il punto critico è dato dal « famoso » quinto postulato, la cui complessità e le cui difficoltà indussero i commentatori di Euclide perfino a tentarne la dimostrazione a partire dai primi quattro, ma l'impresa era ardua e il risultato sperato sfuggiva continuamente. Le vicende dei dimostratori del quinto postulato di Euclide sono raccontate in un libro di Bonola, in esso si narra come la dimostrazione possa avere luogo purché si adoperino i primi quattro assiomi piú un altro quinto assioma..., non ci si arriva mai! Si riesce a dimostrare un assioma a patto di dimostrarne un altro precedente e cosí via.

Nel 1733 fu la volta del gesuita Giovanni Girolamo Saccheri. Questi tentò di dimostrare come il quinto postulato non fosse altro che una verità necessaria derivante dalla sua stessa negazione. In ciò il Saccheri utilizzava una variante della 'reductio ad absurdum' che egli stesso aveva in precedenza formulato nella sua *Logica demonstrativa*, ma purtroppo il

Saccheri non si avvide dell'impossibilità insita nell'applicazione all'infinito di proprietà valide nel finito. Resta il fatto che la serie di proposizioni che Saccheri arrivò a formulare costituiscono, suo malgrado, veri teoremi di geometria non euclidea che, per certi versi, corrispondono al sistema iperbolico che Lobačevskij elaborerà nel 1830.
Le vicende non proprio fortunate di Lobačevskij hanno una importante tappa nella presa di posizione di Beltrami, il quale sostenne la possibilità di fornire un supporto logico (noi diremmo un modello) alle teorie di Lobačevskij; utilizzando la geometria di Gauss il matematico italiano mostra che è effettivamente possibile costruire degli insiemi di oggetti i quali rispecchiano l'esperienza spaziale, non rispettano invece le aspettative comuni e danno luogo a costruzioni estremamente complesse.
Nella consuetudine del quotidiano lo spazio viene comunemente immaginato come dotato di tre dimensioni, in effetti questa sentenza ha un qualche valore fattuale la possiamo infatti tradurre in una altra piú precisa del tipo: « non si possono costruire piú di tre rette a due a due perpendicolari nello spazio ». Se poi tentassimo di costruire una quarta retta ad un tempo perpendicolare alle altre tre non ci riusciremmo, ma non per questo saremmo autorizzati a concludere l'impossibilità di una tale impresa, avremmo dunque bisogno di qualcosa che ci sollevi dall'obbligo di tutte le prove possibili: un sistema ipotetico-deduttivo, una teoria matematica.
Una volta fissata l'idea di *teoria matematica* (costituita quindi da concetti primitivi, assiomi, regole di inferenza) e l'idea di *modello* (che un insieme di oggetti e di regole per interpretarli mediante simboli) si giunge alla sconcertante conclusione che nessuna teoria matematica è esauriente. Il significato di questa affermazione è che si può dimostrare con certezza assoluta che in ogni teoria matematica esistono proposizioni che non sono né dimostrabili, né negabili dalla teoria stessa (teorema di incompletezza di Gödel, 1930-31). Ma il senso generale di questo teorema è che l'idea di spazio (o di numero) è immensamente piú ricca di quanto il nostro linguaggio descrittivo possa dire, non appena riusciamo a dire qualcosa di vero sullo spazio avremo sempre proprietà che sono, in linea di principio, ignote rispetto alla teoria di cui ci serviamo e questo accadrà nonostante i puntelli

metafisici di cui la teoria può disporre.
È chiaro a questo punto che se si riconosce alla matematica un valore relativo, il sogno euclideo di verità assoluta cade definitivamente.
Dunque se la matematica ha inizialmente rinunciato ad ogni strumento per la sua fondazione critica a vantaggio di una maggiore agilità, si è in seguito scoperta capace di darsi da sola una consistenza critica propria senza la necessità cioè di sottostare ad alcuna forma di conoscenza trascendentale.
Si presenta ora il dubbio che sia proprio la scienza positiva a fornire il materiale per la speculazione filosofica, la metafisica si può dunque considerare la forma attuale perfetta della conoscenza attinta dall'esperienza comune, che per gli antichi poteva essere descritta dal linguaggio metafisico il quale a sua volta altro non era che il linguaggio comune opportunamente « forzato » in senso speculativo.
Nel mondo moderno la materia prima dell'esperienza è enormemente cambiata, quantitativamente molto piú ricca di quanto non lo fosse in passato è per questo che la metafisica deve « rimboccarsi le maniche » tenendo presente che l'esperienza comune dell'uomo moderno è l'esperienza dell'« homo scientificus ».
Su questa base si può forse giungere ad una comprensione del divario fra le due culture, la cultura umanistica pretende di mantenere una struttura conoscitiva che era adattissima all'esperienza comune dell'uomo del passato ma che è inadatta all'esperienza « nuova » dell'uomo moderno, si capisce anche perché la scienza non riesca a darsi un fondamento con i suoi stessi strumenti, ciò che realmente cerca uno scienziato è una metafisica che non si può ricavare direttamente dalle scienze ma che tuttavia è da esse postulata.
Si deve comunque auspicare una riconciliazione dell'uomo con il mondo e con ciò che lo trascende, ma questo non potrà avere luogo sulla base di una sintesi imposta dalla cultura classica ma al contrario dovrà fondarsi sul riconoscimento che è l'esperienza della condizione scientifica la piattaforma per trascenderla.

Bibliografia

Melzi, G., *Le idee matematiche del XX secolo*, Borla, Roma 1983.
Melzi, G., *Fede, religione e scienza*, Paideia, Brescia 1968.