FRANCESCO SEVERI

NOZIONI DI GEOMETRIA

PER LE SCUOLE SECONDARIE

DI AVVIAMENTO PROFESSIONALE

VALLECCHI EDITORE FIRENZE

FIRENZE, 1946 — STABILIMENTI GRAFICI VALLECCHI

PREFAZIONE

Queste « Nozioni » son sulla stessa linea concettuale degli altri miei libri scolastici, i quali hanno largamente contribuito, a rinnovare in Italia idee e metodi nell' insegnamento della Geometria e a renderli più aderenti all'intuizione e al senso comune.

Per ovvie ragioni di opportunità e perchè i programmi non lo avrebbero prima consentito, nei miei libri l' indirizzo intuitivo-razionale è stato accentuato soltanto a grado a grado, fino ad arrivare all'ultimo testo « Geometria », che mi pare s'avvicini notevolmente a quel massimo di semplicità e di facilità, che può esser consentito da un rigore sensato e non pedante.

In queste « Nozioni » l'intuizione trova posto predominante e il metodo deduttivo è usato con estrema parsimonia e quasi senza parere, secondo le istruzioni dei programmi delle Scuole di avviamento. Gli argomenti son ridotti al minimo indispensabile, tenuto conto della natura professionale di queste Scuole e del grado di maturità degli alunni.

Ho continuato a curare la proprietà, la sobrietà e la purezza del linguaggio (chè in ogni testo, di qualsiasi disciplina, gli scolari devono apprendere il buon uso della madre lingua) ed ho ognora cercato, nell'espressione delle idee, le forme che le rendono più gradite e quindi più facilmente accessibili ai ragazzi.

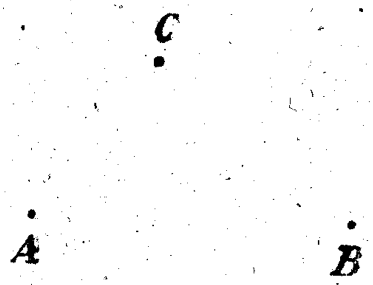
FRANCESCO SEVERI.

CAPITOLO PRIMO

Nozioni fondamentali.

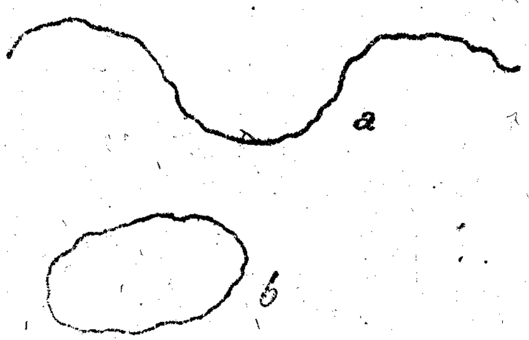
Punti, rette, piani.

1. Un piccolo segno lasciato sulla carta dalla punta del lapis o della penna; un granellino di polvere; un lume che di notte si veda isolato e lontanissimo nell'oscurità della campagna; una stella, son tutte cose che dànno l'idea di un ***punto***.



Nella figura qui vicina A,B,C rappresentano punti.

2. Un filo sottilissimo, p. es. di cotone o di seta, abbandonato sul tavolo; un capello; un filo metallico di forma qualunque; il segno lasciato sul foglio dalla punta del lapis che vi ha strisciato comunque, dànno l'idea di una ***linea***.



Nella figura vicina a,b rappresentano linee.

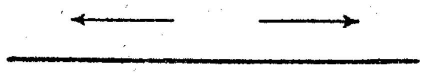
3. Un velo o una sottilissima lamina metallica di forma qualunque, l'involucro d'una bolla di sapone, dànno l'idea d'una ***superficie***.

4. Un insieme di punti si dice una *figura*. Le linee e le superficie sono figure.

5. Un filo teso fra due punti A,B dà l'idea di un ***segmento rettilineo*** o semplicemente *segmento*. I punti A,B diconsi gli

estremi del segmento, e questo si denota con AB. I punti del segmento diversi dagli estremi diconsi *interni*.

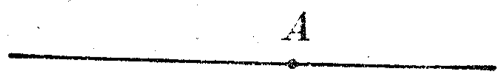
6. Fra le linee hanno particolare importanza le ***rette***. Una retta gode delle proprietà seguenti:



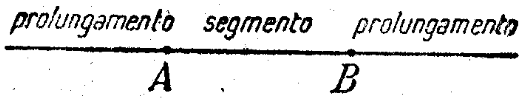
1) *È illimitata in due versi opposti* (1) (indicati dalle freccie).

2) Un punto qualunque A della retta la divide in due *parti*, aventi in comune il solo punto A.

Ciascuna di queste parti si chiama una ***semiretta*** ed il punto A dicesi l'*origine* della semiretta.

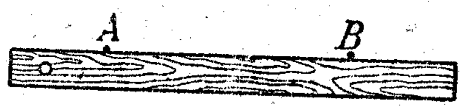


3) Presi due punti qualunque A,B della retta, questa resta divisa in tre parti: il segmento rettilineo AB e due semirette, di origini rispettive A,B, che si chiamano i ***prolungamenti*** del segmento.



7. *Dati due punti distinti, vi è un sola retta che li contiene*; e si chiama la *congiungente* dei due punti.

Se i due punti A,B son segnati sul foglio da disegno, per tracciare la retta AB che li congiunge (2) si adopra la *riga*. Si adagia la riga sul foglio, in modo che un suo bordo passi pei punti A,B, e si fa dipoi scorrere la punta del lapis o del tiralinee lungo il bordo.



8. Fra le superficie hanno particolare importanza i ***piani***. Un piano gode delle proprietà seguenti:

1) È una superficie *illimitata*.

2) *La retta che congiunge due punti qualunque di un piano giace completamente in questo*; cioè un righello rettilineo poggiato su una tavoletta piana, vi si adagia per intero.

---

(1) Cioè un punto può continuare indefinitamente a muoversi in un verso sulla retta, senza mai ripassare per una precedente posizione.

(2) O meglio quella parte della retta che è contenuta sul foglio.

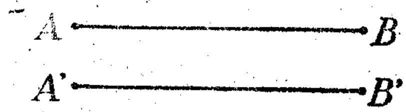
3) Una retta tracciata sopra un piano lo divide in due *parti*, che si chiamano ***semipiani*** e che hanno in comune soltanto quella retta. La retta chiamasi *origine* o *contorno* di ciascuno dei due semipiani.

4) *Per tre punti non allineati passa un sol piano.*

Proprietà dei segmenti.

9. Due segmenti, o, più in generale, due figure qualunque, si dicono ***uguali***, quando posson portarsi a coincidere con un movimento.

Per verificare se due segmenti $AB, A'B'$ sono o no uguali, si può riprodurre uno di essi sopra un bordo di una striscia di carta e cercare se il segmento riprodotto sia o no sovrapponibile all'altro.

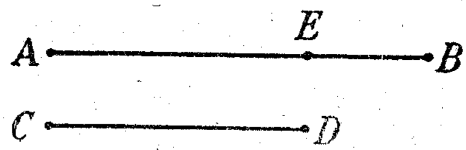


Affinchè i due segmenti sieno uguali, basta che possano portarsi a combaciare i loro estremi, perchè due punti son congiunti da un sol segmento. Per questa ragione, l'uguaglianza dei due segmenti si può anche verificare col *compasso a punte fisse*, che serve a *trasportare i segmenti.*

Se due segmenti $AB, A'B'$ son uguali, si scrive:

$$AB = A'B'.$$

Se due segmenti non son uguali, uno dei due è sempre uguale ad una parte dell'altro. Così p. es. dati i due segmenti disuguali AB, CD, il secondo è uguale ad un segmento AE, parte del primo.

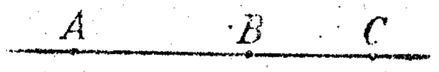


Si dice che un segmento AB è ***maggiore*** di un segmento CD, se CD è uguale ad una parte di AB. Si dice pure in tal caso che CD è ***minore*** di AB; e si scrive:

$$AB > CD \text{ oppure } CD < AB.$$

10. Se due segmenti AB, CD son uguali, si dice che la *distanza* fra A, B è *uguale* a quella fra C, D o che la *lunghezza* di AB è *uguale* a quella di CD; se $AB > CD$, si dice che fra A,B c' è una distanza *maggiore* che fra C,D e fra C,D una distanza *minore* che fra A,B; oppure che la lunghezza di AB è *maggiore* di quella di CD e questa *minore* della prima.

11. Due segmenti sopra una retta si dicono *consecutivi* quando hanno in comune soltanto un estremo.



P. es. i segmenti AB,BC della figura qui accanto, son consecutivi.

Il segmento AC risultante dall'insieme dei due segmenti consecutivi AB,BC, si chiama **somma** dei due segmenti e si scrive:

$$AC = AB + BC.$$

Se ora si considera un altro segmento CD, consecutivo ad AC (e quindi a BC), la somma

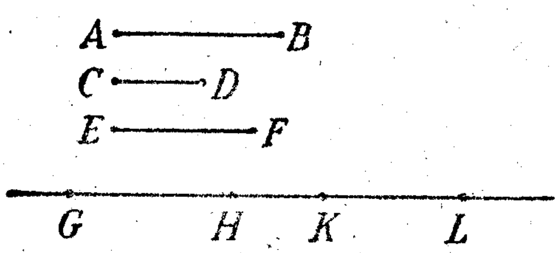
$$AD = AC + CD$$

si chiama *somma* dei tre segmenti AB,BC,CD e si scrive

$$AD = AB + BC + CD.$$

E così proseguendo.

Se si hanno due o più segmenti, p. es. AB,CD,EF, comunque dati, si chiama *somma* di quei segmenti il segmento ottenuto sopra una retta riportandovi consecutivamente tre segmenti GH,HK,KL rispettivamente uguali ad AB,CD,EF.



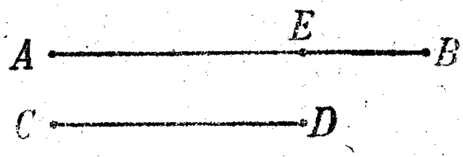
12. Si verificherà col compasso a punte fisse, che:

1) *La lunghezza della somma di più segmenti rimane la stessa qualunque sia l'ordine in cui si fa la somma* (PROPRIETÀ COMMUTATIVA).

2) *Somme di segmenti uguali sono uguali.*

13. Se il segmento AB è maggiore del segmento CD, è possibile costruire su AB un segmento AE uguale a CD. Così AB si decompone nella somma dei segmenti consecutivi AE, EB, ed è perciò uguale alla somma dei segmenti CD, EB:

$$AB = CD + EB.$$



Il segmento EB, ottenuto sopprimendo dal segmento maggiore AB un segmento uguale al segmento minore CD, chiamasi ***differenza*** dei segmenti AB, CD e si scrive:

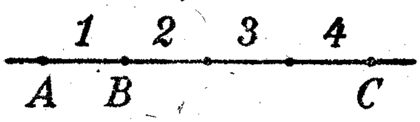
$$EB = AB - CD.$$

Differenze di segmenti uguali sono uguali.

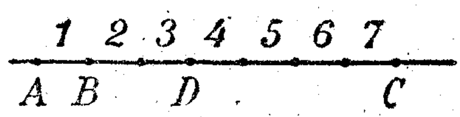
Multipli e summultipli dei segmenti.

14. La somma di due, tre, quattro,.... segmenti uguali ad un dato segmento AB, si chiama il segmento *doppio, triplo, quadruplo*,.... del dato e si denota rispettivamente con $2AB, 3AB, 4AB$,..... Il doppio, triplo, quadruplo,.... di AB chiamasi anche il ***multiplo*** di AB secondo il numero 2, 3, 4,.... ; oppure il *prodotto di AB pel numero intero* 2,3,4,.....

15. Se il segmento AC è il prodotto di AB per l'intero 4, si dice che AB è la *quarta parte* di AC ovvero il ***summultiplo*** o ***parte aliquota*** di AC secondo l'intero 4 od anche il *prodotto di AC per la frazione* $\frac{1}{4}$. S'indica con $\frac{1}{4}\,AC$ e si legge « un quarto AC ».



16. Sia $AB = \frac{1}{7}\,AC$. Il triplo AD di AB è uguale



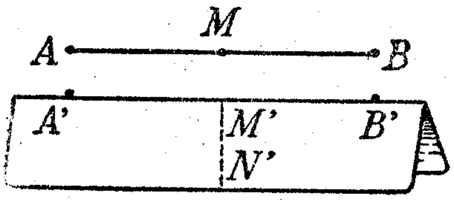
a tre volte un settimo di AC, cioè ai $\frac{3}{7}$ di AC. Si scrive:

$$AD = \frac{3}{7}\,AC$$

e il segmento AD chiamasi il ***prodotto di AC per la frazione*** $\frac{3}{7}$ [1].

17. Quando un segmento AB è diviso in due parti uguali AM, BM, il punto M dicesi *punto medio* del segmento dato.

Impareremo più innanzi la costruzione geometrica del punto medio di un segmento. L'uso di una striscia di carta permette di *trovare sperimentalmente fin da ora il punto medio M di un dato segmento AB*, nel modo che segue:



Sulla striscia di carta piegata lungo $A'B'$ [2] si riporti col lapis, mediante sovrapposizione della piegatura ad AB, un segmento $A'B'$ eguale ad AB.

Si pieghi indi la strisciolina in modo da sovrapporre B' ad A' e le due parti del margine l'una sull'altra, schiacciando infine queste due parti, così da dar luogo ad una impronta, la quale, dopo riaperta la striscia, è rappresentata da $M'N'$. Il punto M', d'intersezione del bordo $A'B'$ coll'impronta $M'N'$, è il punto medio di $A'B'$, perchè i due segmenti $A'M'$, $B'M'$ che erano sovrapposti prima della riapertura della striscia, sono uguali. Facendo infine combaciare $A'B'$ con AB il punto M' va nel punto medio M di AB.

Misura dei segmenti.

18. Per ***misurare*** i segmenti si usano il *metro* ed i suoi multipli e summultipli decimali [3]. Vi sono varii modi di realizzare in uno strumento quel segmento che

---

(1) Ved. le *Nozioni di aritmetica* (per l'avviamento al lavoro) di F. Severi e M. Mascalchi. (Vallecchi, 1935-XIII), § 73.

(2) È opportuno usare la carta così piegata, perchè la piegatura $A'B'$ dà luogo ad una retta, senza che sia necessario ritagliare la carta.

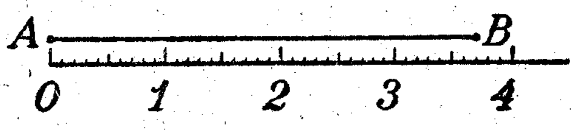
(3) Ved. Severi e Mascalchi, *Nozioni di aritmetica*, § 7.

chiamasi metro. I muratori, i falegnami, i fabbri, ecc. adoperano un metro o un doppio metro snodato di legno o di metallo; i sarti, gli agrimensori, ecc. adoperano il metro o il doppio metro o il decametro a nastro; i negozianti di panno usano il metro a regolo; e così via.

Nel disegno si usa comunemente la *riga graduata*, che è di solito lunga 60 o 70 *cm* e che ha un bordo graduato in centimetri e in millimetri. Per misurare distanze più brevi si usa anche il *doppio decimetro*, che ha due bordi ciascuno graduato da 0 a 20 centimetri, ogni centimetro essendo alla sua volta diviso in 10 millimetri.

Per misurare un segmento si usa il metro o un suo multiplo o un suo summultiplo, a seconda della lunghezza approssimata del segmento, la quale si giudica prima ad occhio.

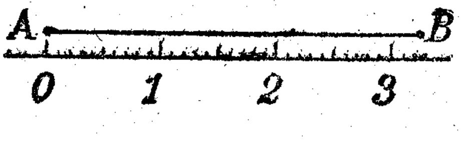
Così, se il segmento AB è lungo meno di un decimetro, ma più di un centimetro, si cercherà quanti centimetri son contenuti in AB. Disposto un bordo del doppio decimetro lungo AB, in modo che lo zero della graduazione cada in A, se B cade dentro al quarto centimetro e precisamente in corrispondenza del millimetro 7, la misura di AB sarà di 3 centimetri e 7 millimetri e si scriverà:



$$AB = cm\,3{,}7, \text{ oppure: } AB = dm\,0{,}37,$$
$$\text{oppure: } AB = m\,0{,}037.$$

Quando la misura di AB si esprime in centimetri, si dice che si è assunto il centimetro come ***unità di misura***; così, se si esprime in decimetri o in metri, si dice che l'unità di misura è il decimetro o il metro.

19. Può pure darsi che, quando l'estremo A del segmento coincide collo zero della graduazione, l'estremo B non cada proprio sopra la graduazione di un millimetro, ma fra due graduazioni successive: p. es. fra i millimetri 2 e 3 del quarto centimetro. Al-



lora un segmento lungo *cm* 3,2 è minore del segmento AB, mentre un segmento lungo *cm* 3,3 è maggiore di AB. Si dice in tal caso che *cm* 3,2 e *cm* 3,3 sono ***misure approssimate*** di AB, la prima *a meno di un millimetro per difetto* e la seconda *a meno di un millimetro per eccesso.*

Le relazioni fra AB e queste misure approssimate sono espresse dalle disuguaglianze: :

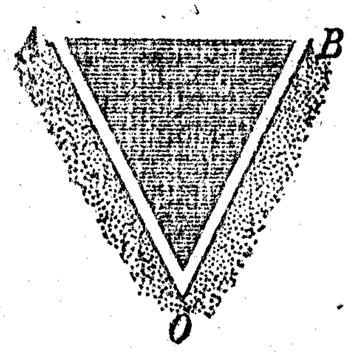
$$AB > cm\ 3{,}2 \ ; \ AB < cm\ 3{,}3.$$

In pratica, quando non sia possibile avere una ***misura esatta***, anche una misura approssimata può bastare, purchè la piccolissima parte di unità decimale dell'ultimo ordine di cui non si tien conto, sia effettivamente trascurabile per lo scopo della misura.

Angoli piani.

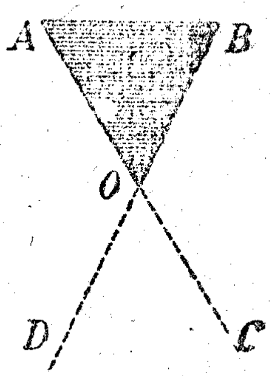
20. Chiamasi ***angolo*** (piano) ciascuna delle due parti in cui un piano vien diviso da due semirette aventi la stessa origine.

Sieno OA,OB due semirette di origine O tracciate sopra un foglio. Ritagliato il foglio colle forbici lungo OA,OB, esso dividesi in due parti, una delle quali è nella figura tratteggiata, mentre l'altra è punteggiata.



Le semirette OA,OB si chiamano i ***lati***, il punto O il ***vertice*** di ciascuno dei due angoli. L'insieme dei due lati si chiama anche *contorno* di ognuno dei due angoli.

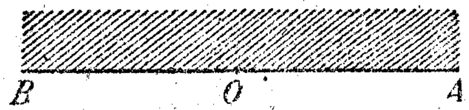
I punti d'un angolo, non situati sul contorno, diconsi *interni*.



Dei due angoli aventi per lati OA,OB, uno, che è quello tratteggiato, gode della proprietà che *i prolungamenti OC,OD de' suoi lati non penetrano nell'interno dell'angolo.* Un tale angolo dicesi ***convesso***. Per l'altro angolo (punteggiato) accade invece che i prolungamenti OC, OD penetrino nell' interno e l'angolo si chiama ***concavo***. Noi considereremo quasi sempre angoli convessi e quando diremo angolo, senz'altro, intenderemo che si tratti di un angolo convesso.

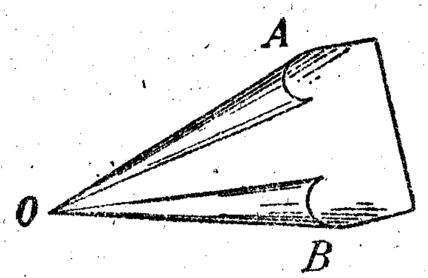
Limitandoci agli angoli convessi, si ha che *i due lati OA, OB, quando non sono per diritto, determinano un solo angolo* (*convesso*), il quale s' indica con $A\widehat{O}B$ o $B\widehat{O}A$.

21. Se i due lati OA, OB sono per diritto, cioè se ognuno è il prolungamento dell' altro, ciascuno dei due angoli dicesi un ***angolo piatto***. Un angolo piatto comprende tutto un semipiano. Esso è un particolare angolo convesso.

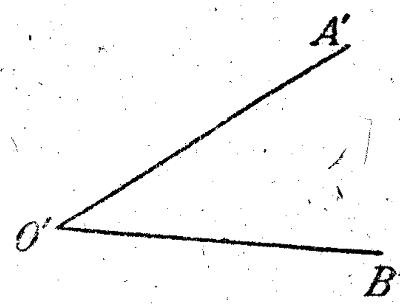


Angoli uguali e angoli disuguali.

22. Abbiamo visto che il trasporto di un segmento si può fare col compasso a punte fisse o con una striscia di carta. Il *trasporto di un angolo* si fa in varii modi che indicheremo più tardi [§§ 37, 90]. Ma uno semplicissimo lo possiamo indicar subito. Segnati sul foglio i lati OA, OB si pieghi la carta lungo questi lati, e si tagli quasi tutta la carta esuberante, lasciando soltanto due piccoli orli lungo i lati; e questo perchè il ritaglio esatto sarebbe difficile, specialmente vicino al vertice. Col modello così costruito l'angolo si può portare ovunque.



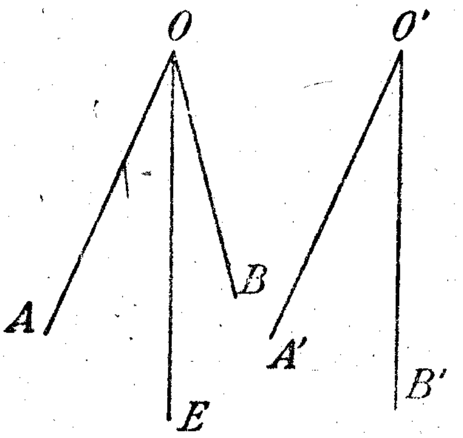
23. Costruito un modello di un dato angolo $A\widehat{O}B$ (convesso e non piatto) possiamo verificare se un altro angolo $A'\widehat{O'}B'$ è o non è uguale ad $A\widehat{O}B$. I due angoli saranno uguali (cioè sovrapponibili) se si possono far combaciare i lati OA, OB del modello coi lati



$O'A'$, $O'B'$ del secondo angolo. Infatti, due lati non per diritto determinano un solo angolo (convesso).

24. *Tutti gli angoli piatti son uguali fra loro*, ossia due angoli piatti si posson portare a combaciare, sovrapponendo i loro vertici e i loro semipiani.

25. Le relazioni di disuguaglianza fra angoli sono del tutto analoghe alle relazioni di disuguaglianza fra segmenti. Cioè :



Si dice che un angolo $A\widehat{O}B$ è ***maggiore*** di un altro angolo $A'\widehat{O'}B'$, se questo è uguale ad un angolo $A\widehat{O}E$, che sia parte di $A\widehat{O}B$.

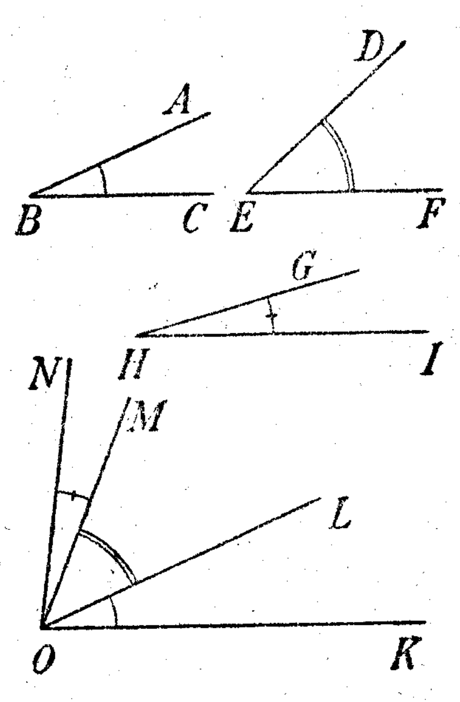
Si dice pure allora che $A'\widehat{O'}B'$ è ***minore*** di $A\widehat{O}B$; e si scrive :

$$A\widehat{O}B > A'\widehat{O'}B' \; ; \; A'\widehat{O'}B' < A\widehat{O}B.$$

Somme e differenze di angoli.

26. Si dicono *consecutivi* due angoli di uno stesso piano, quando hanno in comune il vertice, un lato e nessun altro punto. Gli angoli $A\widehat{O}E$, $E\widehat{O}B$ della figura precedente sono consecutivi.

27. Dati più angoli, p. es. $A\widehat{B}C$, $D\widehat{E}F$, $G\widehat{H}I$, la loro ***somma*** si ottiene trasportando consecutivamente gli angoli stessi, attorno ad uno stesso vertice.



Così, se

$$K\widehat{O}L = A\widehat{B}C \;,\; L\widehat{O}M = $$
$$= D\widehat{E}F \;,\; M\widehat{O}N = G\widehat{H}I,$$

l'angolo $K\widehat{O}N$ è la somma dei tre angoli dati e si scrive:

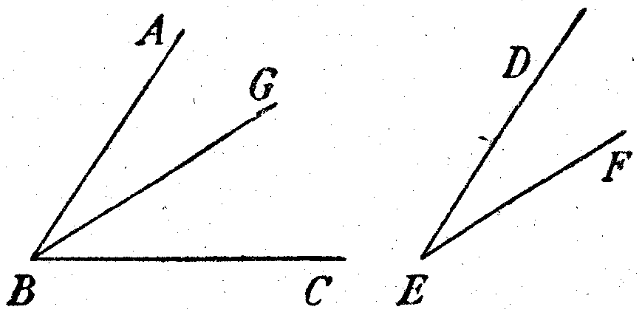
$$K\widehat{O}N = A\widehat{B}C + D\widehat{E}F + G\widehat{H}I.$$

La somma di più angoli può anche essere un angolo concavo e può pure superare la somma di due angoli piatti; ma, in questo ultimo caso, trasportati gli angoli consecutivamente attorno ad un vertice, a un certo momento qualcuno degli addendi viene a ricoprire in parte o in tutto taluno dei precedenti addendi.

Valgono per la somma di più angoli le proprietà analoghe alle 1), 2) del § 12.

28. Se i due angoli $A\widehat{B}C, D\widehat{E}F$ son disuguali ed $A\widehat{B}C$ è il maggiore, si può sopprimere da $A\widehat{B}C$ un angolo $A\widehat{B}G = D\widehat{E}F$. L'angolo rimanente $C\widehat{B}G$ chiamasi ***differenza*** dei due angoli dati, e si scrive:

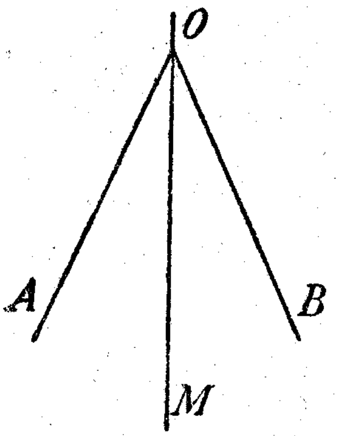
$$C\widehat{B}G = A\widehat{B}C - D\widehat{E}F.$$



Differenze di angoli uguali son uguali.

29. I ***multipli*** e i ***summultipli*** di un angolo si definiscono in modo del tutto analogo ai multipli e summultipli di un segmento [§§ 14, 15]; e si definisce altresì in modo simile a quello indicato nel § 16 il *prodotto di un angolo per una frazione.*

30. Quando un angolo, come $A\widehat{O}B$, è diviso in due parti uguali $A\widehat{O}M, M\widehat{O}B$ da una retta OM passante pel suo vertice, si dice che OM è la *bisettrice* dell'angolo.



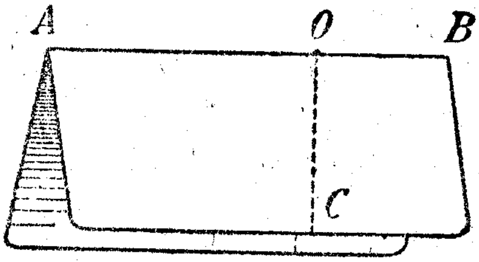
Mediante un modello di un angolo [§ 22] *si può costruirne la bisettrice,* piegando il modello di carta in modo che un lato si sovrapponga all'altro. Non è consigliabile di proseguire la piegatura fino al vertice, perchè essa diviene imprecisa e si rischia di rompere la carta.

Basta lasciar la traccia della piegatura fin vicino al vertice. Riaperto l'angolo, si prolungherà quella traccia con una riga (1).

Angoli retti, acuti, ottusi.

31. Dicesi ***angolo retto*** la metà di un angolo piatto.

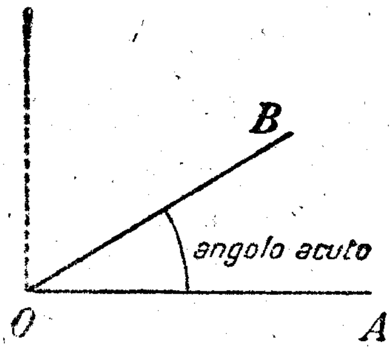
Per ottenere sperimentalmente un angolo retto, basta fare una piegatura AB in un foglio, e, fissato

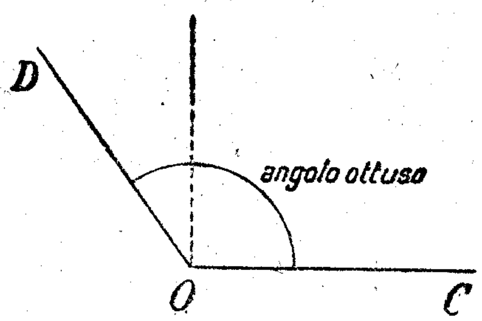


un punto qualunque O della piegatura, ripiegare ancora il foglio in modo che OB si distenda su OA. La traccia OC della nuova piegatura è la bisettrice dell'angolo piatto $A\widehat{O}B$, perchè i due angoli $A\widehat{O}C$, $C\widehat{O}B$, che combaciavano, sono uguali. E quindi ognuno di essi è la metà di un angolo piatto, ossia è un angolo retto.

Tutti gli angoli retti sono uguali fra loro, perchè sono metà di angoli piatti, che sono uguali fra loro [§ 24].

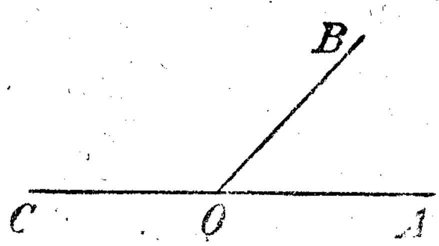
32. Un angolo $A\widehat{O}B$ minore di un angolo retto,





dicesi ***acuto***. Un angolo $C\widehat{O}D$ maggiore di un angolo retto dicesi ***ottuso***.

33. Due angoli si dicono ***supplementari*** quando la loro somma è un angolo piatto. Sono p. es. supplementari gli angoli $A\widehat{O}B$, $B\widehat{O}C$ della figura qui accanto.



---

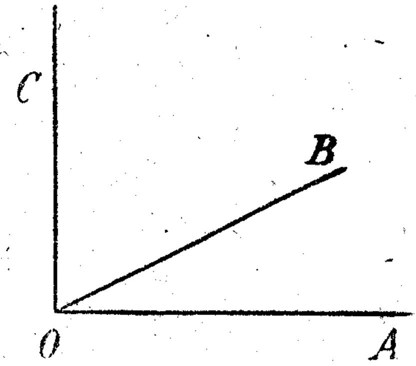
(1) I due orli, che nel modello di pag. 9 seguono i lati, per la precedente operazione di piegatura saranno lasciati in fuori.

Due angoli retti son sempre supplementari.

Due angoli, come $A\hat{O}B, B\hat{O}C$, che abbiano un lato comune (cioè sieno consecutivi) e gli altri due lati per diritto si dicono *adiacenti.*

Due angoli adiacenti son sempre supplementari.

34. Due angoli si dicono ***complementari*** quando la loro somma è un angolo retto. Gli angoli $A\hat{O}B, B\hat{O}C$ della figura qui accanto son complementari.



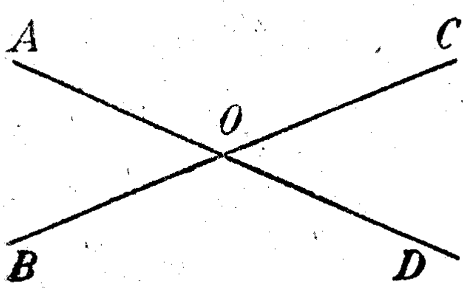
Angoli opposti al vertice.

35. Due angoli si dicono ***opposti al vertice*** quando i lati dell'uno son i prolungamenti dei lati dell'altro.

Due angoli opposti al vertice son uguali.

Denotino $A\hat{O}B, C\hat{O}D$ due angoli opposti al vertice. Vogliamo provare ch'essi son uguali.

Ragioniamo così: L'angolo $A\hat{O}B$ è adiacente all'angolo $A\hat{O}C$, perchè i due angoli hanno il lato OA comune e i lati OB, OC per diritto. Similmente l'angolo $C\hat{O}D$ è adiacente all'angolo $A\hat{O}C$. Cioè le somme



$$A\hat{O}B + A\hat{O}C, \quad C\hat{O}D + A\hat{O}C$$

formano ciascuna un angolo piatto. Esse son dunque uguali:

$$A\hat{O}B + A\hat{O}C = C\hat{O}D + A\hat{O}C.$$

Ma allora gli angoli $A\hat{O}B, C\hat{O}D$ risultano uguali come differenze di angoli uguali.

Osservazione. Il fatto che due angoli opposti al vertice son uguali è stato accertato mediante un ragionamento, che costituisce la sua *dimostrazione*. Del fatto stesso si sarebbe potuto dare una verifica sperimentale, sovrapponendo un modello di uno dei due angoli sull'altro. (Però questa verifica avrebbe avuto valore soltanto per i due particolari angoli presi in considerazione.).

Chiamasi ***teorema*** una verità che siasi stabilita mediante una dimostrazione; cioè che si sia dedotta con riflessioni successive da certe altre premesse, la cui verità sia stata prima accertata coll'osservazione sperimentale o con precedenti dimostrazioni.

Le verità che si ammettono come dati dell'osservazione o che si giustificano mediante considerazioni sperimentali, si chiamano *postulati* (1).

In un primo studio della geometria quasi tutte le proprietà, anche quelle che potrebbero esser dimostrate come teoremi, si giustificano con osservazioni sperimentali.

Misura degli angoli.

36. Come unità di misura degli angoli si assume il *grado*, che è la novantesima parte d'un angolo retto e che s' indica con 1^o (2).

La sessantesima parte di un grado si chiama *primo* e s' indica con $1'$. La sessantesima parte di un primo si chiama *secondo* e s' indica con $1''$.

Per indicare che l'angolo $A\hat{O}B$ è di 15 gradi, 32 primi e 25 secondi, si scrive

$$A\hat{O}B = 15^o\ 32'\ 25''.$$

Qualora spingendosi fino ai secondi non si ottenga la misura esatta dell'angolo, si potranno anche considerare le parti aliquote decimali di un secondo (decimi, centesimi, ecc. di secondo).

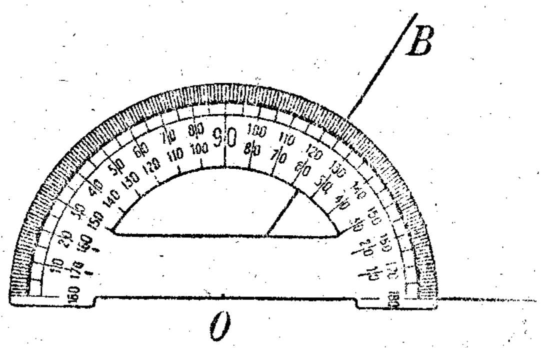
La misura di un angolo in gradi, primi, secondi si chiama *ampiezza dell'angolo*.

(1) In un teorema si distinguono il *soggetto* (la cosa di cui si discorre), l' *ipotesi* (quanto si suppone sul soggetto) e la *tesi* (ciò che si vuol dimostrare). Nel teorema « gli angoli opposti al vertice sono uguali », il soggetto è costituito dai due angoli, l' ipotesi è che i due angoli sieno opposti al vertice, la tesi è ch'essi son uguali.

(2) Ved. le citate *Nozioni di aritmetica* di Severi e Mascalchi, § 124.

37. Nel disegno gli angoli si misurano col *rapportatore*, che è un semicerchio graduato, come nell'unita figura.

Il tipo più comune è di materiale trasparente (celluloide, mica, ecc.). Il bordo circolare è diviso in 180° e le graduazioni sono segnate di 10° in 10° da 0° a 180°, tanto in un senso che nell'altro.



Per misurare un dato angolo $\widehat{AOB}$, si dispone il diametro del rapportatore sul lato OA, in modo che il centro sia in O ed il rapportatore cada dalla parte dell'angolo. Si vede così in trasparenza qual' è il punto della graduazione ove il lato OB traversa il bordo graduato.

Il rapportatore può evidentemente servire a trasportare gli angoli con esattezza, se son angoli misurati da un numero intero di gradi; con approssimazione, se trattasi di angoli che non sono multipli di un grado.

ESERCIZI

1. Quali sono le proprietà che distinguono la retta fra le linee? [6].

2. Quali sono le proprietà che distinguono il piano fra le superficie? [8].

3. Quante sono e come si chiaman le parti in cui una retta è divisa da due suoi punti?

4. Verificare l'esattezza d'una riga. Si segnino due punti A, B del foglio e si congiungano col lapis seguendo un bordo della riga. Indi si ribalti la riga in modo da non mutare il bordo passante per A, B. Si congiungano infine i due punti col lapis seguendo il bordo, colla riga nella nuova posizione. Se la riga è esatta, le due linee devono coincidere, perchè [7] per due punti passa una sola retta.

5. Tracciare un segmento rettilineo a mano libera e verificarne le imperfezioni colla riga.

6. Costruir la somma di due segmenti lunghi cm 4,3 e cm 5,2.

7. Costruir la differenza fra un segmento di cm 7,8 ed un segmento di cm 4,9.

8. Costruire col compasso a punte fisse la somma o la differenza di due segmenti dati.

9. Costruire a occhio il triplo di un segmento dato e verificare col compasso a punte fisse o con una strisciolina di carta quale errore si è commesso.

10. Quante sono e che cosa sono le parti in cui una retta è divisa da tre suoi punti ?

11. Dati nel piano quattro punti, a tre a tre non allineati, tracciare e contare le rette che li congiungono a due a due.

12. Dividere un segmento in 4 parti uguali. (Si divida prima per metà, come nel § 17, eppoi ogni metà si divida per metà).

13. Verificare che se due segmenti sono uguali e si costruiscono i segmenti multipli di quelli secondo un medesimo numero intero, p. es. 5, questi multipli risultan uguali.

14. Costruire col rapportatore la somma di un angolo di 22° e di un angolo di 15°.

15. Costruire col rapportatore la differenza di un angolo di 62° e di un angolo di 25°.

16. Costruire con un modello di carta il triplo di un angolo dato.

17. Costruire col rapportatore il complemento di un dato angolo acuto.

18. Costruire colla riga il supplemento di un dato angolo, minore di un angolo piatto.

19. Che cos' è la bisettrice di un angolo ?

20. Costruire col rapportatore la bisettrice di un angolo retto, di un angolo di 50°, di un angolo di 40°.

21. Verificare colla riga che due angoli uguali di un piano collo stesso vertice, con due lati sopra una medesima retta, opposti l'uno all'altro, e situati da parti opposte di quella retta, sono opposti al vertice. Perchè ?

22. Qual' è l'ampiezza dell'angolo formato dalle lancette dell'orologio alle ore 10, alle 13, alle 17 ?

23. Qual è il più piccolo multiplo di un angolo di 13° 15', maggiore di un angolo retto ?

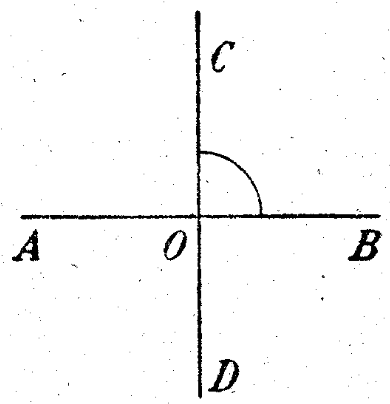
25. Se un dato angolo supera di 12° 32' 17" il suo supplemento, qual' è l'ampiezza dell'angolo dato ?

CAPITOLO SECONDO

Rette perpendicolari e rette parallele.

Perpendicolari.

38. Due rette formanti un angolo retto si dicono ***perpendicolari***. Le rette AB, CD della figura son perpendicolari, perchè l'angolo $B\widehat{O}C$ è retto.



Le due rette formano quattro angoli:

$$B\widehat{O}C, C\widehat{O}A, A\widehat{O}D, D\widehat{O}B.$$

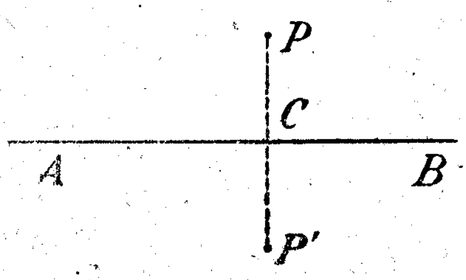
Ebbene, il primo è retto per ipotesi, il terzo lo è, perchè opposto al vertice del primo, e il secondo e il quarto lo sono, perchè adiacenti all'angolo retto $B\widehat{O}C$.

Dunque:

Due rette perpendicolari formano quattro angoli retti.

Due rette che s' incontrino e non sieno perpendicolari si dicono ***oblique***.

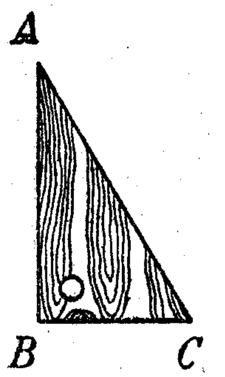
39. Abbiamo visto [§ 31] come s'ottiene colla piegatura della carta la perpendicolare ad una retta in un suo punto. Se il punto P è dato sul foglio, fuori della retta AB, basta piegare il foglio lungo AB, in modo che il semipiano superiore combaci coll' inferiore e bucare in P con uno spillo i due semipiani combacianti. Riaperto e disteso il



foglio, il foro P' del semipiano inferiore è congiunto a P mediante la perpendicolare da P ad AB. Infatti i due angoli $A\widehat{C}P, A\widehat{C}P'$ son uguali, perchè sovrapponibili; onde ciascuno di essi è retto come metà dell'angolo piatto $P\widehat{C}P'$. In conclusione:

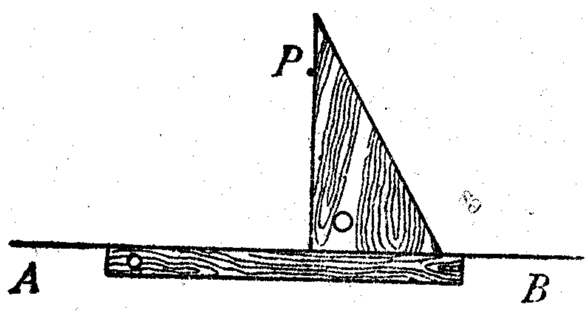
Per un punto passa sempre una sola perpendicolare ad una retta (1).

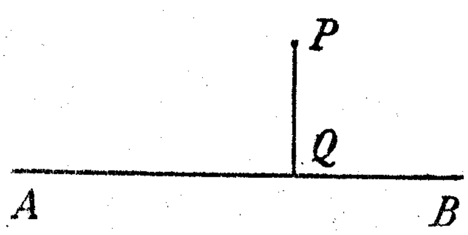
40. Per tracciare angoli retti, nel disegno si fa uso della *squadra*, che è un istrumento di legno o di metallo o di celluloide con due bordi AB, BC ad angolo retto. I due bordi o lati AB, BC si chiamano *cateti* della squadra; il bordo rimanente AC è l' *ipotenusa*.



41. PROBLEMA. *Facendo uso della riga e della squadra condurre la perpendicolare da un punto ad una retta.*

Si disponga la riga in modo che un suo orlo coincida colla retta AB e si faccia poi strisciare la squadra sul foglio, in modo che uno dei cateti scorra lungo l'orlo della riga che coincide con AB. Ci sarà un momento in cui l'altro cateto passerà pel punto P. La perpendicolare da P ad AB si ottiene allora strisciando la punta del lapis o del tiralinee lungo il cateto passante per P.



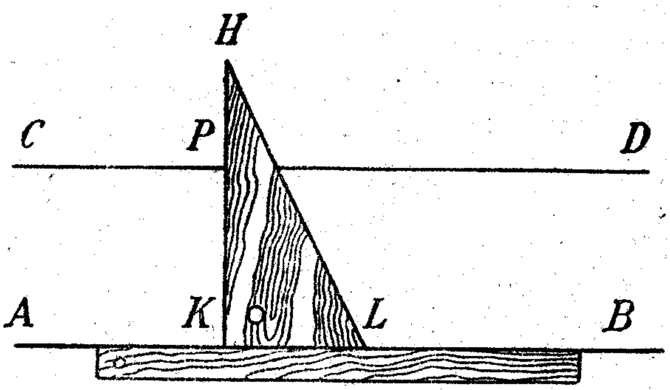


OSSERVAZIONE. Il segmento perpendicolare ad una retta condotto da un punto, chiamasi *distanza del punto dalla retta*. Così, nella figura, PQ è la distanza di P da AB.

(1) Lo scolaro intelligente e diligente potrà vedere da sè, in base alle considerazioni precedenti, perchè la perpendicolare è *unica*.

Parallele.

42. Sia data sul foglio una retta AB. Facciamo combaciare un bordo della riga con AB e disponiamo la squadra sul foglio in modo che il cateto KL possa scorrere su AB. Fissato un punto P del cateto HK, mentre il cateto KL scivola lungo AB, il punto P si muove conservando sempre la stessa distanza PK da AB. La linea descritta da P si può effettivamente tracciare così: impugnato il lapis colla mano destra e tenuta fissa la riga colla sinistra, si appoggi la mano destra sulla squadra, in modo che la punta del lapis aderisca a P; indi colla mano stessa premuta sulla squadra, si faccia scivolare questa, senza che il lapis si distacchi mai da P. Allora la punta traccia sul foglio la linea CD, che si riconosce sperimentalmente esser una retta.



Si deve dunque assumere come un dato dell'esperienza (cioè come un postulato; ved. § 35) la proprietà seguente:

In un piano i punti situati da una parte di una retta e aventi da questa una medesima distanza, formano una retta [1].

La retta CD risulta perpendicolare in P al cateto mobile HK. Perciò il segmento KP rappresenta la distanza del punto mobile K dalla retta CD; e quindi, mentre la squadra si muove, la distanza di K da CD si conserva sempre la stessa. Riassumendo: ogni punto di CD ha da AB una distanza uguale a PK ed ogni punto

---

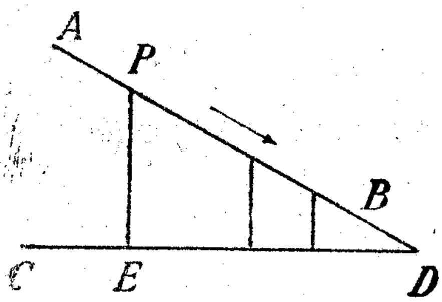
[1] Ammessa questa proprietà, tutte le successive proposizioni sulle parallele si potrebbero *dimostrare*; ma la cosa sarebbe troppo difficile e lunga in un primo corso di Geometria.

di AB ha da CD la stessa distanza. Perciò le due rette AB, CD si chiamano ***equidistanti***. Il segmento PK (od ogni segmento uguale a PK) si chiama la *distanza delle due rette.*

Due rette equidistanti si dicono pure ***parallele***.

Segue subito dalla definizione che: *Due rette parallele ad una terza son parallele tra loro.*

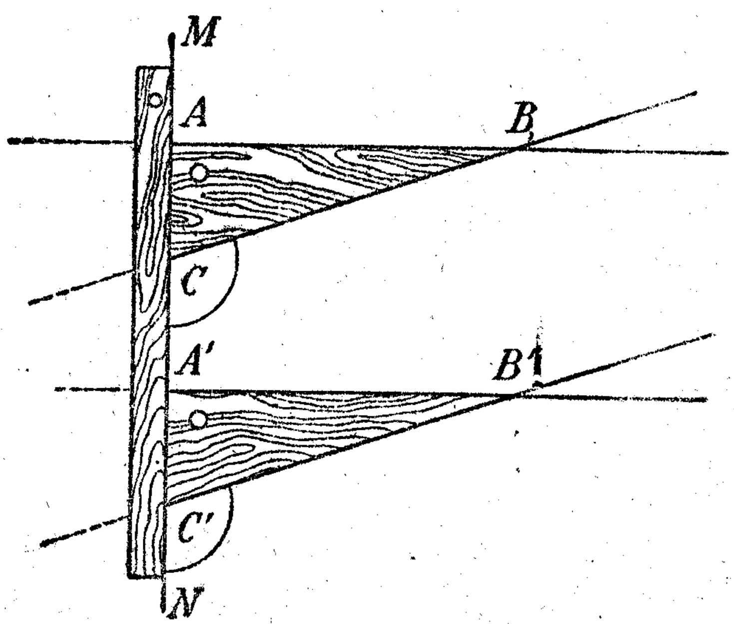
43. È chiaro che *due rette parallele non posson mai* ***incontrarsi***, *per quanto siano indefinitamente prolungate nei due sensi*, perchè un punto mobile su ciascuna si conserva sempre alla medesima distanza dall'altra.



Viceversa, si può dimostrare, ma noi l'ammettiamo come evidente, che *due rette di un piano le quali non s' incontrino mai, sono equidistanti, cioè son parallele.*

È infatti intuitivo che se le due rette AB, CD non son equidistanti, da una parte esse vanno avvicinandosi, e finiscono coll' incontrarsi, cioè un punto P mobile sull'una, AB, in un conveniente verso, ha dall'altra, CD, una distanza PE, che va decrescendo fino ad annullarsi, allorchè P cade nel punto comune alle due rette.

44. Quando si fa scorrere di una certa lunghezza un cateto della squadra lungo un bordo della riga, l'altro cateto e l' ipotenusa assumono posizioni parallele alle primitive.



Così, nella figura, le rette $AB, A'B'$ son parallele fra loro e le rette $CB, C'B'$ son pure parallele fra loro. Ciò dipende dal fatto che, durante lo scorrimento della squadra, dalla prima posizione alla seconda, tutti i punti del cateto mobile, che era prima nella posizione AB, si allontanano ugualmente da questa posizione, sicchè le rette $AB, A'B'$ risultano equidistanti. E similmente risultano equidistanti le $CB, C'B'$.

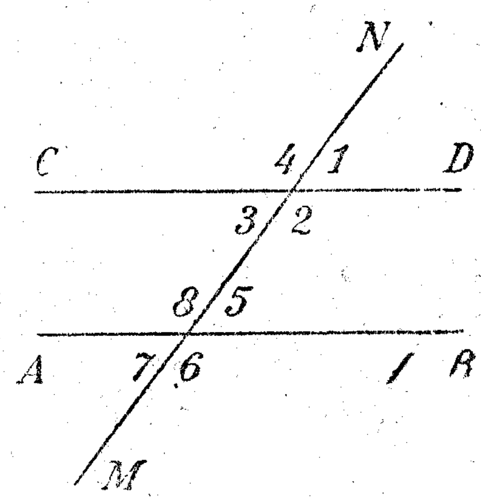
45. Nella figura precedente chiamiamo MN la retta ove scorre il cateto AC della squadra. Poichè le due rette $AB, A'B'$ son perpendicolari ad MN, e, come abbiamo detto, son anche parallele, potremo enunciare:

Due perpendicolari ad una medesima retta son parallele fra loro (1).

46. La retta MN della figura precedente si chiama una *trasversale* rispetto alle parallele $CB, C'B'$. I due angoli $B\widehat{C}N, B'\widehat{C'}N$ si chiamano *corrispondenti* rispetto alle due parallele tagliate dalla trasversale. Questi due angoli sono uguali, perchè son supplementari rispetto all'angolo in C ed in C' della squadra. Enuncieremo perciò la proposizione:

Due parallele tagliate da una trasversale formano angoli corrispondenti uguali.

Nella figura qui sotto, dove si hanno le parallele AB, CD tagliate dalla trasversale MN, sono coppie di angoli corrispondenti quelle indicate dai numeri 1 e 5; poi 2 e 6; poi 3 e 7; poi 4 e 8. E tutte queste coppie son costituite da angoli uguali.



La coppia 3 e 5 e la coppia 2 e 8 diconsi di *angoli alterno interni*; la coppia 2 e 5 e la coppia 3 e 8 diconsi di *angoli coniugati interni*.

Gli angoli 3 e 5 sono uguali, perchè son uguali gli angoli 1 e 5, e sono pure uguali gli angoli 1 e 3, come opposti al vertice. Onde gli an-

(1) Lo scolaro diligente potrà *dedurre* questa proprietà dal fatto che due perpendicolari ad una retta non possono incontrarsi [§ 39].

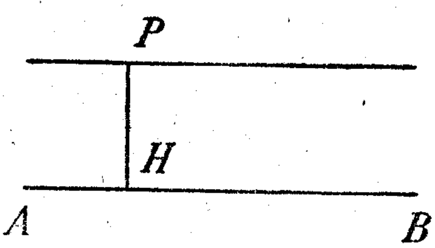
goli 3 e 5 son ambedue uguali all'angolo 1, epperò uguali fra loro. Si conclude che:

Due parallele formano con una trasversale angoli alterno interni uguali.

47. Gli angoli 1 e 2, essendo adiacenti, son supplementari; ma l'angolo 1 è uguale all'angolo 5: dunque son supplementari anche gli angoli 2 e 5. Cioè: *Due parallele formano con una trasversale angoli coniugati interni supplementari.*

48. *Per un punto fuori di una retta passa una sola parallela a questa.*

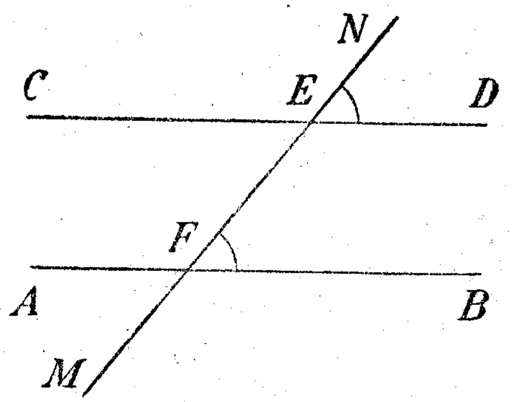
Sieno dati infatti la retta AB ed il punto P ad essa esterno. La parallela da P ad AB non è altro che



l' insieme dei punti, situati al disopra della retta, che hanno da AB distanza uguale a PH. Quest'insieme è ben determinato, epperciò la parallela è unica. Essa coincide colla perpendicolare in P alla retta PH.

49. La proprietà precedente permette d' *invertire* (¹) le proposizioni dei §§ 46, 47. Si ottiene così il teorema:

Due rette che formino con una trasversale angoli corrispondenti uguali oppure angoli alterno interni uguali oppure angoli coniugati interni supplementari, son parallele.



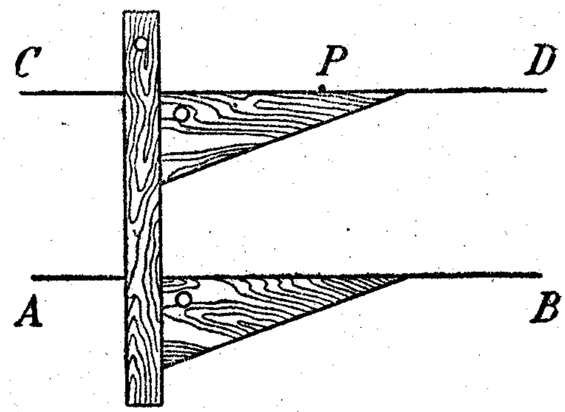
P. es. le rette AB, CD formano colla trasversale MN angoli corrispondenti uguali, segnati in figura. Ebbene, esse son parallele, perchè la parallela da E ad AB deve formare con MN, in conseguenza della proprietà del § 46, un angolo corrispondente all'angolo in F ed uguale a questo: onde essa coincide colla retta CD.

(¹) L' *inversa* di una proposizione si ottiene da questa scambiando fra loro ipotesi e tesi.

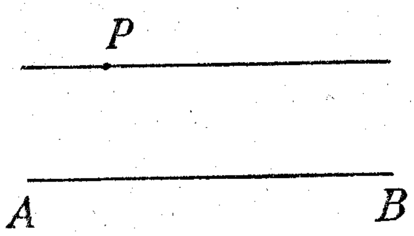
50. Terminiamo lo studio delle parallele col

Problema. *Tirare da un punto la parallela ad una retta colla riga e la squadra.*

Sieno AB la retta e P il punto dati. Fatto combaciare un cateto della squadra con AB, si porti un orlo della riga a coincidere coll'altro cateto. Tenuta fissa la riga, si faccia scivolare la squadra in modo che l'ultimo cateto considerato scorra lungo il bordo della riga. Quando l'altro cateto arriva a passare per P si ferma la squadra e si traccia col lapis la parallela CD da P ad AB.



Osservazione. Sulla lavagna, per tracciare a mano colla matita la parallela da P alla retta AB, si cerca di muover la mano che impugna la matita, in modo che la punta della matita si conservi quanto più è possibile alla medesima distanza da AB.



ESERCIZI

26. Verificare l'esattezza della squadra. Se la riga che si usa è già stata controllata e si è trovata esatta, per verificare l'esattezza della squadra, si tira mediante riga e squadra, com'è indicato nel § 41, la perpendicolare da un punto P ad una retta AB. Indi si rovescia la squadra in modo che il suo cateto che passava per P, continui a passare per questo punto e che l'altro cateto si adagi ancora sulla retta AB. Tirata per P la perpendicolare ad AB, colla squadra nella nuova posizione, se tale perpendicolare coincide colla precedente la squadra è esatta. Infatti per un punto passa una sola perpendicolare ad una retta [§ 39].

27. Disegnare a mano libera due rette perpendicolari e verificare colla squadra quale errore si è commesso.

28. Perchè le bisettrici di due angoli adiacenti son perpendicolari ?

29. Che cos' è la distanza di un punto da una retta ? Costruirla colla riga e colla squadra.

30. Tracciata sul foglio una retta, tirare al disopra di essa la retta che ha dalla precedente una distanza uguale a cm 3.

31. Disegnare a mano libera due rette parallele e controllare con riga e squadra l'errore.

32. Tracciate colla riga e colla squadra due rette parallele, si costruisca col rapportatore una retta che formi colle due parallele due angoli corrispondenti di 27°.

33. Considerate le due rette parallele precedenti e la loro trasversale, si distinguano le coppie di angoli corrispondenti, di angoli alterno interni e di angoli coniugati interni e si trovi l'ampiezza di ciascuno di questi angoli.

34. Costruire due rette parallele ad una medesima e verificare ch'esse son parallele.

35. Verificare che due angoli coi lati paralleli e rivolti dalla stessa parte sono uguali. Perchè ?

36. Profittando del rapportatore, segare due parallele con una trasversale, in modo che di due angoli coniugati interni uno sia il triplo dell'altro. Trovare l'ampiezza di ciascuno degli angoli delle parallele colla trasversale.

37. Due parallele forman con una trasversale due angoli coniugati interni di cui l'uno è i $^3/_4$ dell'altro. Qual' è l'ampiezza dei due angoli ?

38. Verificare che due perpendicolari a due rette che s' incontrano non sono parallele. Perchè ?

39. Perchè la perpendicolare e la parallela ad una retta, condotte da un punto esterno, son perpendicolari fra loro ?

40. Misurare l'ampiezza dell'angolo di due rette, che s' incontrino fuori del foglio. (Tener conto dell'Es. 35).

41. La parte di piano contornata da due rette parallele dicesi una *striscia*. La distanza delle due rette dicesi *larghezza* della striscia. Perchè due striscie di egual larghezza son uguali (sovrapponibili) ?

42. Date due parallele è facile trovare un punto da esse equidistante. È il punto medio di un segmento perpendicolare ad ambedue. La parallela da quel punto alle due rette date chiamasi *bisettrice* della striscia. Perchè son uguali le due striscie in cui essa divide la striscia data ?

43. Confrontare due angoli aventi i lati a due a due perpendicolari. Essi son uguali o supplementari. Perchè ?

44. Le bisettrici di due angoli aventi i lati paralleli son parallele o perpendicolari. Perchè ? (Si tenga conto dell' Es. 28).

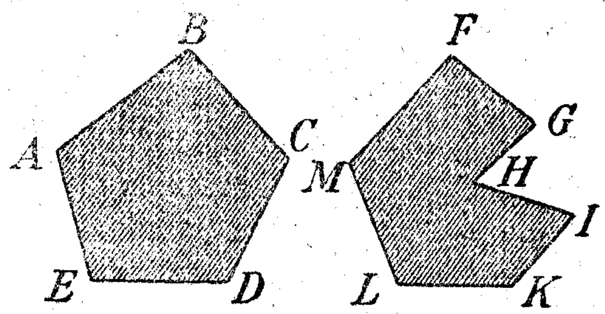
45. Le bisettrici di due angoli aventi i lati a due a due perpendicolari son parallele o perpendicolari. Perchè ?

CAPITOLO TERZO

Poligoni.

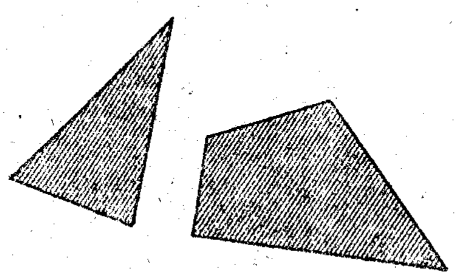
Definizioni.

51. Un pezzo di piano (materializzato p. es. con un pezzo di cartone) il cui orlo o *contorno* sia una linea formata da segmenti, si chiama un ***poligono***. Le figure $ABCDE$, $FGHIKLM$, disegnate qui accanto, sono poligoni. I segmenti che costituiscono il contorno del poligono si chiamano ***lati***; i punti comuni ai lati si chiamano ***vertici***.



I lati sono tanti quanti i vertici. P. es. il poligono $ABCDE$ ha 5 lati e 5 vertici; il poligono $FGHIKLM$ ha 7 lati e 7 vertici.

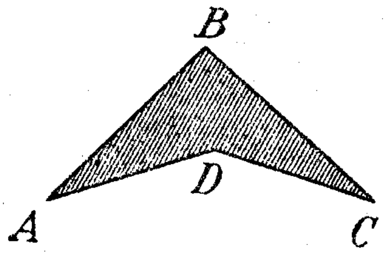
Il più semplice poligono è quello con 3 vertici (e 3 lati): si chiama un ***triangolo***. Un poligono con 4, 5, 6 vertici si chiama rispettivamente un ***quadrangolo***, un ***pentagono***, un ***esagono***, ecc.



52. I punti di un poligono non situati sul contorno si dicono *interni*; e il loro insieme è la *parte interna* al poligono.

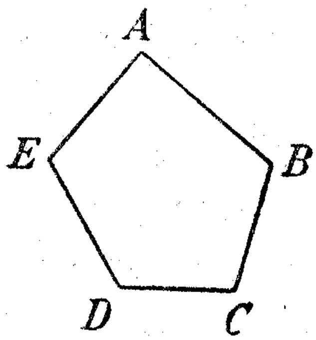
Un poligono dicesi ***convesso*** quando nessuno dei prolungamenti dei suoi lati penetra nella parte interna; ***concavo*** nel caso contrario. P. es. il poligono $ABCDE$ sopra raffigurato è convesso; mentre il poligono $FGHIKLM$ è concavo, perchè i prolungamenti dei lati GH,HI penetrano nella parte interna al poligono.

Un triangolo è sempre convesso ed è completamente determinato dai suoi vertici; mentre un quadrangolo o un poligono di un maggior numero di lati possono essere anche concavi. Il quadrangolo $ABCD$ qui vicino disegnato è concavo.



Noi ci limiteremo a studiare poligoni convessi, epperò parleremo sempre di poligoni, senza aggiungere ogni volta la qualifica « convessi ».

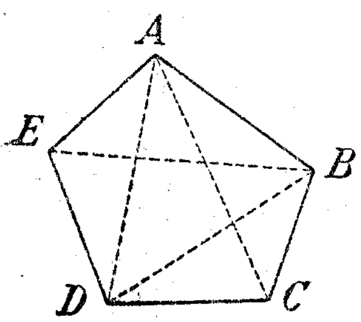
53. Dato un poligono $ABCDE$, gli angoli $A\widehat{B}C$, $B\widehat{C}D$,$C\widehat{D}E$,$D\widehat{E}A$,$E\widehat{A}B$ si chiamano *angoli interni* o semplicemente ***angoli del poligono***. Essi son tanti quanti i vertici e i lati.



Il poligono è la parte di piano comune a tutti gli angoli interni.

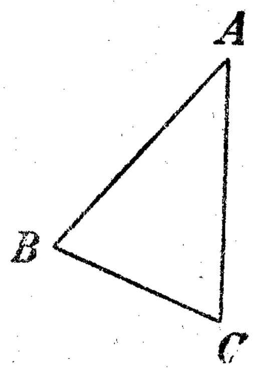
54. Due lati di un poligono diconsi *consecutivi* quando hanno un vertice comune; due vertici diconsi *consecutivi* quando giacciono sopra uno stesso lato.

I segmenti che riuniscono coppie di vertici non consecutivi si chiamano ***diagonali*** del poligono. Nel pentagono $ABCDE$ i segmenti tratteggiati son le diagonali. Un triangolo non ha diagonali.

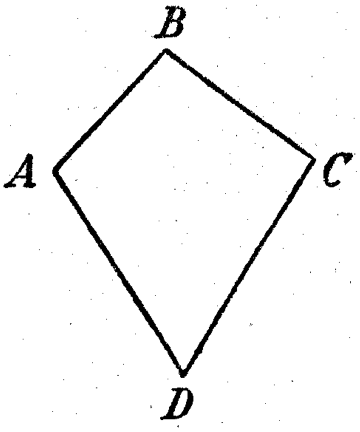


Perimetro di un poligono è la somma dei lati.

55. In un triangolo ABC un vertice ed un lato si dicono *opposti* quando il vertice è fuori del lato. Ad A è opposto il lato BC; a B il lato AC; a C il lato AB. Si dice pure che l'angolo A del triangolo è opposto al lato BC; ecc.



56. In un quadrangolo $ABCD$ due lati non aventi vertici in comune si dicono *opposti*; e due vertici non situati sopra un lato si dicono pure *opposti*. Sono opposti i lati AB,CD ed i lati BC,AD; sono opposti i vertici A,C ed i vertici B,D.



Triangoli particolari.

57. Un triangolo coi tre lati diseguali dicesi ***scaleno*** (fig. 1); un triangolo con due lati uguali dicesi ***isoscele*** (fig. 2); un triangolo coi tre lati uguali dicesi ***equilatero*** (fig. 3).

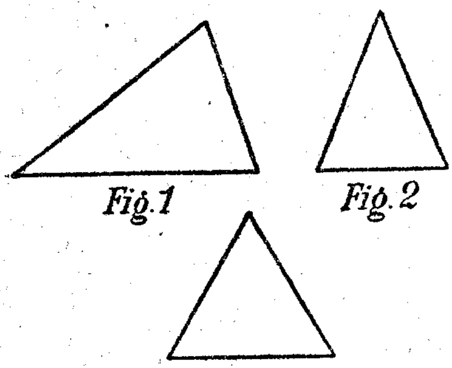
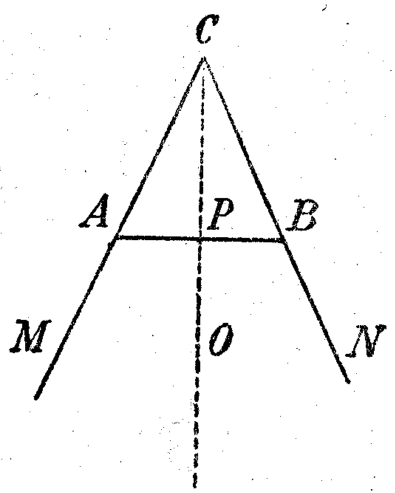


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

In un triangolo isoscele il lato disuguale dagli altri due chiamasi *base*; l'angolo opposto alla base si chiama *angolo al vertice* e gli altri due si chiamano *angoli alla base*.

58. *In un triangolo isoscele gli angoli alla base sono uguali.*

Sia ABC il dato triangolo isoscele, coi lati uguali AC,BC. Costruito un modello in carta dell'angolo $A\widehat{C}B$, si pieghi il foglio (come al § 30) lungo la bisettrice CO, facendo combaciare la semiretta CM colla semiretta CN. Siccome $CA = CB$, il lato CA va a sovrapporsi a CB e quindi il segmento AP va su BP. L'angolo $P\widehat{A}C$ ha così i suoi lati sovrapposti a quelli dell'angolo $P\widehat{B}C$ e quindi i due angoli alla base son uguali [§ 23].



59. Col procedimento precedente risulta pure la uguaglianza dei segmenti AP,BP e degli angoli adiacenti $\widehat{APC}, \widehat{BPC}$; sicchè ognuno di questi è retto. Dunque:

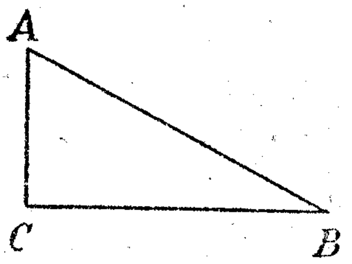
In un triangolo isoscele la bisettrice dell'angolo al vertice è perpendicolare alla base e la divide per metà.

60. Dei teoremi dei §§ 58, 59 son veri anche gl' inversi. Ci limitiamo ad enunciarli (ved. Es. 69, 73):

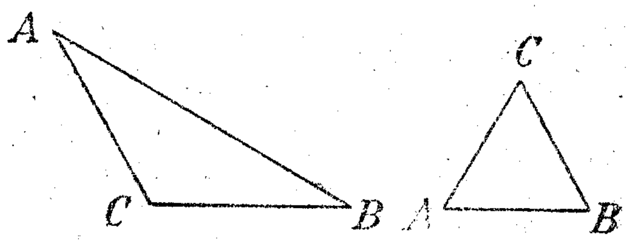
Se un triangolo ha due angoli uguali, i lati opposti son uguali e il triangolo è perciò isoscele.

Se la perpendicolare ad un lato d'un triangolo, tirata dal vertice opposto, divide per metà la base, il triangolo è isoscele e quella perpendicolare è bisettrice dell'angolo al vertice.

61. Un triangolo ABC, con un angolo $\widehat{C}$ retto, dicesi ***rettangolo***. La squadra non è che la realizzazione materiale di un triangolo rettangolo. Come nella squadra, i lati dell'angolo retto chiamansi *cateti* e il lato opposto all'angolo retto *ipotenusa* del triangolo rettangolo.



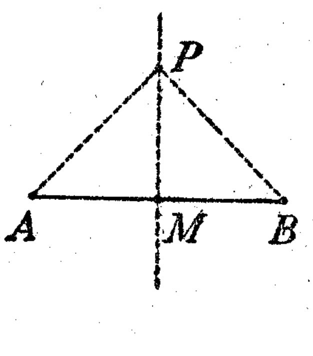
Un triangolo ABC con un angolo $\widehat{C}$ ottuso, dicesi ***ottusangolo***. Infine un triangolo ABC coi tre angoli acuti dicesi ***acutangolo***.



Asse d'un segmento.

62. Si chiama ***luogo geometrico*** o soltanto *luogo* l' insieme dei punti che soddisfanno a una determinata proprietà geometrica. Dimostriamo che:

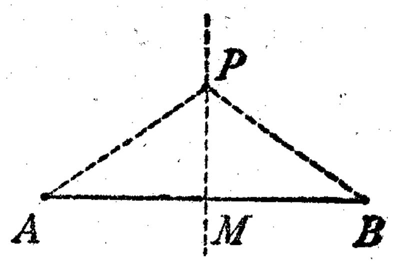
Nel piano, il luogo dei punti equidistanti dagli estremi d'un segmento è la perpendicolare nel punto medio.



Questa perpendicolare si chiama *asse del segmento*.

Per dimostrare il teorema, si prenda un punto qualunque P dell'asse. Nel triangolo APB la retta PM è perpendicolare al lato AB e lo divide per metà. Perciò [§ 60] il triangolo APB è isoscele e quindi $AP = BP$. Dunque ogni punto dell'asse è equidistante dagli estremi.

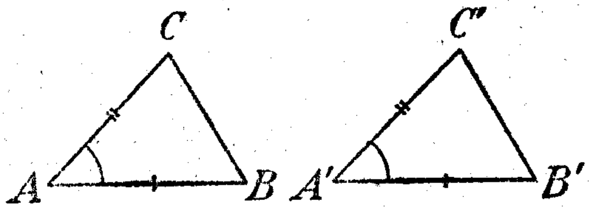
Viceversa, se un punto P ha distanze PA, PB uguali dagli estremi A, B, il triangolo APB è isoscele e quindi, congiunto P col punto medio M di AB, la retta PM sarà perpendicolare ad AB, ossia sarà l'asse del segmento.



Uguaglianza dei triangoli.

63. Primo caso di uguaglianza. *Due triangoli son uguali se hanno uguali due lati e l'angolo compreso* (1).

Sieno $ABC, A'B'C'$ due triangoli aventi $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\widehat{A} = \widehat{A'}$. Per dimostrare ch'essi son uguali basta provare che i vertici di uno posson farsi combaciare coi vertici dell'altro. Infatti allora i due triangoli coincidono per intero, perchè tre vertici determinano un solo triangolo [§ 52].

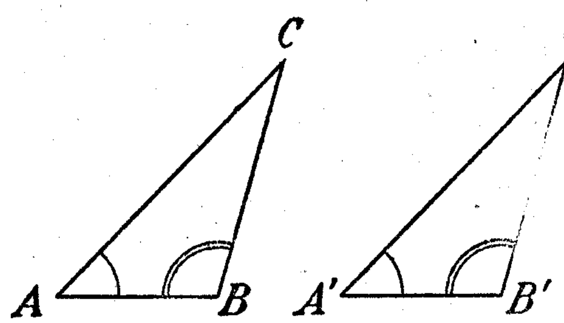


Costruito un modello di carta del secondo triangolo, si porti il modello sopra ABC, in modo che l'angolo $\widehat{A'}$ si sovrapponga ad $\widehat{A}$ e la semiretta $A'C'$ vada sulla semiretta AC; la semiretta $A'B'$ su AB. Questo è possibile, perchè i due angoli son uguali. Allora il segmento $A'C'$ si sovrapporrà al segmento uguale AC; il segmento $A'B'$ al segmento uguale AB. Dunque i tre vertici A', B', C' del modello coincidono rispettivamente coi vertici A, B, C; epperò i due triangoli son uguali.

(1) Angolo *compreso* da due lati è l'angolo del triangolo che ha per vertice il vertice comune ai due lati.

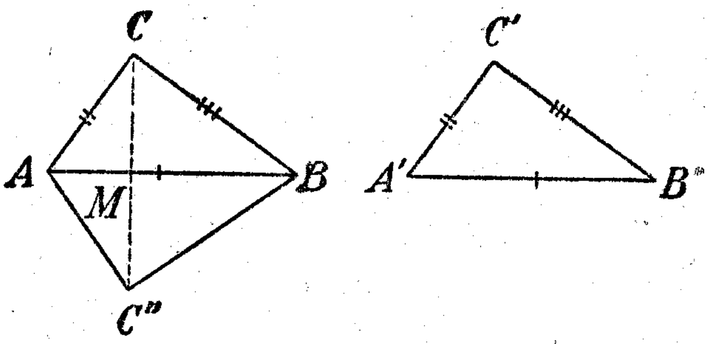
64. Secondo caso di uguaglianza. *Due triangoli son uguali se hanno uguali due angoli e il lato ad essi comune.*

È il caso dei due triangoli $ABC, A'B'C'$, che hanno uguali i lati AB, $A'B'$ e gli angoli ugualmente contrassegnati. La verifica dell'uguaglianza si fa anche stavolta colla sovrapposizione. Descrivere per esercizio in qual maniera la sovrapposizione va eseguita.



65. Terzo caso di uguaglianza. *Due triangoli sono uguali se hanno i tre lati uguali.*

Sieno i due triangoli $ABC, A'B'C'$ aventi uguali i lati ugualmente contrassegnati. In questo caso, per provare l'uguaglianza dei due triangoli, la sovrapposizione diretta non serve. Si operi perciò così: costruito un modello di $A'B'C'$, si riporti questo modello sul foglio, al disotto di ABC, come indica la figura, e sia ABC'' il modello nella nuova posizione. Siccome $AC = A'C'$ e $AC'' = A'C'$, risulta $AC = AC''$; cioè il punto A è equidistante da C, C''. Analogamente si vede che B è equidistante da C, C''. Perciò AB è l'asse del segmento CC'', onde il punto M è medio tra C, C'' e il segmento CC'' è perpendicolare ad AB. Se quindi si fa ruotare il modello ABC'' attorno ad AB, fino a rovesciarlo sul semipiano superiore, il punto C'' va in C, mentre A, B restano fissi; e dunque il modello ABC'' si sovrappone ad ABC. Si conclude che il modello di $A'B'C'$ è uguale ad ABC.

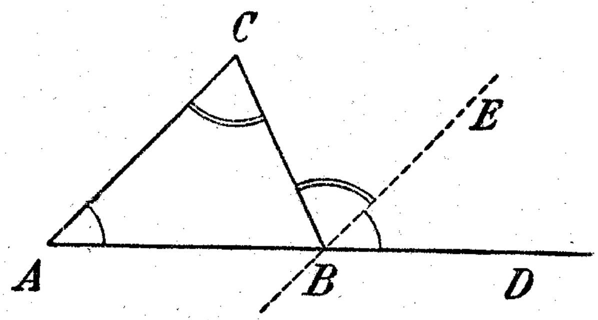


Proprietà dei lati e degli angoli di un triangolo.

66. Uno dei teoremi più importanti della geometria elementare è il seguente:

La somma degli angoli d'un triangolo è uguale a un angolo piatto.

Dato il triangolo ABC, per dimostrare il teorema, prolunghiamo un lato, per es. AB, in BD; e tiriamo da B la parallela BE al lato AC. Questa parallela lascia il triangolo tutto da una parte e decompone perciò l'angolo $C\widehat{B}D$ nella somma dei due angoli $C\widehat{B}E, E\widehat{B}D$.



Ora gli angoli $C\widehat{A}B, E\widehat{B}D$ son uguali, perchè corrispondenti rispetto alle parallele AC, BE tagliate da AD; e gli angoli $A\widehat{C}B, C\widehat{B}E$ son uguali, perchè alterno interni rispetto alle parallele AC, BE tagliate da CB.

Dunque $C\widehat{A}B + A\widehat{C}B = E\widehat{B}D + C\widehat{B}E$. Ciò significa che la somma degli angoli $\widehat{A}, \widehat{C}$ del triangolo è uguale all'angolo $C\widehat{B}D$; e siccome $C\widehat{B}D$ è il supplemento di $A\widehat{B}C$, così l'angolo $\widehat{B}$ del triangolo è il supplemento di $\widehat{A} + \widehat{C}$; cioè $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}$ è uguale a un angolo piatto.

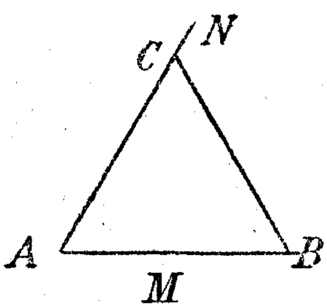
67. Dal precedente teorema segue come ***corollario*** (¹) che *un triangolo non può avere più di un angolo retto o ottuso*, perchè se vi è un angolo retto gli altri due angoli daranno per somma un angolo retto e quindi ognuno di essi sarà acuto; e se vi è un angolo ottuso, gli altri due daranno per somma un angolo acuto e quindi saranno acuti.

(¹) *Corollario* è una proposizione che sia conseguenza facilissima di una teorema precedente.

68. Se un triangolo è equilatero si vede facilmente (in base al teor. 58) che anche i tre angoli sono uguali, cioè che il triangolo è *equiangolo*. Viceversa: se un triangolo è equiangolo, è pure equilatero. Siccome la somma dei tre angoli è di 180°, ciascuno di essi sarà la terza parte di 180°, cioè 60°. Si può ricavare da ciò la risoluzione del

PROBLEMA. *Costruire col rapportatore un triangolo equilatero di dato lato.*

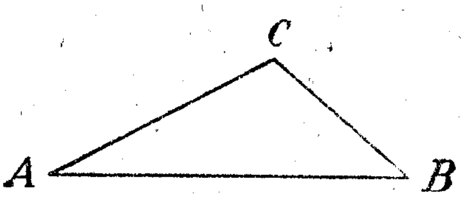
Costruito col rapportatore l'angolo $M\widehat{A}N$ di 60°, si riportino sopra AM e sopra AN due segmenti AB, AC uguali al lato dato. Il triangolo ABC è isoscele, perchè $AB = AC$ e quindi gli angoli alla base $\widehat{B}, \widehat{C}$ son uguali. Ma la loro somma, essendo il supplemento di $\widehat{A}$, è di 120°; dunque ciascuno degli angoli $\widehat{B}, \widehat{C}$ è di 60° gradi. Perciò ABC è equiangolo e quindi equilatero.



69. È evidente che *il segmento rettilineo che congiunge due punti A, B è il cammino più breve fra i due punti.* Tanto è vero ch'esso si ottiene tendendo un filo tra A, B. Ne deriva che:

In un triangolo un lato è minore della somma degli altri due.

Invero, il cammino $AC + CB$ è diverso dal cammino rettilineo da A a B, epperò $AB < AC + CB$.



Proprietà dei lati e degli angoli di un poligono.

70. Dal teorema del § 66 si può dedurre il seguente, che ci limitiamo ad enunciare:

La somma degli angoli di un poligono è uguale al prodotto di un angolo piatto pel numero dei lati diminuito di 2. Così per un quadrangolo il numero dei lati è 4 e quindi il numero dei lati diminuito di 2 è 2 e la somma degli angoli del quadrangolo è di 2 angoli piatti; per un pentagono si trovan similmente 3 angoli piatti; ecc.

71. Dalla stessa osservazione del § 69 segue che: *In un poligono un lato è minore della somma degli altri.*

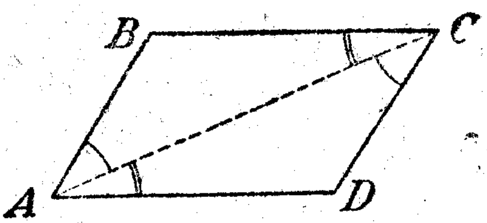
Parallelogrammi.

72. Un quadrangolo coi lati opposti paralleli dicesi un ***parallelogrammo***.

Le proprietà più importanti dei parallelogrammi son espresse dal teorema:

In un parallelogrammo: 1°) *una diagonale lo divide in due triangoli uguali;* 2°) *gli angoli e i lati opposti son uguali;* 3°) *le due diagonali si dividono scambievolmente per metà.*

Sia $ABCD$ il dato parallelogrammo. 1°) Per dimostrare la prima affermazione, si tiri per es. la diagonale AC. I due triangoli ABC, CDA risultano uguali, pel secondo caso di uguaglianza, perchè hanno uguali gli angoli ugualmente contrassegnati ed il lato AC

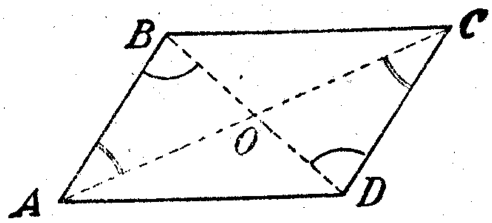


comune ai due angoli. Gli angoli $B\hat{A}C, A\hat{C}D$ son infatti uguali come alterno interni rispetto alle parallele AB, CD tagliate da AC; e gli angoli $A\hat{C}B, D\hat{A}C$ son uguali come alterno interni rispetto alle parallele AD, BC tagliate da AC.

2°) Per dimostrare la seconda affermazione, si osservi che dall'uguaglianza dei due triangoli predetti ABC, CDA, segue $AB = CD$, $BC = AD$, $\hat{B} = \hat{D}$, onde sono uguali i lati opposti e gli angoli opposti $\hat{B}, \hat{D}$. Gli altri due angoli opposti, in A, C, risultan uguali come somme di angoli uguali.

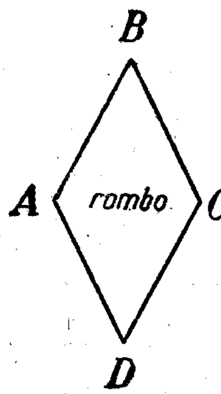
3°) Per dimostrare infine la terza affermazione, si tiri anche l'altra diagonale BD, che incontri AC in O.

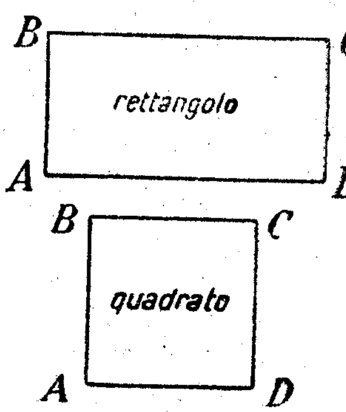
Si considerino indi i due triangoli AOB, COD. Essi risultano uguali, perchè hanno uguali gli angoli ugualmente contrassegnati (che sono al solito alterno interni rispetto a due parallele tagliate da una trasversale) e i lati AB, CD (comuni a queste coppie di angoli) pure uguali, come lati opposti del parallelogrammo. Dall'uguaglianza dei due triangoli risulta $OA = OC$, $OB = OD$ e quindi O è punto medio delle due diagonali.



Il punto O comune alle due diagonali dicesi *centro del parallelogrammo.*

73. Sono notevoli i seguenti parallelogrammi di forma particolare:

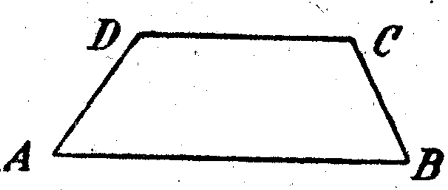




1°) Il ***rettangolo***, che è un parallelogrammo coi quattro angoli uguali, cioè retti.

2°) Il ***rombo*** che è un parallelogrammo coi quattro lati uguali.

3°) Il ***quadrato***, che è un parallelogrammo coi quattro angoli uguali (cioè retti) e coi quattro lati uguali.



74. Se in un quadrangolo son paralleli soltanto due lati opposti, e non gli altri due, il quadrangolo dicesi un ***trapezio***. I lati paralleli AB, CD chiamansi le ***basi*** del trapezio.

ESERCIZI

46. Disegnare un poligono convesso ed esporre per iscritto, con parole proprie, la sua definizione.

47. Disegnare un poligono concavo ed esporre per iscritto, con parole proprie, la sua definizione.

48. Un triangolo si può anche definire come la parte di piano comune a tre certi semipiani. Quali sono questi semipiani?

49. Come si dimostra che un triangolo è la parte di piano comune ai suoi tre angoli?

50. Ripetere, con parole proprie, la definizione di diagonali di un poligono e contare quante son le diagonali di un quadrangolo, di un pentagono, di un esagono.

51. Quanti vertici ha un poligono, se le sue diagonali son 20 ?

52. Il teorema del § 59 fornisce un modo di costruire la bisettrice d'un angolo, dividendo per metà (con una strisciolina di carta) il segmento che riunisce due punti dei lati dell'angolo equidistanti dal vertice.

53. Lo stesso teorema dà la costruzione della bisettrice, tirando dal vertice la perpendicolare al segmento precedente.

54. Condurre da un punto una retta che formi angoli uguali con due date rette che s' incontrano. È la parallela ad una delle bisettrici degli angoli delle due rette. Perchè ?

55. Le perpendicolari nei punti medi dei lati di un triangolo concorrono in un punto, equidistante dai vertici. (Si ricordi il § 62).

56. Ripetere per iscritto, con parole proprie, quanti e quali sono i casi di uguaglianza dei triangoli.

57. Due triangoli isosceli aventi uguali gli angoli al vertice e le relative bisettrici sono uguali. Perchè ? (Si ricorra alla sovrapposizione).

58. Una retta passante pel punto medio di un segmento è equidistante dagli estremi. Perchè ? (Si tirino dagli estremi le distanze alla retta. Ai due triangoli che vengon fuori si applichi il secondo caso d'uguaglianza).

59. Due angoli di un triangolo son rispettivamente uguali a $41^\circ\ 12'\ 32''$, $23^\circ\ 10'\ 15''$. Qual'è l'ampiezza del terzo angolo ?

60. Chiamasi *angolo esterno* di un triangolo un angolo formato da un lato del triangolo e dal prolungamento di un altro. Nella dimostrazione del § 66 si è provato che *un angolo esterno è uguale alla somma degli angoli interni non adiacenti* ed è quindi maggiore di ciascuno di questi (*teorema dell'angolo esterno*).

61. Un triangolo rettangolo con un angolo di 45° è isoscele. Perchè ?

62. Gli angoli alla base di un triangolo isoscele son acuti. Perchè ?

63. L'angolo al vertice di un certo triangolo isoscele è la metà di ciascuno degli angoli alla base. Qual'è l'ampiezza di ciascuno degli angoli del triangolo ?

64. Costruire col rapportatore un triangolo isoscele avente un angolo alla base di 30°.

65. In un triangolo un angolo esterno è di $68^\circ\ 17'$ e uno degli angoli interni non adiacenti è di $24^\circ\ 35'\ 18''$. Quali sono le ampiezze degli altri due angoli del triangolo ?

66. Calcolare le ampiezze degli angoli di un triangolo, sapendo che le differenze fra il maggiore e gli altri due sono di 54° e di 84°.

67. In un triangolo un lato è maggiore della differenza degli altri due. (Si deduce dal § 69).

68. Verificare con un disegno che se due lati di un triangolo son disuguali al maggiore sta opposto l'angolo maggiore. (Per dimostrarlo si prenda sul lato maggiore, a partire dal vertice comune coll'altro lato, un segmento uguale al lato minore e si tenga conto del teor. 58 e dell'Es. 60).

69. Se un triangolo ha due angoli uguali, i lati opposti son uguali, cioè il triangolo è isoscele. È il teor. enunciato senza dimostrazione nel § 60. (Per dimostrarlo, si osservi che se i lati opposti non fossero uguali, uno dei due sarebbe il maggiore e allora [Es. 68] gli angoli opposti sarebbero disuguali).

70. Se in un triangolo due angoli son disuguali al maggiore è opposto il lato maggiore. (Si dimostri che il lato opposto all'angolo maggiore non può esser nè uguale nè minore del lato opposto all'angolo minore).

71. In un triangolo rettangolo l'ipotenusa è il maggiore dei lati. (Corollario dell'Es. prec.).

72. In un triangolo il segmento che unisce un vertice con un punto interno al lato opposto è minore di uno almeno degli altri due lati. (Uno degli angoli che il detto segmento forma col lato è ottuso o retto e quindi, applicando l'Es. 70 al triangolo parziale che contiene il detto angolo, si conclude con la proprietà enunciata).

73. Dimostrare il secondo teor. del § 60 e cioè: Se la perpendicolare ad un lato d'un triangolo tirata dal vertice opposto, divide per metà la base, il triangolo è isoscele e quella perpendicolare biseca l'angolo al vertice. (Infatti, ribaltando il piano del triangolo attorno a quella perpendicolare, il triangolo si ribalta in se stesso, e ognuno dei due lati uscenti dal vertice si sovrappone all'altro).

74. Segmento obliquo o semplicemente *obliqua* da un punto ad una retta è un segmento che unisce il punto dato con un punto della retta (che chiamasi *piede* dell'obliqua), senza essere a questa perpendicolare. Ogni obliqua è maggiore della distanza dal punto alla retta [Es. 71].

75. *Proiezione* di un'obliqua da un punto ad una retta è il segmento compreso fra il piede dell'obliqua e il piede della perpendicolare. Due oblique aventi proiezioni uguali sono uguali.

76. Se, percorrendo il contorno di un poligono in un certo verso, si prolungano i singoli lati sempre in quel verso, il prolungamento di un lato forma col lato successivo un *angolo esterno del poligono*. Tenuto conto del § 70, dimostrare che la somma di questi angoli esterni è uguale a quattro angoli retti.

77. Se in un quadrangolo due angoli son supplementari anche gli altri due lo sono.

78. Calcolare l'ampiezza di ciascuno degli angoli di un certo

quadrangolo, sapendo che due angoli opposti sono uguali ciascuno a 22° e che degli altri due uno è doppio dell'altro.

79. Due triangoli rettangoli sono uguali se hanno i cateti uguali.

80. Due triangoli rettangoli sono uguali se hanno uguali un cateto e l'angolo acuto adiacente.

81. Due triangoli rettangoli sono eguali se hanno uguali un cateto e l'angolo opposto. (Infatti anche gli angoli acuti adiacenti ai due cateti uguali risultano uguali).

82. Due triangoli rettangoli sono uguali se hanno uguali l'ipotenusa e un angolo acuto. (Infatti anche gli angoli acuti ulteriori risultano uguali).

83. Due triangoli rettangoli sono uguali se hanno uguali l'ipotenusa ed un cateto. (Disposti infatti i due triangoli in modo che i cateti uguali coincidano e i triangoli si trovino da parti opposte del cateto comune, si ottiene complessivamente un triangolo isoscele, onde i due triangoli hanno uguali due angoli acuti e si ricade nell'Es. 82).

84. Due triangoli isosceli sono uguali se hanno basi e angoli al vertice uguali.

85. La bisettrice d'un angolo è il luogo geometrico [§ 62] dei punti equidistanti dai lati dell'angolo.

86. Le bisettrici degli angoli d'un triangolo concorrono in un punto, equidistante dai lati [Es. 85].

87. Due triangoli coi lati a due a due paralleli hanno gli angoli a due a due uguali.

88. In un triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa divide il triangolo in due triangoli rettangoli aventi gli angoli uguali a quelli del dato.

89. Calcolare la somma degli angoli di un poligono di 10, 12, 15 e di 50 lati.

90. Per costruire la bisettrice d'un angolo, col compasso a punte fisse o colla riga graduata, si può procedere così: Si riportino sui lati dell'angolo di vertice O due segmenti disuguali OA, OB. Si prenda poi sul lato OA un segmento $OB' = OB$ e sul lato OB un segmento $OA' = OA$. I due segmenti AB, $A'B'$ s'incontrano in un punto M, il quale congiunto ad O dà la bisettrice cercata. Perchè? (Fatta la figura, si cominci col dimostrare che sono uguali i triangoli $OAB, OA'B'$, sicchè nei triangoli $AMB', A'MB$ risultan uguali due angoli e il lato a questi comune; onde $AM = A'M$. Risultano perciò uguali i triangoli AMO, $A'MO$, epperò MO biseca l'angolo dato).

91. Un parallelogrammo è la parte di piano comune a due strisce [Es. 40] non aventi i contorni paralleli.

92. Un trapezio è la parte di piano comune ad una striscia e ad un angolo i cui lati incontrino il contorno della striscia e il cui vertice sia esterno alla medesima.

93. Se un parallelogrammo ha un angolo retto, tutti gli angoli sono retti e il parallelogrammo è un rettangolo.

94. Se un parallelogrammo ha due lati consecutivi uguali, tutti i lati sono uguali e il parallelogrammo è un rombo.

95. Se un parallelogrammo ha un angolo retto e due lati consecutivi uguali è un quadrato.

96. Chiamasi *mediana* di un triangolo il segmento che unisce un vertice col punto di mezzo del lato opposto.

In un triangolo rettangolo la mediana relativa all' ipotenusa è uguale a metà dell' ipotenusa. (Per dimostrarlo basta costruire il rettangolo che ha per lati consecutivi i cateti del triangolo).

97. Un trapezio dicesi *isoscele* quando i suoi lati non paralleli sono uguali.

In un trapezio isoscele i due angoli adiacenti alla base maggiore (o minore) sono uguali. (Basta prolungare i lati non paralleli).

98. Trovare le ampiezze degli angoli di un parallelogrammo sapendo che uno di essi è di 51°.

99. Un quadrangolo avente i lati opposti uguali è un parallellogrammo. (Si tiri una diagonale).

100. Un quadrangolo avente gli angoli opposti uguali è un parallelogrammo. (Infatti due angoli consecutivi risultano supplementari).

101. Un quadrangolo le cui diagonali si dividano per metà è un parallelogrammo.

102. Un quadrangolo avente due lati opposti uguali e paralleli è un parallelogrammo.

103. Il rettangolo (e in particolare il quadrato) è il solo parallelogrammo che abbia le diagonali uguali.

104. Il rombo (e in particolare il quadrato) è il solo parallelogrammo avente le diagonali perpendicolari.

105. Il rombo (e in particolare il quadrato) è il solo parallelogrammo in cui le diagonali sieno bisettrici degli angoli del poligono.

106. In un certo parallelogrammo due angoli consecutivi sono l' uno i $^2/_3$ dell'altro. Trovare le ampiezze degli angoli del parallelogrammo.

107. Per dividere un segmento per metà si possono condurre per un estremo del segmento due rette e per l'altro estremo le parallele a queste. Si otterrà così un parallelogrammo di cui il segmento è una diagonale; onde l'altra diagonale lo divide per metà.

108. In un trapezio isoscele le diagonali sono uguali.

109. In un trapezio isoscele la retta che congiunge i punti medi delle basi passa pel punto comune agli altri due lati. (Si ricordi il § 60). Ne deriva la costruzione della bisettrice di un angolo che abbia il vertice fuori del foglio da disegno.

110. In un triangolo il segmento che congiunge i punti medi

di due lati è parallelo al terzo lato ed uguale alla sua metà. (Si conduca da uno dei punti di mezzo considerati la parallela all'altro lato dimezzato).

111. In un trapezio il segmento congiungente i punti medi dei due lati non paralleli è uguale alla semisomma delle basi. (Si conduca per uno dei punti medi la parallela all'altro lato dimezzato).

112. I segmenti che congiungono i punti medi dei lati consecutivi di un quadrangolo qualunque son lati di un parallellogrammo. (Si confrontino i detti segmenti colle diagonali del quadrangolo, tenuto conto dell' Es. 110).

113. Due parallelogrammi sono uguali se hanno uguali due lati consecutivi e l'angolo compreso.

114. Se per il punto di mezzo di un lato di un triangolo si tira la parallela ad un altro lato, essa dimezza il lato rimanente. (Si tenga conto dell' Es. 110).

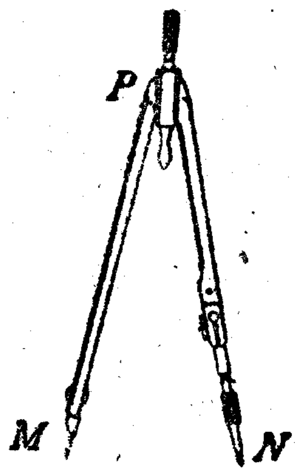
115. Il centro d'un parallelogrammo è punto medio di ogni segmento segato dal contorno sopra una retta passante pel centro. (Si cominci coll'osservare che un punto della bisettrice d'una striscia [Es. 41] gode dell'analoga proprietà nei riguardi del segmento segato dal contorno della striscia sopra una retta passante per quel punto).

CAPITOLO QUARTO

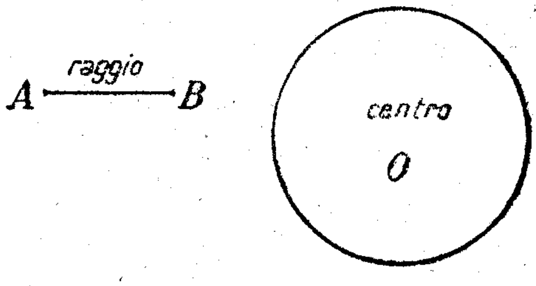
Circonferenza e cerchio.

Definizioni e prime proprietà.

75. Il *compasso* è un istrumento (rappresentato dalla figura) costituito da due bracci PM, PN snodati attorno al perno P e terminati con due punte M, N, una delle quali può esser sostituita da un lapis appuntito o da un tiralinee, fissato al braccio PN da una vite a pressione. La distanza fra le punte M, N dicesi *apertura* del compasso.



Divaricato il compasso in modo che l'apertura MN sia uguale a un segmento dato AB, si disponga la punta M sopra il punto O, dato sul foglio, e si ruoti indi il compasso, tenendo fissa quella punta. Allora la punta N del lapis o del tiralinee descrive una linea, che a un certo momento ritorna al punto di partenza, e che si chiama una ***circonferenza*** di *centro O* e di *raggio AB*.

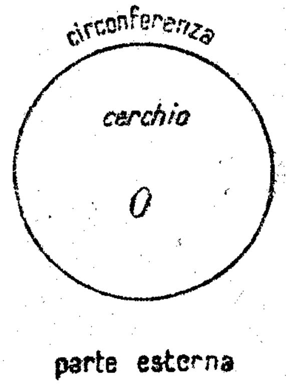


I punti della circonferenza hanno tutti da O una distanza uguale ad AB. Dunque:

Si chiama circonferenza una linea chiusa descritta da un punto che si muove in un piano, conservando la medesima distanza da un punto fisso.

Il punto fisso è il centro; la distanza fissa il raggio della circonferenza.

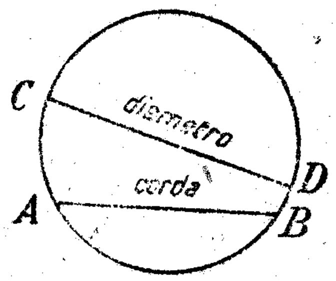
76. La circonferenza divide il piano in due parti; e cioè una parte limitata, che si chiama ***cerchio*** e che è costituita dai punti che hanno dal centro distanza minore o uguale al raggio; ed una parte illimitata, che si chiama *esterna* al cerchio, costituita dai punti che hanno dal centro distanza maggiore del raggio.



La circonferenza è il *contorno* del cerchio. I punti del cerchio non appartenenti al contorno diconsi *interni*.

La circonferenza è una linea; il cerchio è una superficie.

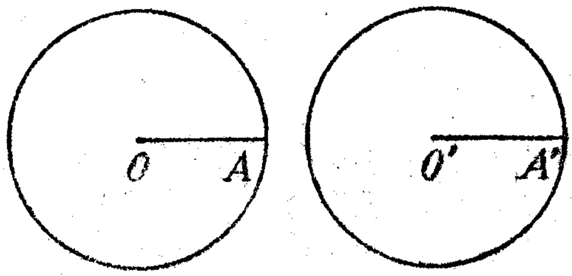
77. Ogni segmento AB che congiunga due punti A,B della circonferenza si chiama ***corda,*** sia della circonferenza che del cerchio.

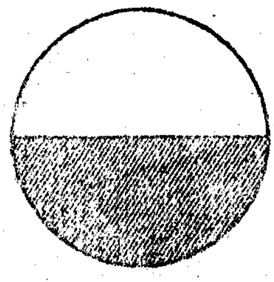


In particolare, una corda passante pel centro chiamasi un ***diametro.*** *I diametri sono tutti uguali fra loro,* perchè ognuno è doppio del raggio.

78. *Due cerchi (e le loro circonferenze) son uguali se hanno raggi uguali.*

Infatti, se i raggi $OA,O'A'$ di due dati cerchi sono uguali, un movimento che sovrapponga il piano del primo cerchio al piano del secondo, in modo che il centro O del primo cada sul centro O' del secondo, sovrappone completamente i due cerchi (e le loro circonferenze).



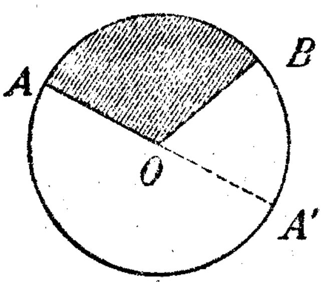


79. *Un diametro divide cerchio e circonferenza in due parti uguali* (dette rispettivamente *semicerchi* e *semicirconferenze*).

Per verificarlo basta piegare un cerchio lungo un suo diametro e constatare che le due parti del cerchio e della circonferenza, situate da bande opposte del diametro, si sovrappongono.

80. Due punti A, B dividono la circonferenza in due parti, ciascuna delle quali si chiama un ***arco***. I punti A, B diconsi *estremi* dell'arco.

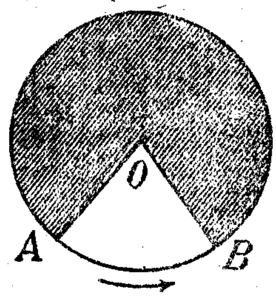
81. Un angolo, come $A\widehat{O}B$, che abbia il vertice nel centro O, dicesi un ***angolo al centro***. I suoi lati incontrano la circonferenza in due punti A, B e vi è un arco AB della circonferenza situato nell'angolo dato. Si dice che l'arco *corrisponde* all'angolo al centro e che questo *sottende* l'arco.



Nella figura, l'angolo $A\widehat{O}B$ tratteggiato è convesso cioè minore di un angolo piatto.

L'arco sotteso da un angolo al centro minore di un angolo piatto, è minore di una semicirconferenza, ossia è *parte* di una semicirconferenza. Infatti, considerato il diametro AA', che contiene un lato dell'angolo $A\widehat{O}B$, l'angolo piatto $A\widehat{O}A'$ contiene come parte $A\widehat{O}B$ e quindi l'arco AB è parte della semicirconferenza ABA'.

Invece *l'arco sotteso da un angolo al centro (concavo) maggiore di un angolo piatto, è maggiore di una semicirconferenza.*



Quando i punti A, B della circonferenza non sono estremi di un diametro, per *arco* AB s' intende di solito quello dei due archi aventi per estremi A, B, che è minore di mezza circonferenza. Nella figura è l'arco AB indicato dalla freccia.

Posizioni di una retta rispetto ad una circonferenza.

82. Una retta ed una circonferenza possono avere in comune due punti A, B (fig. 1) oppure un sol punto P (fig. 2) o nessun punto (fig. 3).

Si dice che una retta è ***secante,*** quando ha due punti comuni colla circonferenza; che è ***tangente,*** quando ha un sol punto comune; che è ***esterna,*** se non ha alcun punto comune colla circonferenza.

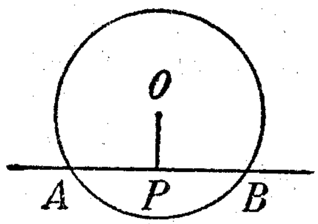


Fig. 1

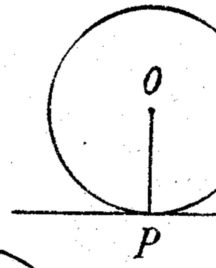


Fig. 2

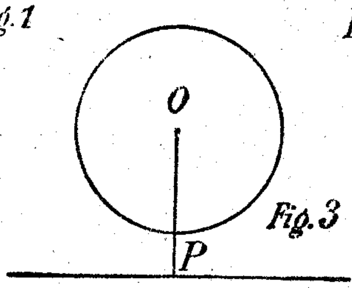


Fig. 3

La distanza OP di una retta secante dal centro della circonferenza è minore del raggio; la distanza OP di una tangente dal centro è uguale al raggio, e la distanza OP di una retta esterna dal centro è maggiore del raggio.

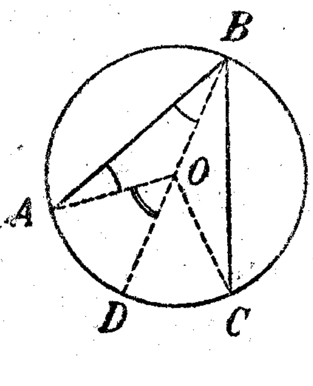
Queste proprietà le ammetteremo come evidenti.

Si osservi che, in conseguenza di quanto precede, *la tangente ad una circonferenza in un punto si ottiene semplicemente conducendo la perpendicolare al raggio che passa per quel punto.*

Tale punto dicesi *punto di contatto* della tangente.

Angoli alla circonferenza.

83. Un angolo $A\widehat{B}C$ si dice un ***angolo alla circonferenza*** quando ha il vertice B in un punto della circonferenza.

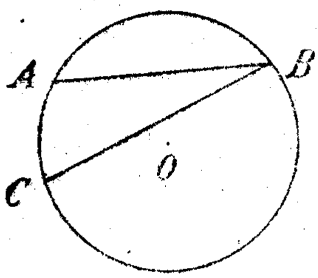


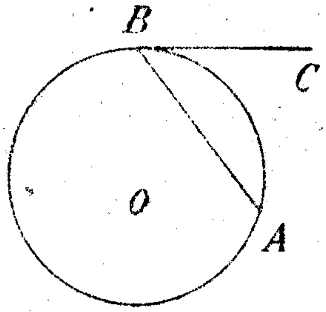
L'arco di circonferenza che è contenuto nell'angolo dicesi *sotteso* dall'angolo e si dice pure che l'angolo *insiste* sull'arco. Inoltre si dice che $A\widehat{B}C$ è *inscritto* nell'arco di estremi A, C che non è contenuto nell'angolo. Nel caso della figura, ADC è l'arco sotteso ad $\widehat{ABC}$ e quest'angolo è inscritto nell'arco ABC.

Un angolo alla circonferenza è metà dell'angolo al centro che sottende lo stesso arco.

Infatti, nel caso della figura (in cui il centro O del cerchio è interno all'angolo) si ha che l'angolo $\widehat{AOD}$, come supplemento di $\widehat{AOB}$, è uguale alla somma degli angoli $\widehat{OAB}$, $\widehat{OBA}$ del triangolo AOB, in quanto anche la somma di questi angoli è il supplemento di $\widehat{AOB}$ [§ 66]. Ora il triangolo AOB è isoscele, perchè $OA = OB$, epperò $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$. Pertanto $\widehat{AOD}$ è il doppio di $\widehat{OBA}$. Similmente si prova che $\widehat{DOC}$ è il doppio di $\widehat{OBC}$; e quindi $\widehat{AOC}$ è il doppio di $\widehat{ABC}$, cioè questo angolo è la metà dell'angolo al centro $\widehat{AOC}$, che sottende lo stesso arco.

Il teorema è evidentemente vero anche quando l'angolo dato alla circonferenza ha come lato un diametro: è il caso dell'angolo $\widehat{ABD}$ o dell'angolo $\widehat{DBC}$ della figura precedente. Ed è pure vero (come si dimostra con un ragionamento dello stesso tipo, che non sviluppiamo) quando il centro O è fuori dell'angolo $\widehat{ABC}$ e quando uno dei lati dell'angolo è tangente alla circonferenza nel vertice B.

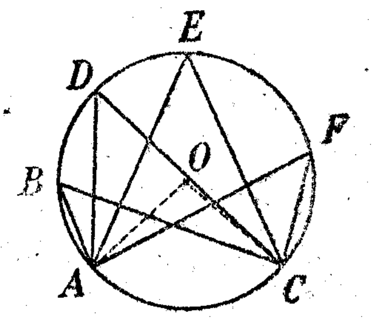




84. Un primo corollario del teorema precedente è questo:

Tutti gli angoli inscritti in un medesimo arco sono uguali fra loro.

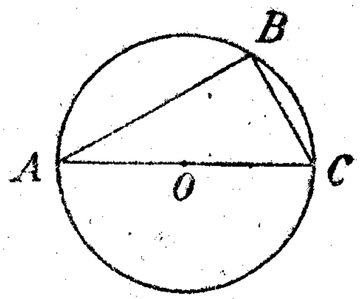
Infatti ciascuno degli angoli $\widehat{ABC}, \widehat{ADC}, \widehat{AEC}, \widehat{AFC}, \ldots$ è la metà dell'angolo $\widehat{AOC}$.



Si dice che l'arco ABC, in cui tutti gli angoli precedenti sono inscritti, è *capace* di un angolo uguale ad $A\widehat{B}C, A\widehat{D}C, A\widehat{E}C, A\widehat{F}C, \ldots$..

85. Un secondo corollario del teorema del § 83 è questo:

Un angolo inscritto in una semicirconferenza è retto.



Infatti, se l'angolo $A\widehat{B}C$ è inscritto in una semicirconferenza, esso è metà dell'angolo al centro $A\widehat{O}C$, che è piatto. Pertanto $A\widehat{B}C$ è retto.

ESERCIZI

116. Ripetere per iscritto, con parole proprie, le definizioni relative alla circonferenza e al cerchio (circonferenza, cerchio, raggio, diametro, corda, arco, angolo al centro, rette secanti, esterne, tangenti, punto di contatto, angolo alla circonferenza).

117. Un diametro è la maggiore fra le corde. (Si confrontino una corda ed un diametro aventi un medesimo estremo, congiungendo il centro coll'altro estremo della corda).

118. Due circonferenze possono avere le seguenti possibili posizioni in un piano: *esterne l'una all'altra*; *tangenti esternamente*; *tangenti internamente*; *secanti* (aver cioè due punti comuni); *una interna all'altra.* Disegnare sul foglio queste diverse posizioni reciproche.

119. Luogo dei centri delle circonferenze passanti per due punti.

120. Luogo dei centri delle circonferenze tangenti in un punto ad una retta.

121. Luogo dei centri delle circonferenze di dato raggio passanti per un punto.

122. Le tangenti negli estremi di un diametro sono parallele.

123. I punti di contatto di due tangenti parallele sono estremi di un diametro. (Congiungasi il centro con quei punti di contatto).

124. Gli estremi di due diametri sono vertici d'un rettangolo.

125. Gli estremi di due diametri perpendicolari sono vertici d'un quadrato.

126. Fra i segmenti che congiungono un punto dato coi punti

di una circonferenza, il minore è quello il cui prolungamento passa pel centro; il maggiore è quello che passa pel centro.

127. Una corda è bisecata dal diametro ad essa perpendicolare.

128. In una circonferenza angoli al centro uguali sottendono archi e corde uguali e se due angoli al centro son disuguali il maggiore sottende l'arco e la corda maggiore.

129. In un cerchio corde equidistanti dal centro sono uguali.

130. In un cerchio corde uguali sono equidistanti dal centro.

131. In un cerchio tutte le corde uguali ad una medesima sono tangenti ad un cerchio concentrico col dato. (Il raggio del cerchio in questione non è che la distanza del centro del cerchio dato da una di quelle corde).

132. In un cerchio di due corde disuguali la maggiore è più vicina al centro. (Si tenga conto dell' Es. prec.).

133. Dimostrare la proprietà inversa della precedente. (Dimostrazione per assurdo).

134. Da un punto esterno ad un cerchio escono due tangenti (che s' impareranno a costruire nel § 94). Il punto dato è congiunto al centro mediante la bisettrice dell'angolo delle due tangenti. (Si congiunga il centro coi punti di contatto delle due tangenti e si tenga conto dell' Es. 83).

135. Il luogo dei centri delle circonferenze tangenti a due rette parallele è la bisettrice della striscia determinata da queste.

136. Il luogo dei centri delle circonferenze tangenti a due rette non parallele è costituito dalle bisettrici degli angoli formati dalle due rette. (Si tenga conto dell' Es. 134).

137. Condurre le tangenti ad una circonferenza parallele ad una retta data. (Si consideri il diametro perpendicolare alla retta data).

138. Trovare un punto che abbia distanze date da un punto e da una retta dati. (Si tratta di determinare l' intersezione di una conveniente retta con una certa circonferenza; onde il problema può avere due soluzioni o una o non averne affatto. Quando si verificano le 3 possibilità ?)

139. Se un quadrangolo è inscritto [§ 97] in una circonferenza i suoi angoli opposti sono supplementari. (Si tenga conto del § 83).

140. Se un parallelogrammo è inscritto in una circonferenza esso è un rettangolo.

141. Due corde parallele son basi di un trapezio isoscele.

142. Due corde uguali e parallele son lati opposti di un rettangolo.

143. Fra le corde che passano per un punto interno ad un cerchio la minore è perpendicolare al diametro che passa per quel punto.

144. Due circonferenze distinte che abbiano la stessa tangente in un punto comune non hanno altri punti comuni.

145. Due corde di un cerchio, che si dimezzino scambievolmente, sono diametri.

146. I segmenti intercetti da due cerchi concentrici sopra una secante comune sono uguali.

147. Il punto di concorso delle bisettrici degli angoli di un triangolo [Es. 86] è il centro di un cerchio tangente ai tre lati, che dicesi *cerchio inscritto* nel triangolo.

148. Il punto di concorso degli assi [62] dei lati d'un triangolo (ved. anche il § 95) è il centro di un cerchio passante pei tre vertici, che dicesi *cerchio circoscritto* al triangolo.

149. Se un quadrangolo è circoscritto ad una circonferenza, la somma di due lati opposti uguaglia la somma degli altri due. (Si tenga conto dell' Es. 134).

150. Un parallelogrammo circoscritto [§ 97] ad una circonferenza è un rombo. (Si tenga conto dell' Es. precedente).

CAPITOLO QUINTO

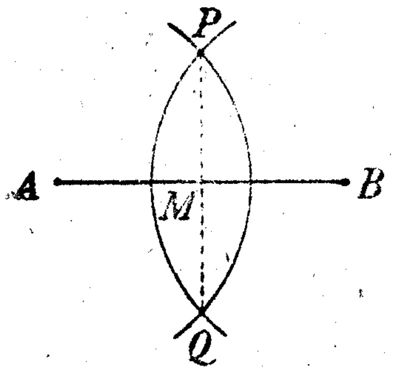
Problemi fondamentali.

Costruzioni elementari.

86. L'uso del compasso, come strumento da disegno da aggiungere alla riga e alla squadra, permette di risolvere molti altri problemi, fondamentali pel disegno geometrico. Considereremo i più importanti.

PROBLEMA 1°. *Dividere un segmento per metà* (1).

Coi centri in A, B e con raggio maggiore della metà di AB, descrivansi due circonferenze uguali. Poichè ciascuna delle due circonferenze ha una parte interna ed una parte esterna al cerchio dell'altra, è intuitivo ch'esse si tagliano in due punti P, Q. Il punto M, dove il segmento PQ taglia AB, è il punto medio richiesto. Infatti le distanze PA, PB, QA, QB dei punti P, Q dagli estremi del dato segmento, sono tutte uguali, perchè raggi di due circonferenze uguali. Onde PQ è l'asse del segmento AB [§ 62] e divide perciò il segmento per metà.

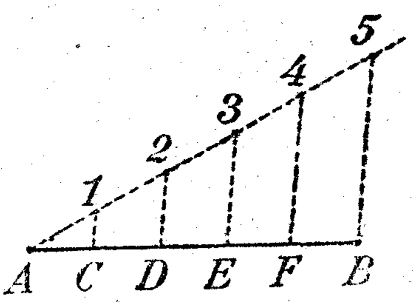


87. PROBLEMA 2°. *Dividere un segmento in un numero qualunque di parti uguali.*

Sia p. es. da dividere in 5 parti uguali il segmento AB. Condotta una semiretta AP, si riportino su essa successivamente a partire da A (p. es. col compasso a punte

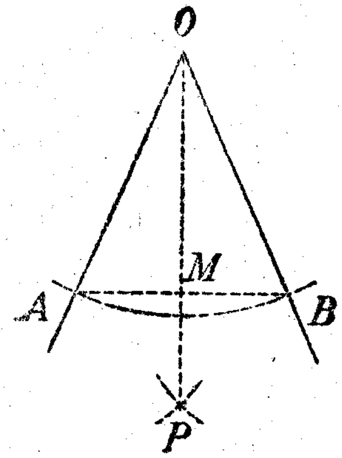
(1) Il problema fu già risoluto con una striscia di carta nel § 17.

fisse) 5 segmenti uguali qualunque. Congiunto il punto 5 con B, dai punti 1,2,3,4 si tirino le parallele a quella congiungente. Si ottengono così su AB i punti C,D,E,F, che dividono il segmento in 5 parti uguali. La proprietà è intuitiva, epperò ne tralasciamo la dimostrazione.



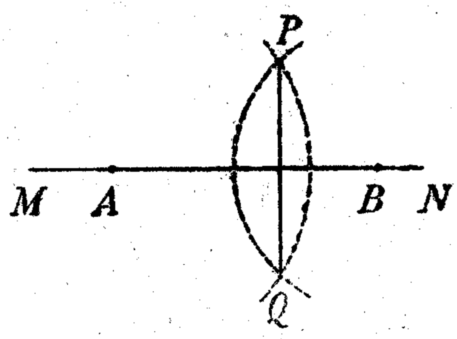
88. Problema 3°. *Costruire la bisettrice di un angolo* (1).

Col centro nel vertice O dell'angolo e raggio arbitrario, descrivasi una circonferenza che incontri i lati in A,B. Coi centri in A,B e raggio maggiore della metà del segmento AB, descrivansi due circonferenze uguali e sia P una delle loro intersezioni. Il punto O è equidistante da A,B e così il punto P; onde OP è l'asse del segmento AB, cioè incontra AB perpendicolarmente nel punto medio M. Ne deriva [§ 60] che OM è bisettrice dell'angolo $\widehat{O}$.



89. Problema 4°. *Condurre per un punto la perpendicolare ad una retta* (2).

1) Il punto dato P sia dapprima fuori della retta data MN. Coi centri in due punti arbitrari A,B della retta, descrivansi due circonferenze passanti per P. Esse si tagliano in un altro punto Q al disotto della retta. Poichè $AP=AQ$ il punto A è equidistante da P,Q. Similmente B è equidistante da P,Q. Dunque AB è l'asse del segmento PQ e quindi AB e PQ s'incontrano perpendicolarmente; cioè PQ è la perpendicolare da P alla retta MN.



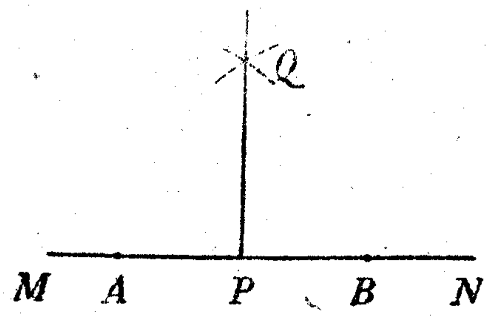
2) Se il punto P è dato sulla retta MN, si prendano sulla retta due segmenti uguali PA,PB.

---

(1) Un'altra costruzione fu data con un modello di carta nel § 30.

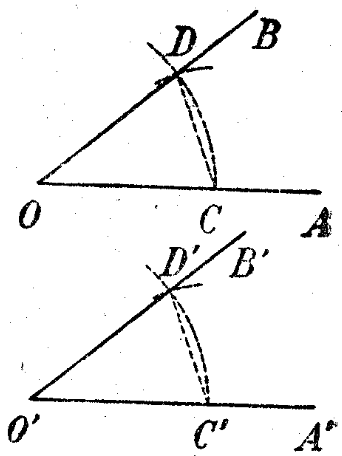
(2) Un'altra soluzione con riga e squadra fu data nel § 41.

Coi centri in A,B e raggio maggiore di PA descrivansi due circonferenze. Esse si tagliano in un punto Q al di sopra della retta MN. La congiungente Q con P è la perpendicolare richiesta, perchè PQ è l'asse del segmento AB.



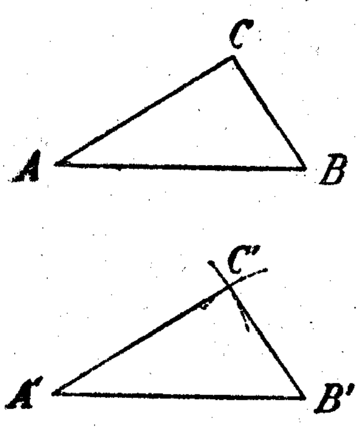
90. Problema 5°. *Dato un angolo, costruirne uno uguale che abbia un lato dato (e giaccia sopra un assegnato semipiano).*

Sia $A\widehat{O}B$ l'angolo dato; $O'A'$ il lato dato dell'angolo, che si vuol costruire sul semipiano al disopra di $O'A'$. Descriviamo coi centri in O,O' due circonferenze uguali e sieno C,D le intersezioni della prima coi lati OA,OB dell'angolo dato. Mediante il compasso si stacchi sulla seconda circonferenza una corda $C'D'$ uguale alla corda CD e si congiunga infine O' con D'. L'angolo $C'\widehat{O'}D'$ è uguale all'angolo dato, perchè i due triangoli $COD,C'O'D'$ son uguali, avendo i tre lati rispettivamente uguali e cioè $OC=O'C'$, $OD=O'D'$, $DC=D'C'$. Pertanto $C\widehat{O}D=C'\widehat{O'}D'$.



91. Problema 6°. *Costruire un triangolo uguale a un triangolo dato.*

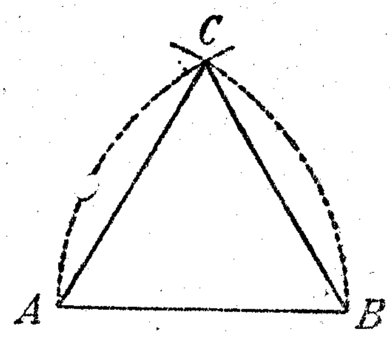
Sia ABC il dato triangolo. Preso un segmento $A'B'$ uguale ad AB, si descrivano coi centri in A',B' due circonferenze di raggi rispettivamente uguali ad AC,BC. Esse si tagliano al disopra di $A'B'$ in un punto C' ed il triangolo $A'B'C'$ è uguale al dato, perchè i due triangoli hanno i tre lati rispettivamente uguali.



93. Problema 7°. *Costruire un triangolo equilatero di lato dato* (¹).

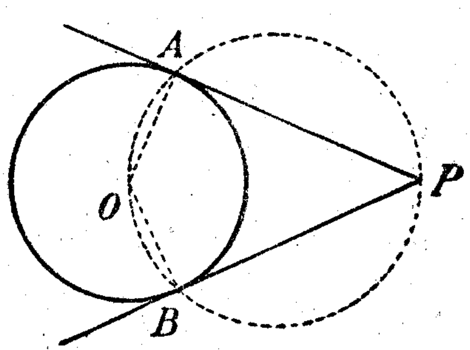
(¹) Un'altra costruzione, col rapportatore, fu data nel § 68.

Sia AB il lato dato. Coi centri in A,B descrivansi due circonferenze di raggi uguali ad AB. Esse si tagliano al disopra di AB in un punto C ed il triangolo ABC è equilatero, perchè $AC = BC = AB$.



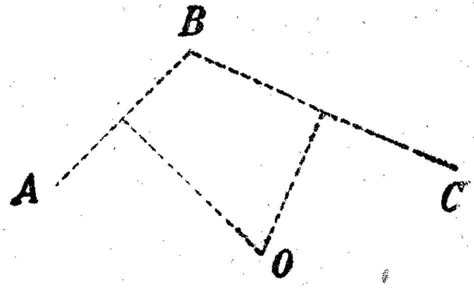
94. Problema 8°. *Tirare le tangenti ad una circonferenza da un punto esterno.*

Sia P il punto dato ed O il centro della circonferenza data. Si descriva la circonferenza di diametro OP. Le due circonferenze si tagliano nei punti A,B. L'angolo $O\hat{A}P$, essendo inscritto in una semicirconferenza, è retto. Sicchè AP è perpendicolare al raggio passante per A ad è dunque tangente in A alla circonferenza data. Similmente, PB è tangente in B a questa circonferenza.



95. Problema 9°. *Trovare il centro di una circonferenza della quale si conoscano tre punti.*

Se i punti che si conoscono sono A,B,C, siccome il centro O della circonferenza deve essere equidistante da A,B, esso apparterrà all'asse del segmento AB; e, per analoga ragione, apparterrà all'asse del segmento BC. Onde O si costruisce come intersezione dei due assi.



Osservazione. Dati tre punti A,B,C non in linea retta, la costruzione precedente si può eseguire anche se non si sa che i tre punti appartengono ad una circonferenza. E si trova sempre il punto O come intersezione degli assi dei segmenti AB,BC, perchè questi due assi non possono essere paralleli, se no la perpendicolare da B ad uno di essi sarebbe perpendicolare anche all'altro e i tre punti si troverebbero sopra una retta, contro il supposto. Costruito il punto O, la circonferenza di centro O e di raggio OA passa anche per B,C, perchè $OA = OB = OC$. Ne segue di più che per A,B,C non può passare che la circonferenza costruita. Dunque:

Per tre punti non in linea retta passa sempre una ed una sola circonferenza.

Costruzioni di poligoni regolari.

96. Un poligono dicesi ***regolare*** se ha i lati e gli angoli uguali.

P. es. il triangolo equilatero [§ 68] ed il quadrato [§ 73] sono poligoni regolari.

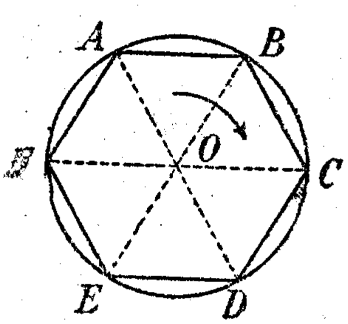
97. Un poligono dicesi *inscritto* in una circonferenza quando ha per vertici punti della circonferenza. Questa, alla sua volta, dicesi *circoscritta* al poligono.

Si può dimostrare (ma noi l'ammettiamo senza dimostrazione) che *ogni poligono regolare è inscritto in una circonferenza*, cioè che esiste un punto (centro della circonferenza circoscritta) equidistante dai vertici del poligono. Si chiama *centro del poligono.*

98. Viceversa :

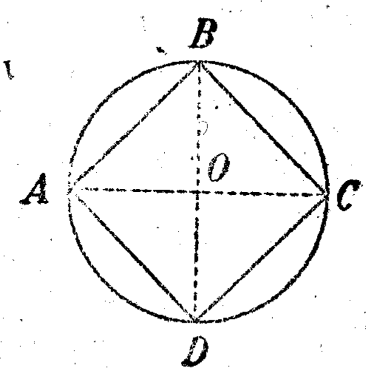
Se si divide una circonferenza in parti uguali e si congiunge ogni punto di divisione col successivo, si ottiene un poligono regolare.

Così p. es. se la circonferenza è divisa in sei parti uguali coi punti di divisione A,B,C,D,E,F, il poligono $ABCDEF$ è regolare. Infatti, ognuno degli angoli al centro, che sottendono gli archi AB,BC,CD,DE,EF,FA, è la sesta parte di 360°, ossia è un angolo di 60°. Perciò facendo ruotare il poligono attorno ad O di un angolo di 60°, nel verso della freccia, ogni vertice si sovrappone al successivo e quindi ogni lato ed ogni angolo del poligono si sovrappone al lato e all'angolo successivo. Pertanto i lati del poligono sono uguali fra loro e così gli angoli.



99. Problema 1°. *Inscrivere un quadrato in una circonferenza.*

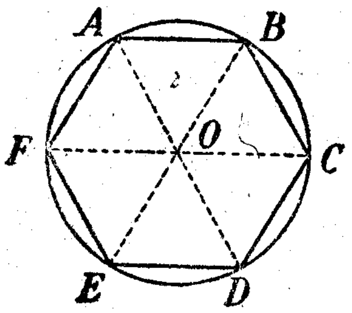
Basta dividere una circonferenza in quattro archi uguali: il che si fa con due diametri perpendicolari AC,BD.



Congiunti i punti di divisione successivi, si ha il quadrato $ABCD$.

100. Problema 2°. *Inscrivere un esagono regolare in una circonferenza.*

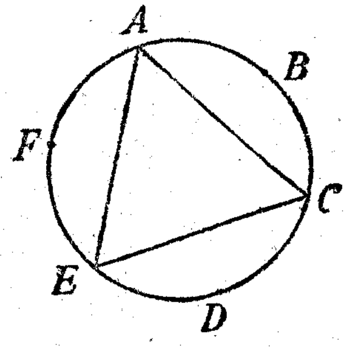
Basta riportare successivamente, come corda della circonferenza, a partire da A, un segmento uguale al raggio.



I punti ottenuti sulla circonferenza la dividono in sei archi uguali. Infatti, se $ABCDEF$ è un esagono regolare inscritto nella data circonferenza, nel triangolo isoscele AOB l'angolo $\widehat{O}$ è di 60° e quindi la somma degli altri due angoli vale 120°. Siccome gli angoli alla base sono uguali, ciascuno di essi vale 60°. Perciò nel triangolo AOB ogni angolo è di 60° ed il triangolo, essendo equiangolo, è equilatero; cioè $OA = OB = AB$. Questo vuol dire che *il lato dell'esagono regolare inscritto in una circonferenza è uguale al raggio di questa*; ed è precisamente di tale proprietà che si è fatto uso nell' indicata costruzione dell'esagono.

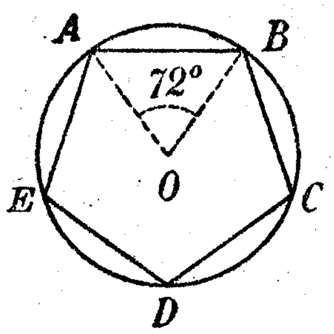
101. Problema 3°. *Inscrivere un triangolo equilatero in una circonferenza.*

Riportato sei volte il raggio come corda della circonferenza, due archi successivi, come AB,BC, daranno insieme un arco uguale alla terza parte della circonferenza. Similmente gli archi CD,DE dànno un altro terzo di circonferenza e gli archi EF,FA il terzo restante. Onde il triangolo ACE è equilatero [§ 98].



102. Problema 4°. *Inscrivere un pentagono regolare in una circonferenza, facendo uso del rapportatore.*

Col rapportatore costruiscasi, prendendo per vertice il centro O della circonferenza, un angolo $A\widehat{O}B$ di 72°.



L'arco sotteso AB è la quinta parte della circonferenza, perchè $72^o \times 5 = 360^o$. La corda AB è dunque il lato del pentagono regolare, i cui vertici successivi si ottengono riportando successivamente la corda in BC, CD, DE.

ESERCIZI

151. Se due lati di un angolo sono divisi nello stesso numero di parti uguali, a partire dal vertice, le congiungenti delle coppie di punti di divisione corrispondenti sono parallele.

152. Costruire un triangolo dati due lati e l'angolo compreso.

153. Costruire un triangolo dati un lato e gli angoli adiacenti.

154. Costruire un triangolo dati i tre lati [§ 91]. Perchè il triangolo esista è necessario e sufficiente che il lato maggiore sia minore della somma degli altri due.

155. Costruire un triangolo isoscele dati la base e uno dei due lati uguali.

156. Dividere un angolo retto in tre parti uguali con riga e compasso. (Si costruisca un triangolo equilatero. Il complemento di uno dei suoi angoli è la terza parte di un angolo retto).

157. Costruire un triangolo isoscele date la base e l'altezza relativa.

158. Costruire un triangolo isoscele dati la base ed uno dei due angoli (uguali) adiacenti.

159. Costruire un triangolo isoscele dati la base e l'angolo al vertice. (La metà dell'angolo al vertice è il complemento di ciascuno degli angoli alla base, onde si ricade nell'Es. precedente).

160. Costruire un triangolo rettangolo dati l'ipotenusa e un cateto.

161. Costruire un triangolo rettangolo isoscele di data ipotenusa.

162. Inscrivere in una circonferenza un ottagono regolare. (Basta dividere per metà ciascùn arco sotteso ad un lato del quadrato, tirando il diametro perpendicolare al lato).

163. Similmente, inscritto l'ottagono regolare, si può inscrivere il poligono regolare di 16, 32, 64, ... lati.

164. Similmente, inscritto l'esagono regolare, si può inscrivere il poligono regolare di 12, 24, 48, ... lati.

165. Similmente, inscritto il pentagono regolare, si può inscrivere il poligono regolare di 10, 20, 40, ... lati.

166. Inscrivere in una circonferenza il *pentadecagono* regolare, cioè il poligono regolare di 15 lati. (Basta osservare che $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = = \frac{5}{30} - \frac{3}{30} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$; sicchè l'angolo al centro che sottende il lato dell'esagono meno l'angolo al centro che sottende il lato del decagono, dà l'angolo al centro che sottende il lato del pentadecagono. Questo angolo vale $360^o : 15 = 24^o$, onde si può costruire anche col rapportatore).

167. Costruito il pentadecagono regolare inscritto in una circonferenza, si possono ivi inscrivere i poligoni regolari di 30, 60, 120, ... lati.

168. Qual' è l'ampiezza di un angolo di un poligono regolare di n lati? Fare $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, ...$

169. In un esagono regolare un lato è parallelo ad un altro lato conveniente. Lo stesso accade in ogni poligono regolare di un numero pari di lati.

170. Congiungendo il centro di un poligono regolare di n lati coi vertici, si decompone il poligono in n triangoli isosceli uguali. Considerare i casi particolari $n = 3, 4, 5, 6, ...$

171. I segmenti che congiungono i punti medi dei lati di un triangolo equilatero dividono questo in quattro triangoli equilateri uguali. (Si tenga conto dell' Es. 110).

172. I segmenti che congiungono i punti medi delle coppie di lati opposti di un quadrato, dividono questo in quattro quadrati uguali.

173. Aggiungendo alla figura precedente i segmenti che congiungono i punti medi dei lati consecutivi del quadrato, si decompone questo in 8 triangoli rettangoli isosceli uguali fra loro. Il quadrato contornato dai quattro segmenti aggiunti è costituito da 4 di tali triangoli.

174. Se dai vertici di un quadrato si tirano le parallele alle diagonali, si viene a costruire un altro quadrato, che contiene il dato. Sopprimendo questo, restano quattro triangoli rettangoli isosceli, coi quali si può ricomporre un quadrato uguale al dato.

175. I segmenti che uniscono i punti medi dei lati successivi di un esagono regolare contornano un altro esagono regolare.

176. In un poligono regolare il centro del poligono è non soltanto centro del cerchio circoscritto, ma anche del cerchio inscritto. (Si tenga conto dell' Es. 170).

177. Congiungendo il centro di un esagono regolare con tre vertici non consecutivi si decompone l'esagono in tre rombi uguali.

178. L'esagono regolare è il sol poligono regolare, che vien decomposto dai segmenti che congiungono il centro coi vertici, in sei triangoli uguali, che sono non soltanto isosceli [Es. 170], ma equilateri.

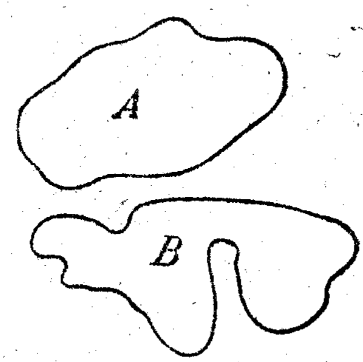
179. Costruire un quadrato datane la diagonale [Es. 161].

CAPITOLO SESTO

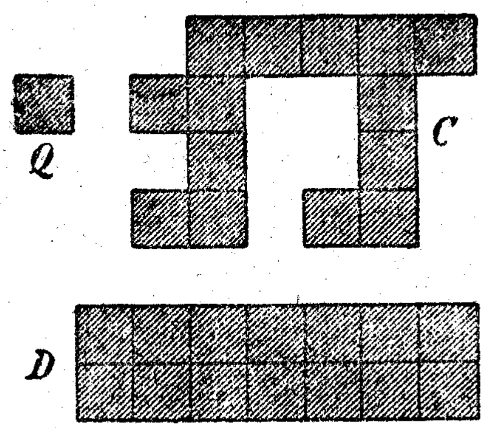
Equivalenza delle superficie piane.

Concetto di superficie equivalenti.

103. Siano A,B due pezzi di lamiera omogenea, di forma diversa e di uguale spessore. Se i due pezzi hanno lo stesso peso, si dice che le superficie A,B hanno ***uguale estensione.*** Se invece il peso di A è maggiore del peso di B, si dice che l'estensione di A è ***maggiore*** dell'estensione di B e che questa è ***minore*** di quella.



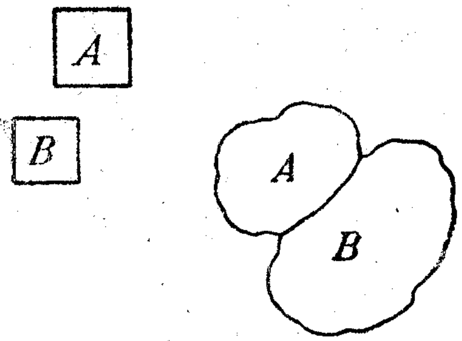
Un altro esempio: C,D son due superficie piane, ciascuna delle quali è costituita da 14 quadratini uguali ad un medesimo quadratino Q. In C i 14 quadratini sono aggruppati in un modo; in D in un altro, sicchè le due superficie hanno forma diversa, ma uguale estensione.



Due superficie piane si dicono ***equivalenti*** quando hanno uguale estensione.

104. Nell'ultimo esempio considerato le superficie C,D sono *somme* di 14 quadratini uguali a Q.

In generale si chiama ***somma*** di due superficie A,B, che abbiano al più comuni parti dei contorni, ma non



punti interni, la superficie C risultante dall' insieme delle A,B. Si dice pure che ciascuna delle A,B è ***differenza*** dell'altra da C.

105. Sono intuitive le proprietà seguenti:

1) *Superficie equivalenti ad una terza sono equivalenti tra loro.*

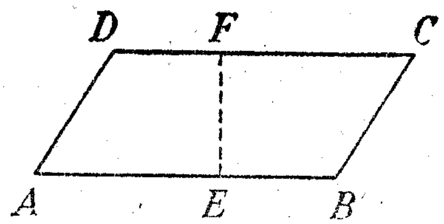
2) *Due superficie uguali sono equivalenti.*

3) *Somme o differenze di superficie equivalenti sono equivalenti.*

4) *Due superficie qualunque o sono equivalenti oppure una ha estensione maggiore dell'estensione dell'altra.*

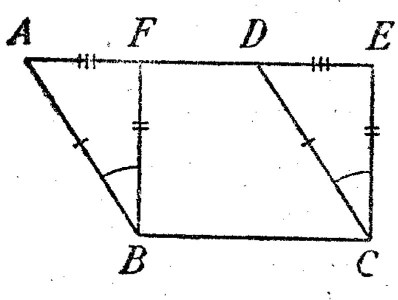
Parallelogrammi e triangoli equivalenti.

106. Fissato un lato di un parallelogrammo come *base*, si dice *altezza* relativa a quella base la distanza delle rette parallele che contengono il lato fissato e l'opposto. Così p. es. nel parallelogrammo $ABCD$, preso AB come base, il segmento EF è l'altezza.



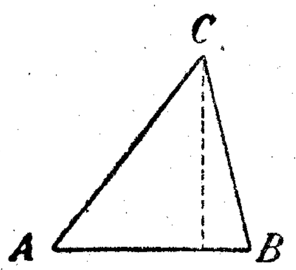
Un parallelogrammo è equivalente ad un rettangolo avente base ed altezza uguali a quelle del parallelogrammo.

Per provare che il parallelogrammo $ABCD$ ed il rettangolo $BCEF$ sono equivalenti, cominciamo ad osservare che i triangoli ABF, DCE sono uguali, perchè hanno uguali i tre lati. Invero, $AB = DC$ come lati opposti di un parallelogrammo; $BF = CE$ come lati opposti di un rettangolo; $AF = DE$, perchè aggiungendo ad AF e a DE il segmento FD, si ottengono i segmenti AD, FE uguali a BC e quindi uguali fra loro.



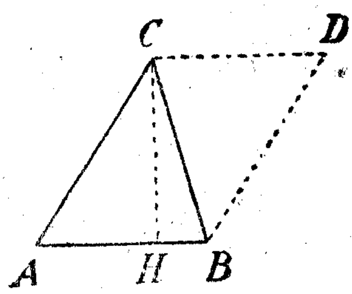
Se ora dal trapezio $ABCE$ si toglie il triangolo DCE, si ottiene il parallelogrammo $ABCD$; e se si toglie invece il triangolo ABF, si ottiene il rettangolo $BCEF$. Dunque parallelogrammo e rettangolo sono equivalenti, come differenze di figure uguali [1].

107. Quando in un triangolo ABC un lato AB si assume come *base*, l'*altezza* relativa a quel lato è la distanza del vertice opposto C dal lato fissato.



Un triangolo equivale alla metà di un parallelogrammo di base ed altezza uguali a quelle del triangolo.

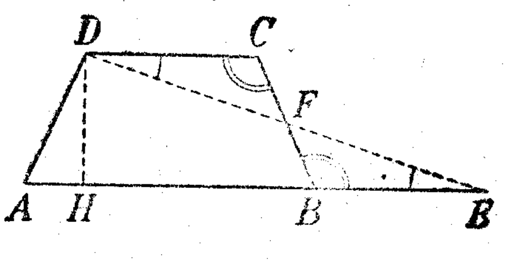
Condotte infatti da C,B le parallele ai lati AB,AC del triangolo, si ha il parallelogrammo $ABDC$, che è il doppio del triangolo ABC [§ 72]. E tale parallelogrammo ha la stessa base AB e la stessa altezza CH del triangolo.



108. La distanza fra le basi di un trapezio [§ 74] si chiama *altezza* del trapezio.

Un trapezio è equivalente ad un triangolo avente altezza uguale a quella del trapezio e base uguale alla somma delle basi.

Sul prolungamento della base AB del trapezio si riporti il segmento $BE = DC$. Il segmento DE incontra BC in un punto F ed i triangoli FCD,FBE sono uguali, perchè hanno uguali i lati CD, BE e gli angoli ugualmente segnati. Ora, se dal pentagono concavo $AEFCD$ si toglie il triangolo FCD si ottiene il triangolo ADE; se invece si toglie il triangolo FBE si ottiene il trapezio $ABCD$. Dunque triangolo e trapezio sono equivalenti come differenze di figure eguali. Il triangolo ha la stessa altezza DH del trapezio e base AE uguale alla somma delle basi del trapezio, perchè $AE = AB + BE$ e $BE = DC$.



[1] Lo scolaro diligente consideri i casi in cui F coincide con D o cade fuori del lato AD.

Teorema di Pitagora.

109. *Il quadrato costruito sull' ipotenusa di un triangolo rettangolo è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.*

Dato un triangolo rettangolo ABC, costruiscasi (nel modo indicato nella fig. 1) il quadrato $ADEF$, sul lato AD uguale alla somma dei cateti AB,AC del triangolo; sicchè risulta $BD = AC$. Anche i lati rimanenti del quadrato si potranno decomporre similmente in coppie di segmenti DG,GE; EH,HF; FC,CA uguali ai cateti del triangolo. E in conseguenza di ciò il quadrato vien decomposto nella somma di quattro triangoli 1,2,3,4 uguali al dato e in un quadrangolo 5. Questo quadrangolo non è che il quadrato costruito sull' ipotenusa CB, giacchè ha i lati uguali all' ipotenusa e gli angoli retti. P. es. l'angolo $C\hat{B}G$ è retto, perchè gli angoli $A\hat{B}C,D\hat{B}G$ son complementari (essendo $D\hat{B}G = B\hat{C}A$).

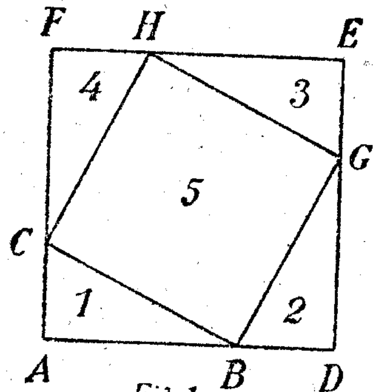


Fig 1

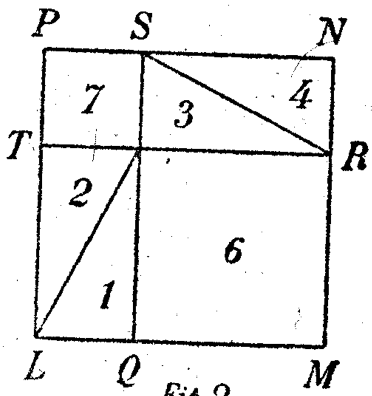


Fig. 2

La conclusione è dunque che il quadrato avente per lato la somma dei cateti del dato triangolo, è equivalente alla somma di quattro triangoli uguali al dato e del quadrato dell' ipotenusa.

Nella fig. 2 è riprodotto un quadrato $LMNP$ uguale ad $ADEF$. Ognuno dei lati del quadrato $LMNP$ è decomposto in due segmenti uguali ai cateti del triangolo dato; ma i punti di divisione Q,R,S,T son congiunti in modo diverso che nella fig. 1. La fig. 2 mostra che il quadrato avente per lato la somma dei cateti del dato triangolo è anche equivalente alla somma di quattro triangoli 1,2,3,4 uguali al dato e dei due quadrati 6 e 7 aventi lati uguali ai cateti del triangolo dato.

Confrontando le due decomposizioni dei quadrati uguali $ADEF$, $LMNP$, si conclude che il quadrato 5 della fig. 1 è equivalente alla somma dei quadrati 6 e 7 della fig. 2. Resta così stabilito il teorema di Pitagora.

ESERCIZI

180. Due triangoli aventi la stessa base e i vertici opposti sopra una parallela alla base sono equivalenti. (Infatti essi hanno basi ed altezze uguali, epperò [§ 107] sono equivalenti).

181. Una mediana divide un triangolo in due triangoli equivalenti.

182. Le diagonali dividono un parallelogrammo in quattro triangoli equivalenti.

183. I segmenti che congiungono i punti medi dei lati di un triangolo decompongono il triangolo in quattro triangoli equivalenti. (Si tenga conto dell' Es. 110).

184. Le parallele alle diagonali di un parallelogrammo condotte dai vertici, determinano un parallelogrammo doppio del dato.

185. Le parallele ai lati di un triangolo condotte dai vertici determinano un triangolo quadruplo del dato (ved. l' Es. 183).

186. Trasformare un pentagono in un quadrangolo equivalente. (Sia $ABCDE$ il dato pentagono, di cui lo scolaro farà la figura. Congiungasi A con C e da B si tiri la parallela ad AC, la quale incontri in F il prolungamento di DC. Il quadrangolo $AEDF$ soddisfa al problema. Si tenga conto dell' Es. 180).

187. Allo stesso modo si può trasformare un poligono di un certo numero di vertici in un poligono equivalente con un vertice di meno.

188. Trasformare un poligono in un triangolo equivalente.

189. Trasformare un triangolo in uno equivalente di data altezza h. (Sia ABC il dato triangolo, di cui lo scolaro farà la figura, e sia MN la retta parallela ad AB, distante da AB dell'altezza h e situata dalla stessa parte del triangolo. Dicasi D l' intersezione di AC con MN e si congiunga D con B. Si tiri infine la parallela da C a DB e sia E il punto ov'essa incontra il lato AB. Il triangolo richiesto è AED. Si tenga conto dell' Es. 180).

190. Condotte da un punto di una diagonale di un parallelogrammo le parallele ai lati, i due parallelogrammi risultanti, situati da parti opposte della diagonale, sono equivalenti. (Si tenga conto che un parallelogrammo è diviso da una diagonale in due triangoli uguali).

191. Il quadrato costruito sul segmento somma di due dati segmenti si decompone nella somma dei quadrati dei due segmenti e in due rettangoli uguali, aventi per lati consecutivi i due segmenti.

192. Il quadrato costruito sulla differenza di due segmenti è equivalente alla somma dei loro quadrati, diminuita del doppio di un rettangolo avente per lati consecutivi i due segmenti.

193. Costruire un quadrato equivalente alla somma o alla differenza di due altri. (Si tenga conto del teor. di Pitagora).

194. Il parallelogrammo ottenuto congiungendo i punti medi dei lati successivi di un quadrangolo equivale alla metà di questo. [Vedi l' Es. 110].

195. Costruire un rombo equivalente a un dato parallelogrammo ed avente un lato uguale ad un lato di questo.

196. Trasformare un triangolo in uno isoscele equivalente di data base o di data altezza.

197. Costruire un quadrato che sia somma di più altri quadrati. (Applicazione replicata del teorema di Pitagora).

198. In particolare, se i quadrati di cui si fa la somma sono uguali, si ha il quadrato doppio, il triplo, ... di un dato quadrato.

199. Il lato di un quadrato equivalente alla metà di un altro è uguale alla metà della diagonale di questo.

200. Le mediane dividono un triangolo in sei triangoli equivalenti. (Si cominci coll'osservare che in virtù dell' Es. 180 sono equivalenti due triangoli aventi un lato comune col dato e per vertici opposti i punti medii degli altri due).

201. Un triangolo rettangolo ha i cateti di cm 7 e cm 15. Calcolare la lunghezza dell' ipotenusa.

202. Esiste un triangolo rettangolo i cui cateti son misurati (p. es. in centimetri) dai numeri 3 e 4 e la cui ipotenusa è misurata dal numero 5. Perchè ?

203. Un triangolo rettangolo ha l' ipotenusa di cm 21 e un cateto di cm 8. Qual' è la lunghezza dell'altro cateto ?

204. Un rombo ha le diagonali di cm 5 e cm 7. Qual' è la lunghezza del suo lato.

205. A quale altezza arriva una scala di m 5 addossata ad un muro e poggiata sul suolo ad una distanza di m 2,2 dal muro ?

206. In un cerchio di cm 4 di raggio si ha una corda di cm 6,5. Qual' è la distanza della corda dal centro ?

207. Qual' è l'altezza di un triangolo isoscele la cui base è di m 15 e il lato di m 20 ?

208. Calcolare la lunghezza della diagonale di un quadrato il cui lato è di cm 8,5.

209. Calcolare la lunghezza del lato di un quadrato la cui diagonale è di cm 12.

210. Qual'è l'altezza di un triangolo equilatero il cui lato è m 22 ?

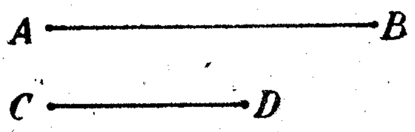
211. Congiunto un punto interno di un parallelogrammo, coi vertici, due non adiacenti dei quattro triangoli in cui si decompone il parallelogrammo, dànno una somma equivalente alla somma degli altri due. (Per dimostrarlo, si conducano pel punto le parallele ai lati).

CAPITOLO SETTIMO

Figure simili.

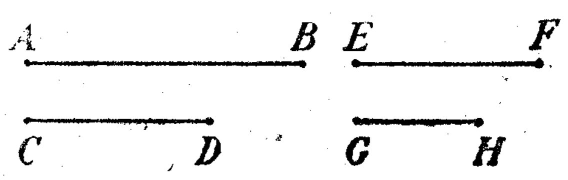
Segmenti proporzionali.

110. Chiamasi ***rapporto*** di due segmenti il quoto delle loro misure [§ 19]. Il rapporto dei segmenti AB, CD (considerati in quest'ordine) s' indica con $AB : CD$.



Può darsi che non sia possibile avere misure esatte dei segmenti AB, CD. In tal caso si potrà sempre scegliere come unità di misura un'unità decimale del metro tanto piccola che ogni unità decimale minore sia trascurabile per gli scopi pratici che si vogliono ottenere. Allora del rapporto $AB : CD$ si potranno avere soltanto valori approssimati a meno d'un decimo, d'un centesimo, d'un millesimo, ecc. per difetto e per eccesso. Un valore approssimato per difetto del rapporto è il quoto d'una misura approssimata per difetto di AB per una misura approssimata per eccesso di CD; ed un valore approssimato per eccesso del rapporto è il quoto d'una misura approssimata per eccesso di AB per una misura approssimata per difetto di CD.

111. Si dice che quattro segmenti AB, CD, EF, GH formano una ***proporzione***, nell'ordine in cui sono scritti, quando il rapporto dei primi due è uguale al rapporto degli ultimi due, cioè quando



$$AB : CD = EF : GH$$ [1].

---

[1] Si legge « AB sta a CD come EF sta a GH ».

P. es., nel caso della figura, $AB = {}^3/_2\, CD$ e quindi il rapporto fra le misure di AB e di CD è uguale a ${}^3/_2$; ossia $AB : CD = {}^3/_2$. Similmente $EF = {}^3/_2\, GH$ epperò $EF : GH = {}^3/_2$. Ha dunque luogo la proporzione sopra scritta.

Se dei rapporti $AB : CD$ ed $EF : GH$ non si hanno che valori approssimati, i due rapporti saranno uguali quando ogni valore approssimato per difetto dell'uno è un valore approssimato per difetto dell'altro ed ogni valore approssimato per eccesso dell'uno è un valore approssimato per eccesso dell'altro.

112. Siccome una proporzione fra segmenti si riduce ad una proporzione fra le loro misure, cioè ad una proporzione fra numeri, valgono per le proporzioni fra segmenti tutte le proprietà che nell'aritmetica si sono viste per le proporzioni fra numeri (1). E si adottano pure denominazioni analoghe.

Così il primo e il terzo segmento della proporzione diconsi *antecedenti*; il secondo e il quarto *conseguenti*. Il primo e il quarto diconsi *estremi*; il secondo e il terzo diconsi *medi*.

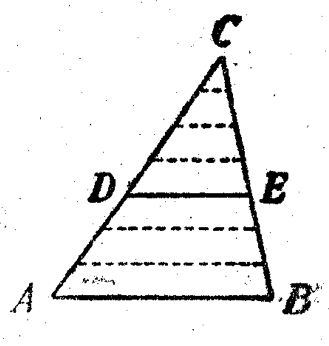
In una proporzione fra quattro segmenti si posson scambiare fra loro i medi o gli estremi, o gli antecedenti coi conseguenti, senza che la proporzione cessi di valere.

Teorema di Talete.

113. *Una parallela ad un lato di un triangolo determina sugli altri due lati segmenti proporzionali.*

Sia ABC il dato triangolo e DE sia parallela al lato AB. Dico che

$$CD : DA = CE : EB .$$



Ragioniamo nel caso più semplice in cui esiste un segmento summultiplo comune di CD e di DA. Esista p. es.

(1) Ved. le *Nozioni di aritmetica* di SEVERI e **MASCALCHI**, Capitoli VII, IIX.

un segmento contenuto esattamente 4 volte in CD e 3 volte in DA. Allora la misura di CD sarà 4 volte la misura di quel segmento e la misura di DA sarà 3 volte la misura di quel segmento. Onde $CD : DA = {}^4/_3$. Tirate pei punti di divisione le parallele al lato AB, queste parallele dividono CE ed EB in altrettanti segmenti uguali: cioè CE in 4 ed EB in 3 segmenti uguali [§ 87]. Perciò $CE : EB = {}^4/_3$. Dunque risulta $CD : DA = CE : EB$, come afferma l'enunciato del teorema.

La proporzione sussiste anche se i rapporti $CD : DA$, $CE : EB$ non posson misurarsi esattamente. Però la dimostrazione, che omettiamo, è più difficile. Essa consiste nel confrontare i valori approssimati dei due rapporti.

Corollario. *Sussiste pure la proporzione:*

$$CA : CD = CB : CE.$$

Infatti, riferendoci al caso semplice sopra considerato, si vede che $CA = CD + DA$ contiene ${}^7/_4$ di CD, epperò $CA : CD = {}^7/_4$. E similmente $CB : CE = {}^7/_4$.

Osservazione. La proporzione $CA : CD = CB : CE$ si può pure ottenere dalla $CD : DA = CE : EB$ applicando il teorema che in una proporzione la somma dei primi due termini sta al secondo come la somma degli altri due sta al quarto.

Triangoli simili.

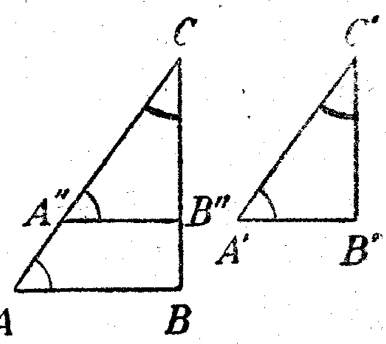
114. Due triangoli si dicono ***simili*** quando hanno la stessa ***forma***, cioè quando i loro angoli son ordinatamente uguali. È chiaro che *due triangoli simili ad un terzo son simili fra loro.*

In due triangoli simili si chiamano *corrispondenti* due angoli uguali e due lati opposti a due angoli uguali.

In due triangoli simili i lati corrispondenti son proporzionali.

Sieno $ABC, A'B'C'$ due triangoli simili, aventi $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$, $\widehat{C} = \widehat{C'}$. Preso sul lato AC un punto A''

tale che $CA'' = C'A'$, si tiri da A'' la parallela al lato AB, la quale incontri CB in B''. I due angoli $C\widehat{A}B$, $C\widehat{A''}B''$ sono uguali, come alterno interni rispetto alle parallele AB,$A''B''$, tagliate da CA. D'altronde l'angolo $\widehat{A}$ è uguale all'angolo $\widehat{A'}$; perciò i due triangoli $CA''B''$, $C'A'B'$ hanno uguali gli angoli in A'',A'. Di più essi hanno uguali gli angoli in C,C' e i lati CA'', $C'A'$. Onde, pel secondo caso di uguaglianza, i due triangoli risultano uguali.



Ora, pel corollario del teorema di Talete, sussiste la proporzione

$$CA : CA'' = CB : CB'' ;$$

ma $CA'' = C'A'$, $CB'' = C'B'$, dunque:

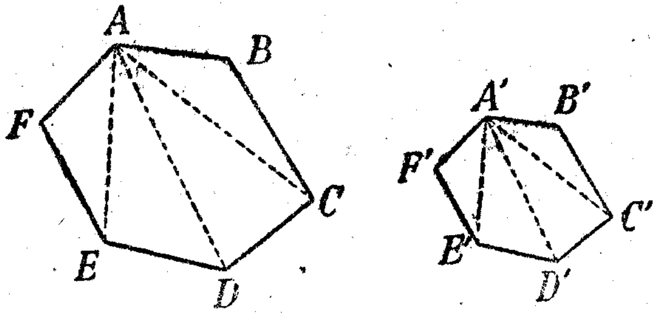
$$CA : C'A' = CB : C'B'.$$

Analogamente si dimostrerebbe che $CA : C'A' = AB : A'B'$.

Perciò il rapporto di due lati corrispondenti è sempre lo stesso, qualunque sia la coppia di lati corrispondenti che si considerano.

Poligoni simili.

115. Due poligoni si dicono ***simili*** quando hanno la stessa ***forma,*** cioè quando si posson decomporre in un ugual numero di triangoli simili e *similmente disposti*.



Così p. es. i poligoni $ABCDEF$, $A'B'C'D'E'F'$, qui vicino disegnati, son simili, perchè dalle diagonali per A e per A' son decomposti ciascuno in 4 triangoli, che sono a coppie simili, e *similmente disposti*.

Cioè: ACD giace, rispetto ad AC, dalla parte opposta del triangolo ABC, e così $A'C'D'$ giace rispetto ad $A'C'$ dalla parte opposta di $A'B'C'$, e inoltre i vertici A,A' e C,C', corrispondenti nei triangoli $ABC,A'B'C'$ son corrispondenti anche nei triangoli $ACD,A'C'D'$; ADE giace, rispetto ad AD, dalla parte opposta del quadrangolo $ABCD$, e così $A'D'E'$ giace, rispetto ad $A'D'$, dalla parte opposta del quadrangolo $A'B'C'D'$, e inoltre i vertici A,A' e D,D', corrispondenti nei triangoli ACD, $A'C'D'$, lo sono pure nei triangoli $ADE,A'D'E'$; ecc.

Le coppie di triangoli simili, in cui vengon decomposti i due poligoni, si chiaman coppie di *triangoli corrispondenti*; due *vertici* dei due poligoni si dicon *corrispondenti* quando tali sono per due triangoli simili corrispondenti; due *angoli* dei due poligoni si dicon *corrispondenti* quando i loro vertici son corrispondenti, e due *lati* si dicon *corrispondenti* quando congiungono coppie di vertici corrispondenti.

116. *In due poligoni simili gli angoli corrispondenti sono eguali e i lati corrispondenti sono proporzionali.*

1°) Infatti, nei poligoni $ABCDEF,A'B'C'D'E'F'$ gli angoli in A,A' sono uguali, perchè son somme di angoli corrispondenti delle quattro coppie di triangoli simili in cui vengon decomposti i due poligoni; gli angoli $\widehat{B},\widehat{B'}$ sono uguali, perchè sono corrispondenti in due triangoli simili; gli angoli $\widehat{C},\widehat{C'}$ sono uguali, perchè son somme di angoli corrispondenti di due coppie di triangoli simili; ecc. Dunque gli angoli corrispondenti dei due poligoni sono uguali.

2°) Dimostriamo che i lati corrispondenti sono proporzionali.

Per la similitudine dei due triangoli $ABC,A'B'C'$, si ha:

$$AB : A'B' = BC : B'C' = AC : A'C'.$$

Per la similitudine dei due triangoli $ACD,A'C'D'$ si ha:

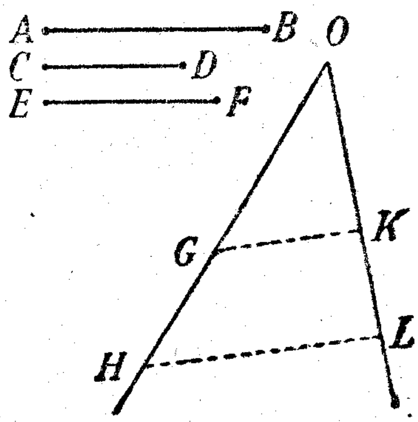
$AC : A'C' = CD : C'D' = AD : A'D'$; e così proseguendo.

Onde i rapporti $AB : A'B'$, $BC : B'C'$, $CD : C'D'$,...., delle coppie di lati corrispondenti, sono uguali fra loro.

Costruzioni varie.

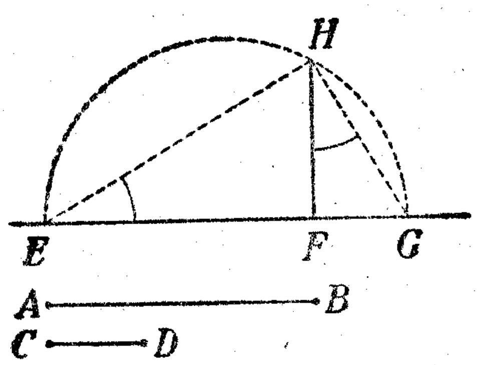
117. Problema 1°. *Costruire il segmento quarto proporzionale dopo tre dati* (1).

Dati i segmenti AB, CD, EF, si tracci sul piano un angolo arbitrario e dal vertice O si riportino successivamente sopra un lato i segmenti $OG = AB$, $GH = CD$; e sull'altro lato il segmento $OK = EF$. Congiunto G con K, da H si tiri la parallela a GK, che incontri il lato OK in L. Dal teorema di Talete segue: $OG : GH = OK : KL$, cioè $AB : CD = EF : KL$. Dunque KL è il quarto proporzionale richiesto.



118. Problema 2°. *Costruire il segmento medio proporzionale fra due dati* (2).

Dati i segmenti AB, CD, si riportino successivamente sopra una retta in EF, FG. Si tracci indi una semicirconferenza di diametro EG e s'intersechi in H questa semicirconferenza colla perpendicolare in F ad EG. Dico che il segmento HF è medio proporzionale fra EF, FG (ossia fra AB, CD), cioè che sussiste la proporzione $EF : HF = HF : FG$.



Per dimostrarlo, si osservi che i due triangoli EFH, HFG son simili. Invero, gli angoli $H\widehat{E}F, G\widehat{H}F$ sono

(1) In una proporzione fra segmenti, come in una fra numeri, il quarto termine si chiama *quarto proporzionale* dopo gli altri tre.

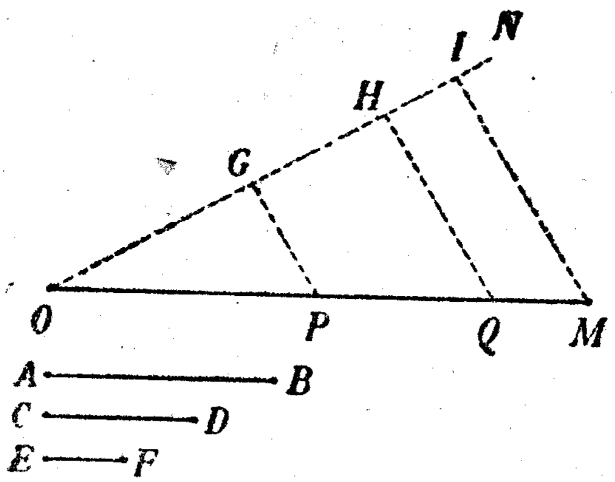
(2) In una proporzione in cui i medi sieno uguali, ognuno dei medi si chiama *medio proporzionale* fra gli estremi.

uguali, essendo tutti e due complementari dell'angolo $E\widehat{G}H$, perchè l'angolo $E\widehat{H}G$ è retto [§ 85]; e gli angoli in F sono pure retti.

Dunque il terzo angolo dell'uno dei triangoli considerati è uguale al terzo angolo dell'altro e i due triangoli sono equiangoli, epperò simili.

Dalla loro similitudine segue [§ 114] che i lati corrispondenti son proporzionali, cioè che $EF : HF = HF : FG$, come si voleva provare.

119. Problema 3°. *Dividere un segmento in parti proporzionali a più altri.*



Sia il segmento OM da dividere in parti proporzionali ai segmenti AB, CD, EF. Sopra una semiretta ON, condotta per O, si riportino i segmenti $OG = AB$, $GH = CD$, $HI = EF$.

Congiunto I con M, da G, H si tirino le parallele ad IN. Esse tagliano OM, nei punti P, Q e i tre segmenti OP, PQ, QM sono proporzionali ad OG, GH, HI, cioè ai segmenti dati AB, CD, EF. La dimostrazione è analoga a quella indicata pel teorema di Talete.

ESERCIZI

212. Le proprietà delle proporzioni fra numeri si mutano in proprietà delle proporzioni fra segmenti, sostituendo a questi le loro misure [§ 112]. Si possono così dimostrare le proprietà seguenti fino all'Es. 215 inclusivo.

213. Se in una proporzione $a : b = c : d$, fra quattro segmenti, è $a > b$, risulta $c > d$.

214. Se in una proporzione $a : b = c : d$ fra segmenti, è $a > c$, risulta $b > d$. (S'invertano i medi).

215. Dalla proporzione $a : b = c : d$ fra segmenti, *componendo* si deduce $a + b : b = c + d : d$. Se poi $a > b$ (e quindi $c > d$, Es. 213) *decomponendo* si deduce $a - b : b = c - d : d$.

216. Una retta parallela ad un lato d'un triangolo divide uno dei lati restanti in due parti di cm 2,3 e di cm 6,8. Quali sono le misure delle parti in cui è diviso da quella parallela il lato ulteriore che è di cm 12 ?

217. Conservando gli stessi dati dell' Es. precedente, determinare la lunghezza del lato a cui si è condotta la parallela (si tenga conto del § 114).

218. Un triangolo ha due lati lunghi m 12 e m 20. Nel primo lato, a partire dal vertice comune, si è preso un segmento di m 7. Quale lunghezza si dovrà prendere sull'altro lato, a partire dal detto vertice, perchè la congiungente dei due punti di divisione sia parallela al terzo lato ?

219. Se più rapporti fra segmenti sono uguali fra loro, cioè: $a : a' = b : b' = c : c' = ...$, la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti come un antecedente qualunque al suo conseguente. (Si riduce alla proprietà analoga dei rapporti fra numeri).

220. Un triangolo ha i lati di metri 3,5 ; 4 ; 5,2. Quali sono le lunghezze dei lati di un triangolo simile al dato, il cui perimetro sia di m 5 ?

221. La bisettrice d'un angolo d'un triangolo divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due lati. (Sia ABC il dato triangolo e BD sia la bisettrice dell'angolo in B. Lo scolaro faccia la figura e tiri da C la parallela a BD prolungandola fino ad incontrare in E il prolungamento di AB).

222. Un triangolo ha i lati di 9, 7, 12 metri di lunghezza. Trovare le lunghezze dei segmenti in cui i lati sono divisi dalle bisettrici degli angoli del triangolo.

223. Se due triangoli hanno i lati rispettivamente paralleli o perpendicolari sono simili.

224. Più rette parallele staccano sopra due trasversali segmenti proporzionali. (Questa è la forma generale del teorema di Talete e si dimostra con un ragionamento analogo a quello del § 113, tenuto conto del § 87).

225. Due triangoli $ABC, A'B'C'$ aventi uguali gli angoli in A, A' e proporzionali i lati che comprendono questi angoli son simili. (Presi su AB, AC due segmenti AB'', AC'' rispettivamente uguali ad $A'B', A'C'$, il triangolo $AB''C''$ è uguale ad $A'B'C'$. Si tenga conto del teorema di Talete e dell' Es. 151).

226. In due poligoni simili i perimetri stanno fra loro come due lati corrispondenti. (Si tenga conto dell' Es. 219).

227. In un triangolo rettangolo l'altezza relativa all' ipotenusa è media proporzionale fra i segmenti ch'essa determina sui cateti. (Si tenga conto dell' Es. 88 ; rivedere anche il § 118).

228. Calcolare l'altezza di un triangolo rettangolo relativa all' ipotenusa, sapendo ch'essa divide questa in due segmenti lunghi 3 e 6 centimetri.

229. Calcolare anche le lunghezze dei cateti del precedente triangolo.

230. Se due corde di un cerchio si tagliano, si può formare una proporzione prendendo come estremi i segmenti in cui una corda è divisa e come medi i segmenti in cui è divisa l'altra. (Si congiunga un estremo di una corda con un estremo dell'altra, eppoi si congiungano i due estremi rimanenti. I triangoli ottenuti sono simili).

231. Due secanti di un cerchio condotte da un punto esterno O e le loro parti esterne sono in proporzione inversa. (Il concetto di proporzionalità inversa è noto dall'arimetica. Se le due secanti incontrano la circonferenza nei punti A,B e C,D, i triangoli OAC,OBD sono simili).

232. Condotte da un punto O esterno ad un cerchio una tangente ed una secante, la tangente è media proporzionale fra la secante e la parte esterna. (Se la secante incontra la circonferenza in B,C e la tangente la tocca in A, i triangoli OAB,OCA sono simili).

233. Il rapporto delle altezze di due triangoli simili, relative a lati corrispondenti, è uguale al rapporto di due lati corrispondenti.

234. La proprietà analoga a quella dell' Es. 233 sussiste per le bisettrici di due angoli corrispondenti.

235. La proprietà analoga sussiste per le mediane di due lati corrispondenti.

236. I raggi dei cerchi circoscritti a due triangoli simili stanno fra loro come due lati corrispondenti.

237. La proprietà analoga vale pei raggi dei cerchi inscritti.

238. Dato un pentagono, costruirne uno simile, essendo assegnato il lato corrispondente a un lato fissato del primo.

239. Dividere un dato segmento in parti proporzionali ai numeri 2 ; 3 ; 0,5.

240. Un triangolo isoscele il cui angolo al vertice abbia l'ampiezza di 36° è diviso dalla bisettrice d'un angolo alla base in due triangoli isosceli, di cui uno è simile al dato.

241. Costruire un triangolo, conoscendone gli angoli alla base e l'altezza. (Si costruisca un triangolo avente quei due angoli alla base. Esso è simile al richiesto).

242. Costruire un triangolo conoscendone gli angoli alla base e la bisettrice del terzo angolo.

243. Costruire un triangolo conoscendone gli angoli alla base e la mediana della base.

244. Costruire un triangolo conoscendone gli angoli alla base e il perimetro. (Questi tre ultimi problemi si risolvono in modo analogo a quello accennato per l' Es. 241).

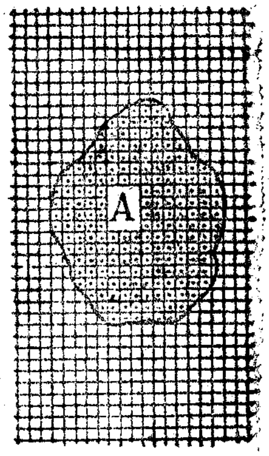
245. Dividere un segmento in un dato rapporto. (Sopra una semiretta uscente da un estremo del segmento si riportino successivamente a partire da quest'estremo due segmenti aventi il dato rapporto, eppoi si ricordi il § 119).

CAPITOLO OTTAVO

Misura dei poligoni.

Concetto di misura d'una superficie piana.

120. Si voglia misurare una superficie piana qualunque A. Se ne riporti il contorno (p. es. mediante un foglio di carta lucida) sulla carta millimetrata e si contino quanti millimetri quadrati cadono internamente alla superficie. Il conto si potrà agevolare segnando con un puntino l'interno di ciascuno di quei quadrati, a mano a mano che si contano. Se troviamo p. es. 67 quadratini tutti interni ad A, potremo dire che mm^2 67 è una ***misura approssimata per difetto della superficie.*** Per avere una ***misura approssimata per eccesso,*** basta aggiungere a 67 il numero dei quadratini che sono in parte interni e in parte esterni alla superficie.



Di ogni superficie piana si può dunque considerare la ***misura*** rispetto ad una unità di superficie. Quest'unità in pratica è il *metro quadrato* o un suo multiplo o summultiplo decimale, come si è visto nell'aritmetica.

Può darsi che si ottenga così una misura esatta della superficie, oppure che ci si debba contentare di una misura approssimata. In ogni caso, prendendo come unità il quadrato costruito sopra una parte aliquota decimale abbastanza piccola del metro, si riescirà ad avere misure per difetto e per eccesso talmente approssimate, da soddisfare a qualsiasi esigenza pratica.

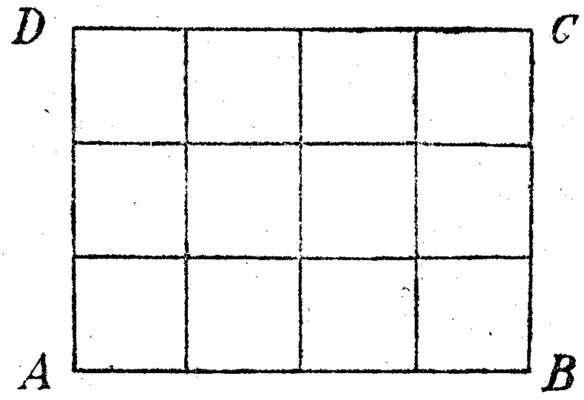
La misura di una superficie rispetto ad una fissata unità, si chiama pure ***area della superficie.***

È intuitivo che:

Superficie equivalenti hanno aree uguali; e, viceversa, due superficie aventi aree uguali sono equivalenti.

Aree di poligoni.

121. Area di un rettangolo. Sia il rettangolo $ABCD$, avente la base AB lunga 4 centimetri e l'altezza BC lunga 3 centimetri. Segnamo su AB i 4 centimetri che compongono il segmento, e su BC i 3 centimetri; e dai punti di divisione tiriamo le parallele ai lati. Si decompone così il rettangolo in tanti centimetri quadrati. Quanti sono? Siccome in ogni fila orizzontale vi sono tanti quadrati quanti centimetri vi sono sulla base, e le file son tante quanti i centimetri che costituiscon l'altezza, i quadrati ricoprenti il dato rettangolo sono in numero di $4 \times 3 = 12$. Pertanto l'area di $ABCD$ è uguale a $cm^2\ 12$. Si ottiene così la



Regola. *L'area di un rettangolo è il prodotto delle misure della base e dell'altezza* (1).

Se si prende come unità di misura delle lunghezze il metro, si deve assumere come unità di misura delle superficie il metro quadrato. Ma la regola vale ancora. Infatti in tal caso:

$$\text{base} = m\ 0{,}04\ ,\quad \text{altezza} = m\ 0{,}03\ ,\quad \text{area rettangolo} = m^2\ 0{,}0012.$$

(1) Si sottintende (qui e nelle regole seguenti) che i segmenti sono misurati con una medesima unità di lunghezza e le superficie

Se la base del rettangolo fosse di 43 millimetri e l'altezza di 57 millimetri, si decomporrebbe similmente il rettangolo in $43 \times 57 = 2451$ millimetri quadrati e si avrebbe:

$$\text{base} = m\,0{,}043\ ,\ \text{altezza} = m\,0{,}057\ ,\ \text{area rettangolo} = \\ = m^2\,0{,}002451.$$

Insomma, qualunque sieno i numeri decimali che dànno le misure della base e dell'altezza del rettangolo, vale sempre la regola enunciata.

Se della base e dell'altezza si conoscono soltanto misure approssimate espresse in metri e unità decimali di metro, il prodotto di queste misure fornisce l'*area approssimata del rettangolo*, espressa in metri quadrati e unità decimali corrispondenti. E se le misure della base e dell'altezza son per difetto, tale risulta l'area approssimata del rettangolo; se invece sono per eccesso, anche questa risulta per eccesso.

OSSERVAZIONE. Quando base ed altezza del rettangolo sono misurate con unità diverse, prima di applicare la regola occorre ridurre le misure alla stessa unità.

Così, se la base è di *cm* 3 e l'altezza di *mm* 18, si ridurrà tutto ad es. in *mm*. Si prenderà cioè come misura della base *mm* 30 e come misura dell'altezza *mm* 18. L'area del rettangolo risulta di $mm^2\,(30 \times 18)$, cioè di $mm^2\,540$.

122. Se le misure della base e dell'altezza di un rettangolo (riferite ad una stessa unità di misura delle lunghezze) s' indicano rispettivamente con b e con h, l'area A verrà espressa da $b \times h$. Si avrà cioè la *formula* dell'area:

$$A = b \times h,\ \text{che si scrive pure: } A = bh\ (^1).$$

In ogni caso numerico al posto di b va sostituita la misura della base, al posto di h la misura dell'altezza

(¹) Il segno × si sottintende spesso nella indicazione del prodotto di due numeri, quando questi son rappresentati da lettere.

(rispetto alla stessa unità) e al posto di A il prodotto delle due misure.

123. Area di un quadrato. Siccome un quadrato è un rettangolo che ha la base uguale all'altezza, dalle regole precedenti si ricava la

Regola. *L'area di un quadrato è la seconda potenza della misura del lato.*

Se l è la misura del lato del quadrato ed A la sua area, si ha la formula:

$$A = l^2,$$

che equivale, come si sa dall'aritmetica, alla formula $l = \sqrt{A}$.

Data l'area di un quadrato se ne può calcolare con questa formula il lato. Così se $A = \boldsymbol{m}^2\, 0{,}0025$, sarà $l = \boldsymbol{m} \sqrt{0{,}0025}$, cioè $l = \boldsymbol{m}\, 0{,}05$.

124. Area di un parallelogrammo. Siccome un parallelogrammo è equivalente ad un rettangolo avente base ed altezza uguali a quelle del parallelogrammo [§ 106] e due superficie equivalenti hanno la stessa area, si ottiene la

Regola. *L'area di un parallelogrammo è uguale al prodotto delle misure della base e dell'altezza.*

Vale perciò la stessa formula che esprime l'area di un rettangolo.

125. Area di un triangolo. Siccome un triangolo è equivalente alla metà di un parallelogrammo avente base ed altezza uguali a quelle del triangolo [§ 107], vale la

Regola 1ª. *L'area di un triangolo è uguale alla metà del prodotto delle misure della base e dell'altezza.*

Ora si ricordi dall'aritmetica che tanto fa dividere per 2 il prodotto di due numeri, come dividere per 2 uno dei fattori e moltiplicare il quoziente per l'altro. Perciò:

Regola 2ª. *L'area di un triangolo è uguale al prodotto della misura della base per metà della misura dell'altezza; oppure al prodotto della misura di metà della base per la misura dell'altezza.*

Queste varie forme della regola che dà l'area A di un triangolo, di base b e di altezza h sono espresse dalle formole:

$$A = \frac{bh}{2} \quad , \quad A = b\frac{h}{2} \quad , \quad A = \frac{b}{2}h.$$

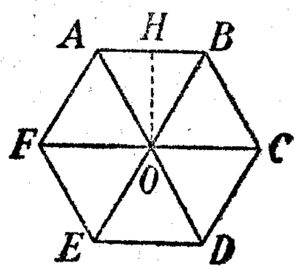
126. Area di un trapezio. Ricordiamo che un trapezio è equivalente ad un triangolo avente altezza uguale a quella del trapezio e base uguale alla somma delle basi [§ 108]. Dalla regola che fornisce l'area di un triangolo si deduce perciò la

Regola. *L'area di un trapezio è uguale alla metà del prodotto delle misure della somma delle basi e dell'altezza.*

Se a,b designano le misure delle basi del trapezio ed h è la misura dell'altezza, l'area A del trapezio è espressa dalla formula

$$A = \frac{(a+b)h}{2}.$$

127. Area di un poligono regolare. Sia p. es. un esagono regolare $ABCDEF$. Congiunto il centro O del poligono [§ 97] coi vertici, il poligono si decompone in tanti triangoli uguali, quanti sono i lati. Questi triangoli, essendo uguali, hanno uguali altezze rispetto ai lati opposti al vertice O. Una qualunque OH di tali altezze si chiama ***apotema*** del poligono.



L'area del poligono è la somma delle aree dei triangoli uguali che compongono il poligono; ond'essa riducesi all'area di uno dei triangoli ripetuta tante volte quanti sono i lati. Si ha così la

Regola 1ª. *L'area di un poligono regolare è uguale al semiprodotto delle misure di un lato e dell'apotema, moltiplicato pel numero dei lati del poligono.*

Se l è la misura del lato del poligono, n il numero dei lati, a la misura dell'apotema, l'area A del poligono viene espressa da

$$A = \frac{la}{2}n.$$

Questa formula, secondo le regole dell'aritmetica, si può anche scrivere:

$$A = \frac{(ln)a}{2},$$

e siccome ln è uguale alla misura p del perimetro, si ha:

$$A = \frac{pa}{2},$$

donde la

REGOLA 2ª. *L'area di un poligono regolare è uguale al semiprodotto delle misure del perimetro e dell'apotema.*

ESERCIZI

246. La base e l'altezza di un rettangolo sono rispettivamente di cm 25 e cm 72. Trovare l'area del rettangolo, esprimendola in metri quadrati, in decimetri quadrati e in centimetri quadrati.

247. La base e l'altezza di un parallelogrammo sono rispettivamente di m 7,25 è di m 3,48. Trovare l'area.

248. L'area di un rettangolo è di m² 1,53 e l'altezza è di m 0,45. Trovare la misura della base.

249. In un rettangolo di m² 0,27 di area, la base è i $^5/_8$ dell'altezza. Trovare le misure della base e dell'altezza.

250. In un rettangolo il perimetro è di m 5,24 e la base è tripla dell'altezza. Trovare l'area.

251. La diagonale di un quadrato è di m 0,78. Trovare l'area del quadrato.

252. Un terreno, a forma rettangolare, avente le *dimensioni* [1] di m 52 e m 127, è stato venduto a lire ventimila l'ettaro. Qual' è il prezzo totale di vendita?

253. Quanti mattoni occorrono per pavimentare un magazzino avente le dimensioni di m 9 e m 10,80, se ogni mattone è un rettangolo avente le dimensioni di m 0,15 e m 0,30?

254. La base di un triangolo è di m 4,30 e l'altezza e di dm 72. Trovare l'area del triangolo espressa in m², in dm², in cm².

255. L'area di un triangolo è di m² 2,35 e la base è di cm 59. Trovare l'altezza espressa in dm.

256. In un triangolo la somma della base e dell'altezza ha una lunghezza di m 9,40 e inoltre l'altezza è i $^2/_3$ della base. Trovare l'area del triangolo.

---

[1] Le lunghezze di due lati consecutivi di un rettangolo si chiamano anche le *dimensioni* di questo.

257. Le diagonali di un rombo sono di m 2,17 e di m 1,25. Trovare l'area del rombo.

258. Le basi di un trapezio sono di m 3,34 e di m 1,56 e l'altezza è di m 0,52. Trovare l'area del trapezio espressa in m², in dm², in cm².

259. Trovare l'altezza del triangolo che si ottiene dal trapezio precedente prolungando i lati non paralleli e calcolare l'area di questo triangolo.

260. Calcolare la lunghezza della base di un triangolo isoscele di m 1,22 di altezza, il quale sia equivalente ad un rettangolo avente le dimensioni di m 0,52 e m 0,37.

261. Trovare la base minore di un trapezio avente l'area di m² 5,25 essendo la base maggiore i $^9/_5$ della minore e l'altezza del trapezio essendo di m 1,50.

262. La quantità di vernice con cui è stata verniciata una tavola quadrata è tripla della quantità di vernice occorsa per verniciare due piccoli tavolini di m² 0,60 e di m² 0,85 di area. Qual' è il lato della tavola quadrata?

263. L'apotema di un triangolo equilatero è sempre metà del raggio del cerchio circoscritto. (La proprietà si può dedurre p. es. dall' Es. 177). Ciò premesso, si calcoli l'area di un triangolo equilatero, il cui lato sia di m 2,30.

264. Dal teorema premesso all' Es. precedente si deduce che il lato di un triangolo equilatero si ottiene moltiplicando per $\sqrt{3}$ il raggio del cerchio circoscritto. Ciò premesso, si calcoli l'area di un triangolo equilatero inscritto in un cerchio di cm 12 di raggio.

265. Il lato di un esagono regolare è lungo m 2,70. Calcolare l'area dell'esagono. (Si calcoli l'area di uno dei 6 triangoli equilateri uguali in cui l'esagono può decomporsi).

266. I calcoli relativi a taluni poligoni regolari possono essere agevolati dalla seguente tabella:

triangolo	$a = 0{,}288l$	$l = 3{,}464a$	$A = 0{,}433l^2$
quadrato	$a = 0{,}500l$	$l = 2{,}000a$	$A = 1{,}000l^2$
pentagono	$a = 0{,}688l$	$l = 1{,}453a$	$A = 1{,}720l^2$
esagono	$a = 0{,}866l$	$l = 1{,}155a$	$A = 2{,}598l^2$
ottagono	$a = 1{,}207l$	$l = 0{,}829a$	$A = 4{,}898l^2$
decagono	$a = 1{,}539l$	$l = 0{,}645a$	$A = 7{,}694l^2$
dodecagono	$a = 1{,}866l$	$l = 0{,}536a$	$A = 11{,}196l^2$

In tale tabella l,a denotano le misure rispettive del lato e dell'apotema del poligono regolare considerato e A denota l'area, prendendo come unità di misura delle superficie il quadrato costruito sull'unità di misura delle linee. Così p. es. dal lato di un triangolo equilatero si ottiene l'apotema moltiplicando per 0,288; dall'apotema si ottiene il lato moltiplicando per 3,464; e dal quadrato del lato si ottiene l'area moltiplicando per 0,433.

267. Mediante la tabella precedente calcolare l'area di un pentagono di m 1,20 di lato.

268. Analogamente per un ottagono di m 0,52 di lato.

269. Analogamente per un decagono di m 2,25 di lato.

270. Qual' è approssimativamente il numero di piastrelle esagonali con cui si può pavimentare una stanza rettangolare avente le dimensioni di m 3,20 e di m 4,50, se ogni piastrella ha 5 centimetri di lato?

271. Il rapporto delle aree di due triangoli simili (si chiama anche *rapporto dei due triangoli*) è uguale al quadrato del rapporto di due lati corrispondenti. (Per dimostrarlo, si tenga conto che in due triangoli simili le altezze stanno fra loro come due lati corrispondenti).

272. Il rapporto delle aree di due poligoni simili (si chiama anche *rapporto dei due poligoni*) è uguale al quadrato del rapporto di due lati corrispondenti. (Basta decomporre i due poligoni in coppie di triangoli simili, mediante le diagonali uscenti da due vertici corrispondenti, e tener conto dell' Es. 219).

273. In un certo triangolo rettangolo un cateto è i $^3/_5$ dell'altro. Qual' è il rapporto fra i due triangoli rettangoli in cui il dato viene decomposto dall'altezza relativa all' ipotenusa? (Si ricordi che tali triangoli sono simili fra loro e al dato).

274. Trovare il lato di un esagono regolare che sia equivalente alla metà di un esagono regolare il cui lato è m 2.

275. Se $a:b=c:d$ è una proporzione fra quattro segmenti, il rettangolo che ha per dimensioni gli estremi è equivalente al rettangolo che ha per dimensioni i medi. (Basta passare ad una proporzione fra numeri prendendo le misure dei segmenti; ricordare che in una proporzione fra numeri il prodotto degli estremi è uguale al prodotto dei medii e tener conto infine del § 121).

CAPITOLO NONO

Misure della circonferenza e del cerchio.

Lunghezza d'una circonferenza.

128. Due linee si posson concepire come due fili e se ne possono perciò confrontare le lunghezze, imaginando di tenderle. S'esse dànno segmenti uguali, avranno ***ugual lunghezza***; se dànno segmenti disuguali, la linea che si distende sul segmento maggiore, avrà ***maggiore lunghezza*** rispetto all'altra.

Si può per es. ottenere la lunghezza della circonferenza di un disco circolare, avvolgendo attorno al disco un filo e misurando poi la lunghezza di quella parte del filo che circonda una sola volta la circonferenza.

È intuitivo che quando il diametro d'una circonferenza si raddoppia o si triplica o si moltiplica per un numero qualunque, la lunghezza della circonferenza risulta raddoppiata, triplicata o moltiplicata per quel numero. Si può dunque dire che:

Il rapporto fra la lunghezza di una circonferenza e il diametro è sempre lo stesso qualunque sia la circonferenza.

Questo rapporto fisso fra una circonferenza e il rispettivo diametro s' indica colla lettera greca π (che si legge «p greco»).

Il modo di calcolare le successive cifre di π non può indicarsi in un libro elementare. Per le applicazioni pratiche meno raffinate basta conoscere π con due cifre decimali. Si ha precisamente:

$$\pi = 3{,}14.$$

Per applicazioni più fini occorrono valori più approssimati di π. P. es. un valore di π approssimato per difetto, con dieci cifre decimali, è

$$\pi = 3{,}1415926535.$$

Conosciuto il numero π, siccome il rapporto fra la circonferenza e il diametro è uguale al quoto delle loro misure [110], si ha la

REGOLA 1ª. *La misura della circonferenza è uguale al prodotto della misura del diametro pel numero fisso* π.

129. Denotando con d la misura del diametro, con c la misura della circonferenza si ha dunque

$$c = \pi d.$$

Se r è la misura del raggio sarà $d = 2r$ e quindi

$$c = 2\pi r,$$

cioè:

REGOLA 2ª. *La misura della circonferenza è il doppio prodotto della misura del raggio pel numero* π.

130. Se è data la misura c della circonferenza, la misura del raggio viene uguale al quoto di c per 2π, cioè:

REGOLA. *La misura del raggio si ottiene dividendo per* 2π *la misura della circonferenza.*

Lunghezza d'un arco.

131. Un arco di circonferenza si può misurare in gradi, primi, secondi collo stesso numero che misura l'angolo al centro sotteso. La misura di un arco in gradi, primi, secondi si chiama *ampiezza dell'arco.*

Se si conoscono l'ampiezza ed il raggio di un arco, si può facilmente determinare la lunghezza di questo. Facciamo un esempio.

PROBLEMA. *Determinare la misura della lunghezza di un arco di ampiezza* $21°32'15''$, *appartenente ad una circonferenza di* **mm** 34 *di raggio.*

L' intera circonferenza ha l'ampiezza di 360°; perciò la misura della lunghezza di un arco di 1° è la 360-esima parte della misura della circonferenza (¹) e la misura della lunghezza di un arco di 21° 32′ 15″ è data dal prodotto della misura della lunghezza di un arco di 1°, pel numero 21° 32′ 15″, che esprime l'ampiezza dell'arco dato. Si ha riassumendo: *misura circonferenza* $= 2\pi \times \boldsymbol{mm}\ 34$; *misura della lunghezza di un arco di* $1° = \frac{2\pi \times \boldsymbol{mm}\,34}{360}$; *misura* l *della lunghezza dell'arco dato* $= \frac{2\pi \times \boldsymbol{mm}\ 34}{360} \times (21°\ 32'\ 15'')$.

Si può anche scrivere:

$$l = \frac{2\pi}{360} \times 34\ \boldsymbol{mm} \times (21°\,32'\,15'')$$

e siccome $\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$, si ottiene la

REGOLA. *La misura della lunghezza di un arco è uguale al prodotto del numero fisso* $\frac{\pi}{180}$ *per la misura del raggio e per l'ampiezza dell'arco.*

Il numero $\frac{\pi}{180}$, a meno di un millesimo per difetto, è dato da:

$$\frac{\pi}{180} = 0{,}017$$

e a meno di un centimillesimo per difetto da $\frac{\pi}{180} = 0{,}01745$.

Per condurre in fondo il calcolo della lunghezza dell'arco dato prenderemo il valore 0,017 di $\frac{\pi}{180}$.

Si trova:

$$0{,}017 \times \boldsymbol{mm}\,34 = \boldsymbol{mm}\,0{,}578\,;\ l = \boldsymbol{mm}\,0{,}578 \times$$
$$\times (21°\,32'\,15'') = \boldsymbol{mm}\,0{,}578 \times 21{,}5375 = \boldsymbol{mm}\,12{,}448.$$

(¹) È intuitivo che in una circonferenza angoli al centro uguali sottendono archi uguali, cosicchè sulla data circonferenza tutti gli angoli al centro di 1° sottendono archi uguali.

Area d'un cerchio.

132. Immaginiamo di divider la circonferenza di un cerchio in un grandissimo numero di parti uguali. I punti di divisione son vertici d'un poligono regolare, il cui contorno è vicinissimo alla circonferenza e ne differisce tanto meno quanto più cresce il numero delle parti uguali in cui si è divisa la circonferenza. Nello stesso tempo la superficie di quel poligono differisce sempre meno dalla superficie del cerchio e l'apotema del poligono si avvicina sempre di più al raggio del cerchio.

Ora la superficie del poligono è misurata dal semiprodotto delle misure del perimetro e dell'apotema; onde la superficie del cerchio sarà misurata dal semiprodotto delle misure della circonferenza e del raggio. Si ha così la

Regola 1.ª *L'area d'un cerchio è il semiprodotto delle misure della circonferenza e del raggio.*

Indicata con c la misura della circonferenza e con r la misura del raggio la formula che dà l'area A del cerchio è

$$A = \frac{cr}{2}.$$

Ricordando che $c = 2\pi r$, risulta $cr = 2\pi r . r = 2\pi r^2$ e quindi

$$A = \pi r^2,$$

che si esprime colla

Regola 2ª. *L'area d'un cerchio è il prodotto del numero π per la seconda potenza della misura del raggio.*

Dalla formula $A = \pi r^2$ si deduce $r^2 = \frac{A}{\pi}$ ed estraendo la radice quadrata dai due membri

$$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}},$$

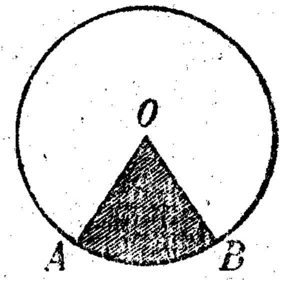
onde la

Regola. *La misura del raggio di un cerchio è la radice quadrata del quoto dell'area per π.*

Area d'un settore circolare.

133. Un ***settore circolare*** AOB è la parte comune a un dato cerchio e ad un suo angolo al centro.

Un settore circolare il cui angolo al centro sia di 1° è la 360-esima parte dell'intero cerchio (1). Ora, siccome l'area del cerchio è il semiprodotto delle misure della circonferenza e del raggio, l'area del settore di 1° sarà il semiprodotto della 360-esima parte della circonferenza e della misura del raggio; cioè il semiprodotto della misura dell'arco di 1° per la misura del raggio. Da ciò segue la



REGOLA. *L'area di un settore circolare è uguale al semiprodotto delle misure dell'arco del settore e del raggio.*

ESERCIZI

276. Trovare la lunghezza di una circonferenza il cui raggio è cm 17.

277. Trovare il raggio di una circonferenza di m 2,50 di lunghezza.

278. Trovare l'area di un cerchio il cui raggio è m 0,23.

279. Trovare il raggio di un cerchio la cui area è m^2 1,35.

280. Un'auto ha le ruote di 50 centimetri di diametro e viaggia colla velocità di km 75 all'ora. Quanti giri ha fatto ogni ruota dopo 1 ora e 20 minuti di viaggio?

281. Un orologio ha le lancette dei minuti e delle ore delle lunghezze rispettive di mm 26,3 e di mm 18. Quali lunghezze percorrono in un giorno gli estremi delle due lancette?

282. Diviso il diametro di una circonferenza in un numero qualunque di parti, anche disuguali, la somma delle lunghezze delle circonferenze che hanno per diametri le singole parti è uguale alla lunghezza della circonferenza data.

283. Qual'è il raggio del meridiano terrestre, se il metro è la quarantamilionesima parte della lunghezza del meridiano?

284. Qual'è il raggio di una circonferenza sulla quale un arco di 1' ha la lunghezza di 1 millimetro?

---

(1) È intuitivo che in un cerchio angoli al centro uguali comprendono settori uguali.

285. Trovare l'area di un cerchio la cui circonferenza sia lunga m 3,72.

286. Chiamasi *corona circolare* la superficie racchiusa fra due circonferenze concentriche di raggi diversi. Dati i raggi delle due circonferenze, trovare l'area della corona circolare.

287. Una corona circolare ha l'area di m^2 1,37 e il raggio maggiore della corona è di m 0,62. Trovare il raggio minore.

288. Trovare l'area dell'esagono regolare inscritto in un cerchio avente l'area di m^2 2,15.

289. Trovare la differenza fra le aree del quadrato inscritto e del quadrato circoscritto ad un cerchio avente l'area di m^2 0,56.

290. Trovare la lunghezza di un arco di 68° in una circonferenza di m 0,30 di raggio.

291. Un arco di 42° è lungo m 0,75. Qual' è il raggio della circonferenza a cui quell'arco appartiene?

292. Calcolare l'area di un settore circolare il cui raggio è di m 0,70 e il cui arco è di m 0,25.

293. Calcolare l'area di un settore circolare il cui angolo al centro è di 28° ed il cui arco sotteso è di m 0,34.

294. *Segmento di cerchio* è la parte di cerchio racchiusa fra un arco della circonferenza e la corda che ne unisce gli estremi. Ogni corda divide il cerchio in due segmenti. Trovare le aree di questi due segmenti in un cerchio il cui raggio sia di m 0,18, sapendo che uno dei due segmenti è i $^2/_3$ dell'altro.

295. In un cerchio di m 0,63 di raggio si consideri un arco di m 0,27 di lunghezza. Si determinino le aree dei due segmenti in cui il cerchio è diviso dalla corda che congiunge gli estremi di tale arco. (Si tenga conto che il segmento minore, insieme ad un conveniente triangolo, dà un settore circolare).

296. In un cerchio di m 1,24 di raggio si ha un settore circolare, il cui angolo al centro è di 32°. Dividere il settore in due parti equivalenti mediante un arco concentrico. Qual' è il raggio di quest'arco?

297. Quali sono i raggi di due cerchi concentrici con un cerchio di m 0,98 di diametro, se quei cerchi devono dividere il cerchio dato in tre parti equivalenti?

298. Dato un cerchio di m 0,32 di raggio, trovare il raggio di un cerchio più piccolo, concentrico col dato, tale che la corona circolare compresa fra i due cerchi sia media proporzionale fra questi.

299. Qual' è il raggio di un cerchio triplo di un cerchio di raggio m 1,26?

300. Calcolare l'area della superficie racchiusa fra tre cerchi uguali a due a due tangenti, di raggio m 0,43. (È uguale all'area del triangolo equilatero, che ha per vertici i centri, diminuita della somma di tre certi settori circolari, uguali fra loro).

CAPITOLO DECIMO

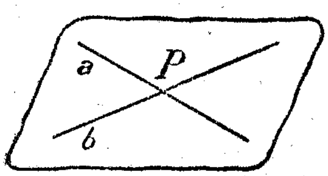
Rette e piani nello spazio.

Posizioni reciproche di due rette e di una retta e di un piano.

134. Finora ci siamo occupati della ***geometria piana***, che tratta delle figure contenute in un piano. Ora dobbiamo occuparci della ***geometria solida***, cioè dello studio delle figure dello spazio.

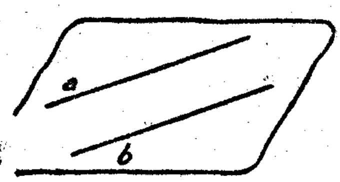
Per brevità, nel seguito useremo spesso le lettere latine minuscole a, b, c,.... per indicare le rette; le lettere latine maiuscole A, B, C,.... per indicare i punti; le lettere greche minuscole α, β, γ,.... per indicare i piani.

135. Due rette a,b dello spazio possono trovarsi nelle seguenti reciproche posizioni:



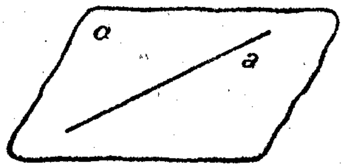
1) Le rette a,b hanno un punto comune P. Si dice allora ch'esse sono ***incidenti***. In tal caso esse giacciono in un piano, ben determinato.

2) Le rette a,b son equidistanti. Allora esse sono ***parellele*** e giacciono in un piano ben determinato.



3) Le rette a,b non giacciono in un medesimo piano e quindi non hanno un punto comune nè sono parallele. Si chiamano in tal caso due ***rette sghembe***. In una stanza uno spigolo verticale comune a due pareti ed uno spigolo orizzontale

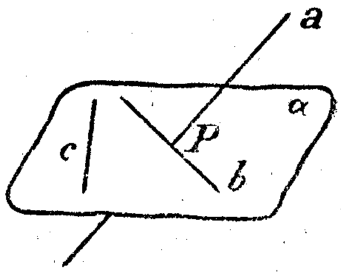
del pavimento, che non appartenga a quelle pareti, sono due rette sghembe.



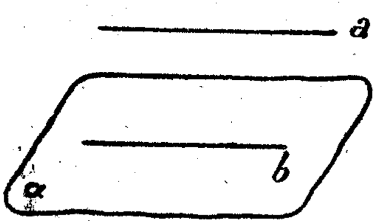
136. Una retta a ed un piano α possono trovarsi nelle seguenti reciproche posizioni:

1) La retta a giace su α.

2) La retta a ha in comune con α un solo punto P, che si chiama *punto d'incontro* o *d'intersezione* di a con α.



Le rette tracciate su α sono allora incidenti ad a in P, come la retta b della figura, oppure sono sghembe con a, come la retta c.

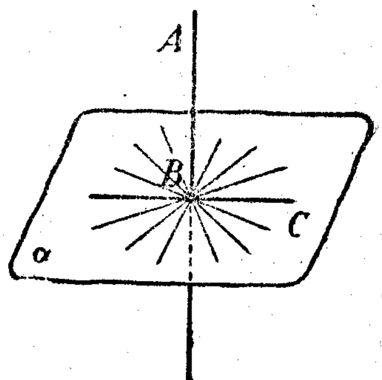


3) La retta a è parallela a qualche retta b tracciata sul piano α. Allora a non ha nessun punto comune con α e si chiama ***parallela*** a questo piano.

Retta e piano perpendicolari.

137. Sia ABC un angolo retto in B. Tenuto fisso il lato AB, si faccia ruotare BC. Questo lato descrive allora un piano α, che dicesi *perpendicolare* alla retta indefinita AB nel punto B. Si ha cioè la seguente definizione:

Un piano ed una retta, che s'incontrino in un punto, sono ***perpendicolari*** *quando la retta è perpendicolare ad ogni retta giacente sul piano e passante pel punto.*

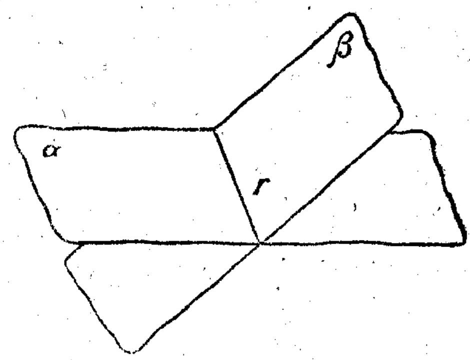


Si potrebbe dimostrare che *basta che la retta sia perpendicolare a due sole rette tracciate sul piano, perchè essa sia perpendicolare al piano.*

138. Da un punto P esterno ad un piano α si può condurre una sola perpendicolare al piano. La distanza da P al punto ove questa perpendicolare incontra il piano, chiamasi *distanza del punto dal piano.*

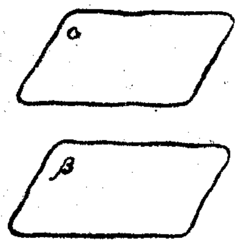
Posizioni reciproche di due piani.

139. Due piani α,β possono trovarsi nelle seguenti reciproche posizioni:



1) I due piani α,β hanno in comune i punti di una retta r, che si chiama *retta d' intersezione* dei due piani. I due piani diconsi ***incidenti***.

2) Ogni punto di ciascuno dei due piani ha la stessa distanza dell'altro, cioè i due piani sono ***equidistanti***. In tal caso essi non hanno nessun punto comune e si chiamano ***paralleli***.



140. Quando due piani son paralleli ogni retta dell'uno è parallela all'altro [Es. 307].

Due piani paralleli son segati da un medesimo piano in rette parallele [Es. 308].

Tutti i piani perpendicolari ad una retta sono paralleli fra loro [Es. 310].

Angoli diedri. Piani perpendicolari.

141. Due piani α,β incidenti secondo una retta r dividono lo spazio in quattro *parti* (fig. 1), ciascuna delle quali chiamasi un ***angolo diedro*** o semplicemente ***diedro***.

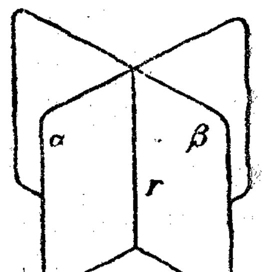


Fig. 1

Il *contorno* di ciascuna di queste parti è costituito da due semipiani (fig. 2), che hanno per comune origine la retta r. Quei semipiani si chiamano le ***facce*** del diedro. La retta comune alle facce chiamasi ***costola*** o ***spigolo*** del diedro.

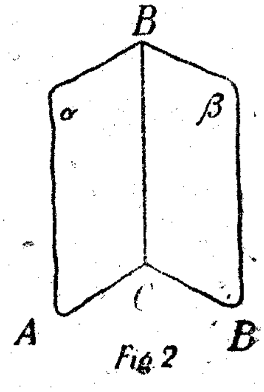
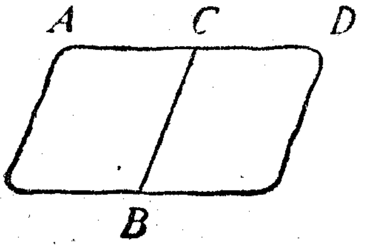


Fig. 2

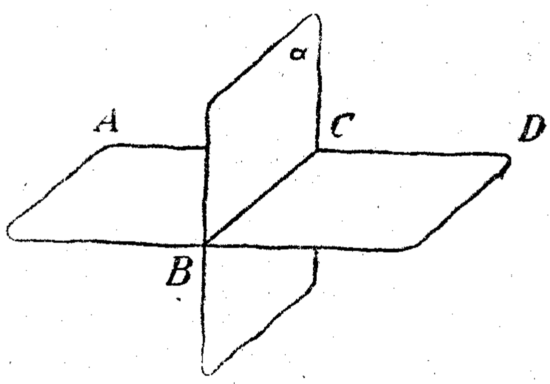
Un diedro s' indica con quattro lettere, come $A\widehat{BC}D$; due delle quali denotano punti dello spigolo e le due ulteriori indicano un punto su ciascuna faccia. Sopra le due dello spigolo, che si scrivono in mezzo, si pone il segno $\wedge$ di angolo.



142. Un diedro $A\widehat{BC}D$, che abbia le due facce sullo stesso piano, da parti opposte della costola, si chiama un ***diedro piatto.***

143. Due diedri (come due figure qualunque) si dicono ***uguali*** quando sono sovrapponibili.

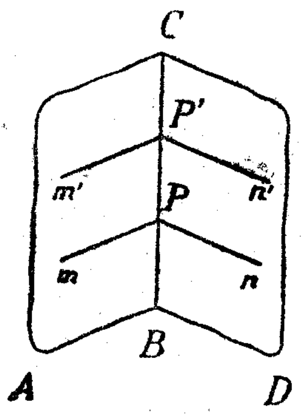
144. Se un piano α divide in due parti uguali un diedro piatto $A\widehat{BC}D$, ciascuna della due parti chiamasi un ***dietro retto*** e il piano α dicesi *perpendicolare* al piano ABD.



Dunque *un diedro retto è la metà di un diedro piatto* e due piani si dicono ***perpendicolari*** quando s'incontrano e formano attorno alla retta comune quattro diedri retti.

Se due piani son perpendicolari, ogni perpendicolare condotta ad uno di essi da un punto dell'altro giace su questo [Es. 317].

145. Per misurare un diedro $A\widehat{BC}D$ si prende sulla costola un punto qualunque P e si conducono le due semirette m, n situate sulle facce del diedro e perpendicolari alla costola. Queste due semirette sono lati d'un angolo che dicesi *rettilineo* del diedro.



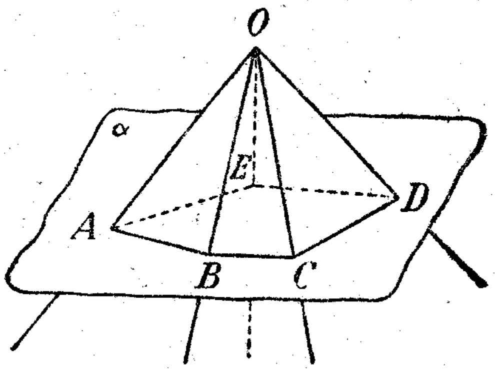
Il rettilineo relativo ad un altro punto P' della costola è uguale al rettilineo relativo a P; sicchè come *misura* o *ampiezza del diedro* può prendersi l'ampiezza di uno qualunque di questi rettilinei.

Un diedro retto ha l'ampiezza di 90° [Es. 316].

L'uguaglianza di due diedri si riconosce dall'uguaglianza dei loro rettilinei.

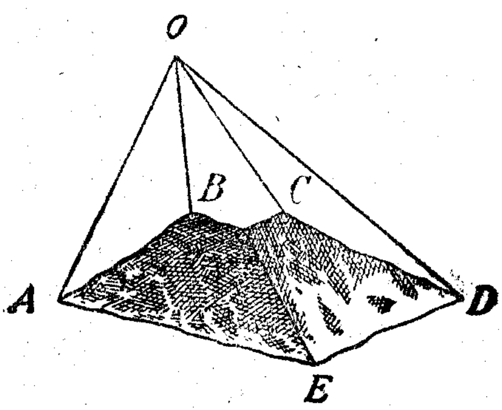
Angoloidi. Triedri.

146. Sopra un piano α sia dato un poligono $ABCDE$, e sia O un punto fuori del piano. Consideriamo le semirette OA, OB, OC, OD, OE, che congiungono O coi vertici del poligono, e gli angoli $A\widehat{O}B, B\widehat{O}C, \ldots$ determinati da due *consecutive* di quelle semirette, le quali congiungono O coi vertici consecutivi del poligono.



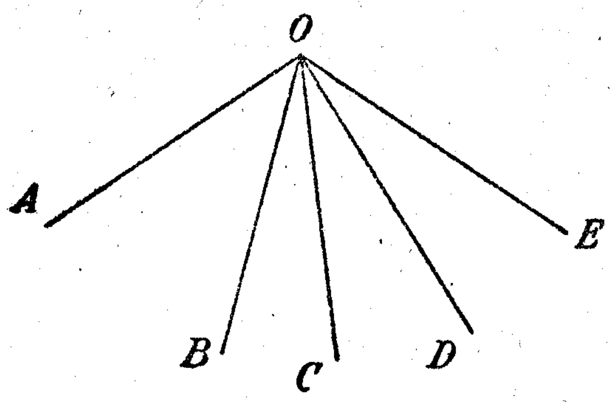
Questi angoli, uscenti dal comune vertice O, costituiscono insieme una superficie illimitata, la quale divide lo spazio in due *parti*. Ad una di queste parti appartiene il poligono $ABCDE$ ed ogni semiretta che congiunga O con un punto del poligono.

La regione dello spazio, che è riempita dalla semirette congiungenti O coi punti del poligono dato, chiamasi un ***angoloide di vertice*** O. Gli angoli $A\widehat{O}B, B\widehat{O}C, \ldots$ diconsi le ***facce*** dell'angoloide. L'insieme delle facce costituisce il ***contorno*** dell'angoloide. Le rette $OA, OB, OC, \ldots$ si chiamano ***costole*** o ***spigoli***. I diedri formati dalle facce consecutive a due a due diconsi ***diedri dell'angoloide***.



Se l'angoloide ha tre facce (e tre spigoli) dicesi ***angoloide triedro*** o semplicemente ***triedro***; se ha quattro facce (e quattro spigoli) dicesi ***angoloide tetraedro***; se ne ha cinque ***angoloide pentaedro***; ecc.

147. Se un modello di cartone di un angoloide, si taglia lungo una costola, il contorno dell'angoloide si può spiegare in un piano, come indica la vicina figura. Così



facendo, non si viene a ricoprire tutto il piano, ma soltanto un angolo $A\widehat{O}E$. Perciò:

La somma delle facce di un angoloide è sempre minore di quattro angoli retti.

ESERCIZI

301. Lo scolaro esponga per iscritto, con parole proprie, quali sono le possibili posizioni di due rette nello spazio.

302. Lo stesso, nei riguardi delle posizioni di una retta rispetto ad un piano.

303. Lo stesso, nei riguardi delle posizioni reciproche di due piani.

304. Quand' è che una retta dicesi perpendicolare ad un piano? Se una retta r non è perpendicolare nè parallela ad un piano α ed è O il punto comune ad r e ad α, esiste sempre sul piano *una* retta uscente da O e perpendicolare ad r. (È la perpendicolare in O al piano β condotto per r perpendicolarmente ad α).

305. Dati nello spazio 4 punti, non giacenti in un piano, quanti sono i piani che li congiungono a 3 a 3?

306. Per un punto si può condurre un sol piano perpendicolare ad una retta. (Se il punto sta sulla retta, la proprietà deriva dalla definizione del § 137; se il punto è fuori della retta, si conduce da esso la perpendicolare alla retta e ne sia P il piede. Il piano perpendicolare alla retta in P soddisfa alla condizione richiesta).

307. Dimostrare la prima proprietà del § 140: Se due piani sono paralleli ogni retta dell'uno è parallela all'altro. (Ragionare per assurdo).

308. Dimostrare la seconda proprietà del § 140: Due piani paralleli son segati da un terzo secondo rette parallele (Ragionare per assurdo).

309. Un piano ed una retta perpendicolari in punti distinti ad una medesima retta sono paralleli. (Si tagli il piano dato col piano determinato dalle due rette).

310. Dimostrare la terza proprietà del § 140: Due piani perpendicolari ad una retta sono paralleli fra loro. (Ragionare per assurdo).

311. Se due piani contengono due rette parallele o essi sono paralleli oppure s' incontrano in una retta a quella parallela.

312. Trovare tutte le coppie di rette parallele di due piani che s' incontrano.

313. Il luogo dei punti equidistanti dagli estremi di un segmento è il piano perpendicolare nel punto medio. (Questo piano è generato dalla rotazione, attorno al segmento, dell'asse del segmento sopra un piano passante per questo).

314. Fra tutti i segmenti che congiungono un punto P, esterno ad un piano α, coi punti di α, il minore è quello che si è definito come distanza del punto dal piano [§ 138]. (Si congiunga il piede della perpendicolare da P al piano col piede di un'obliqua).

315. Se una retta è parallela ad un piano, ogni piano passante per essa, che incontri il dato, lo sega secondo una retta parallela a quella.

316. Un diedro retto ha l'ampiezza di 90°. (Questa proprietà, enunciata senza dimostrazione nel § 145, si dimostra osservando che se un piano divide in due diedri uguali un diedro piatto, la cui costola sia r, un piano perpendicolare ad r sega i due diedri nei loro rettilinei, che sono due angoli uguali e adiacenti; epperò retti).

317. Se due piani sono perpendicolari, ogni perpendicolare ad uno di essi, da un punto P dell'altro, giace su questo. (Proprietà enunciata senza dimostrazione nel § 144. Si dimostra considerando le intersezioni dei due piani con un piano condotto per P perpendicolarmente alla loro retta comune).

318. Se una retta è perpendicolare ad un piano, ogni piano condotto per essa è perpendicolare al dato.

319. Piani paralleli staccano su rette parallele segmenti uguali.

320. Due diedri opposti allo spigolo (cioè tali che le facce dell'uno sono i semipiani opposti alle facce dell'altro) sono uguali.

321. Il luogo dei punti equidistanti dalle facce d'un diedro è un piano che divide il diedro per metà (*piano bisettore*).

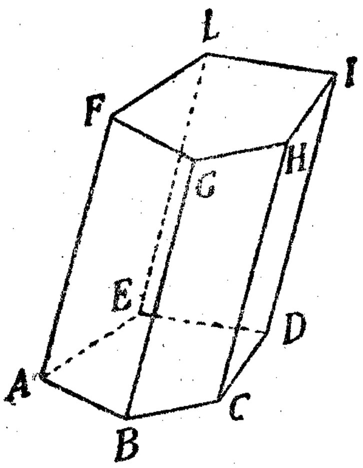
322. Due triedri opposti al vertice (cioè tali che gli spigoli dell'uno sieno i prolungamenti degli spigoli dell'altro) hanno facce e driedri uguali. Lo scolaro sia però avvertito che i due triedri non sono in generale sovrapponibili.

CAPITOLO UNDECIMO

Poliedri.

Prismi e parallelepipedi.

148. Un *solido* il cui *contorno* sia formato da tanti poligoni dicesi un ***poliedro***. Il contorno chiamasi anche la ***superficie totale del poliedro***. I poligoni del contorno diconsi le ***facce***, i loro vertici e i loro lati i ***vertici*** e le ***costole*** o ***spigoli*** del poliedro. Due facce diconsi ***consecutive*** quando hanno uno spigolo comune. I diedri formati dalle coppie di facce consecutive chiamansi ***diedri*** del poliedro. Un vertice del poliedro è comune ad almeno tre facce. Le facce del poliedro passanti per un vertice costituiscono un ***angoloide del poliedro***.



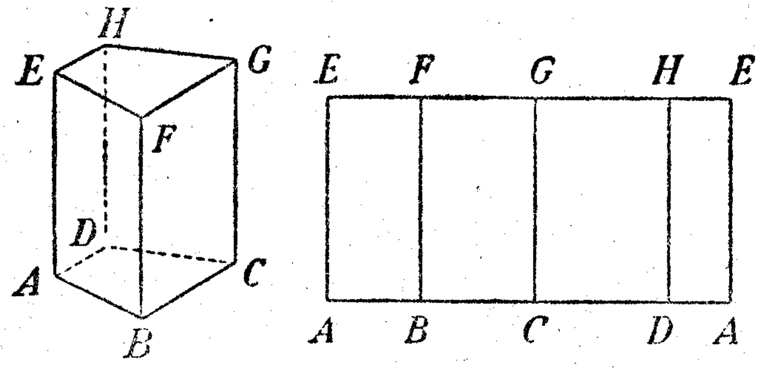
149. Se in un poliedro $ABCDEFGHIL$ vi sono due facce parallele ed uguali, dette *basi*, e le altre facce son parallelogrammi, ciascun dei quali ha per coppia di lati opposti due lati uguali delle basi, il poliedro si chiama un ***prisma***.

Nel caso della figura le basi sono i pentagoni $ABCDE$, $FGHIL$ e le altre facce sono i parallelogrammi $ABGF$, $BCHG$,... che si chiamano ***facce laterali*** del prisma. Gli spigoli non situati sulle basi chiamansi ***spigoli laterali***. L' insieme delle facce laterali costituisce la ***superficie laterale*** del prisma.

Il prisma dicesi *triangolare, quadrangolare, pentagonale*, secondo che le sue basi sono triangoli, quadrangoli, pentagoni,... Se le facce laterali sono perpendicolari alle basi, il prisma dicesi ***retto***.

Altezza di un prisma è la distanza fra le sue basi. Se il prisma è retto, l'altezza è uguale ad un qualunque spigolo laterale.

150. Area della superficie laterale di un prisma retto. Abbiasi un modello di cartone di un prisma retto $ABCDEFGH$. Colle forbici asportiamone le basi, cosicchè resterà la sola superficie laterale. Tagliata poi questa, p. es. lungo lo spigolo AE, se ne potrà fare lo *sviluppo*, distendendo le successive facce laterali in tanti rettangoli consecutivi di un piano. Così la superficie laterale si distende in un rettangolo che ha per base un segmento uguale al perimetro di una base del prisma e per altezza l'altezza del prisma. Da ciò la



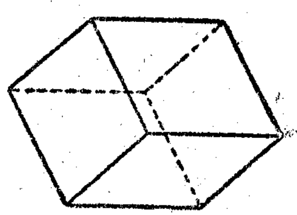
Regola. *L'area della superficie laterale d'un prisma retto è uguale al prodotto delle misure del perimetro d'una base e dell'altezza.*

Indicate con p, h le misure del perimetro d'una base e dell'altezza, si ha per l'area della superficie laterale la formula

$$A = ph.$$

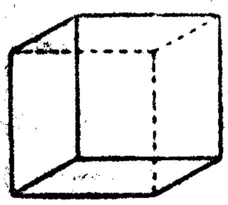
Aggiungendo il doppio dell'area di uno dei poligoni base si ha l'*area della superficie totale.*

151. Un prisma che abbia per basi due parallelogrammi dicesi un ***parallelepipedo***. Le sei facce del parallelepipedo sono a due a due parallele ed uguali, onde il parallelepipedo può esser considerato come prisma



in tre modi diversi, prendendo come basi due qualunque facce parallele.

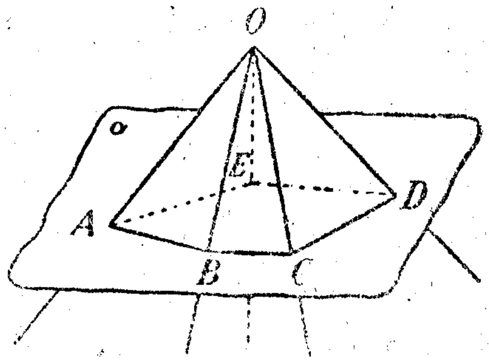
Un parallelepipedo le cui facce laterali sieno tutti rettangoli è un particolare prisma retto e si chiama ***parallelepipedo rettangolo.***



Se poi i 12 spigoli del parallelepipedo rettangolo son tutti uguali fra loro, le 6 facce sono quadrati e il parallelepipedo dicesi un ***cubo***.

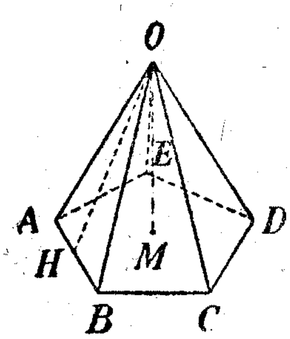
Piramidi.

152. Tagliamo un angoloide di vertice O con un piano α non passante pel vertice. La porzione dell'angoloide che rimane, rispetto al piano segante, dalla stessa parte del vertice, è un particolare poliedro, il quale dicesi una ***piramide.*** Il punto O chiamasi ***vertice*** della piramide; il poligono $ABCDE$, in cui il piano α taglia l'angoloide, dicesi ***base*** della piramide; i triangoli $OAB, OBC, \ldots$ si chiamano ***facce laterali*** e gli spigoli non giacenti sulla base diconsi ***spigoli laterali.*** L'insieme delle facce laterali costituisce la ***superficie laterale.***



L'***altezza*** della piramide è la distanza del vertice dalla base.

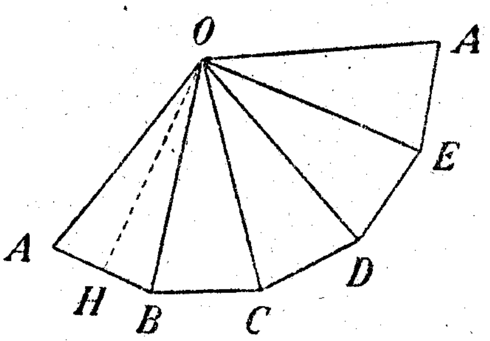
Una piramide dicesi *triangolare, quadrangolare, pentagonale,* ecc. secondo che la sua base è un triangolo, un quadrangolo, un pentagono, ecc.



153. Una piramide dicesi ***regolare*** se ha per base un poligono regolare e la perpendicolare condotta dal vertice sulla base incontra questa nel centro.

Le facce laterali di una piramide regolare sono triangoli isosceli uguali fra loro. Essi hanno dunque le altezze uguali rispetto alle loro basi, che sono i lati della base della piramide. Una qualunque di queste altezze si chiama ***apotema della piramide***.

154. Area della superficie laterale d'una piramide regolare. Preso un modello di cartone di una piramide regolare $OABCDE$, se ne asporti la base colle forbici e si tagli la superficie laterale, che così rimane, lungo uno spigolo OA. Si potrà allora fare lo *sviluppo* della superficie laterale in un piano. Si ottengono così tanti triangoli isosceli consecutivi e uguali, quante sono le facce. L'area di uno di questi triangoli è uguale al semiprodotto delle misure della base e dell'altezza, che è poi l'apotema della piramide. E siccome per ottenere la superficie laterale quest'area va ripetuta tante volte quante sono le facce, se ne deduce facilmente la



Regola. *L'area della superficie laterale di una piramide regolare è uguale al semiprodotto delle misure del perimetro della base e dell'apotema.*

Indicate con p e con a le misure del perimetro della base e dell'apotema, si ha per l'area A della superficie laterale la formula

$$A = {}^1/_2\, pa.$$

Aggiungendo l'area della base si ha la ***superficie totale***.

Volumi di prismi, parallelepipedi e piramidi.

155. La nozione di equivalenza fra superficie [§ 103] si estende ai solidi. Dati due solidi A, B, si concepiscano come recipienti ripieni di un medesimo liquido. Se le quantità di liquido che riempiono A, B sono uguali, si dirà che i due solidi hanno ***uguali estensioni*** o che sono ***equivalenti***. Altrimenti si dirà che il solido che contiene una maggiore quantità di liquido ha ***estensione maggiore*** dell'altro.

Valgono per l'equivalenza dei solidi le proprietà analoghe a quelle indicate nei §§ 104, 105 per l'equivalenza di due superficie. Così si può parlare di *somma* di due solidi aventi in comune al più soltanto parti dei contorni, ecc. ecc.

156. Si dimostrano, a proposito dell'equivalenza dei solidi, le proprietà seguenti, che noi dobbiamo limitarci ad enunciare:

1) *Un prisma è equivalente ad un parallelepipedo rettangolo avente base equivalente e uguale altezza.*

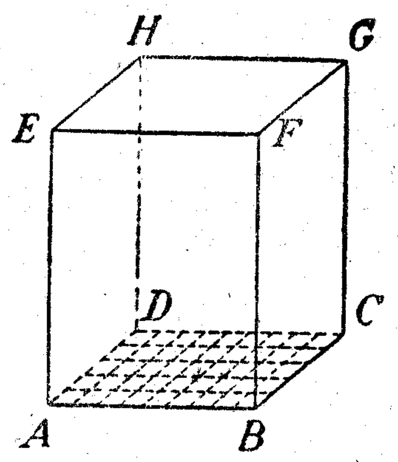
2) *Una piramide è equivalente ad un parallelepipedo rettangolo avente base equivalente e altezza uguale ad un terzo dell'altezza della piramide.*

157. ***Volume*** di un solido è la misura della sua estensione. Come unità di misura dei volumi si assume il cubo costruito prendendo per lato l'unità di misura delle lunghezze. Solidi equivalenti hanno volumi uguali e viceversa.

158. Se si ha da trovare il volume di un solido di forma qualunque, si potrà imaginarlo come un recipiente ripieno di liquido. Si misurerà allora quanti cubi, p. es. di un decimetro di lato, e quante unità decimali di un tale cubo, si possono riempire con quel liquido. Si avrà così una misura esatta o approssimata del volume e, in quest'ultimo caso, tanto più approssimata quanto più piccola è l'ultima unità decimale con cui si è fatta la misura.

Oppure si potrà immergere il solido in un liquido in cui esso non galleggi e che non lo attacchi e non lo sciolga. Se il recipiente che contiene il liquido ha p. es. forma parallelepipeda rettangola, misurando la base del recipiente e l'altezza di cui il liquido si è elevato dopo l'immersione del solido, si potrà facilmente ricavare [ved. il successivo § 159] il volume del solido.

159. VOLUME DI UN PARALLELEPIPEDO RETTANGOLO. Dato un parallelepipedo rettangolo $ABCDEFGH$ si chia-



mano *dimensioni* del parallelepipedo tre spigoli, come AB, AD, AE, uscenti da un medesimo vertice.

Se questi spigoli hanno per lunghezze rispettive *cm* 9, *cm* 5, *cm* 15, la base $ABCD$ si potrà decomporre in 9×5 centimetri quadrati. Questi quadratini sono basi di altrettanti cubi di *cm* 1 di lato, che formano un primo strato, al quale se ne può sovrapporre un secondo uguale, eppoi un terzo, ecc., fino ad un quindicesimo, riempiendo così tutto il parallelepipedo dato, che è alto *cm* 15.

Il numero dei centimetri cubi occorsi per riempire il cubo è dato da $(9 \times 5) \times 15 = 9 \times 5 \times 15 = 675$.

Si ottiene perciò la

Regola. *Il volume di un parallelepipedo rettangolo è il prodotto delle misure delle sue dimensioni.*

Questa regola vale qualunque sieno le misure delle tre dimensioni.

Se a, b, c sono le misure delle dimensioni del parallelepipedo, la formula che dà il volume V è

$$V = abc.$$

160. Volume del cubo. Nel cubo le tre dimensioni sono uguali. Perciò si ha la

Regola. *Il volume di un cubo è la terza potenza della misura del suo lato.*

Se l è la misura del lato del cubo, il volume V è dunque dato dalla formula

$$V = l^3,$$

da cui, come si sa dall'aritmetica, si ricava

$$l = \sqrt[3]{V}.$$

Vale dunque la

Regola. *La misura del lato di un cubo è la radice cubica del volume.*

161. Volume di un prisma. Tenuto conto della proprietà 1) del § 156 e del fatto che solidi equivalenti hanno volumi uguali, si ottiene la:

Regola. *Il volume di un prisma è il prodotto dell'area di una base e della misura dell'altezza.*

Se B è l'area della base e h la misura dell'altezza, pel volume V del prisma si ha la formula

$$V = Bh.$$

162. Volume di una piramide. Tenuto conto della proprietà 2) del § 156 e del fatto che solidi equivalenti hanno volumi uguali, si ottiene la

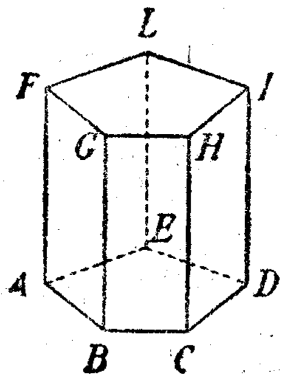
Regola. *Il volume di una piramide è il terzo del prodotto dell'area della base e della misura dell'altezza.*

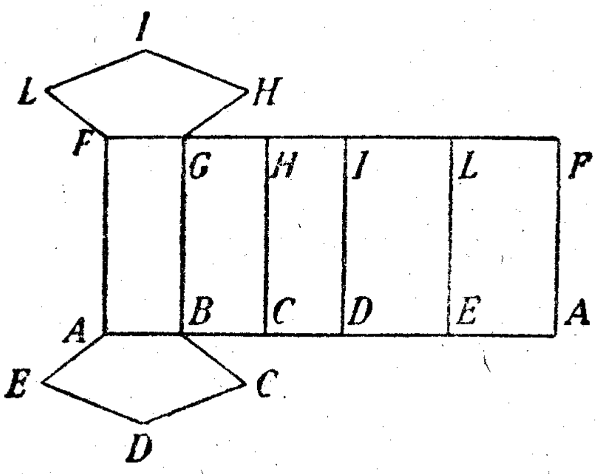
Se B è l'area della base e h la misura dell'altezza, si ha, pel volume V della piramide, la formula

$$V = \frac{Bh}{3}.$$

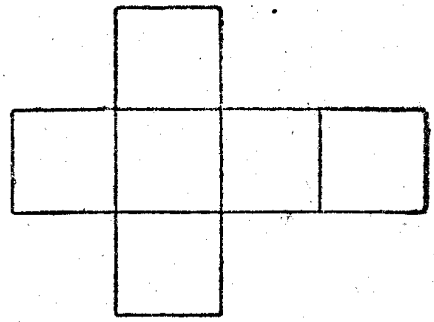
ESERCIZI

323. Supponiamo che il prisma retto $ABCDEFGHIL$ sia costruito in cartoncino. Tagliamolo con una lama affilata lungo gli spigoli BC, CD, DE, EA, GH, HI, IL, LF e lungo lo spigolo AF. Si

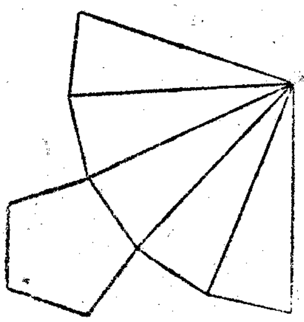




potrà allora spiegare il cartone nel modo indicato dalla seconda figura, ottenendosi quel che si chiama lo *sviluppo della superficie totale del prisma.* Questo sviluppo rende evidente la regola del § 150. Viceversa, costruito lo sviluppo in cartoncino, si potrà ripiegarlo e incollarne certi spigoli, in guisa da ottenere il modello in cartone del prisma.

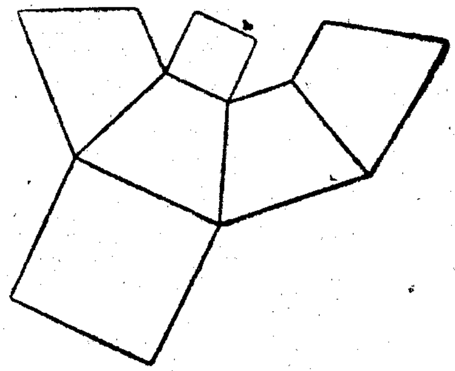


324. In particolare la figura qui accanto fornisce lo sviluppo della superficie totale di un cubo [§ 151]. Viceversa, costruito lo sviluppo in cartone, si può da esso ottenere, mediante opportune piegature e incollature, il modello di un cubo. Eseguire questa costruzione. Il cubo chiamasi anche *esaedro regolare*, perchè ha 6 facce e tutti gli spigoli, le facce, gli angoli, uguali fra loro.

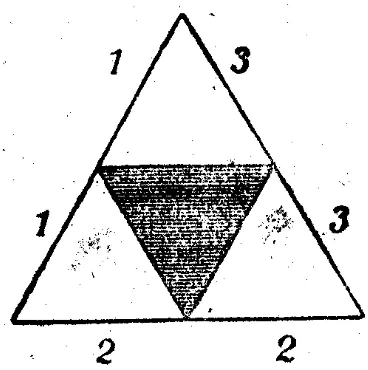


325. La figura qui accanto fornisce lo *sviluppo della superficie totale di una piramide regolare* a base pentagonale [§ 154]. Costruire il modello in cartone di una tal piramide a partire dal suo sviluppo.

326. *Tronco regolare di piramide* è il solido che si ottiene tagliando una piramide regolare con un piano parallelo alla base e tralasciando, dei due solidi ottenuti, quello che ha forma di piramide. Lo sviluppo della superficie totale di un tronco quadrangolare è dato dalla figura qui accanto. Costruire il modello in cartone del tronco. Trovare la regola pel calcolo della superficie laterale e della superficie totale del tronco.



327. La figura qui sotto, costituita da quattro triangoli equilateri uguali, è lo sviluppo della superficie totale di una piramide regolare, la cui base è un triangolo equilatero e le cui faccie laterali sono uguali alla base. Sicchè tale solido può esser considerato come piramide regolare in 4 modi diversi, prendendo come base una qualunque delle facce. Si chiama un *tetraedro regolare*. Ha 4 facce; 6 spigoli; 4 vertici. Il suo modello si costruisce dallo sviluppo rialzando le facce non tratteggiate e incollando gli spigoli indicati cogli stessi numeri (1 con 1, 2 con 2, 3 con 3).



328. Il cubo e il tetraedro regolare sono due dei cinque *poliedri regolari convessi*. Un poliedro si dice *convesso* quando giace tutto da una parte di una qualunque delle sue facce. (I poliedri particolari da noi studiati sono tutti convessi). Si dice poi che il poliedro è *regolare*, quando le facce sono poligoni regolari uguali, i diedri del poliedro sono uguali fra loro, e così pure gli angoloidi del poliedro

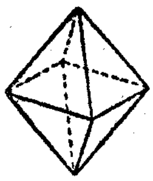


Fig. 1

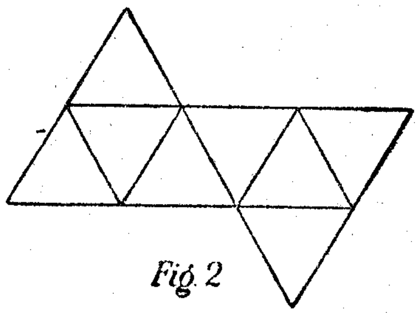


Fig. 2

a) L' *ottaedro regolare*, che ha la forma indicata dalla fig. 1. Lo sviluppo della superficie totale (a partire dal quale si può costruire un modello del solido) è indicato dalla fig. 2. L'ottaedro ha 8 facce, che son triangoli equilateri; 6 vertici e 12 spigoli.

b) Il *dodecaedro regolare*, che ha la forma indicata dalla fig. 3. Lo sviluppo della sua superficie totale (a partire dal quale si può

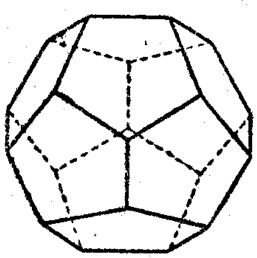


Fig. 3

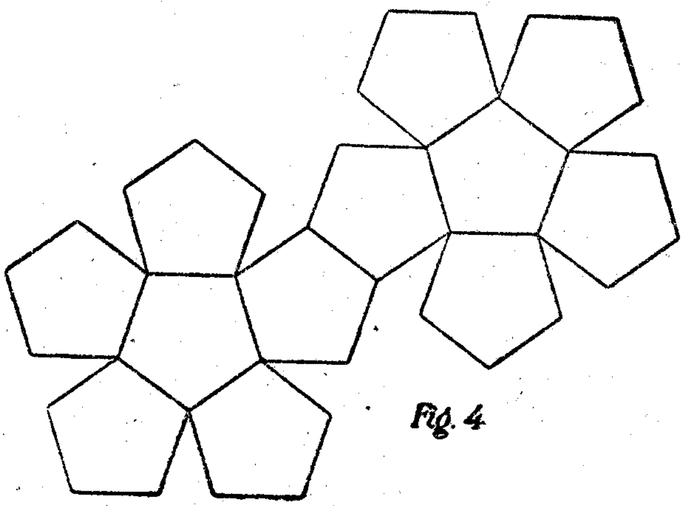


Fig. 4

costruire un modello del solido) è indicato dalla fig. 4. Il dodecaedro ha 12 facce, che son pentagoni regolari, 20 vertici e 30 spigoli.

c) L' *icosaedro regolare*, che ha la forma indicata dalla fig. 5. Lo sviluppo della sua superficie totale (a partire dal quale si può costruire un modello del solido) è indicato dalla fig. 6. L' icosaedro

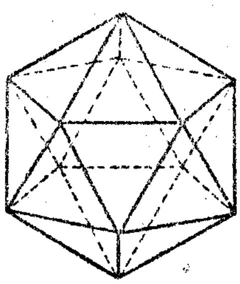


Fig. 5

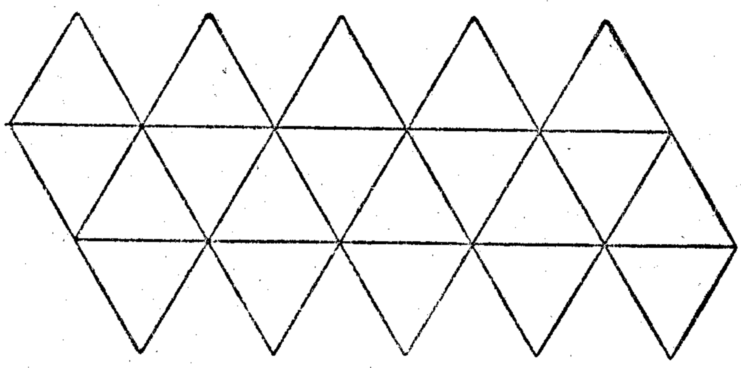


Fig. 6

ha 20 facce, che son triangoli equilateri, 12 vertici e 30 spigoli.

329. Due parallelepipedi rettangoli aventi uguali dimensioni sono uguali. (Si dimostra colla sovrapposizione).

330. Calcolare l'area laterale di un prisma triangolare retto i cui spigoli della base abbiano le lunghezze di m 0,18; m 0,05; m 0,22 e la cui altezza sia di m 0,35

331. Calcolare l'area totale del precedente prisma (¹).

332. Calcolare l'area totale di un parallelepipedo rettangolo le cui dimensioni sono di m 1,25; m 2,38; m 0,57.

333. Calcolare l'area totale di un cubo il cui lato è lungo m 0,64.

334. Calcolare la lunghezza di una diagonale di un cubo il cui lato è lungo m 1,32. (*Diagonale* di un cubo è il segmento che congiunge due vertici non appartenenti alla stessa faccia. Si osservi che una diagonale del cubo è ipotenusa di un triangolo rettangolo di cui un cateto è un lato del cubo e un altro cateto è la diagonale di una faccia).

335. Calcolare la lunghezza del lato e l'area totale di un cubo che abbia una diagonale lunga m 2,57.

336. Calcolare l'area totale di un tetraedro regolare di m 1,42 di spigolo. (Ved. l'Es. 263 o la tabella dell'Es. 266).

337. Calcolare l'area totale di un ottaedro regolare di dm 15,2 di spigolo. (Ved. gli Es. citati sopra).

338. Calcolare l'area totale di un dodecaedro regolare di m 0,73 di spigolo. (Ved. la tabella dell'Es. 266).

339. Calcolare l'area totale di un icosaedro regolare di cm 92 di spigolo. (Ved. l'Es. 263 o la tabella dell'Es. 266).

340. Calcolare l'area laterale di una piramide regolare retta a base quadrata, la cui base abbia un lato di m 0,39, essendo inoltre m 0,84 la lunghezza di uno spigolo laterale.

341. Calcolare l'area totale della predetta piramide.

342. Una piramide regolare a base esagonale ha l'apotema di m 1,15 e lo spigolo della base di m 0,87. Calcolare la misura dell'altezza della piramide e l'area totale. (L'altezza è cateto di un triangolo rettangolo di cui l'altro cateto è l'apotema della base e l'ipotenusa è l'apotema della piramide).

343. Calcolare l'area totale di un tronco regolare di piramide a base quadrata, conoscendosi le lunghezze dei lati delle due basi (m 1,43 e m 0,65) e la lunghezza di uno spigolo laterale (m 2,15). (Occorre prima calcolare l'altezza di una delle facce laterali, che è un trapezio isoscele).

344. Calcolare il peso di un cubo d'acciaio di cm 7 di lato, sapendosi che 7,8 è il peso specifico dell'acciaio.

345. Un cubo di piombo pesa kg 23,45. Qual'è la lunghezza del suo spigolo, se 11,4 è il peso specifico del piombo?

346. Quanti mattoni occorrono, trascurando il volume della malta, per costruire il muro di cinta di un terreno rettangolare, se si fissa che il muro debba avere un'altezza di m 2,40 e uno spes-

(°) Occorre perciò applicare la formula (che si dimostra in corsi ulteriori di geometria) la quale dà l'area A di un triangolo espressa mediante le misure a, b, c dei lati e la misura del semiperimetro $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Si ha $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

sore di due teste di mattone? Il mattone, cosidetto «piemontese», ha le dimensioni di cm 26, cm 13, cm 6,5. La dimensione intermedia di cm 13 si chiama la *testa* del mattone.

347. La *precipitazione* della pioggia durante un violento acquazzone di un'ora è di circa mm 15. (Questo vuol dire che in un vaso cadrebbe un'altezza di mm 15 d'acqua). Calcolare le dimensioni di una vasca parallelepipeda, due volte più lunga che larga e dell'area laterale di m 6, s'essa deve esser capace di contenere l'acqua che piove sopra il tetto d'una casa di m² 250 di pianta, anche quando capita un acquazzone così violento.

348. Un canale di presa per opificio ha come sezione, con un un piano perpendicolare ai bordi, un trapezio di basi m 1,20; m 1,50 e di altezza m 0,80. Qual'è la portata del canale, se la velocità dell'acqua è di m 0,55 al secondo? (*Portata* del canale è la quantità d'acqua che passa in un secondo attraverso alla sezione).

349. Un tetraedro regolare di rame pesa Kg 2,5. Qual'è il lato del tetraedro, se il rame ha il peso specifico di 8,8? (Occorre tener conto che l'altezza del tetraedro è cateto d'un triangolo rettangolo, di cui un altro cateto è l'apotema della base e l'ipotenusa l'apotema del tetraedro, considerato come piramide; oppure si può profittare della tabella del successivo Es.).

350. L'area totale A e il volume V di uno dei poliedri regolari si posson calcolare mediante la seguente tabella, nella quale l denota la misura d'uno spigolo del poliedro:

tetraedro	$A = 1{,}7320 l^2$	$V = 0{,}1178 l^3$
cubo	$A = 6{,}0000 l^2$	$V = 1{,}0000 l^3$
ottaedro	$A = 3{,}4641 l^2$	$V = 0{,}4714 l^3$
dodecaedro	$A = 20{,}6457 l^2$	$V = 7{,}6631 l^3$
icosaedro	$A = 8{,}6602 l^2$	$V = 2{,}1816 l^3$

351. Calcolare l'area totale e il volume di un tetraedro di m 0,56 di spigolo, mediante la tabella precedente.

352. Calcolare l'area totale e il volume d'un cubo di dm 29,5 di spigolo, mediante la tabella.

353. Calcolare l'area totale e il volume d'un ottaedro regolare di cm 82 di spigolo, mediante la tabella.

354. Calcolare l'area totale e il volume d'un dodecaedro regolare di m 1,47 di spigolo, mediante la tabella.

355. Calcolare l'area totale e il volume d'un icosaedro di m 0,93 di spigolo, mediante la tabella.

356. Qual'è lo spigolo d'un ottaedro regolare, avente dm³ 2 di volume?

357. Calcolare il peso di un piedistallo di granito a forma di tronco regolare di piramide a base quadrata, conoscendo le lun-

ghezze m 1,75, m 1,20 dei lati delle basi, l'altezza di m 2,60 e il peso specifico 2,75 del granito.

358. La piramide di Cheope, in Egitto, ha per base un quadrato di m 237 di lato e per facce laterali quattro triangoli equilateri. Calcolarne il volume. (Il calcolo si può fare colla tabella dell'Es. 350 tenuto conto che la piramide non è che un mezzo ottaedro regolare, oppure dimostrando anzitutto che l'altezza è uguale alla metà della diagonale della base).

359. Un recipiente di vetro a forma parallelepipeda rettangola ha lo spessore di mm 6 e le dimensioni esterne di cm 15, cm 12, cm 8. Calcolarne il peso, sapendo che il peso specifico del vetro è di 2,5. (Il solido di cui si tratta è differenza di due parallelepipedi rettangoli).

360. Di quanto s'immerge nell'acqua una tavola di quercia lunga m 2, larga cm 40, dello spessore di cm 4, sapendosi che il peso specifico della quercia è di 0,8? (Si tenga conto del principio di Archimede dal quale risulta che la parte immersa dovrà spostare un volume d'acqua di peso uguale a quello della tavola).

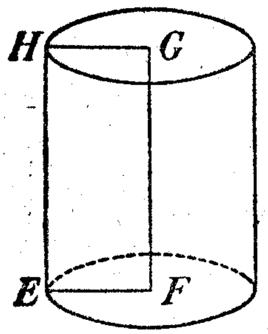
361. Quale lunghezza e quale larghezza devon darsi ad un'aula scolastica per 50 alunni, di m 4 d'altezza, se la lunghezza dev'essere una volta e mezza la larghezza e per ogni alunno occorrono m^3 3 d'ambiente?

CAPITOLO DODICESIMO

Corpi rotondi.

Cilindri e coni.

163. Un ***cilindro*** è il solido generato da un rettangolo $EFGH$, che si faccia ruotare attorno ad uno dei suoi lati FG. Il lato fisso FG dicesi ***asse*** del cilindro. Il lato



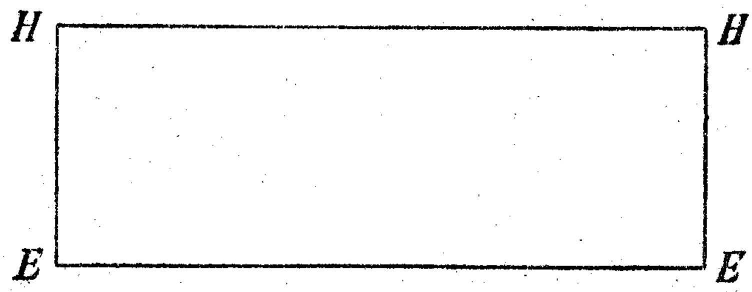
HE, opposto a quello fisso, genera la ***superficie laterale*** del cilindro e ognuna delle posizioni da esso assunte dicesi ***generatrice*** del cilindro.

I lati opposti EF, GH, perpendicolari alla generatrice HE e all'asse GF, generano due cerchi, che si chiamano le ***basi*** del cilindro. La superficie laterale e le basi formano insieme la ***superficie totale***.

L'***altezza*** del cilindro è la distanza GF fra le basi. Essa è uguale ad una generatrice.

Il ***raggio*** del cilindro è il raggio di uno dei cerchi base.

164. Area delle superficie laterale e totale d'un cilindro. Preso un modello di cartone di un cilindro, se ne asportino colle forbici le basi e si tagli dipoi la superficie laterale lungo una generatrice HE. La



superficie laterale si può spiegare e distendere in un piano: si dice che se ne fa lo *sviluppo*. Questo sviluppo non è che un rettangolo avente la base di lunghezza uguale a quella della circonferenza base del cilindro e l'altezza HE uguale all'altezza del cilindro. Si ha dunque la

Regola. *L'area della superficie laterale di un cilindro è il prodotto delle misure di una circonferenza base e dell'altezza.*

Indicate con r,h le misure del raggio e dell'altezza del cilindro, l'area A della superficie laterale è data dalla formula

$$A = 2\pi r h\,.$$

Aggiungendo il doppio dell'area di una base si ha la superficie totale A' espressa dalla formula:

$$A' = 2\pi r h + 2\pi r^2,$$

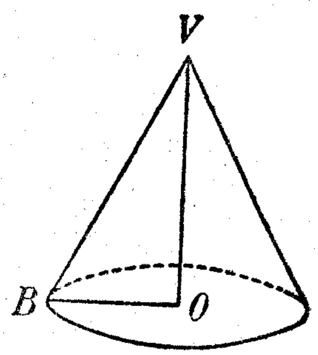
la quale, per la proprietà distributiva, si può scrivere

$$A' = 2\pi r\ (h + r)\,.$$

Da ciò la

Regola. *L'area della superficie totale di un cilindro è il prodotto della misura di una circonferenza base per la somma delle misure del raggio e dell'altezza.*

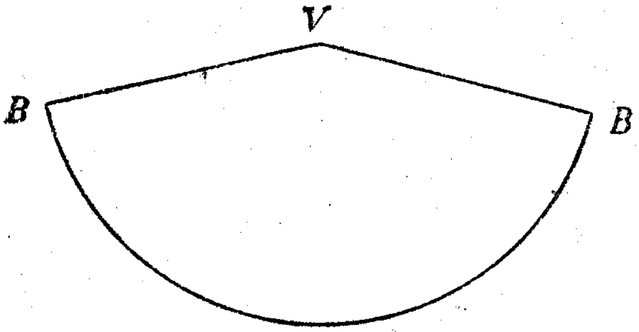
165. Un ***cono*** è il solido generato da un triangolo rettangolo VOB, che si faccia ruotare attorno ad un cateto. Il cateto fisso VO chiamasi ***asse*** del cono. L'ipotenusa VB descrive la ***superficie laterale*** del cono e ognuna delle posizioni da essa assunte dicesi ***generatrice*** o ***apotema*** del cono. Il cateto mobile OB descrive un cerchio, che chiamasi ***base*** del cono. La superficie laterale e la base formano insieme la ***superficie totale***.



Il punto V, per cui passano tutte le generatrici, dicesi ***vertice*** del cono. La distanza VO dal vertice alla base si chiama ***altezza*** del cono.

166. Aree delle superficie laterale e totale d'un cono. Da un modello di cartone del cono si asporti la base colle forbici e si tagli indi la superficie laterale lungo una generatrice VB.

perficie laterale sopra un piano, siccome tutti i punti della circonferenza base avevano la stessa distanza del vertice, lo sviluppo della superficie laterale viene ad essere un settore circolare di centro V e di raggio VB. Ricordando la regola del § 133 se ne deduce la



REGOLA. *L'area della superficie laterale di un cono è il semiprodotto delle misure della circonferenza base e dell'apotema.*

Se r ed a son le misure del raggio e dell'apotema del cono, l'area A della superficie laterale vien data dalla formula

$$A = \frac{2\pi ra}{2} = \pi ra .$$

Aggiungendo l'area della base avremo l'area della superficie totale, che verrà dunque espressa da

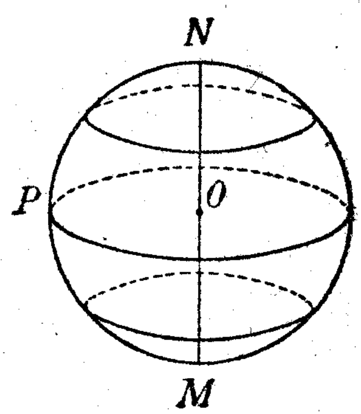
$$A' = \pi ra + \pi r^2 = \pi r (a + r) = \frac{2\pi r (a + r)}{2} ,$$

donde la

REGOLA. *L'area della superficie totale di un cono è il semiprodotto della misura della circonferenza base per la somma delle misure dell'apotema e del raggio.*

Sfera.

167. La ***sfera*** è il solido generato da un semicerchio, che ruoti attorno al suo diametro MN. La semicirconferenza MPN del semicerchio, genera il contorno totale della sfera, che si chiama ***superficie sferica***. Il diametro, il raggio e il centro del semicerchio mobile chiamansi ***diametro, raggio*** e ***centro*** della sfera.



Tutti i punti della superficie sferica hanno dal centro distanza uguale al raggio.

168. Un piano può avere rispetto ad una sfera tre distinte posizioni, e cioè:

1) Non incontrare affatto la sfera. Il piano dicesi ***esterno***.

2) Incontrare la sfera in un punto. Il piano dicesi ***tangente*** e quel punto si chiama *punto di contatto.*

3) Incontrare la sfera secondo un cerchio. Il piano dicesi ***secante***.

Fra i piani secanti quelli che passano pel centro segano la sfera secondo i suoi *cerchi massimi.*

Un piano tangente è perpendicolare al raggio della sfera che passa pel punto di contatto.

Una sfera può esser considerata come *superficie di rotazione* in infiniti modi diversi, prendendo come retta fissa (*asse di rotazione*) uno qualunque dei suoi diametri.

169. Il confronto fra le estensioni delle superficie si può fare non soltanto quando trattasi di superficie piane, ma anche di superficie curve.

Così, nel caso del cilindro e del cono, abbiamo confrontato le estensioni delle loro superficie laterali colle estensioni di superficie piane (un rettangolo ed un settore circolare), facendo lo sviluppo di quelle superficie curve in un piano. Per la sfera nulla di analogo è possibile, perchè nessuna parte della superficie sferica si può sviluppare in un piano.

Tuttavia il confronto fra l'estensione della superficie sferica e l'estensione di una superficie piana deriva dalle medesime considerazioni intuitive esposte nel § 103 e da altre simili.

Per esempio, se imaginiamo la superficie sferica di sottile lamiera metallica, possiamo di certo trovare un pezzo piano (p. es. rettangolare) di lamiera perfettamente uguale, che pesi ugualmente. Allora il pezzo piano avrà ***estensione uguale*** a quella della superficie sferica; se pesasse di più o di meno avrebbe ***estensione maggiore*** o ***minore***.

170. Area della superficie sferica. In un primo studio della geometria non è possibile di dare un'idea neppure approssimata del come si riesca a trovare geometricamente una superficie piana avente la stessa estensione della superficie sferica. Occorre perciò che ci limitiamo ad enunciare la

REGOLA. *L'area di una superficie sferica è uguale a quella di un cerchio di raggio doppio.*

Se r è il raggio della sfera, $2r$ è il raggio di un cerchio di raggio doppio a quello della sfera, $\pi(2r)^2$ è l'area di questo cerchio; onde l'area A della superficie sferica è espressa dalla formula

$$A = \pi(2r)^2 = 4\pi r^2.$$

Da questa formula si ricava

$$r = \sqrt{\frac{A}{4\pi}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{\pi}},$$

e si ottiene la

REGOLA. *La misura del raggio d'una superficie sferica è la metà della radice quadrata del quoto dell'area della superficie per π.*

Volumi di cilindri, coni, sfere.

171. VOLUME DI UN CILINDRO. Siccome si possono costruire prismi retti contenuti in un cilindro e differenti di pochissimo da questo, ricordando la regola del § 161 diviene intuitiva la

REGOLA. *Il volume di un cilindro è uguale al prodotto dell'area di una base per la misura dell'altezza.*

Se r, h sono le misure del raggio e dell'altezza del cilindro e V è il volume di questo, si ha dunque la formula

$$V = \pi r^2 h.$$

172. VOLUME DI UN CONO. Siccome si posson costruire piramidi regolari contenute in un cono e differenti di pochissimo da questo, ricordando la regola del § 162, diviene intuitiva la

Regola. *Il volume di un cono è uguale a un terzo del prodotto dell'area della base per la misura dell'altezza.*

Se r, h son le misure del raggio e dell'altezza del cono, il volume V è dunque dato dalla formula:

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

173. Volume della sfera. Siccome si posson costruire poliedri contenuti nella sfera, differenti di pochissimo da questa, e composti ognuno da tante piramidi aventi per vertice il centro della sfera e per basi le facce del poliedro, ricordando la regola del § 162, diviene intuitiva la

Regola. *Il volume della sfera è uguale ad un terzo del prodotto dell'area della superficie sferica per la misura del raggio.*

Se r è il raggio della sfera risulta dunque pel volume V la formula

$$V = \frac{4\pi r^2 \times r}{3} = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Da questa formula si ricava:

$$r = \sqrt[3]{\frac{3}{4} \frac{V}{\pi}},$$

la quale permette di calcolare il raggio di una sfera di dato volume.

ESERCIZI

362. Calcolare l'area laterale e totale di un cilindro di m 0,75 di raggio e di m 2,32 d'altezza.

363. Calcolare il volume del precedente cilindro.

364. L'area totale di un cilindro è di m^2 4,57. Il raggio della base è di m 0,89. Qual'è l'altezza del cilindro?

365. Calcolare le aree laterali dei cilindri generati da un rettangolo i cui lati consecutivi son lunghi m 3 e m 4, quando il rettangolo ruota attorno all'uno o all'altro dei lati. Le due aree sono uguali. Perchè?

366. Calcolare i volumi dei cilindri considerati nell' Es. prec. Essi stanno nel rapporto 4 : 3. Perchè ?

367. Trovare il raggio d'un cerchio equivalente alla superficie laterale d'un cilindro la cui altezza è m 1,80 e il cui raggio è m 0,75.

368. L'area laterale di un cilindro, di m 2,37 di altezza è di m^2 10,70. Segare il cilindro con un piano parallelo alla base in modo che una delle due parti in cui resta divisa la superficie laterale sia equivalente ad un cerchio di raggio m 0,82.

369. Calcolare l'altezza e il raggio di un cilindro avente l'area totale di m^2 4,65, sapendo che la superficie laterale è i $^4/_5$ del cerchio base.

370. Calcolare il volume d'un cilindro di m 2,30 di altezza e di m 0,45 di raggio.

371. Calcolare il volume di un cilindro di m 1,15 di altezza, sapendo che la circonferenza base è lunga m 2,50.

372. Calcolare il raggio e l'altezza di un cilindro avente lo stesso volume di un cubo di cm 40 di lato e l'area laterale uguale all'area totale del cubo.

373. Quanto tempo occorre per vuotare un pozzo cilindrico di m 2 di diametro, contenente un'altezza di m 2,20 d'acqua, mediante una pompa avente una portata di 2 litri al secondo ?

374. In un cilindro di vetro di cm 5 di diametro base interno è contenuta acqua fino all'altezza di m 4. Di quanto si solleva l'acqua gelando, se il peso specifico del ghiaccio è di 0,92 ?

375. Qual' è il volume della terra che si deve rimuovere per scavare un pozzo cilindrico di m 1,50 di diametro e di m 14 di profondità ?

376. Per misurare il volume di un cristallo minerale, insolubile nell'acqua, lo si immerge in un bicchiere cilindrico di vetro di diametro base interno di cm 7,4, contenente acqua. Si determina indi la quantità d'acqua spostata dal cristallo, misurando di quanto è aumentata l'altezza dell'acqua nel bicchiere. Se l'aumento è di mm 3, qual' è il volume del cristallo ?

377. Quanto pesa un cilindro di ghisa di raggio m 0,25 e di altezza tripla, se il peso specifico della ghisa è 7,3 ?

378. Quali dimensioni esterne dovrà avere un silos per grano di forma cilindrica, di altezza quadrupla del raggio base, se deve contenere Ql 10000 di grano, essendo 0,80 il peso specifico medio del grano ?

379. Una conduttura cilindrica in ghisa ha la lunghezza di m 3, lo spessore delle pareti di mm 12 e il diametro interno di cm 30. Calcolarne il peso, tenuto conto che il peso specifico della ghisa è 7,3.

380. Con un rettangolo di lamiera i cui lati consecutivi hanno le lunghezze di m 0,33 e di m 1,25 si è formata la superficie laterale di un cilindro del quale si domanda il volume.

381. Se si versano g 750 di acqua in un recipiente cilindrico di sufficiente altezza e di diametro interno cm 7,2, a quale altezza arriverà l'acqua?

382. Quale pressione totale espressa in kg esercita l'acqua sul fondo di una cisterna cilindrica di m 4,20 di diametro, se l'acqua arriva a m 2,75 d'altezza?

383. Un tubo di barometro ha un diametro interno di mm 9 e il mercurio arriva a cm 76 d'altezza. Calcolare il peso del mercurio, tenuto conto che il suo peso specifico è di 13,57.

384. Determinare la pressione atmosferica per cm^2, corrispondente alla predetta altezza barometrica.

385. La somma del raggio e dell'altezza di un cilindro è di m 4,52, e inoltre il rapporto fra raggio e altezza è uguale a $^3/_4$. Calcolare l'area totale e il volume del cilindro.

386. Calcolare l'area laterale di un cono la cui base ha un raggio di cm 4,5, l'apotema essendo di dm 2,3.

387. Calcolare il volume del cono precedente. (Ricavare prima l'altezza).

388. Calcolare l'area totale di un cono la cui base ha un raggio di m 1,65 e la cui altezza è di m 2,20.

389. Calcolare il volume di un cono la cui superficie laterale si sviluppa in un settore circolare di m 0,93 di raggio, con un angolo al centro di 135°.

390. Calcolare l'apotema e l'area laterale di un cono alto m 2,35 e con una circonferenza base di m 4,52.

391. Un campanile finisce a cono, e la parte conica è coperta da un tetto di lamiera di mm 3 di spessore. Si domanda il peso della lamiera occorsa per costruire il tetto, se il cono ha m 8,25 di diametro e un'altezza di m 11,20 e lo zinco ha il peso specifico 7.

392. Un cono si dice *equilatero* quando ha l'apotema uguale al diametro della base. Data l'altezza determinare area laterale, area totale e volume del cono.

393. Se un cono si taglia con un piano parallelo alla base e si tralascia quella delle due parti che è un nuovo cono (più piccolo); la parte rimanente si chiama un *tronco di cono*. La superficie totale del tronco consta di due cerchi detti *basi* e della superficie laterale. La porzione di apotema del cono primitivo appartenente alla superficie laterale del tronco, si chiama *apotema* di questo. Dimostrare che l'area laterale di un tronco di cono è il prodotto della semisomma delle lunghezze delle circonferenze basi per la misura dell'apotema. (Si consideri la superficie laterale del tronco come differenza delle superficie laterali di due certi coni).

394. Un paralume a forma di tronco di cono ha i raggi delle basi di cm 21 e di cm 14 e l'apotema di cm 24. Qual' è l'area della sua superficie ?

395. Il volume di un tronco di cono è espresso da $\frac{1}{3}\pi h\,(r^2 + rr' + r'^2)$, ove h, r, r' son le misure dell'altezza e dei raggi delle basi. (*Altezza* d'un tronco di cono è la distanza delle basi). Ammessa questa regola, calcolare la capacità di un tino a tronco di cono, i cui diametri interni delle basi sono di m 2,65 e di m 1,90 e la cui apotema è di m 2,20.

396. Uno ziro da olio, a tronco di cono, ha i diametri delle due basi di cm 56 e di cm 90 e la profondità di cm 85. Qual' è il peso dell'olio d'oliva contenuto, se il peso specifico dell'olio è di 0,93 ?

397. Un pagliaio è alto m 8. La parte inferiore, fino all'altezza di m 5,50 è di forma cilindrica, col raggio di m 4,70, mentre la parte superiore è conica. Qual' è il volume della paglia ?

398. Area della superficie di una sfera avente il raggio di m 0,72.

399. Volume di una sfera di raggio m 2,56.

400. Raggio di una sfera la cui superficie è di m^2 4,67.

401. Raggio di una sfera il cui volume è dm^3 6.

402. Volume di un cubo inscritto in una sfera di m 0,27 di raggio.

403. Calcolare a meno di Km^2 1 per difetto, l'area della superficie terrestre, supposta sferica, sapendosi che il metro è la quarantamilionesima parte del meridiano terrestre.

404. Le parti in cui una sfera vien divisa da un piano secante chiamansi *segmenti sferici* e le parti in cui la superficie della sfera è divisa da quel piano, chiamansi *calotte sferiche*. Si chiama *segmento sferico a due basi* la parte di sfera compresa fra due piani seganti paralleli e *zona sferica* la parte di superficie della sfera compresa fra gli stessi piani. La parte di diametro della sfera perpendicolare al piano od ai piani secanti, contenuta nel segmento a una base o nel segmento a due basi, chiamasi *altezza* del segmento e della calotta o zona relativa.

405. L'area di una calotta o di una zona è il prodotto delle misure d'una circonferenza massima della sfera e dell'altezza della calotta o zona. Ammessa questa regola si risolvano i problemi seguenti.

406. Area di una calotta di altezza m 0,25 in una sfera di m 0,68 di raggio.

407. Area di una zona di altezza m 0,32 in una sfera di m 0,96 di raggio.

408. Altezza di una calotta di m^2 0,50 in una sfera di m 0,62 di raggio.

409. Il volume di un segmento sferico a una base è dato dalla formula $\frac{1}{2}\,\pi h\,(\frac{1}{3} h^2 + r)$, ove h, r son le misure dell'altezza e del raggio della base.

410. Ammessa la regola precedente, determinare il volume di un segmento sferico a una base di altezza m 0,27, in una sfera di m 0,75 di raggio.

411. Qual' è l'altezza del segmento sferico che resta immerso nell'acqua, se una sfera galleggiante ha il raggio di cm 20 e pesa kg 10 ? (Si ricordi il principio di Archimede).

412. Con due sfere metalliche aventi i diametri di m 0,22 ; m 0,37 si ricava per fusione un'altra sfera. Qual' è il diametro della sfera ricavata ?

INDICE