FRANCESCO SEVERI

GEOMETRIA ELEMENTARE

VOL. I

PER IL GINNASIO SUPERIORE E PER IL PRIMO ANNO DELLE ALTRE SCUOLE SUPERIORI SECONDO I VIGENTI PROGRAMMI

Esemplare di saggio

VALLECCHI EDITORE FIRENZE

LUGLIO 1943. XXI - STAB. GRAFICI A. VALLECCHI - FIRENZE

PREFAZIONE

Questo libro è una nuova edizione della mia « Geometria » conforme ai programmi che vanno in vigore coll'anno scolastico prossimo (1). *I concetti direttivi son rimasti immutati; né avevo ragione di cangiarli. Essi hanno invero incontrato il favore di una schiera eletta e numerosa d' insegnanti e dal 1926 — da quando cioè vide la luce la prima edizione completa degli* Elementi *— la mia rielaborazione ha servito di modello a molti autori di testi posteriormente pubblicati.*

Del che ho motivo di compiacermi, perché il mio scopo era ed è essenzialmente quello di giovare alla nostra Scuola. Di fronte ai vantaggi conseguiti sul terreno didattico ed a quelli che l'avvenire renderà sempre più evidenti, posso ormai considerare con indulgenza il fatto che si sia spesso largamente profittato dell'opera mia senza farne alcuna menzione.

Oltre alle prescritte notizie storiche, al libro è stata aggiunta un' introduzione per dare agli scolari una prima idea della differenza fra il metodo intuitivo ed il metodo razionale. Vi son poi gli adattamenti indispensabili ed ulteriori semplificazioni, che però, come dicevo, non alteran la fisionomia del testo, il quale serba la sobrietà determinata dagli sfrondamenti della materia, di cui io stesso sono stato

---

(1) Il testo abbraccia il programma della I Classe pei Licei classici e scientifici. Seguirà tempestivamente nel 1944 la parte ulteriore. Per le altre Scuole dell'ordine superiore escono, insieme a questo, due altri testi di geometria.

da tempo tenace assertore, allo scopo precipuo di tener conto delle possibilità reali degli allievi e di non diminuire l'efficacia formativa della matematica, nel quadro generale degli studi.

Il lieve aumento di mole dell'attuale volumetto in confronto al I vol. della «Geometria» è soltanto apparente: esso è in parte dovuto ai cenni storici ed in parte ad un maggiore arieggiamento delle pagine, introdotto d'accordo col mio ottimo editore Vallecchi, per rendere il libro di più attraente e di meno faticosa lettura.

Credo infine doveroso di porre un'altra volta in guardia contro certe semplificazioni che qualche autore, anche fra i meglio accreditati, ha creduto d'introdurre, rifacendo sotto altra veste la mia trattazione. Certe semplificazioni o sono in buona fede e dimostrano mancanza di finezza critica; o sono volute e dimostrano un ben singolare concetto della funzione educativa d'un insegnamento, che raggiunge il massimo di efficacia soltanto quando addestra a diffidare dalle troppo affrettate deduzioni.

Quante volte, forse per sbrigarsela, si allude ad analogie che non sussistono (p. es. non si può ritener acquisita per analogia dal caso dei segmenti, la nozione di somma di angoli, perché il fascio di rette è una figura finita, mentre la retta è una figura infinita); oppure si dice p. es. (non in una giustificazione intuitiva, ma in una dimostrazione!) che due segmenti s'incontrano e si sopprime l'argomentazione che l'autore scrupoloso aveva aggiunto per stabilire l'esistenza del punto d'intersezione, credendola o facendola credere superflua sol perché dalla figura «si vede» che il punto c'è. Quante altre volte si sopprime l'argomentazione che ha come base essenziale la convessità delle figure in giuoco, senza pensare o senza indurre a pensare che il novantanove per cento delle proprietà di geometria elementare non si posson dimostrare *prescindendo dal concetto di figura convessa. Si crede così di aver dimostrato che due triangoli sono uguali, sol perché vertici e* *lati dell'uno si son sovrapposti ai vertici e ai lati dell'altro, senza aggiungere che, in conseguenza della convessità o (ciò che è sostanzialmente lo stesso) del fatto che un triangolo è intersezione di semipiani, ogni punto interno all'un triangolo coincide con un punto interno all'altro. E così si crede di dimostrare che un parallelogrammo è diviso in due triangoli uguali da una diagonale, senza osservare che, soltanto in forza della convessità, ciascuno dei due triangoli è effettivamente* parte *del parallelogrammo.*

La semplicità e la chiarezza derivanti da sottintesi che non sono didatticamente né scientificamente onesti, non è quella alla quale aspiro e a nessun patto mi piegherei a introdurla nella mia opera.

FRANCESCO SEVERI.

INTRODUZIONE

La geometria è stata finora studiata con prevalente metodo *intuitivo*, piuttosto che con metodo *razionale*. Occorre che cominciamo a renderci conto della differenza sostanziale tra i due metodi, dato che dobbiamo ora iniziar lo studio della geometria con prevalente metodo razionale.

Ci limiteremo in proposito a pochi cenni, non essendo possibile penetrare il pieno valore della distinzione, finché non si sia seguita di fatto la costruzione razionale dell'edificio geometrico e non si sia cercato di coglierne l'ossatura.

L'osservazione eppoi l'esperimento, sia quello quasi incosciente del bambino che prende ogni giorno contatto più vivo col mondo esterno o quello del tutto cosciente dell'uomo maturo o quello raffinato che si compie in un laboratorio, conducono la nostra mente a racchiudere, quasi si potrebbe dire a condensare, quello che si è appreso, in taluni *concetti fondamentali* o *primitivi*, che costituiscono il punto di partenza di riflessioni e di ragionamenti ulteriori.

Una volta si credeva — e lo credevano anche grandi pensatori — che la scienza sarebbe stata razionalmente perfetta soltanto quando si fosse riesciti a definire tutto; e che il compito di chi si accingesse a dimostrare col ragionamento una verità non immediatamente percepibile fosse quello di ricondurla con successive deduzioni a verità direttamente percepibili, *evidenti* o *intuitive*, come di solito si dice.

Che sia impossibile di dare una definizione di ogni parola, senza presupporre noto il significato di altre, è verità che pare oggi banale, perché fin dalla nascita viviamo in una più matura atmosfera di pensiero, quale si è creata nel progressivo affinamento di civiltà millenarie, come la nostra.

Ma la cosa più che banale diviene irrefutabile, quando si concreti in qualche esempio. Cosí due uomini che parlino lingue diverse non posson cominciare ad intendersi se prima non sieno arrivati a comprendere, attraverso atti o gesti, le parole che nelle rispettive lingue rappresentano certe idee fondamentali. Un bambino apprende il significato di parole nuove soltanto quando il loro suono rimane associato ad atti che in precedenza ha veduto compiere o quando è possibile esprimerle con altre di cui già conosce il significato. In conseguenza le parole denotanti concetti astratti sono le ultime ad apprendersi.

Le definizioni d'un vocabolario non hanno lo scopo di tutto definire, ma di permettere a chi possiede in gran parte la lingua in cui il vocabolario è scritto, di conoscere il significato di qualche parola non ancora nota o di specificarne meglio il valore o la etimologia. E gli esempi si potrebbero moltiplicare.

Siamo dunque d'accordo che *la geometria, come ogni altra scienza deduttiva, deve presupporre conosciuti alcuni concetti fondamentali, la cui nozione, suscitata dall'osservazione e dall'esperienza, è poi elaborata dall' intelletto per elevarla al grado di concetti generali ed astratti.*

I concetti primitivi, che stanno a base della geometria, son quelli di *punto*, di *retta* e di *piano*.

Son nozioni create dalla mente per rappresentare sensazioni ed oggetti che il mondo esterno offre alla nostra osservazione e al nostro esperimento.

Cosí il punto non è né il segno sulla carta della punta del lapis o della penna, né il granellino di sabbia, né il lume lontano nell'oscurità della campagna, né la stella, né la puntura d'uno spillo. Però tutte queste cose hanno un quid comune, che costituisce appunto l'idea astratta di punto.

Analogamente dicasi nei riguardi delle sensazioni o degli oggetti già evocati nelle premesse della geometria intuitiva per suscitare le idee di retta e di piano.

È stato argutamente osservato che non si potrebbe dire p. es. che la retta del geometra non esiste in natura (in quanto ogni linea naturale ha uno spessore) se non sapessimo che cos' è la retta in geometria.

Dicevamo poco sopra che *dimostrare*, fino ad un'epoca piuttosto recente (un secolo fa all' incirca), significava *ridurre all'evidenza col ragionamento.* Questo modo d' intendere la dimostrazione matematica sarebbe pienamente accettabile se il progresso della scienza non avesse provato piú e piú volte che l' intuizione diventa fallace quando si esercita al di là di certi limiti. E non soltanto quella degl' intelletti comuni, ma anche quella degli uomini di genio, i quali hanno senza dubbio piú ampia visione immediata di cose e rapporti, ma pur sempre limitata, di fronte all' immensità dell' ignoto.

P. es. l'intuizione tende a farci credere che la geometria elementare o *geometria euclidea* (dal nome di Euclide, che ne diede la prima esposizione sistematica razionale che si conosce) è senza limitazione vera in tutto l' Universo, sia nel piccolo mondo in cui ci muoviamo, come nella immensità degli spazi stellari. Cosí invece non è necessariamente: è anzi probabile che la geometria dell' Universo sidereo sia *non euclidea.* Tale è la conclusione alla quale porta la relatività, che va ogni giorno di piú aderendo alla realtà fisica.

Da questo punto di vista piú dell'evidenza interessa dunque la coerenza logica. Se si rimanesse ostinatamente attaccati all' intuizione anche laddove non è per nulla nativa ed impulsiva, ma frutto di analogie talvolta illusorie, il progresso scientifico sarebbe condannato a un fatale arresto. La nuova fisica atomica, coi suoi portenti e tutte le sue promesse, non sarebbe stata possibile se ci fossimo legati all'antica intuizione della materia.

La geometria strettamente *intuitiva* dovrebbe esser pura e semplice visione diretta delle figure ed esecuzione di esperimenti con opportuni modelli, per esempio di carta. La geometria studiata nella scuola media aveva invece un carattere concettualmente un po' piú elevato: in quanto in essa si esponevano anche ragionamenti in forma via via meno embrionale. Il criterio dimostrativo era però sempre l'antico: ridurre all'evidenza. È necessario proceder cosí, perché la pura logica respinge il principiante e diviene accessibile soltanto dopo adeguato allenamento.

Lo sviluppo storico del pensiero ci addita, in questo, come in tanti altri casi, la via per insegnare e per apprendere con maggior rendimento.

Lo studio della geometria nella scuola media fu condotto dunque con *indirizzo intuitivo-razionale*: in parte osservazione ed esperimento, in parte deduzione logica.

E qual è l' *indirizzo razionale* o *puramente deduttivo*, nel senso piú rigido della parola?

Eccone uno schema. Sui concetti primitivi, punto, retta, piano, si enunciano i *postulati*, nei quali si dichiarano esplicitamente le proprietà che si attribuiscono a quei concetti. I postulati son proposizioni di carattere primitivo, come i concetti cui si riferiscono. Non si dimostrano, si ammettono. In sostanza i postulati costituiscono una definizione indiretta dei concetti primitivi, in quanto ci dicono di quali proprietà, di solito desunte direttamente dall'osservazione o dall'esperienza, essi godono.

In un ordinamento strettamente deduttivo qualunque richiamo all' intuizione, all'osservazione o all'esperimento deve esser perciò dichiarato con un postulato. Ogni proposizione dimostrata con una catena di deduzioni sulla sola base dei postulati o di altre proposizioni precedentemente dimostrate è un *teorema*. Il primo teorema che si dimostra consegue naturalmente soltanto dai postulati. In conclusione *l'ordinamento razionale consiste nel ridurre col ragionamento le proprietà da conseguirsi non già all'evidenza, ma ai postulati.*

Per ragioni didattiche lo studio della geometria non diviene mai così rigidamente razionale neppure nell'ordine scolastico superiore. Esso resta insomma una costruzione intuitivo-razionale, nella quale, in ragione della maggior maturità degli allievi, si accentua l'aspetto razionale.

Terminiamo questi cenni, sui quali gli scolari dovranno tornare piú volte a riflettere a mano a mano che procedono nello studio (giacché non tutto si capisce a perfezione in una prima lettura !), avvertendo che fra la proprietà dimostrata e la proprietà sperimentalmente accertata, c' è la differenza che passa fra una verità generale ed una particolare.

Se p. es. si verifica, mediante la sovrapposizione di un modello di carta a due angoli opposti al vertice, che questi son uguali, si ottiene un risultato valevole soltanto per quella coppia di angoli su cui si è sperimentato : verità particolare.

Se invece si dimostra l'uguaglianza con un ragionamento, si ottiene una verità generale, applicabile ad *ogni* coppia di angoli opposti al vertice.

Tutte le volte che il risultato di un esperimento si vuol trasformare in una verità generale occorre un ragionamento che assicuri l' identità del risultato comunque idealmente si mutino, sotto le condizioni a cui la verità è subordinata, gli oggetti sui quali si vuol sperimentare. E cosí si rientra nell'ordine razionale.

Di questo modo veramente scientifico d' intender l'esperienza fu maestro al mondo il nostro grande Galilei, della cui morte, avvenuta nell'anno in cui nacque Newton a raccogliere l'eredità galileiana, celebrammo il tricentenario nel 1942.

CAPITOLO PRIMO

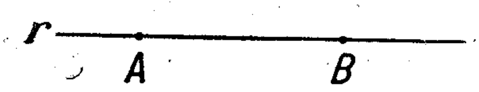
NOZIONI FONDAMENTALI

Punti, rette, piani.

1. Gli elementi geometrici fondamentali ***punto, retta, piano*** godon delle proprietà seguenti, direttamente suggerite dall' intuizione e che perciò si enunciano con altrettanti postulati:

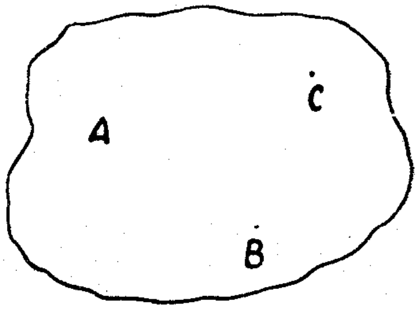
Post. ***Per due punti dati*** (1) ***passa una sola retta.***

La retta determinata da due punti A,B s' indica con AB o con BA. Se la retta stessa si denota con r, scrivesi $r \equiv AB$ (2).



Post. ***Per tre punti, non allineati, passa un sol piano.***

Il piano determinato dai tre punti non allineati A,B,C s' indica con $A\ B\ C$ o $B\ C\ A$, ecc. (3).

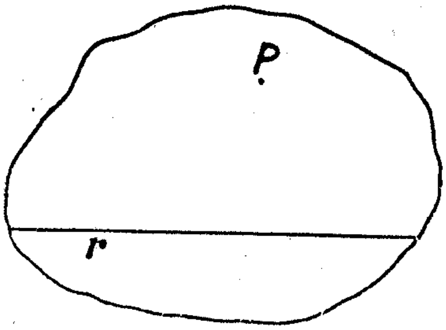


Post. ***La retta passante per due dati punti di un piano, giace interamente in questo.***

(1) Si sottintende *distinti*.

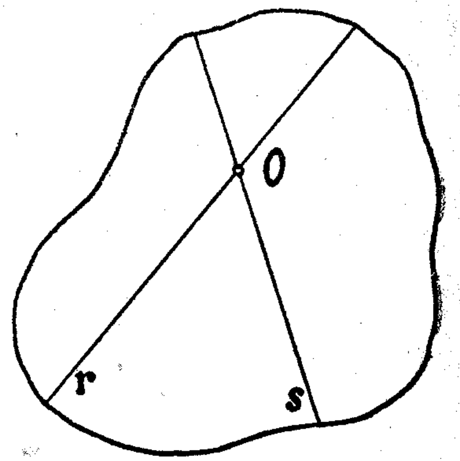
(2) Quando due simboli, come r,AB, denotano la medesima cosa, si scrive $r \equiv AB$, usando il segno $\equiv$ d' *identità logica*.

(3) Nella figura non possiamo rappresentare che un *pezzo* di piano, giacchè il piano è una superficie che si estende indefinitamente. Per indicare che si tratta di un pezzo staccato dal piano, il bordo della figura si disegna frastagliato.

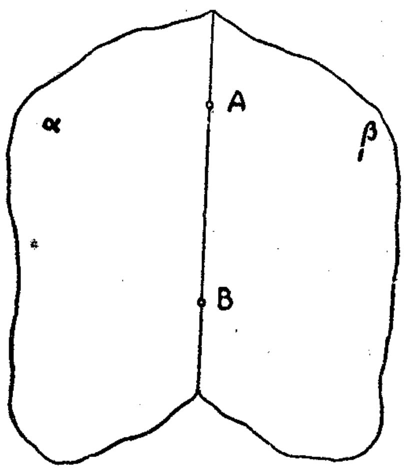


Post. ***Per una retta e per un punto ad essa esterno passa un sol piano.***

Il piano determinato dalla retta r e dal punto P s' indica con rP o con Pr.



Post. ***Due rette, r, s, che s'incontrino in un punto O determinano un piano*** (cioè stanno in uno ed in un sol piano).

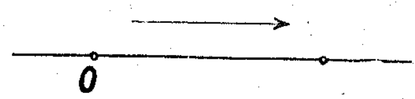


Post. ***Due piani*** α, β ***aventi in comune i punti A, B hanno in comune tutti e soli i punti della retta AB.***

La retta comune ai piani α, β chiamasi l' *intersezione dei due piani* e s' indica con $\alpha\beta$ o con $\beta\alpha$.

Segmenti — Semirette.

2. Una retta può esser percorsa in due *sensi* o *versi*, che diconsi *opposti* o *contrari* l'uno dell'altro. Fissiamo uno di questi versi, p. es. quello indicato dalla freccia, ed un punto O della retta.



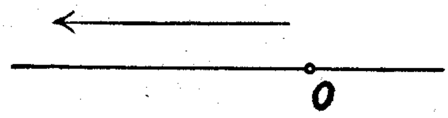
Def. (1) *Chiamasi* ***semiretta di origine*** *O, l' insieme del punto O e*

(1) Le definizioni più importanti son precedute dall'abbreviazione Def., della parola definizione.

di tutti i punti della retta che succedono ad O oppure che precedono O nel verso fissato.

Vi son dunque sulla retta data due semirette di origine O, le quali diconsi *opposte* l'una dell'altra. Si dice pure che l'una è il *prolungamento* dell'altra.

Tenuto fisso O e scelto sulla retta il verso opposto, le due semirette definite con quest'altro verso coincidon colle precedenti.



Due punti della retta appartenenti a semirette opposte di origine O, diconsi da *parti* o *bande opposte* di O.

Se la retta s' imagina come un filo materiale indefinito nei due sensi, le due semirette di origine O son le *parti* in cui il filo resta diviso tagliandolo in O.

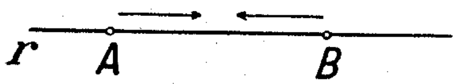
I punti d'una semiretta distinti da O, diconsi *interni*. Ogni punto non appartenente alla semiretta chiamasi *esterno* (1).

Quando si dice « la semiretta OA » s' intende la semiretta di origine O, di cui A è un punto interno.

Ogni semiretta determina un senso, che è quello che si percorre muovendo dall'origine O verso l' interno della semiretta (2).

3. Sieno A,B due punti d'una retta r.

Def. *Si chiama* **segmento** AB *l' insieme dei punti* A,B *e degl' infiniti punti della retta* AB, *che seguono* A *e precedono* B, *nel verso da* A *a* B.



(1) Tutte le volte che si ha una *figura*, cioè un insieme di punti, ogni punto non appartenente alla figura, dicesi ad essa *esterno*.

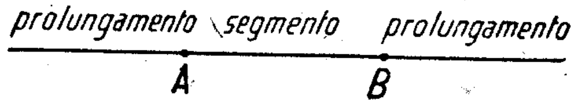
(2) Le proprietà enunciate in questo § derivano dall' intuizione e potrebbero esser riassunte in un postulato. Non lo facciamo per non appesantire la trattazione, d'accordo con quanto dicemmo nell' Introduzione.

Lo stesso insieme di punti, cioè lo stesso segmento, s'ottiene considerando i punti A,B ed i punti della retta AB, che seguono B e precedono A nel verso da B ad A. Perciò il segmento medesimo si denota pure con BA.

Il segmento AB ($\equiv BA$) è altresì l' insieme dei punti della retta AB comuni alle semirette AB e BA.

I punti A,B si chiaman gli *estremi* del segmento; gli altri punti di questo diconsi *interni*.

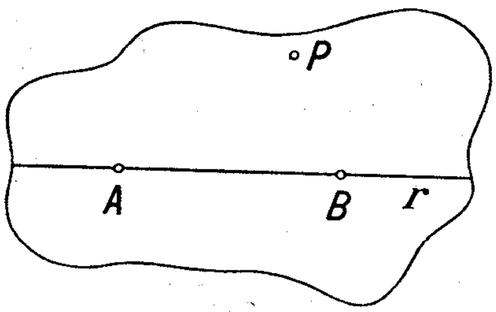
Continuando a procedere oltre B, nel verso da A a B, si ha una semiretta di origine B, che si chiama il *prolungamento* del segmento AB, dalla parte dell'estremo B. Similmente si ha un altro prolungamento dalla parte di A.



Due segmenti AB,BC, situati sopra una retta e aventi in comune il solo estremo B diconsi ***consecutivi***.

Semipiani — Angoli.

4. DEF. *Chiamasi* ***semipiano*** *ognuna delle due parti in cui un piano resta diviso da una sua retta.* Cioè: se si pensa un dato piano come una superficie materiale, indefinitamente estesa, e s' imagina di tagliarla lungo una retta r, essa resta divisa in due parti, distaccate tra loro (1), le quali son appunto due semipiani.



La retta r dicesi il *contorno* dei due semipiani. I punti di un semipiano, fuori del contorno, diconsi ad esso *interni*.

(1) In termini logici il fatto che le due parti siano *distaccate* si può esprimer dicendo che due loro punti son congiunti da un segmento che incontra sempre il contorno comune. Il fatto stesso costituisce un postulato.

Se P è un punto interno ad un semipiano di contorno r, il semipiano s' indica con rP od anche con ABP, qualora A,B sieno due punti del contorno.

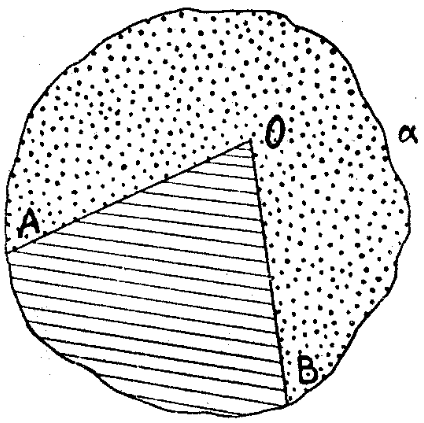
I due semipiani in cui un piano vien diviso da una sua retta r diconsi *opposti* l'uno dell'altro, e due punti di cui l'uno sia interno ad uno dei semipiani e l'altro sia interno all'altro, si chiamano da *parti* o da *bande opposte* del contorno r.

È intuitivo il seguente:

POST. ***La semiretta congiungente un punto del contorno di un semipiano con un punto interno, giace per intero sul semipiano; e due punti interni son congiunti da un segmento interno.***

5. DEF. *Chiamasi* **angolo** (*piano*) *ciascuna delle due parti in cui un piano vien diviso da due sue semirette, aventi la stessa origine.*

Cioè: pensiamo un dato piano α come una superficie materiale e tagliamolo lungo due sue semirette OA, OB. Allora il piano dividesi in due parti distaccate fra loro [1], una delle quali nella figura è punteggiata e l'altra tratteggiata. Sono due angoli.



Le semirette OA, OB diconsi i *lati* dei due angoli, il punto O il *vertice*. Si dice pure che i lati costituiscono il *contorno* di ciascuno dei due angoli.

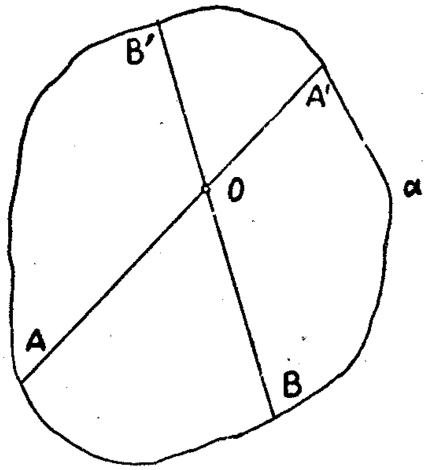
Un punto di un angolo, non appartenente al contorno, dicesi *interno*.

---

[1] Ossia tali che il segmento che unisce un punto dell'una parte con un punto dell'altra incontra necessariamente una delle due semirette OA,OB.

Un angolo ed un suo lato diconsi fra loro *adiacenti.*

Un angolo di lati OA, OB viene denotato con $A\hat{O}B$, ponendo in mezzo la lettera del vertice, con sopra il segno ^ di angolo. Sul dato piano α vi sono però due angoli corrispondenti al simbolo $A\hat{O}B$; onde bisognerà specificare di quale dei due s' intende parlare.



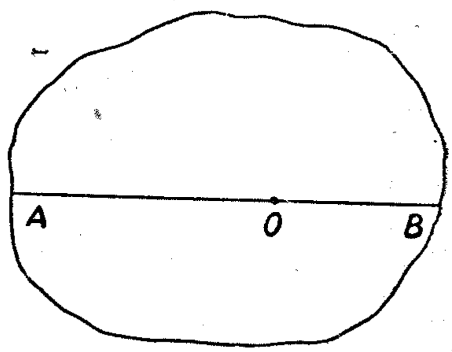
Se le semirette OA, OB non sono opposte, i loro prolungamenti OA', OB' penetrano in una sola delle due parti angolari in cui il piano è diviso dalle semirette OA, OB. Quella delle due parti in cui penetrano i prolungamenti dei lati si chiama un *angolo concavo*, l'altra un *angolo convesso*. Ossia :

DEF. *Si dice che un angolo è* **convesso** *se i prolungamenti dei suoi lati non penetrano nell' interno dell'angolo ; che è* **concavo** *se i prolungamenti dei lati penetrano nell' interno dell'angolo.*

Parlando dell'angolo $A\hat{O}B$ s' intende in generale di alludere all'angolo convesso, salvo che non si avverta in modo esplicito il contrario.

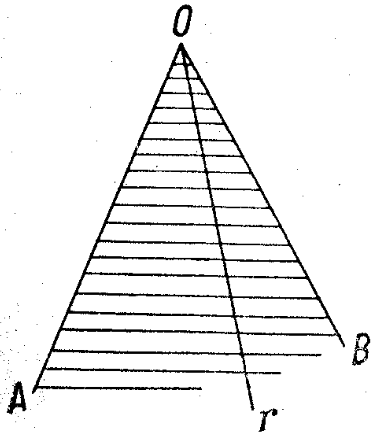
L'angolo $A\hat{O}B$ è comune ai due semipiani AOB, BOA.

6. Se le semirette OA, OB di un piano α, son opposte, tagliare il piano lungo queste semirette è lo stesso che tagliarlo lungo tutta la retta AB, e le due parti in cui esso vien cosí diviso son due semipiani. In questo caso dunque i due angoli



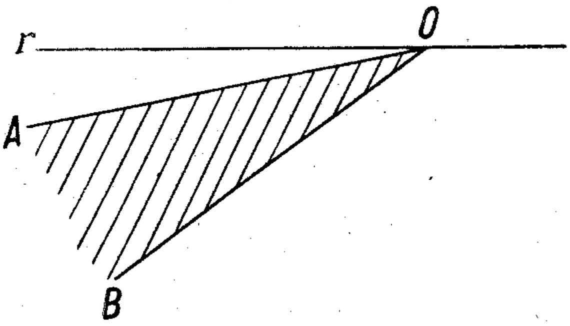
$A\hat{O}B$, come insiemi di punti, coincidono ciascuno con un semipiano.

Def. *Si dice che un angolo è* **piatto** *quando i suoi lati son opposti, cioè quando l'angolo è costituito da tutti e soli i punti di un semipiano.*



7. Se una retta r passa pel vertice d'un angolo $A\hat{O}B$ e penetra nell' interno divide $A\hat{O}B$ in due angoli situati da parti opposte di r ed ha comune con $A\hat{O}B$ tutta una semiretta.

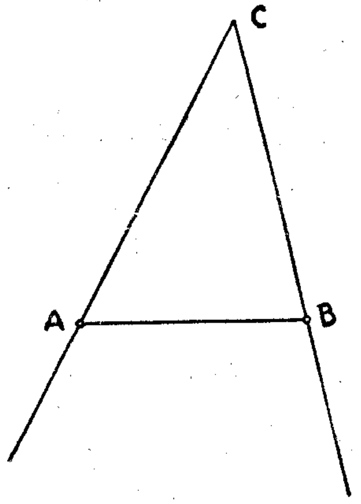
Invece una retta r del piano dell'angolo, passante pel vertice O e non avente a comune altri punti con $A\hat{O}B$, lascia l'angolo tutto da una parte; e viceversa. Queste proprietà intuitive si potrebbero enunciare con altrettanti postulati.



Triangoli.

8. Sieno A,B,C tre punti non allineati; α il piano che li contiene; $A\hat{C}B$ l'angolo di vertice C e di lati CA,CB.

Il segmento AB divide l'angolo $A\hat{C}B$ in due parti di cui l'una contiene C e l'altra è dalla parte opposta di C rispetto alla retta AB e si estende indefinitamente. La prima di queste due parti si chiama un triangolo, per-



ché è una parte del piano α, che appartiene non soltanto all'angolo $A\hat{C}B$, ma anche agli angoli $A\hat{B}C$, $C\hat{A}B$. Dunque:

DEF. *Dati tre punti non allineati A,B,C, chiamasi* ***triangolo*** *ABC la parte del piano ABC comune ai tre angoli $A\hat{B}C$, $B\hat{C}A$, $C\hat{A}B$, ciascuno dei quali ha per vertice uno dei punti dati ed ha i lati passanti per gli altri due* (1).

I punti A,B,C diconsi *vertici*; i segmenti AB,BC,CA *lati* del triangolo. Oltre che con ABC, il triangolo può denotarsi scrivendo in un ordine qualunque le lettere dei vertici, cosí: ABC,BCA,CAB,CBA,BAC,ACB. *Esso è anche intersezione dei tre semipiani ABC,BCA,CAB.*

Un vertice ed un lato diconsi *opposti*, quando il vertice è esterno al lato. Ai vertici A,B,C, son rispettivamente opposti i lati BC,CA,AB.

La figura costituita dai segmenti AB,BC,CA chiamasi una *linea triangolare chiusa.* Si chiama anche il *contorno* del triangolo. Un punto del triangolo non situato sul contorno dicesi *interno.*

Gli angoli $A\hat{B}C,B\hat{C}A,C\hat{A}B$ diconsi *angoli interni* o *angoli del triangolo.*

È intuitivo il seguente:

POST. ***In un piano, il segmento che unisce un punto***

---

(1) *Intersezione* di due o piú figure, costituite da punti, è l' insieme dei punti ad esse comuni. Un triangolo è dunque intersezione di tre angoli.

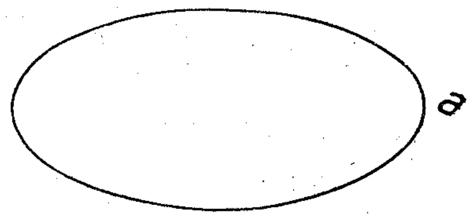
interno con un punto esterno ad un triangolo, incontra il contorno in un punto.

Ciò si esprime dicendo che il contorno del triangolo divide il piano in due parti.

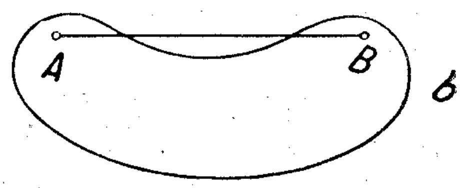
Figure convesse.

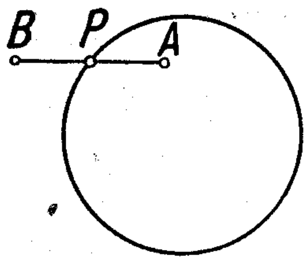
9. Le rette, le semirette, i segmenti, i piani, i semipiani, gli angoli (convessi), i triangoli si dicono figure convesse, perché ognuna di esse gode della proprietà che il segmento che ne unisce due punti appartiene per intero alla figura. La nozione può estendersi, colla seguente definizione generale:

DEF. *Diremo che una figura è* ***convessa*** *quando il segmento che ne congiunge due punti appartiene per intero alla figura.*



I punti appartenenti al contorno e quelli interni alla ovale *a*, tracciata qui accanto, costituiscono una figura convessa. Invece i punti appartenenti al contorno e quelli interni alla regione piana delimitata dalla linea chiusa *b*, formano una figura non convessa o *concava*, giacché ad es. i due punti A,B della figura, son congiunti da un segmento che esce in parte fuori della predetta regione.





Si dice che un punto P appartiene al *contorno di una figura convessa,* quando si può condurre per P una retta, contenente due segmenti PA,PB di versi contrari, per guisa che ogni punto interno ad uno di essi, PA, appartenga alla figura; mentre ogni punto interno all'altro, PB, non vi appartenga. I punti di una figura convessa, che non appartengono al contorno (eventuale), diconsi *punti interni.*

10. TEOR. *L' intersezione di due o più figure convesse (se esiste e non si riduce ad un sol punto), è una figura convessa.*

Sieno infatti F, F', F''.... più figure convesse e G la loro intersezione, cioè l' insieme dei loro punti comuni. Presi in G due punti A, B, il segmento AB appartiene a ciascuna delle F, F', F''...., appunto perché le date figure son convesse. E quindi esso appartiene alla loro intersezione G, che, dunque, risulta convessa.

CENNI STORICI

11. *Riassumeremo le notizie storiche date nella Scuola media, e le completeremo sottolineando il trapasso dallo stadio empirico e intuitivo allo stadio razionale della geometria. Sumeri, Babilonesi ed Egizi, migliaia e migliaia di anni or sono, possedevano alcune conoscenze geometriche derivate da problemi astronomici e pratici. Dall' Egitto queste conoscenze passarono in Grecia, intorno al 600 av. Cr., specialmente, a quanto sembra, per opera di* TALETE *di Mileto, uno dei sette savi cui alludono* PLATONE *e* ARISTOTELE *e del quale discorre anche* PLUTARCO, *riferendo che il re egiziano* AMASI *ammirava* TALETE *sopratutto perché egli otteneva la misura delle piramidi «senza fatica e senza strumenti», ma con poche misure, sulla scorta di semplici proprietà geometriche. A* TALETE *si fanno risalire vari teoremi, come quello degli angoli opposti al vertice [ved. § 32]. Secondo* PROCLO, *filosofo neoplatonico e tardo commentatore di* EUCLIDE *del V secolo d. Cr., la geometria di* TALETE *è a mezza strada fra la geometria concreta, o se si vuole intuitiva, degli Egizi e la geometria astratta e generale, o se si vuole razionale, di* PITAGORA. PROCLO *così precisa l'ordine del processo costruttivo della geometria: «dalla sensazione al ragionamento e da questo al-*

l'intelligenza ». Con Pitagora *di Samo (vissuto all' incirca dal* 580 *av. Cr.) comincia la elaborazione propriamente scientifica della geometria. Egli fu il fondatore (intorno al* 540 *av. Cr.) a Crotone in Calabria, dove nacquero insieme i nomi d' Italia e di Matematica, della* Scuola Italica, *una specie di setta religioso-scientifica, che vastissime impronte lasciò nel pensiero dell'antichità. Tuttavia pare che né* Pitagora *né i suoi più antichi discepoli avessero i concetti razionali di punto, di linea e di superficie, che si elaboraron soltanto attraverso la critica della Scuola filosofica di Elea* (V *secolo av. Cr.) con* Parmenide *e con* Zenone, *e ciò anche in conseguenza della scoperta degl' incommensurabili. Il primo trattato di geometria, che però andò perduto, fu scritto (verso il* 450 *av. Cr.) da* Ippocrate di Chio*; altri, pure perduti, furono scritti da* Leone *e da* Teudio *nel* IV *secolo av. Cr. Ma tutte queste opere restaron eclissate da quella di* Euclide *alessandrino intorno al* 300 *av. Cr. Ivi l'ordinamento della geometria raggiunge il massimo di razionalità conseguito da allora e per oltre venti secoli dipoi, fino al secolo* **XIX**, *nel quale cominciò la critica dei fondamenti della matematica. In* Euclide *la trattazione è sistematica e ben netta la distinzione fra definizioni, postulati e teoremi. In verità tra quelli che noi chiamiamo postulati,* Euclide *distingue in modo speciale le « nozioni comuni » che hanno carattere più evidente e portata più generale. La trattazione euclidea è però in talune parti illusoria o tautologica: tale è p. es. la definizione di angolo come reciproca inclinazione di due rette. Da ricordare che la definizione moderna di angolo come parte di piano è di* Gerberto *(che fu papa sotto il nome di* Silvestro II *e morì nel* 1003).

ESERCIZI

1. Se AB è un segmento e C un punto interno, il punto B è esterno al segmento AC.

2. Se due segmenti hanno in comune un estremo ed un altro punto, uno di essi contiene l'altro.

3. Dati quattro punti allineati, essi posson distribuirsi in tre modi in due coppie di punti, e fra le tre coppie di segmenti da queste determinate ve n' è una sola formata da segmenti aventi un segmento parziale comune.

4. Tagliando un pezzo di cartone lungo una retta, esso resta diviso in due pezzi. Lo stesso non avviene d'un tubo cilindrico di cartone, che può tagliarsi lungo una retta, senza che resti diviso in due pezzi.

5. Tagliando un pezzo angolare di cartone lungo un segmento che congiunga due punti di lati diversi, il cartone resta diviso in due parti.

6. Se due angoli, aventi lo stesso vertice, hanno in comune un lato e un punto fuori dei lati, uno di essi contiene l'altro.

7. Un angolo convesso è diviso da una semiretta interna uscente dal vertice in due angoli convessi, che giacciono da bande opposte di quella.

8. Dati nel piano quattro punti, a tre a tre non allineati, vi sono sei rette che li congiungono a due a due, e queste s' intersecano, oltreché nei punti dati, in altri tre punti al piú.

9. Si dice che due punti appartengono ad una medesima delle regioni determinate dalle sei rette dell' Es. precedente, quando son congiunti da un segmento non incontrante alcuna di queste; che appartengono a regioni diverse in caso contrario. Contare quante sono queste regioni, distinguendole con colori diversi.

10. Una retta che non contenga alcun lato di un triangolo, non può incontrarne il contorno in più di due punti.

11. I lati d'un triangolo e i loro prolungamenti dividono il piano in sette regioni convesse, delle quali tre sono angolari. Un punto interno ad una di quelle regioni ed un punto esterno, son congiunti da un segmento che incontra il contorno della regione considerata.

12. Data nello spazio (1) una qualunque figura F, vi è una sola figura convessa che contiene F e che è alla sua volta contenuta in ogni figura convessa contenente F.

Si osservi, per cominciare, che F è contenuta nello spazio, che è una figura convessa. Si consideri poi l' ipotesi che F appartenga a piú figure convesse.

(1) *Spazio* è l' insieme di tutti i punti.

CAPITOLO SECONDO

DELL' UGUAGLIANZA TRA FIGURE PIANE

Definizioni e proprietà fondamentali.

12. Def. *Due figure piane F,F', si dicono* ***uguali*** *quando con un movimento è possibile di portar a coincidere F con F'* (¹).

Si può dire altresí che due figure uguali F,F' sono posizione iniziale e posizione finale di una medesima figura (rigida).

Allorché F si sovrappone con un movimento alla figura uguale F', ogni punto A di F va in un determinato punto A' di F', che dicesi *corrispondente* od *omologo* del punto A di F. Cosí ad ogni punto di F viene a corrispondere un punto di F'; e viceversa. La corrispondenza in tal guisa ottenuta fra i punti delle due figure, dicesi un'*uguaglianza*; e si scrive $F = F'$.

La medesima relazione di uguaglianza può esser ottenuta con infiniti movimenti diversi, ciascuno dei quali porta a coincidere F con F'. Ciò dipende dal cammino che si fa percorrere alla figura F per sovrapporla ad F'.

13. Sono intuitive le proprietà seguenti:

Post. ***Ogni figura è uguale a se stessa*** (*proprietà riflessiva dell'uguaglianza*).

(¹) La nozione di *movimento* (si sottintende rigido) vien qui assunta come primitiva e definita dunque dai successivi postulati.

POST. ***Se una figura è uguale ad un'altra, questa è uguale a quella*** (*proprietà simmetrica dell'uguaglianza*).

POST. ***Due figure uguali ad una terza, son uguali fra loro*** (*proprietà transitiva dell'uguaglianza*).

POST. ***Una figura non può esser uguale ad una sua parte.***

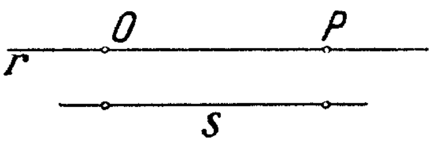
Inoltre:

POST. ***Tutte le rette son uguali fra loro; tutte le semirette son uguali fra loro; tutti i piani son uguali fra loro; tutti i semipiani son uguali fra loro; tutti gli angoli piatti son uguali fra loro.***

Infine:

POST. ***Un movimento porta un segmento in un segmento (uguale); un angolo in un angolo (uguale); un triangolo in un triangolo (uguale).***

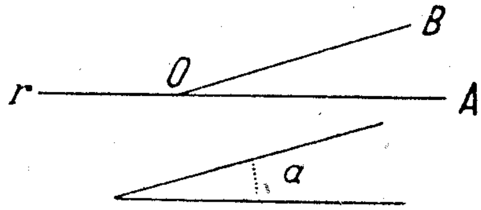
14. Data sopra una retta r una semiretta di origine O e dato inoltre un segmento s, si può col compasso riportare sulla semiretta, a partire da O, un segmento OP uguale ad s. Enunceremo dunque:



POST. ***Sopra una retta e da una parte prefissata di un suo punto O, può costruirsi uno ed un sol segmento, avente un estremo in O ed uguale ad un segmento dato.***

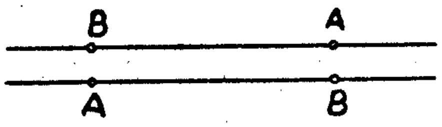
Analogamente, usando del rapportatore degli angoli, si vede che:

POST. ***Sopra un piano, da una parte prefissata di una sua retta r, può costruirsi uno ed***

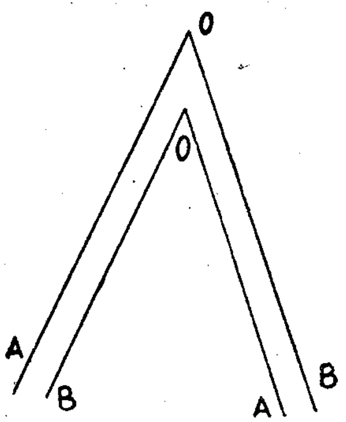


un sol angolo, avente come lato una semiretta OA data su r, ed uguale ad un angolo α dato.

15. POST. ***Ogni segmento si può invertire con un movimento,*** cioè si può trasportare rigidamente il segmento AB, in guisa che si sovrapponga complessivamente a se stesso, ma il punto A vada in B e il punto B in A.



16. POST. ***Ogni angolo si può invertire con un movimento,*** cioè si può trasportar rigidamente l'angolo $A\widehat{O}B$, in guisa che si sovrapponga a se stesso, ma il lato OA vada nel lato OB ed il lato OB nel lato OA.



17. DEF. *Si dice che un segmento a è* ***minore*** *di un altro segmento b, quando a è uguale ad una parte di b. Si dice anche, allora, che b è* ***maggiore*** *di a.*

Si scrive:

$$a < b \quad \text{oppure} \quad b > a.$$

Son evidenti le proprietà che seguono:

POST. ***Se $a' = a$, $b' = b$ ed $a < b$, risulta $a' < b'$.***

POST. ***Fra due dati segmenti a,b passa una ed una sola delle tre relazioni:***

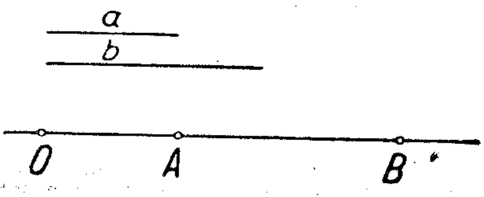
$$a = b \; ; \; a < b \; ; \; a > b.$$

POST. ***Esiston sempre segmenti maggiori e segmenti minori di un dato.***

POST. ***Se*** $\boldsymbol{a > b}$ ***e*** $\boldsymbol{b \geq c}$ [1], ***risulta*** $\boldsymbol{a > c}$ ***; se*** $\boldsymbol{a < b}$, $\boldsymbol{b \leq c}$, ***è*** $\boldsymbol{a < c}$.

18. DEF. *Dicesi* ***somma di due segmenti*** *a,b ogni segmento c ottenuto riportando sopra una retta* [14] [2] *due segmenti consecutivi* [3] *uguali ad a,b.*

La somma di due segmenti a,b s' indica col simbolo $a + b$; sicché $c = a + b$.



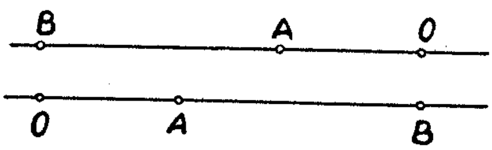
Nella figura il segmento OA è uguale ad a, il segmento AB è uguale a b ed il segmento OB è uguale a c.

È chiaro che tutti i segmenti c costruiti com' è indicato nella definizione risultano uguali fra loro, comunque si cambino gli elementi arbitrari della costruzione.

TEOR. *La somma di due segmenti a,b gode della proprietà commutativa; cioè:*

$$a + b = b + a.$$

Infatti, se dopo costruito il segmento $OB = a + b$, il segmento stesso s' inverte [15], in modo che O vada in B e B in O, il segmento OB vien decomposto in un primo segmento BA uguale a b ed in un secondo segmento AO uguale ad a, onde OB risulta uguale a $b + a$.



19. La proprietà precedente, come quella del § 10, a differenza delle altre finora enunciate, che erano postu-

---

(1) Il segno $\geq$ indica che b è maggiore o uguale a c.

(2) I numeri tra parentesi richiamano paragrafi che lo scolaro deve tener presenti.

lati desunti direttamente dall' intuizione, è stata *dimostrata*, cioè dedotta come conseguenza logica dei postulati. Essa è dunque un ***teorema.***

In un teorema si distinguono l' ***ipotesi***, che è quanto si suppone sopra gli elementi su cui verte la proposizione; e la ***tesi***, che è la conclusione della ***dimostrazione.***

Cosí p. es. nel teor. del § 18 l' ipotesi è che il segmento di cui si parla sia la somma $a + b$ di due altri, a,b, considerati nell'ordine a,b; la tesi è che il segmento $a + b$ uguaglia la somma dei segmenti stessi considerati nell'ordine b,a.

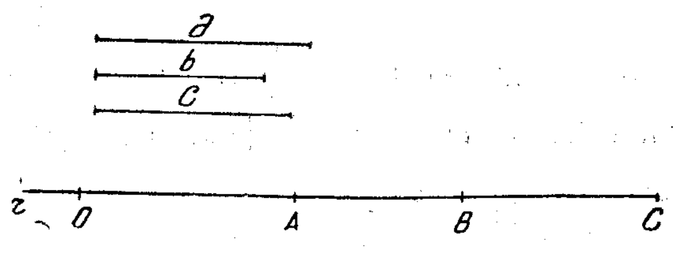
20. Def. *La somma $a + b + c$ di tre segmenti a,b,c è la somma del segmento $a + b$ e del segmento c*, ossia in simboli:

$$a + b + c = (a + b) + c.$$

21. Teor. *La somma di tre segmenti gode della proprietà associativa, cioè:*

$$a + b + c = a + (b + c).$$

Riportiamo infatti successivamente i segmenti a,b,c sopra una retta r, a partire da O, p. es. verso destra, e sieno OA,AB,BC i segmenti cosí ottenuti. La somma dei primi due è OB e quindi la somma di tutti e tre è $OB + BC = OC$. Ma il segmento OC può anche decomporsi nelle somme dei segmenti OA,AC, cioè di due segmenti uguali ad $a,b + c$; dunque $a + b + c = a + (b + c)$.



22. Teor. *La somma di tre segmenti gode della proprietà commutativa, cioè in qualunque ordine si sommino i segmenti si ottengon sempre somme uguali.*

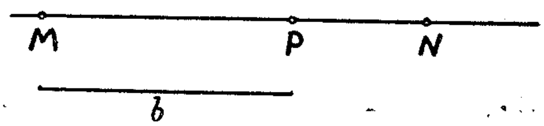
Invero, combinando la proprietà commutativa della somma di due segmenti [18] colla proprietà associativa della somma di tre [21], si hanno le uguaglianze:

$$a + b + c = (b + a) + c = b + a + c;$$
$$a + b + c = a + (c + b) = a + c + b;$$
$$a + b + c = b + a + c = b + (c + a) = b + c + a; \text{ ecc.}$$

23. Il concetto di somma si estende facilmente a quanti si vogliano segmenti e si verifica che la somma di più segmenti gode delle proprietà associativa e commutativa.

24. Def. *Dati due segmenti a,b, di cui il primo sia maggiore del secondo, chiamasi* ***differenza*** *$a - b$ dei due segmenti, un segmento c, che sommato con b fornisca un segmento uguale ad a.*

Effettivamente, se $a > b$, la differenza $a - b$ dei due segmenti *esiste sempre*. Infatti, riportato il segmento $MP = b$ sulla retta MN, che contiene il segmento $MN = a$, a partire da M, nel verso MN, il segmento MP deve risultare parte di MN, cioè P deve esser interno ad MN. Ma allora $MN = MP + PN$, epperò PN è uguale alla differenza $a - b$.



25. Def. [*Si chiama* ***multiplo*** *di un segmento a, secondo il numero intero n, la somma di n segmenti uguali ad a.* Esso indicasi col simbolo na. In particolare per $n = 2,3,....$ si ha il *doppio*, il *triplo*,.... del segmento dato.

Se il segmento b è uguale ad na, si dice inversamente che a è ***summultiplo*** *di b secondo n*, e si scrive $a = b : n$

oppure $a = \dfrac{b}{n}$ od anche $a = {}^1/_n\, b$. In particolare per $n = 2,3,$ si ha la *metà*, la *terza parte*,.... del segmento b.

26. Si dimostra facilmente la proprietà seguente che potrà essere stabilita per esercizio. Essa ha del resto carattere di evidenza:

TEOR. *Somme o differenze di segmenti uguali sono uguali.*

Ne discende il

COROLLARIO. *Se fra i segmenti a, b, c passan le relazioni $a > b$, $c > d$, risulta:*

$$a + c > b + d.$$

Infatti, se $a > b$ e $c > d$, potremo considerare un segmento $b' = a - b$ ed un segmento $d' = c - d$, e sarà dunque:

$$a = b + b' \quad , \quad c = d + d'.$$

Sommando a membro a membro queste uguaglianze (il che è lecito, a norma del precedente teorema), si deduce:

$$a + c = b + b' + d + d' = (b + d) + (b' + d'),$$

epperò $a + c$, che contiene come parte $b + d$, è maggiore di $b + d$.

OSSERVAZIONE. Quando un teorema è facile conseguenza di un altro, chiamasi un ***corollario*** di questo.

27. DEF. *Si dice che una figura è* ***finita*** *quando esiste qualche segmento maggiore di tutti i segmenti che uniscono a due a due i punti della figura.*

Se un tal segmento non esiste, la figura si chiama ***infinita***.

Un segmento, un triangolo sono figure finite [Es. 43]; una retta, una semiretta, un piano, un semipiano, un angolo, sono figure infinite.

Disuguaglianze tra angoli.
Somme e differenze di angoli.

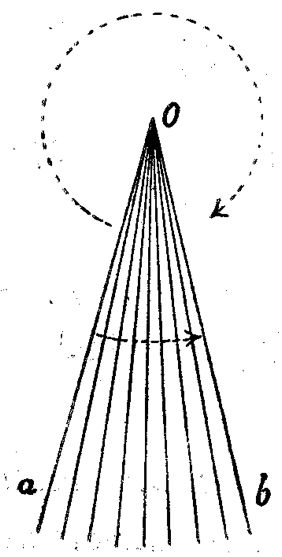
28. Talune definizioni son analoghe a quelle date pei segmenti.

DEF. *Si dice che l'angolo $\hat{\alpha}$ è* ***minore*** *dell'angolo $\hat{\beta}$, se $\hat{\alpha}$ è uguale ad una parte di $\hat{\beta}$. Si dice anche allora che $\hat{\beta}$ è* ***maggiore*** *di $\hat{\alpha}$.*

Si scrive:

$$\hat{\alpha} < \hat{\beta} \quad \text{oppure} \quad \hat{\beta} > \hat{\alpha}.$$

Son evidenti le proprietà analoghe a quelle enunciate pei segmenti nel § 17. Anzi le proprietà stesse valgono pure per *angoli concavi*. Esse riduconsi a proprietà di angoli convessi, considerando, per ognuno dei dati angoli concavi, l'angolo convesso che ha gli stessi lati. Lo scolaro volenteroso potrà verificarlo per esercizio.

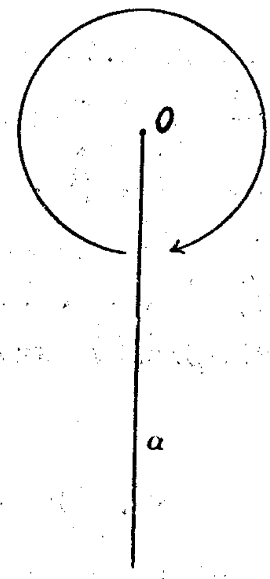


29. Dobbiamo occuparci della somma di due o piú angoli. Osserviamo all'uopo che una semiretta *a* di origine *O* può muoversi nel piano, attorno ad *O*, in due versi, opposti l'uno dell'altro, com'è indicato in figura dalle frecce (¹).

(¹) L'esistenza di questi due versi, precisata dal punto di vista logico, dà luogo ad un postulato, che omettiamo di formulare.

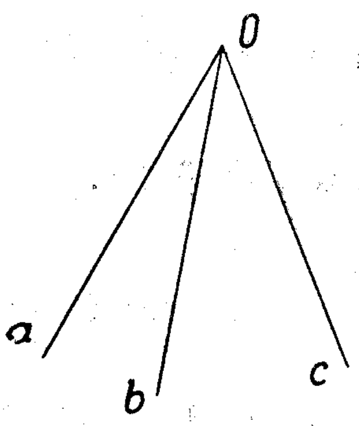
Se la semiretta va dalla posizione iniziale a alla posizione finale b in uno dei due versi, essa descrive uno dei due angoli di lati a, b; nel verso opposto descrive l'altro.

Se la semiretta mobile compie un mezzo giro, essa descrive un angolo piatto; continuando, descrive un angolo concavo e finisce col tornare in a. Si dice allora che ha descritto l'*angolo giro di vertice O*, il quale comprende l' intero piano.



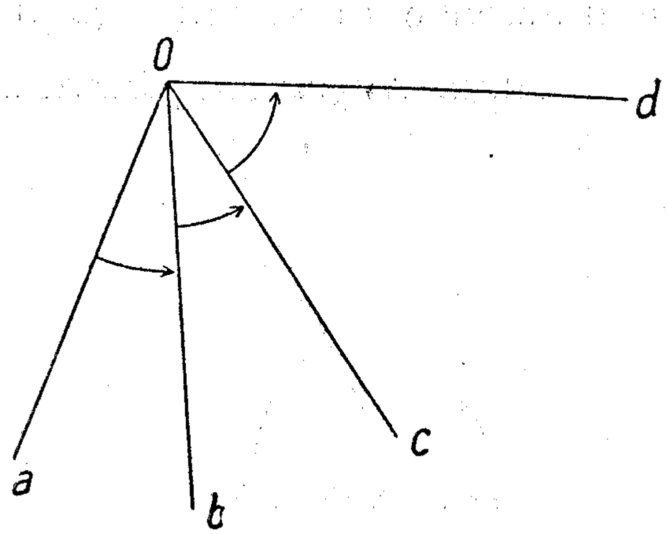
Continuando la rotazione, s' ottiene un angolo maggiore dell'angolo giro ed in parte ricoprente se stesso e si ritorna in a dopo aver percorso successivamente due volte l'angolo giro; e cosí di seguito.

Due angoli $\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$ si dicon **consecutivi** quando hanno un lato comune b e son percorsi successivamente da una semiretta che si muova da a verso b e prosegua poi da b verso c.



L'angolo risultante dal loro insieme, cioè l'angolo descritto da una semiretta che si muova nel senso fissato da a verso c passando per b, dicesi **somma** dei due angoli consecutivi.

Similmente si può parlare della somma di tre angoli $\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$, $\widehat{cd}$, tali che in un verso conveniente $\widehat{bc}$ sia consecutivo ad $\widehat{ab}$ e $\widehat{cd}$ a $\widehat{bc}$; e, proseguendo, si può parlare della somma di quat-



tro angoli o di un numero qualsiasi di angoli di cui ciascuno (salvo il primo) sia consecutivo al precedente.

Se poi si hanno piú angoli $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$, $\widehat{\gamma}$,.... non consecutivi, si riporteranno in un piano [14] in altrettanti angoli $\widehat{\alpha}'$, $\widehat{\beta}'$, $\widehat{\gamma}'$,.... ad essi rispettivamente uguali, tali che $\widehat{\beta}'$ sia consecutivo ad $\widehat{\alpha}'$; $\widehat{\gamma}'$ a $\widehat{\beta}'$, ecc. L'angolo $\widehat{\alpha}' + \widehat{\beta}' + \widehat{\gamma}' + ...$ od ogni angolo ad esso uguale si dirà *somma* degli angoli dati $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$, $\widehat{\gamma}$,.... e s'indicherà pure con $\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} + ...$.

Si prova, in modo analogo a quel che vedemmo nei §§ 18, 21, 22 che *la somma di due o piú angoli gode delle proprietà commutativa e associativa.*

30. Dati due angoli $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$, tali che $\widehat{\alpha} > \widehat{\beta}$, si può sempre costruire in $\widehat{\alpha}$ una parte uguale a $\widehat{\beta}$ [14]. La parte rimanente $\widehat{\gamma}$ è tale che $\widehat{\beta} + \widehat{\gamma} = \widehat{\alpha}$. Si dice che $\widehat{\gamma}$ è la ***differenza*** dei due angoli $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$ e si scrive $\widehat{\gamma} = \widehat{\beta} - \widehat{\alpha}$.

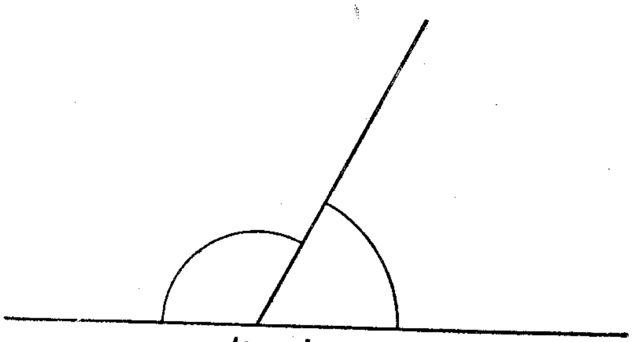
Valgono le proprietà analoghe a quella del § 26.

31. Def. *Due angoli diconsi* ***supplementari*** *quando la loro somma è un angolo piatto.*

Poiché tutti gli angoli piatti son uguali fra loro [13] e differenze di angoli uguali son uguali, si ha il

Teor. *Angoli supplementari di angoli uguali son uguali.*

Def. *Due angoli aventi lo stesso vertice si dicono* ***adiacenti*** *quando hanno un lato comune e gli altri due opposti.* È chiaro che *due angoli adiacenti son supplementari.*

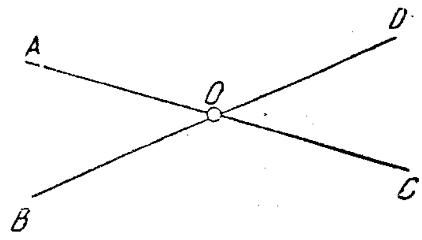


angoli adiacenti

32. DEF. *Due angoli aventi lo stesso vertice, ed i lati a due a due opposti, si chiamano* ***opposti al vertice.***

Vale il seguente:

TEOR. *Due angoli opposti al vertice son uguali.*



Sieno $A\hat{O}B$, $C\hat{O}D$ i due dati angoli opposti al vertice. Essi risultano uguali, perché son ambedue supplementari del medesimo angolo $A\hat{O}D$.

33. La somma di n angoli uguali ad $\hat{\alpha}$ chiamasi il multiplo *secondo n dell'angolo* $\hat{\alpha}$ e si denota con $n\hat{\alpha}$. Se $\hat{\beta} = n\hat{\alpha}$, si dice pure che $\hat{\alpha}$ è il ***summultiplo*** di $\hat{\beta}$ *secondo* n e si scrive $\hat{\alpha} = \hat{\beta} : n$ o $\alpha = \frac{\hat{\beta}}{n}$ oppure $\hat{\alpha} = {}^1/_n\,\hat{\beta}$.

Per $n = 2,3,....$ l'angolo $n\hat{\alpha}$ è il *doppio*, il *triplo*,.... di $\hat{\alpha}$ e l'angolo ${}^1/_n\,\hat{\beta}$ è la *metà*, la *terza parte*,.... di $\hat{\beta}$.

Uguaglianze di triangoli.

Triangoli isosceli ed equilateri.

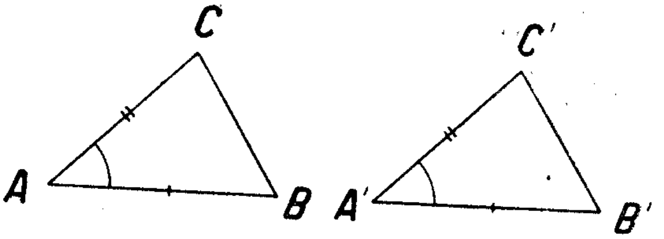
34. Dati due triangoli, in piani distinti o coincidenti, per riconoscere s'essi son uguali basta verificare se sono uguali alcuni loro elementi, lati ed angoli.

I teoremi che riducono la verifica dell'uguaglianza di due triangoli alla verifica dell'uguaglianza di certi loro elementi, chiamansi *casi di uguaglianza* dei triangoli.

Teor. *Due triangoli son uguali se hanno uguali due lati e l'angolo compreso* ***(primo caso d'uguaglianza)*** (1).

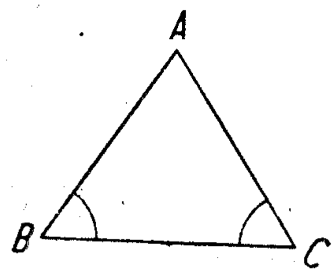
Sieno i due triangoli ABC, $A'B'C'$, i quali abbiano uguali gli angoli $\hat{A}$, $\hat{A}'$ (2) e le coppie di lati AC, $A'C'$; AB, $A'B'$.

Essendo $\hat{A} = \hat{A}'$, l'angolo $\hat{A}$ può sovrapporsi con un movimento ad $\hat{A}'$, in modo che la semiretta AB vada sulla semiretta $A'B'$ e la semiretta AC sulla semiretta $A'C'$ [14]. Il segmento AB vien così a coincidere col segmento uguale $A'B'$ e il segmento AC col segmento uguale $A'C'$. Perciò i tre vertici e i tre lati del primo triangolo coincidono ordinatamente coi vertici e coi lati del secondo e quindi ABC, come intersezione di tre semipiani [8], che son venuti a coincidere con quelli che similmente definiscono $A'B'C'$, è interamente sovrapposto ad $A'B'C'$. Epperò i due triangoli son uguali.



35. Def. *Chiamasi* ***isoscele*** *un triangolo avente due lati uguali.*

Il terzo lato BC di un triangolo isoscele ABC si dice *base* del triangolo. Gli angoli ad esso adiacenti [5] si chiamano *angoli alla base*; l'ulteriore angolo è l'*angolo al vertice*.



Teor. *In un triangolo isoscele gli angoli alla base son uguali.*

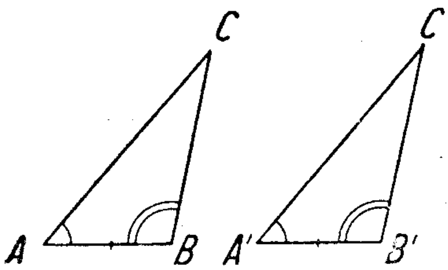
---

(1) È questa una forma abbreviata per dire che i due triangoli hanno due lati dell'uno uguali a due lati dell'altro ed uguali gli angoli rispettivamente compresi. Analoghe abbreviazioni di linguaggio si usano anche negli enunciati degli altri casi di uguaglianza.

(2) Quando non c'è possibilità d'equivoco un angolo s'indica anche colla sola lettera del vertice, cui si sovrappone il segno $\wedge$ di angolo.

Invero i due triangoli ABC, ACB (certamente uguali, perché non sono in sostanza che il medesimo triangolo), hanno uguali le coppie di lati corrispondenti AB,AC ed AC,AB e l'angolo $\hat{A}$ è comune; onde pel primo caso di uguaglianza, avranno uguali gli angoli corrispondenti $\hat{B}$, $\hat{C}$.

36. Teor. *Due triangoli sono uguali se hanno uguali due angoli e il lato ad essi comune* ***(secondo caso d'uguaglianza).***



Sieno ABC, $A'B'C'$ i due dati triangoli e supponiamo $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$, $AB = A'B'$.

Portiamo il semipiano ABC sul semipiano $A'B'C'$, in guisa che il segmento AB coincida col suo uguale $A'B'$. Allora la semiretta AC vien a cadere sulla semiretta $A'C'$, per l'uguaglianza degli angoli in $\hat{A}$, $\hat{A}'$ [14]; e, similmente, la semiretta BC va sulla $B'C'$. Onde il punto C, comune alle AC,BC, viene a coincidere col punto C', comune alle $A'C'$, $B'C'$. Il triangolo ABC è cosí completamente sovrapposto al triangolo $A'B'C'$; epperò i due triangoli son eguali.

37. Dal secondo caso d'uguaglianza si deduce il reciproco [1] del teor. del § 35, e cioè:

Teor. *Un triangolo avente due angoli uguali è isoscele.*

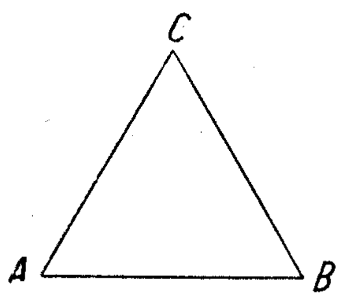
Se, infatti, nel triangolo ABC (ved. l'ultima fig. di pag. 30) è $\hat{B} = \hat{C}$, i due triangoli ABC, ACB hanno $BC = CB$, $\hat{B} = \hat{C}$, $\hat{C} = \hat{B}$, epperò i lati corrispondenti AB, AC son uguali.

---

[1] Teorema *reciproco* o *inverso* di un altro è quello che ha come ipotesi la tesi dell'altro e come tesi la ipotesi.

38. Def. *Un triangolo ABC coi tre lati uguali dicesi* ***equilatero.***

Un triangolo siffatto può considerarsi come isoscele in tre modi diversi, secondo che si prenda per base l'uno o l'altro dei lati. Ne deriva il



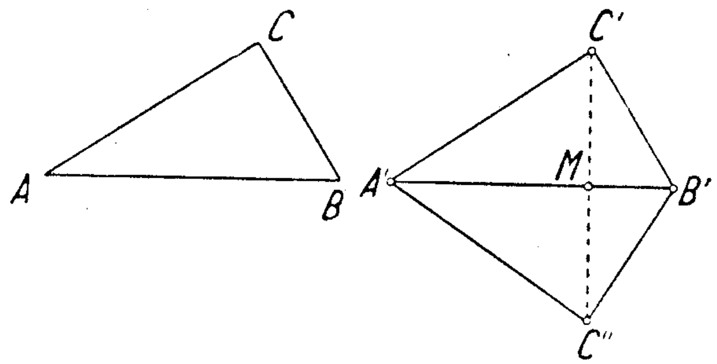
Teor. *Un triangolo equilatero è anche equiangolo* (cioè ha i tre angoli eguali).

È vero anche il teorema reciproco, in virtú del teor. 37.

39. Teor. *Due triangoli son uguali se hanno i tre lati uguali* ***(terzo caso di uguaglianza).***

Sieno ABC, $A'B'C'$ i due triangoli aventi $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CA = C'A'$.

Sul semipiano opposto ad $A'B'C'$ riportiamo un triangolo $A'B'C''$ uguale ad ABC, in modo che i vertici corrispondenti ad A,B si sovrappongano ad A',B'. Dall'uguaglianza dei triangoli ABC,$A'B'C''$ segue $AC = A'C''$, $BC = B'C''$ quindi [13] $A'C' = A'C''$, $B'C' = B'C''$.



Pertanto i triangoli $C'A'C''$, $C'B'C''$ son isosceli ed hanno dunque uguali gli angoli alla base [35]; cioè $A'\hat{C'}C'' = A'\hat{C''}C'$, $B'\hat{C'}C'' = B'\hat{C''}C'$.

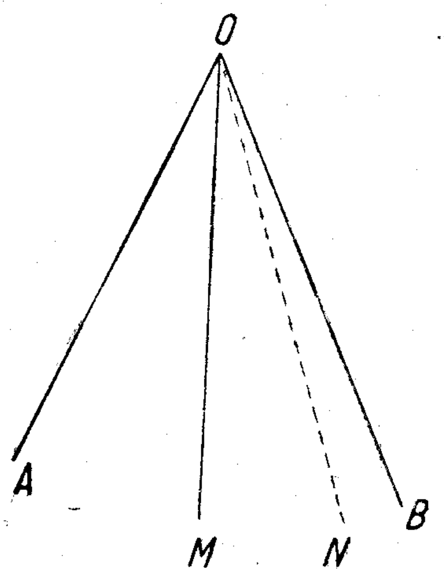
Ora, i due punti C', C'' trovandosi da bande opposte della retta $A'B'$, il segmento $C'C''$ incontra questa retta in un punto M. Se, come nel caso della figura, M è interno al segmento $A'B'$, i due angoli $A'\hat{C'}B'$, $A'\hat{C''}B'$ risultano uguali, perchè somme di angoli uguali. Epperò i due triangoli $A'C'B'$, $A'C''B'$ hanno uguali due lati e l'angolo compreso e son dunque uguali [34]. Ma il triangolo $A'C''B'$ è uguale ad ACB e quindi [13] son uguali i triangoli dati ACB, $A'C'B'$.

Lasciamo per esercizio l'esame dei casi in cui M è esterno al segmento $A'B'$ o coincide con uno degli estremi di questo. La conclusione resta immutata.

Bisettrice d'un angolo e punto medio d'un segmento.

40. Def. *Chiamasi* ***bisettrice*** *d'un angolo una semiretta avente l'origine nel vertice, la quale divide l'angolo in due angoli uguali.*

Vedremo in seguito [141] come si costruisce la bisettrice di un angolo qualunque.



Teor. *La bisettrice d'un angolo è unica.*

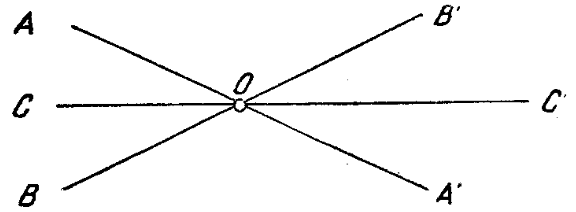
Invero, se OM è bisettrice dell'angolo $A\hat{O}B$, una semiretta ON di origine O, diversa da OM, interna all'angolo dato, è interna ad uno dei due angoli uguali $A\hat{O}M, B\hat{O}M$ e divide perciò l'angolo dato in due angoli disuguali, perché, uno, $B\hat{O}N$, è minore della metà di $A\hat{O}B$ e l'altro, $A\hat{O}N$, ne è maggiore.

Osservazione. La conclusione è applicabile anche se l'angolo $A\hat{O}B$ è piatto o concavo.

DEF. ***Retta bisettrice*** *d'un angolo (convesso o concavo) è quella che contiene la semiretta bisettrice dell'angolo.*

41. TEOR. *Le bisettrici di due angoli opposti al vertice son semirette opposte.*

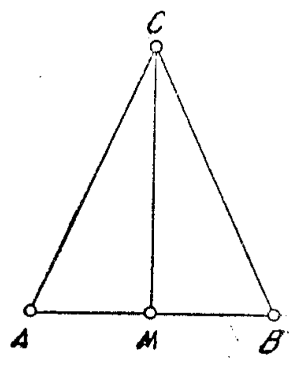
Sia OC la bisettrice dell'angolo $A\hat{O}B$. Dico che la semiretta opposta, OC', biseca l'angolo $A'\hat{O}B'$ opposto al vertice di $A\hat{O}B$.



Infatti gli angoli $A\hat{O}C, A'\hat{O}C'$ sono uguali, perché opposti al vertice; e cosí gli angoli $B\hat{O}C, B'\hat{O}C'$. Ma $A\hat{O}C = B\hat{O}C$; dunque $A'\hat{O}C' = B'\hat{O}C'$.

42. TEOR. *La bisettrice dell'angolo al vertice di un triangolo isoscele è mediana della base (cioè la divide per metà).*

Sia ABC il dato triangolo isoscele, avente $AC = BC$, e CM sia la bisettrice dell'angolo al vertice. Essa incontra la base in un punto interno M, perché lascia da parti opposte i punti A, B e non contiene, oltre C, che punti interni all'angolo $A\hat{C}B$.



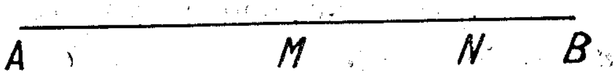
I due triangoli AMC, BMC, sono eguali, perché hanno $AC = BC$; CM comune; $A\hat{C}M = B\hat{C}M$. Ne segue che $AM = BM$, come afferma il teorema.

43. DEF. ***Punto medio*** *d'un segmento è un punto ad esso interno, che lo divide in due segmenti uguali.*

Indicheremo in seguito [139] il modo di costruire il punto medio d'un segmento.

Teor. *Il punto medio d'un segmento è unico.*

Invero, se M è il punto medio del segmento AB, un punto N interno ad AB, diverso da M, è interno ad uno, MB, dei segmenti uguali AM,MB, e divide pertanto il segmento dato in due segmenti AN,NB, di cui il primo è maggiore della metà di AB e l'altro ne è minore.



I due punti A,B si dicono *simmetrici* rispetto al loro punto medio M.

CENNI STORICI

44. *I casi d'uguaglianza dei triangoli trovansi esposti negli Elementi di* Euclide (*circa* 300 *av. Cr.*). *Soltanto il fatto di porsi le questioni cui rispondono quei casi, se cioè sia possibile* DEDURRE *l'uguaglianza di due triangoli dall'uguaglianza di certi loro lati od angoli, implica già un atteggiamento razionale, che non si appaga della pura e semplice verifica sperimentale. È perciò naturale che soltanto in una sistemazione razionale della geometria, come quella di* Euclide, *i casi d'uguaglianza vengano esaurientemente trattati. Tuttavia non si può escludere che qualcuno di essi potesse esser prima conosciuto, tanto più che già a* Talete, *come si è detto alla fine del precedente Cap., si fanno risalire le prime tendenze alla razionalità, affermatasi più tardi nella Scuola pitagorica.* Eudemo, *di poco anteriore ad* Euclide *e che scrisse per incarico di* Aristotele *una storia della geometria, conosciuta da* Proclo, *ma dipoi andata perduta, afferma che* Talete (*circa* 600 *av. Cr.*) *avrebbe conosciuto il secondo caso di uguaglianza dei triangoli, di cui si serviva per calcolare la distanza dalle navi nel mare. Sempre secondo* Proclo, Talete *sapeva che gli angoli alla base di un triangolo isoscele son uguali e li chiamava simili alla maniera arcaica.*

ESERCIZI

13. Se a, b, c son segmenti od angoli ed è $a > b, b > c$, ne segue $a - c > b - c$.

14. Se a, b son segmenti od angoli ed m un numero intero, $m(a + b) = ma + mb$.

15. Se a, b son segmenti od angoli eguali ed m è un numero intero, risulta $ma = mb$.

16. Se a, b son summultipli di segmenti o angoli uguali secondo uno stesso numero intero, risulta $a = b$.

17. Due angoli eguali di un piano, che abbian due lati opposti sopra una retta e giacciano da parti opposte di questa, sono opposti al vertice.

18. Una figura eguale ad una figura convessa è pur essa convessa.

19. In un triangolo isoscele le mediane dei lati uguali son eguali e cosí pure le bisettrici degli angoli eguali.

20. In un triangolo un angolo esterno [**61**] è maggiore di ciascuno degli angoli interni non adiacenti (*teorema dell'angolo esterno*). Di questo teorema, che risulterà altrimenti dopo la teoria delle parallele [61, Cor.], si può dare una dimostrazione poggiata soltanto sulla teoria dell'eguaglianza dei triangoli.

21. Consegue dall'Es. 20 il *quarto caso di eguaglianza dei triangoli* [62]: Due triangoli sono eguali se hanno ordinatamente eguali un lato, un angolo ad esso adiacente e l'angolo ad esso opposto.

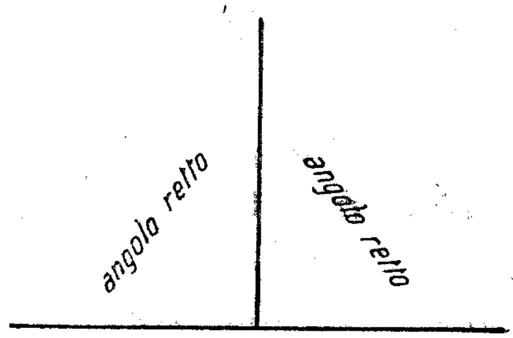
22. Dal n. prec. si trae una costruzione del punto medio M di un segmento AB. Basta, condotto un piano per AB, tirare le semirette AC, BD, formanti con AB, su quel piano, da parti opposte di AB, angoli eguali; prendere su AC, BD due segmenti eguali AC, BD, e intersecare in M il segmento AB col segmento CD.

CAPITOLO TERZO

RETTE PERPENDICOLARI E RETTE PARALLELE

Rette perpendicolari.

45. DEF. *Dicesi* ***angolo retto*** *la metà di un angolo piatto.*

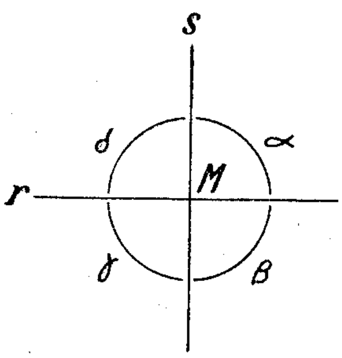


Siccome tutti gli angoli piatti son uguali fra loro, si ha il

TEOR. *Tutti gli angoli retti son uguali fra loro.*

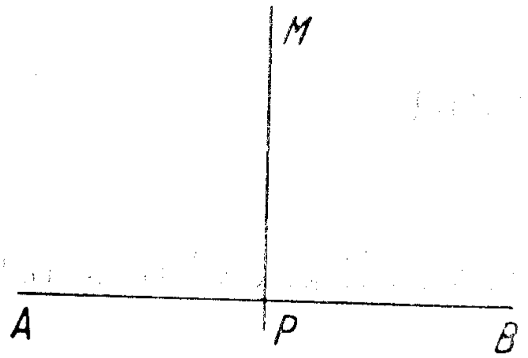
46. DEF. *Due rette aventi in comune un punto si dicon* ***perpendicolari*** *quando i quattro angoli (convessi) formati dalle quattro semirette in cui esse mutuamente si dividono, son retti.*

Date due rette, r,s che s' incontrino in M, basta che uno solo $\hat{\alpha}$ degli angoli da esse formati attorno ad M sia retto, perché lo sieno gli altri tre e quindi perché le due rette sieno perpendicolari.



Invero, i due angoli $\hat{\beta}$, $\hat{\delta}$ della figura son retti essendo adiacenti ad $\hat{\alpha}$; e $\hat{\gamma}$ è retto, perché opposto al vertice di $\hat{\alpha}$.

Teor. *In un piano, per un punto d'una data retta passa una sola perpendicolare a questa.*



Sia P un punto della retta AB. La bisettrice PM dell'angolo piatto $A\hat{P}B$ lo divide in due angoli che son uguali, epperò retti. Onde essa è perpendicolare in P ad AB ed è l'unica perpendicolare in P a questa retta [40].

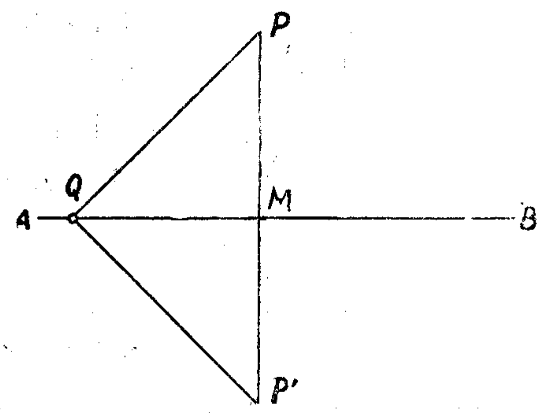
47. Def. *Un angolo minore di un angolo retto dicesi **acuto**; un angolo maggiore **ottuso**.*

*Due angoli la cui somma sia un angolo retto diconsi **complementari**.*

Due rette che s' incontrano e che non sono perpendicolari, diconsi fra loro ***oblique***. Dei quattro angoli (convessi) ch'esse formano due sono acuti e due ottusi.

48. Teor. *In un piano, per un punto fuori di una retta passa una sola perpendicolare a questa.*

Sieno AB la retta e P il punto dati. Congiunto P con un punto qualunque Q di AB, costruiscasi, sul semipiano opposto ad ABP, l'angolo $B\hat{Q}P'$ eguale all'angolo $B\hat{Q}P$, e sulla semiretta QP' si assuma il punto P' tale che $QP' = QP$. I due punti P, P', essendo situati da parti opposte della retta AB, son congiunti da un segmento che incontra AB in un punto M. Ciò posto, i triangoli QMP, QMP' risultan uguali, perché hanno $QP = QP'$,



QM comune, $M\hat{Q}P = M\hat{Q}P'$. Dunque $Q\hat{M}P = Q\hat{M}P'$, e quindi questi due angoli son retti e le AB, PP' son perpendicolari. Inoltre risulta $PM = P'M$.

Viceversa, se PP' è una perpendicolare da P ad AB e P' è il simmetrico di P rispetto ad M, e Q un punto qualunque di AB, diverso da M, i due triangoli QMP, QMP' risultan uguali, perché hanno ancora uguali due lati e l'angolo compreso. Dunque una perpendicolare da P ad AB deve passare pel punto P' costruito nel modo indicato al principio della dimostrazione, epperò è unica.

Due punti come P, P', diconsi *simmetrici rispetto alla retta* AB. Il punto M chiamasi il *piede della perpendicolare* tirata da P ad AB. Il segmento PM dicesi *distanza del punto* P *dalla retta* AB.

49. Teor. *In un piano due perpendicolari ad una medesima retta non s' incontrano.*

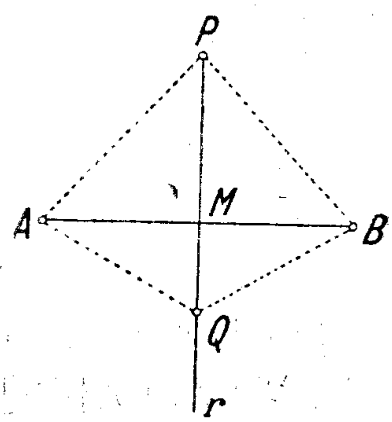
Infatti, se s' incontrassero in un punto, da questo escirebbero due perpendicolari alla retta, contrariamente al teor. 48.

50. Def. *Dicesi* **luogo geometrico** *una figura costituita da tutti i punti soddisfacenti a una data proprietà.*

Si chiama *distanza* di due punti A, B il segmento AB che li unisce.

Dimostriamo il seguente:

Teor. *In un piano, il luogo dei punti equidistanti da due punti dati è la perpendicolare al segmento che li unisce, nel punto medio di questo.*



Sieno A, B i due punti dati sul piano del foglio; M il punto medio del segmento che li unisce; r la perpendicolare in M ad AB; P un punto qualunque di r.

I due triangoli AMP, BMP sono uguali, perché gli angoli $A\hat{M}P$, $B\hat{M}P$ son retti; il lato PM è comune ed i lati AM, BM son uguali. Pertanto risulta $PA = PB$.

Viceversa, sia Q un punto del piano del foglio pel quale $QA = QB$. I due triangoli AMQ, BMQ son uguali, perché hanno i tre lati uguali; onde son uguali gli angoli adiacenti $A\hat{M}Q$, $B\hat{M}Q$, epperò MQ è perpendicolare ad AB, cioè Q sta su r [46].

La retta r si chiama *asse del segmento AB* (sul piano considerato).

Rette parallele.

51. Assumiamo come dato verificabile nei limiti delle comuni esperienze la proprietà seguente:

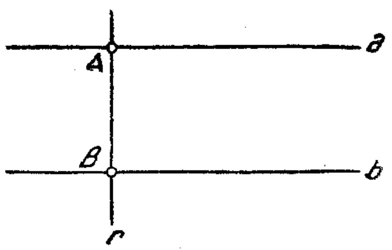
Post. ***Una perpendicolare ed un'obliqua ad una medesima retta s' incontrano.***

È questo il ***postulato di Euclide.***

52. Abbiamo veduto [49] che in un piano due perpendicolari ad una retta non s' incontrano. Vale pure il

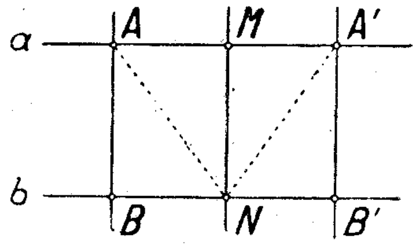
Teor. *Se, in un piano, due rette non s' incontrano, ogni perpendicolare ad una è perpendicolare all'altra.*

Sieno a,b due rette complanari, che non s' incontrino ed r sia la perpendicolare a b, condotta da un punto qualunque A di a. Dico che r risulta perpendicolare anche ad a. Infatti, nell' ipotesi opposta, a sarebbe un'obliqua e b una perpendicolare ad r; onde [51] a,b dovrebbero incontrarsi, contro il supposto. Pertanto la perpendicolare ad a in A coincide con r [46], e quindi incontra perpendicolarmente b.



53. Teor. *Se due rette complanari non s' incontrano, sono equidistanti, cioè intercettano segmenti uguali sulle perpendicolari comuni* [52].

Date due rette a, b, che non s' incontrino, si deve provare che sulle perpendicolari comuni [52] le a, b intercettano segmenti uguali. Consideriamo all'uopo due perpendicolari comuni AB, $A'B'$ e la perpendicolare ad a nel punto medio M del segmento AA', la quale incontri b in N. I due triangoli AMN, $A'MN$ son uguali, perché hanno gli angoli in M retti ed i lati che li comprendono uguali. Perciò risulta $AN = A'N$, $M\hat{A}N = M\hat{A}'N$, $A\hat{N}M = A'\hat{N}M$. Risultano in conseguenza uguali gli angoli $B\hat{A}N$, $B'\hat{A}'N$ e gli angoli $A\hat{N}B$, $A'\hat{N}B'$, come complementi di angoli uguali (1). Ma allora i triangoli ABN, $A'B'N$ hanno uguali due angoli e il lato comune, epperò son eguali. Si conclude che $AB = A'B'$.



Cor. *In un piano, il luogo dei punti situati da una parte di una retta e aventi da questa una data distanza, è una retta.*

Infatti (figura precedente), se B è situato al disotto di a ed ha da a la distanza BA, tutti i punti della retta b, perpendicolare in B alla BA, son situati al disotto di a (perché le a, b non s'incontrano) ed hanno da a distanze uguali a BA. Viceversa, un punto situato al disotto di a, sulla perpendicolare ad a in un suo punto A', e che abbia

(1) Quest'argomentazione è basata sul fatto che N è interno al segmento BB', in quanto le rette $AB, A'B'$, che non s' incontrano, giacciono da bande opposte della retta MN.

da A' una distanza uguale a BA, non può che coincidere coll' intersezione B' di b con quella perpendicolare, perché quest' intersezione ha appunto da A' distanza uguale a BA. Dunque b contiene tutti e soli i punti, al disotto di a, che hanno da questa retta distanza uguale a BA.

54. Def. *Due rette si dicono* **parallele** *quando son equidistanti* (1). La distanza di un punto qualunque di una delle due rette dall'altra [48] chiamasi *distanza delle due parallele.*

Cor. 1°. *Condizione necessaria e sufficiente* (2) *affinché due rette complanari non s' incontrino, è che sieno parallele.*

La condizione è infatti sufficiente, cioè due rette parallele non s' incontrano, perché son equidistanti. La condizione è necessaria, in base al teor. 53.

Cor. 2°. *Due rette complanari perpendicolari ad una medesima, son parallele* [49].

Cor. 3°. *Date due rette parallele, ogni retta del loro piano perpendicolare ad una è perpendicolare all'altra* [52].

Cor. 4°. *Due rette complanari o si tagliano o son parallele.*

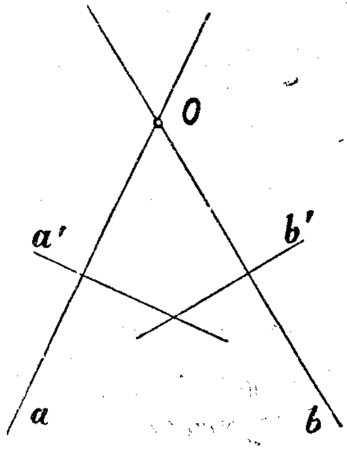
Cor. 5°. *In un piano, due rette perpendicolari ad altre due che s' incontrino, si tagliano in un punto.*

---

(1) Si dovrebbe in verità aggiungere la condizione che le due rette siano complanari; ma questa risulta soddisfatta in conseguenza, poiché, come vedremo nella geometria solida, due rette non complanari non sono mai equidistanti.

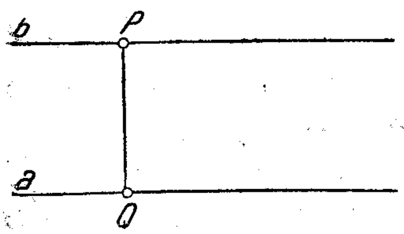
(2) Si dice che una condizione C è *necessaria* perché si verifichi una proprietà P, quando, assumendo P come ipotesi, si deduce C come tesi; si dice che C è *sufficiente* per P quando, assumendo C come ipotesi, si deduce P come tesi.

Se, invero, le a', b' son perpendicolari alle rette a,b, che s'incontrano in O, non può accadere che le a',b' non s'incontrino, perché [Cor. 4°] sarebbero parallele. Allora la retta a, perpendicolare ad a', sarebbe perpendicolare anche a b' [Cor. 3°] e dal punto O uscirebbero due perpendicolari distinte a,b alla retta b'; il che non è [48]. È dunque assurdo ammettere che le a', b' non s'incontrino.



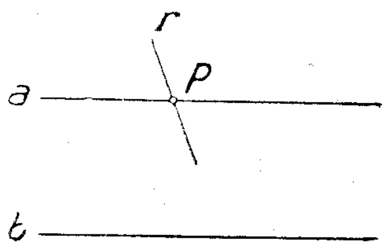
55. Teor. *Da un punto fuori di una retta esce una sola parallela a questa.*

Infatti, dati la retta a ed il punto P fuori di essa, e condotta la perpendicolare PQ alla a, è unica la perpendicolare b in P alla retta PQ e questa perpendicolare coincide [54, Cor. 2°] coll'unica parallela da P ad a.



56. Teor. *Se due rette son parallele, ogni retta del loro piano, che incontri l'una, incontra l'altra.*

Se, invero, a,b son parallele e la retta r del loro piano incontra a in P, essa deve incontrare anche b, perché altrimenti [54, Cor. 1°] da P escirebbero due parallele a, r a b, contrariamente al teor. 55.

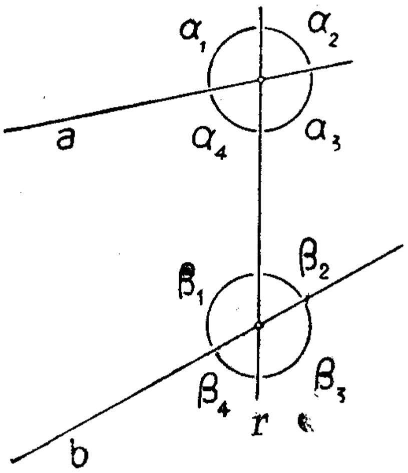


57. Teor. *Due rette complanari, parallele ad una terza, son parallele fra loro.*

Se infatti le rette a,b son parallele ad una terza retta c, non può darsi che a,b si taglino in un punto, se no da questo escirebbero due parallele alla c. Dunque le a,b che son complanari per ipotesi, non si tagliano, e son perciò parallele.

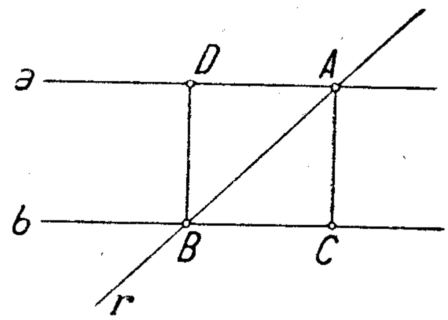
Angoli di due parallele con una trasversale.

58. Date due rette complanari a,b ed una retta r del loro piano, che le incontri ambedue, e che dicesi perciò una loro *trasversale*, gli angoli di una qualunque delle coppie $\hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1$; $\hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_2$; $\hat{\alpha}_3, \hat{\beta}_3$; $\hat{\alpha}_4, \hat{\beta}_4$ si dicono *corrispondenti*; gli angoli di una qualunque delle coppie $\hat{\alpha}_3, \hat{\beta}_1$; $\hat{\alpha}_4, \hat{\beta}_2$ si dicono *alterno interni*; gli angoli di una qualunque delle coppie $\hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_3$; $\hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_4$ si dicono *alterno esterni*; gli angoli di una qualunque delle coppie $\hat{\alpha}_3, \hat{\beta}_2$; $\hat{\alpha}_4, \hat{\beta}_1$ si dicono *coniugati interni*; gli angoli di una qualunque delle coppie $\hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_4$; $\hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_3$ si dicono *coniugati esterni*.



59. Teor. *Due parallele formano con una trasversale angoli alterno interni uguali.*

Sieno a,b le due parallele, r una trasversale, che le incontri nei punti A,B. Sieno AC,BD le perpendicolari comuni alle a,b, condotte per A,B [52]. Le AC,BD risultan parallele tra loro [54, Cor. 2°], epperò [54] è $AD = BC$. Similmente, dal parallelismo delle a,b, segue $AC = BD$. Onde i due triangoli ABC, BAD hanno i tre lati uguali; e quindi è $A\hat{B}C = B\hat{A}D$. Anche gli altri due angoli alterno interni



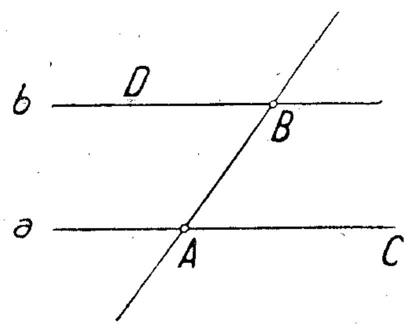
formati dalle a, b con r son uguali, perché son supplementari dei precedenti.

COR. *Due rette parallele formano con una trasversale angoli alterno esterni oppure angoli corrispondenti uguali; angoli coniugati interni o esterni supplementari.*

Infatti, son uguali due angoli alterno esterni, perché opposti al vertice di due angoli alterno interni; son uguali due angoli corrispondenti, perché l'angolo interno della coppia è uguale all'opposto al vertice dell'altro angolo della coppia; son supplementari due angoli coniugati esterni, perché uno degli angoli della coppia è uguale all'angolo interno adiacente all'altro della coppia, e si hanno cosí due angoli corrispondenti uguali; ecc.

60. TEOR. *Due rette complanari son parallele se formano con una trasversale angoli alterno interni o angoli alterno esterni o angoli corrispondenti uguali; oppure se formano angoli coniugati interni od angoli coniugati esterni supplementari.*

Dimostriamo il teorema per gli angoli alterno interni. La dimostrazione per gli altri considerati nell'enunciato è analoga.



Le a, b formino colla trasversale AB gli angoli $B\hat{A}C, A\hat{B}D$ uguali fra loro. La parallela da A a b deve formare con AB un angolo, alterno interno rispetto ad $A\hat{B}D$, ed eguale a questo [59]. Ma tale condizione determina in modo unico una retta passante per A: onde quella parallela coincide colla a, che già soddisfa alla condizione considerata.

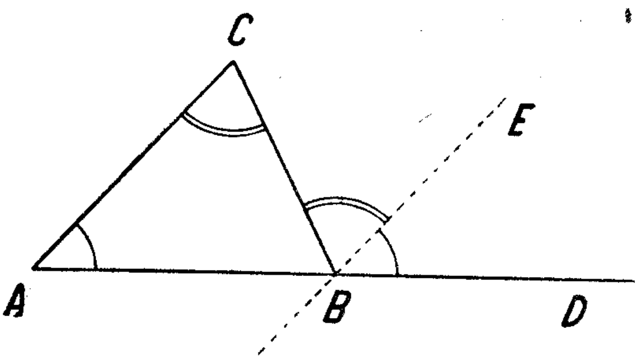
OSSERVAZIONE. Il teor. precedente giustifica la costruzione delle parallele con riga e squadra, che si apprende negli elementi di disegno geometrico.

Somma degli angoli di un triangolo.

61. Def. ***Angoli esterni*** d'un triangolo son gli angoli adiacenti [31] agli angoli interni.

Teor. *Un angolo esterno di un triangolo è uguale alla somma dei due angoli interni non adiacenti.*

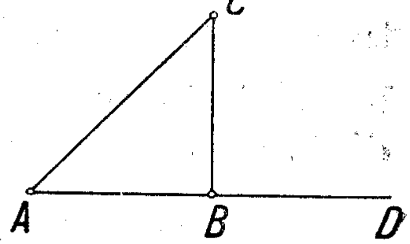
Sia $C\hat{B}D$ un angolo esterno del triangolo ABC. Tirata da B la parallela BE ad AC, il triangolo rimane tutto da una banda di questa parallela e quindi la BE penetra nell'interno dell'angolo $C\hat{B}D$ (e del suo opposto al vertice). Cosí $C\hat{B}D$ resta decomposto nella somma $C\hat{B}E + E\hat{B}D$. Ora $A\hat{C}B = C\hat{B}E$ come angoli alterno interni rispetto alle parallele AC, BE tagliate da BC; e $C\hat{A}B = E\hat{B}D$ trattandosi di angoli corrispondenti rispetto alle AC, BE tagliate da AD. Sicché $A\hat{C}B + C\hat{A}B = C\hat{B}E + E\hat{B}D = C\hat{B}D$, come dovevasi dimostrare.



Cor. *Un angolo esterno è maggiore di ciascuno degli angoli non adiacenti del triangolo.*

Questa proposizione chiamasi il *teorema dell'angolo esterno*.

62. *La somma degli angoli d'un triangolo è uguale ad un angolo piatto.*



Infatti, essendo $B\hat{C}A + C\hat{A}B = C\hat{B}D$, risulta $A\hat{B}C + B\hat{C}A + C\hat{A}B = A\hat{B}C + C\hat{B}D$, che è un angolo piatto.

Cor. 1°. *Un triangolo non può avere piú di un angolo retto od ottuso.*

Cor. 2°. *Se due triangoli hanno due angoli dell'uno rispettivamente uguali a due angoli dell'altro, i rimanenti angoli son pure eguali.*

Cor. 3°. *Due triangoli son eguali se hanno ordinatamente uguali un lato, un angolo adiacente e l'angolo opposto* ***(quarto caso di uguaglianza dei triangoli).***

63. Teor. *Due rette complanari, che formino con una trasversale, da una parte di questa, angoli coniugati interni la cui somma sia minore di un angolo piatto, s' incontrano da quella parte della trasversale.*

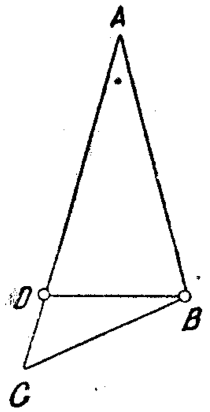
Se infatti le due rette non s' incontrassero, sarebbero parallele e gli angoli coniugati interni sarebbero supplementari, contro il supposto. Esse inoltre s' incontrano dalla parte indicata dall' enunciato, perché, se s' incontrassero dalla parte opposta, il loro punto comune e le loro intersezioni colla trasversale sarebbero vertici d' un triangolo, del quale due angoli interni darebbero una somma maggiore di un angolo piatto, contrariamente al teor. 61.

Cor. *Condizione necessaria e sufficiente perché esista un triangolo avente due angoli dati è che la somma di questi sia minore di un angolo piatto.*

Disuguaglianze fra gli elementi di uno o di due triangoli.

64. Teor. *Se un triangolo possiede due lati disuguali, al lato maggiore sta opposto l'angolo maggiore.*

Nel triangolo ABC sia $AC > AB$; dico che $A\hat{B}C >$

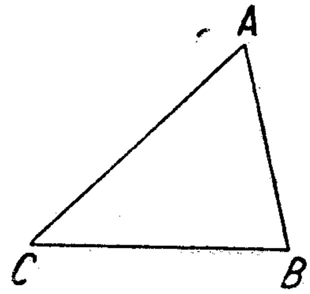


$A\hat{C}B$. Su AC prendasi infatti $AD = AB$. La semiretta BD è interna all'angolo $A\hat{B}C$ ed è perciò $A\hat{B}C > A\hat{B}D$. D'altronde il triangolo ABD è isoscele; e quindi $A\hat{B}D = A\hat{D}B$. Di più il teor. 61 riferito al triangolo CBD prova che $A\hat{D}B > A\hat{C}B$; dunque $A\hat{B}C > A\hat{C}B$.

65. Teor. *Se un triangolo possiede due angoli disuguali, all'angolo maggiore sta opposto il lato maggiore.*

È il teorema reciproco del precedente.

Nel triangolo ABC sia $\hat{B} > \hat{C}$; dico che $AC > AB$. Invero, non può esser $AC = AB$, perché altrimenti sarebbe $\hat{B} = \hat{C}$; né può essere $AC < AB$, perché, in base al § precedente, risulterebbe $\hat{B} < \hat{C}$. Dunque deve essere $AC > AB$.



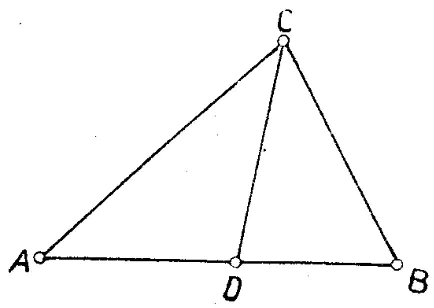
Osservazione. Il teorema del § 64 offre un esempio d'una legge logica, d'immediata deduzione generale, che si chiama *legge delle inverse* e che si enuncia così:

Se dalle possibili ipotesi sopra un determinato soggetto si traggono tesi che si escludono a vicenda, dalle singole tesi si traggono come conseguenze le corrispondenti ipotesi.

Nel caso del teor. 64, il soggetto è costituito da una coppia di lati AB, AC di un triangolo ABC. Su tale soggetto si posson fare tre ipotesi, $AB = AC$, $AB < AC$, $AB > AC$, dalle quali conseguono le tesi $\hat{C} = \hat{B}$, $\hat{C} < \hat{B}$, $\hat{C} > \hat{B}$, che si escludono a vicenda. Pertanto da ciascuna di queste tesi si deduce la corrispondente ipotesi [65].

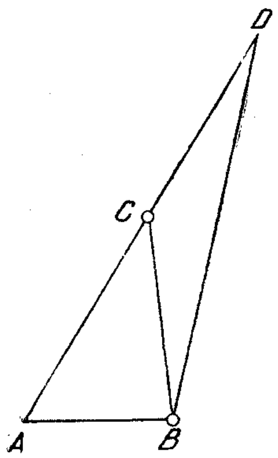
COR. *In un triangolo il segmento che unisce un vertice con un punto interno al lato opposto, è minore di uno almeno degli altri due lati.*

Se infatti, nel triangolo ABC, è $AC \geq CB$, sarà $\hat{B} \geq \hat{A}$. Ma, pel teorema dell'angolo esterno, $A\hat{D}C > \hat{B}$; dunque $A\hat{D}C > \hat{A}$, epperò nel triangolo ADC risulta $AC > CD$.



66. TEOR. *In un triangolo un lato è minore della somma degli altri due.*

Dato il triangolo ABC, sul prolungamento di AC, dalla parte di C, prendasi $CD = CB$. Poiché C è interno al segmento AD, la semiretta BC è interna all'angolo $A\hat{B}D$, e quindi $A\hat{B}D > C\hat{B}D$. Ma il triangolo BCD è isoscele; dunque $C\hat{B}D = C\hat{D}B$, epperò $A\hat{B}D > A\hat{D}B$. Il teorema 65 ci dice allora che $AD > AB$, ossia $AC + CD > AB$ od anche, infine, $AC + CB > AB$.

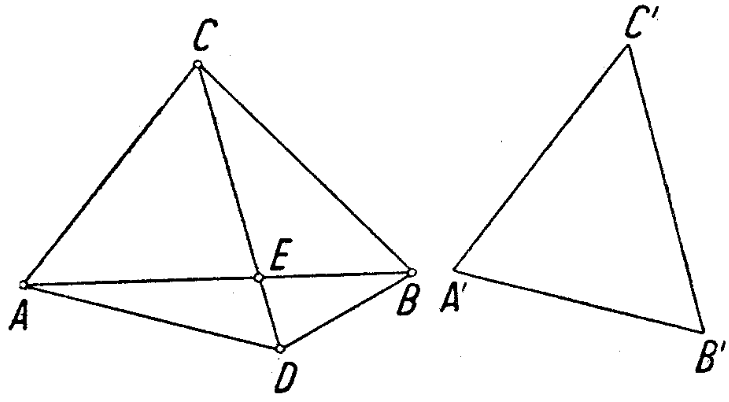


COR. *Un lato di un triangolo è maggiore della differenza degli altri due.*

Così, p. es., supposto $AC > CB$, si ha $AB > AC - CB$. Infatti $AC < AB + CB$, e questa disuguaglianza equivale a quella da dimostrarsi.

67. TEOR. *Se due triangoli hanno due coppie di lati eguali, comprendenti angoli diseguali, all'angolo maggiore sta opposto il lato maggiore.*

Fra gli elementi dei due dati triangoli ABC, $A'B'C'$ sussistano le relazioni $AC = A'C'$, $CB = C'B'$, $A\hat{C}B > A'\hat{C'}B'$. Dico che $AB > A'B'$. Suppongasi $AC \leq CB$. Essendo $A\hat{C}B > A'\hat{C'}B'$, esiste una semiretta CD, interna all'angolo $A\hat{C}B$, la quale forma colla semiretta CA un angolo eguale ad $A'\hat{C'}B'$. Essa incontra il lato AB in un punto interno E [7]. Preso sulla semiretta medesima il segmento $CD = C'B'$, il triangolo ACD risulta eguale ad $A'B'C'$ [34]. Inoltre, il punto D cade certamente fuori del segmento CE, perché $CE < CB$ [65, Cor.], cioè $CE < CD$.



Dal triangolo isoscele DCB si ricava $C\hat{B}D = C\hat{D}B$; onde $C\hat{D}B > A\hat{B}D$, perché, essendo E interno a CD, quest'ultimo angolo è parte di $C\hat{B}D$. D'altro canto, poiché E è interno al segmento AB, $C\hat{D}B$ è parte di $A\hat{D}B$; epperò, a fortiori, $A\hat{D}B > A\hat{B}D$. Donde, pel teor. 65, applicato al triangolo ABD, si trae che $AB > AD$; e per l' uguaglianza dei triangoli ACD, $A'C'D'$, ne segue $AB > A'B'$.

68. Teor. *Se due triangoli hanno due coppie di lati eguali ed i lati restanti diseguali, al lato maggiore sta opposto l'angolo maggiore.*

È il teorema reciproco del precedente. La dimostrazione si ottiene subito applicando la legge delle inverse [65, Oss.], tenuto conto dei §§ 34, 67.

Proprietà varie dei triangoli.

69. Un triangolo avente un angolo retto dicesi ***rettangolo***. Un triangolo avente un angolo ottuso dicesi ***ottusangolo***. Un triangolo coi tre angoli acuti dicesi ***acutangolo***.

Esistono triangoli delle tre specie [63, Cor.].

In un triangolo rettangolo od ottusangolo gli altri due angoli sono acuti [62, Cor. 1°], e poiché la somma dei tre angoli d'un triangolo è uguale ad un angolo piatto, così:

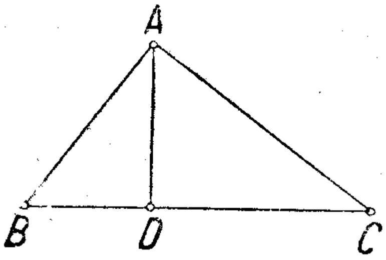
TEOR. *Gli angoli acuti d'un triangolo rettangolo son complementari.*

OSSERVAZIONE. Il lato di un triangolo rettangolo opposto all'angolo retto chiamasi ***ipotenusa***; gli altri due lati chiamansi ***cateti***.

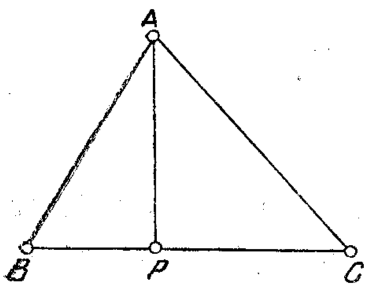
TEOR. *L' ipotenusa è maggiore di ciascuno dei due cateti* [65].

70. TEOR. *Il piede della perpendicolare all' ipotenusa, condotta dal vertice opposto, è a questa interno.*

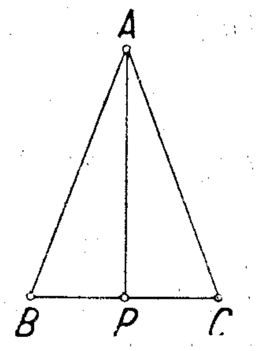
Nel triangolo ABC, rettangolo in A, sia AD la perpendicolare dal vertice dell'angolo retto sull'ipotenusa. Poiché i triangoli ADC, ADB son rettangoli in D, gli angoli $C\hat{A}D$, $B\hat{A}D$ son acuti [69] e quindi minori di $B\hat{A}C$. Sicché la semiretta AD è interna a quest'angolo, epperò D giace sul segmento BC.



71. *Altezza* di un triangolo ABC, relativa ad un lato BC, che si prescelga come *base*, è il segmento AP della perpendicolare tirata da A sulla base, compreso fra A e il piede P. Talora per altezza s' intende pure la predetta perpendicolare.



72. Teor. *In un triangolo isoscele la bisettrice dell'angolo al vertice è altresí l'altezza relativa alla base ; e viceversa.*



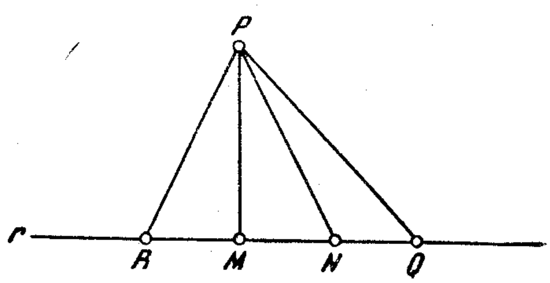
Sia AP la bisettrice dell'angolo $\hat{A}$ del triangolo isoscele ABC. Dall' uguaglianza dei triangoli APB,APC, che hanno uguali due lati e l'angolo compreso, segue $A\hat{P}B = A\hat{P}C$, epperò AP è perpendicolare a BC. Dunque la bisettrice di A è pure altezza relativa alla base BC. E viceversa l'altezza relativa a BC biseca A, poiché tanto l'una che l'altra retta sono determinate in modo unico.

73. Teor. *Due triangoli rettangoli son uguali, se hanno rispettivamente uguali l' ipotenusa e un cateto.*

Trasportiamo infatti uno dei due triangoli sul piano dell'altro in modo che vengan a coincidere i cateti uguali e che i due triangoli si dispongano da bande opposte del cateto comune. Sieno ABP, ACP i due triangoli cosí disposti (ved. la fig. precedente). I cateti BP,CP, essendo perpendicolari ad AP, risultan per diritto. E siccome $AB = AC$, il triangolo ABC è isoscele, e la perpendicolare AP alla base BC biseca l'angolo $\hat{A}$ [72]. Si conclude che $B\hat{A}P = C\hat{A}P$ e i due triangoli rettangoli APB, APC son uguali avendo uguali due lati e l'angolo compreso.

Perpendicolari ed oblique ad una retta.

74. Data una retta r ed un punto P, fuori di essa, si chiamano talora *perpendicolare* ed *obliqua*, condotte da P ad r, i segmenti intercetti, sopra una retta perpendicolare e sopra una retta obliqua, fra il punto P e l'intersezione rispettiva di tale retta con r. Nella figura il segmento PM è perpendicolare, i segmenti PN, PQ, PR sono oblique, rispetto ad r.



Data un'obliqua PN ad r, si chiama *proiezione* di quest'obliqua su r il segmento MN compreso fra il piede M della perpendicolare da P ad r e l'altro estremo N dell'obliqua.

TEOR. *La perpendicolare da un punto ad una retta è minore di qualunque obliqua. Due oblique aventi uguali proiezioni son uguali. Di due oblique aventi proiezioni disuguali, la maggiore è quella che ha la proiezione maggiore.*

Infatti (fig. precedente) PM è minore di PN (come di ogni altra obliqua), perché nel triangolo rettangolo PMN, PM è un cateto e PN è l' ipotenusa.

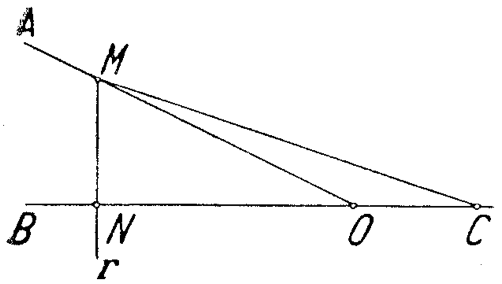
Sieno ora PN, PR due oblique aventi uguali proiezioni, cioè $MN = MR$. I due triangoli rettangoli PMN, PMR son uguali avendo $MN = MR$, PM comune, $P\hat{M}N = P\hat{M}R$. Onde $PN = PR$.

Sieno infine PR, PQ due oblique aventi proiezioni disuguali $RM < MQ$. Proviamo che $PR < PQ$. Se, come nel caso della figura, R è esterno al segmento MQ, assumasi $MN = MR$. Allora l'obliqua PN è uguale a PR, perché le due oblique han proiezioni uguali. Onde basterà provare che $PN < PQ$. Ciò consegue senz'altro dal Cor. del § 65, tenuto conto che PQ è il maggiore dei lati del triangolo rettangolo PMQ.

Luogo dei punti equidistanti dai lati di un angolo.

75. Lemma [1]. *La perpendicolare tirata da un punto di un lato di un angolo acuto sopra la retta contenente l'altro lato, ha il piede su questo.*

Sia $A\hat{O}B$ un angolo acuto; M un punto del lato OA; r la perpendicolare da M alla retta CB su cui giace il lato OB; C un punto qualunque della semiretta opposta ad OB. Pel teorema dell'angolo esterno $A\hat{O}B > M\hat{C}O$, e siccome $A\hat{O}B$ è acuto, lo è pure $M\hat{C}O$. Ne deriva che la retta MC non è perpendicolare a BC; e siccome questo vale qualunque sia la posizione di C sulla semiretta opposta ad OB, vuol dire che il piede N della perpendicolare da M a BC cade sulla semiretta OB.

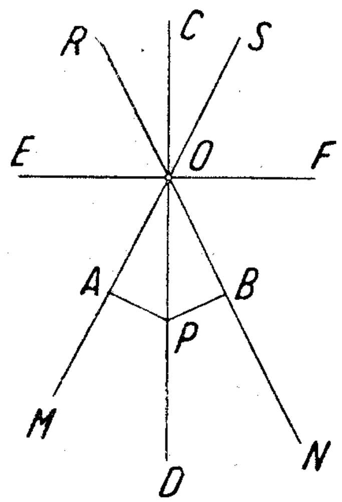


Teor. *In un piano, il luogo geometrico dei punti equidistanti da due rette che s' incontrano, è costituito dalle bisettrici degli angoli formati dalle due rette.*

---

[1] Chiamasi *lemma* una proposizione che si stabilisce a sé per agevolare la dimostrazione di un successivo teorema. Il lemma del testo, di carattere intuitivo, può altresí esser ammesso come postulato; ma, se si omette anche come postulato, lo scolaro sappia ad ogni modo, per sempre meglio penetrare lo spirito del processo deduttivo, che la dimostrazione del successivo teorema richiede un nuovo richiamo all' intuizione, laddove si invoca il lemma.

Sieno MS, NR due rette, che s' incontrino in O; e P si trovi sulla bisettrice OD di uno, $\widehat{MON}$, degli angoli da esse formati. Gli angoli uguali $\widehat{MOD}, \widehat{DON}$, essendo metà di un angolo convesso, sono acuti; e quindi, pel lemma, i piedi A, B delle perpendicolari da P alle rette MS, NR sono situati sui lati OM, ON. Ora i triangoli rettangoli PAO, PBO hanno il lato OP comune e $\widehat{POA} = \widehat{POB}$, $\widehat{PAO} = \widehat{PBO}$. Essi sono dunque uguali [62, Cor. 3°] e quindi $PA = PB$. Riman cosí dimostrato che P è equidistante da MS, NR.



Viceversa, il punto P sia equidistante da MS, NR, cioè sia $PA = PB$. Si deve provare che P è sopra una delle bisettrici degli angoli formati dalle MS, NR. I due triangoli rettangoli POA, POB sono anche in questo caso uguali, perché hanno uguali l' ipotenusa ed un cateto [73]. Son pertanto uguali gli angoli acuti $\widehat{POA}, \widehat{POB}$, cioè la semiretta OP forma colle semirette OA, OB angoli acuti uguali. Dunque essa è la bisettrice dell'angolo di queste.

Osservazione. Le due rette MS, NR formano quattro angoli (convessi), a due a due opposti al vertice. Le rette bisettrici [40] di questi quattro angoli sono però soltanto due, poiché due angoli opposti al vertice hanno la medesima retta bisettrice [41].

Sieno CD, EF le due rette bisettrici degli angoli formati dalle MS, NR. Le semirette OD, OE bisecano gli angoli $\widehat{AOB}, \widehat{AOR}$ la cui somma è un angolo piatto. Pertanto la somma degli angoli $\widehat{DOA}, \widehat{AOE}$ è la metà di un angolo piatto, cioè un angolo retto. Si ha cosí il

Cor. *Le rette bisettrici degli angoli di due rette che s' incontrano sono perpendicolari.*

CENNI STORICI

76. *La nozione di rette parallele e le loro proprietà fondamentali erano note alla scuola pitagorica. Negli Elementi di* EUCLIDE *si trova forse per la prima volta riconosciuta la necessità di un nuovo postulato per potere svolgere razionalmente la teoria delle parallele. Il postulato fu enunciato da* EUCLIDE *non nella forma particolare datagli nel* § 51, *ma in quella generale, trovata come teorema nel* § 63. *L'ordinamento deduttivo d'una teoria non è invero rigidamente determinato, né è determinata la forma dei postulati, che esprimono i necessari richiami all' intuizione o all'esperienza. Cosí un'altra forma possibile del postulato delle parallele è questa : In un piano il luogo dei punti equidistanti da una retta, da una parte di questa, è ancora una retta. È in virtú di tale proprietà che due rette parallele posson essere definite come equidistanti, alla maniera di* POSIDONIO (II *secolo av. Cr.*) *e di* ERONE (I *secolo av. Cr.*). *Un'altra forma del postulato usata da molti Autori, e che sembra dovuta al commentatore* PROCLO (V *secolo d. Cr.*), *è quella data come teorema nel* § 55. *Si noti però che questa forma del postulato e la definizione di parallele come rette di un piano che prolungate indefinitamente non s' incontrano (secondo il linguaggio di* EUCLIDE) *o semplicemente come rette complanari che non s' incontrano (secondo il linguaggio moderno) non sono controllabili coll'esperienza, giacché in pratica non si può che operare sopra una parte, magari grandissima, del piano, ma non sul piano indefinito ; nel quale per contro bisogna concepire le due parallele secondo la definizione e il postulato ultimamente ricordati. Invece l'esistenza di rette equidistanti è sperimentalmente accertabile anche nei limiti di un disegno.*

Il postulato delle parallele ha comunque piú che un carattere intuitivo, un carattere sperimentale, il quale fa dipender la sua validità dalla raffinatezza dei mezzi di misura usati nell'esperienza. Non è perciò escluso che mezzi piú potenti d'osservazione accertino che il postulato vale soltanto in via approssimativa. Del resto fin dall'antichità si è sempre avuta una percezione vaga del minor grado di certezza del postulato delle parallele rispetto ad altri postulati della geometria. Cosí spieghansi i tentativi fatti per quasi duemila anni onde dimostrar la proprietà in esso contenuta. Tentativi infruttuosi, perché, come si è riconosciuto finalmente nel secolo **XIX**, *il postulato non è conseguenza logica degli altri postulati della geometria ; afferma cioè un fatto nuovo in essi non contenuto, e quindi è* *indimostrabile. Però quei tentativi finirono collo sboccare nella creazione della geometria non euclidea, della quale fu precursore un italiano : Padre* GEROLAMO SACCHERI (1733). *Secondo la teoria della relatività (come si è accennato nell' Introduzione) la geometria del mondo fisico è non euclidea.*

GEMINO (I *secolo d. Cr.), antico commentatore di* EUCLIDE, *e* PROCLO *affermano, **non si sa con quanto fondamento,** che la scoperta della somma degli angoli interni d'un triangolo (altra proprietà equivalente logicamente al postulato delle parallele) era conosciuta anche dai **più antichi** geometri greci, **e che** i **pitagorici** ne diedero la prima dimostrazione.*

ESERCIZI

23. Uno degli angoli interni formati da due parallele con una trasversale è di $38^{\circ}\ 15'\ 26''$. Far la figura e segnarvi le ampiezze degli altri sette angoli delle parallele colla trasversale.

24. Due triangoli isosceli sono eguali se hanno eguali gli angoli al vertice e le relative bisettrici.

25. Una retta passante pel punto medio di un segmento è equidistante dagli estremi.

26. Dati un angolo ed una sua *corda* (segmento congiungente due punti di lati diversi), tracciare un'altra corda che sia divisa per metà dalla precedente.

27. Da un punto condurre una retta che formi angoli eguali con due date rette concorrenti in un punto.

28. Se in due triangoli rettangoli due cateti sono ordinatamente uguali e le ipotenuse diseguali, gli altri due cateti son diseguali nello stesso senso.

29. Se in due triangoli rettangoli due cateti sono ordinatamente eguali e gli altri diseguali, le ipotenuse son diseguali nello stesso senso.

30. Le bisettrici degli angoli di un triangolo concorrono in un punto.

Ne deriva la costruzione della bisettrice di un angolo il cui vertice sia inaccessibile.

31. La bisettrice di un angolo di un triangolo e le rette bisettrici degli angoli esterni, adiacenti agli altri due, concorrono in un punto.

32. Le perpendicolari nei punti medi dei lati d'un triangolo concorrono in un punto.

33. Dati sopra un piano una retta r, due punti A,B, fuori di essa, ma da una stessa parte, trovare su r un punto C tale che le rette AC,BC sieno egualmente inclinate su r. (Si congiunga B col simmetrico A' di A rispetto ad r). Due rette siffatte risultano anche egualmente inclinate sulla perpendicolare ad r, in C; e quindi presa una delle due rette AC,BC come raggio luminoso incidente, l'altra risulta il raggio luminoso riflesso (angolo d' incidenza = angolo di riflessione).

34. Una palla trovasi in un determinato punto di un biliardo. In qual direzione deve farsi partire, perché batta successivamente su due sponde del biliardo (rinterzo) e colpisca un'altra palla ferma ?

35. Se, rispetto ad un triangolo ABC, una semiretta che proietti da A un punto P interno alla base BC, gode di due delle tre proprietà : di esser mediana di BC, di esser altezza rispetto a questa base, di esser bisettrice dell'angolo al vertice A, essa gode della proprietà restante e il triangolo è isoscele.

Invero, se AP è mediana e altezza, i triangoli APB,APC son eguali pel primo caso di eguaglianza ; se è bisettrice e altezza, quei triangoli sono eguali pel secondo caso ; se è mediana e bisettrice, nei triangoli suddetti risultan uguali gli angoli opposti ad AP, come si vede tirando le perpendicolari da P ad AB,AC.

36. Dati in un piano una retta r e due punti A,B da una stessa parte di r, trovare in r un punto C tale che la somma $AC + BC$ sia minima. Il punto C è quello stesso dell' Es. **33.** Per dimostrarlo si congiunga un punto qualunque di r con A' e con B e si applichi il teor. 66. Poiché $AC + BC$ è il percorso di un raggio luminoso che vada da A a B riflettendosi su r, ne segue che la luce, per andare da A a B, con una riflessione su r, percorre il cammino minimo.

37. La bisettrice di un angolo d'un triangolo divide il lato opposto in due segmenti minori dei lati rispettivamente adiacenti.

38. Un lato di un triangolo è minore del semiperimetro. (*Perimetro* d'un triangolo chiamasi la somma dei lati).

39. La somma dei segmenti che proiettano da un punto interno i vertici d'un triangolo è maggiore del semiperimetro.

40. L'angolo che proietta da un punto interno un lato d'un triangolo è maggiore dell'angolo opposto al lato.

41. La somma dei segmenti che proiettan due vertici d'un triangolo da un punto interno è minore della somma dei lati che congiungono i medesimi vertici col terzo.

42. La somma dei segmenti di cui all' Es. 39 è minore del perimetro del triangolo.

43. Il massimo segmento appartenente ad un triangolo è il lato maggiore. (Si tenga conto del Cor. del teor. 65 e del fatto che ogni segmento avente per estremi due punti interni del triangolo è minore di un segmento avente per estremi un certo vertice e un punto opportuno del lato opposto). Ne deriva che *un triangolo è una figura finita* [27].

44. Date due rette parallele, chiamasi *striscia* il luogo dei punti comuni ai due semipiani, ciascun dei quali ha per contorno una di quelle rette e contiene l'altra. *Larghezza della striscia* è la distanza delle due parallele. Si dimostrano subito le proprietà seguenti: una striscia è una figura convessa infinita. Due striscie uguali hanno uguale larghezza; e viceversa.

45. Il piede dell'altezza di un triangolo sopra una base, alla quale sieno adiacenti due angoli acuti, è interno alla base; se uno dei due angoli è ottuso, il piede dell'altezza è esterno alla base, dalla parte dell'angolo ottuso.

46. Il luogo dei punti del piano equidistanti da due rette parallele è una retta interna alla loro striscia ed equidistante dalle rette date. Chiamasi *bisettrice della striscia*.

47. Se due angoli hanno i lati a due a due paralleli sono eguali o supplementari.

48. Due angoli aventi i lati a due a due perpendicolari sono eguali o supplementari.

49. In un triangolo rettangolo la differenza dei due angoli acuti eguaglia l'angolo compreso fra altezza e mediana relative all' ipotenusa. (Si tenga presente l' Es. precedente).

50. Le bisettrici di due angoli aventi i lati paralleli (o perpendicolari) sono parallele o perpendicolari.

51. Se in un triangolo rettangolo un angolo acuto è doppio dell'altro, l' ipotenusa è doppia del cateto minore.

52. Due triangoli coi lati rispettivamente paralleli hanno gli angoli a due a due eguali.

53. In un triangolo rettangolo l'altezza relativa all' ipotenusa divide il triangolo in due triangoli aventi gli angoli rispettivamente uguali a quelli del dato.

54. Fra tutti i triangoli aventi una data base e una data altezza, il triangolo isoscele è quello che ha il minimo perimetro. (Si ricordi l' Es. 36).

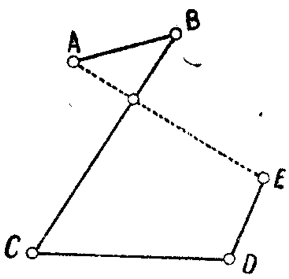
55. Se due triangoli rettangoli hanno ipotenuse eguali, ed un cateto dell'uno è maggiore di un cateto dell'altro, il rimanente cateto del primo è minore del rimanente cateto del secondo. (Si osservi, in base al teor. 74, che la congiungente di un estremo di un cateto di un triangolo rettangolo con un punto interno all'altro cateto, è minore dell' ipotenusa e, in base allo stesso teorema, che lo stesso accade della congiungente di un punto interno al primo cateto e di un punto interno al secondo. Ne deriva il teorema enunciato).

CAPITOLO QUARTO

POLIGONI E PARALLELOGRAMMI

77. Def. *Dati nel piano piú punti, considerati in un determinato ordine, chiamasi* ***linea poligonale aperta*** *la figura costituita dai segmenti che uniscono le coppie di punti consecutivi.*

Cosí, se sono A,B,C,D,E i punti dati e si consideran nell'ordine in cui son nominati, il punto A ha per consecutivo o successivo B, questo ha per consecutivo C, ... ; D ha per consecutivo E. La figura formata dai segmenti AB,BC,CD,DE è una poligonale aperta.



I punti dati si chiaman i ***vertici*** della poligonale ed i segmenti che la costituiscono i ***lati***; il primo e l'ultimo vertice si chiaman gli ***estremi*** della poligonale.

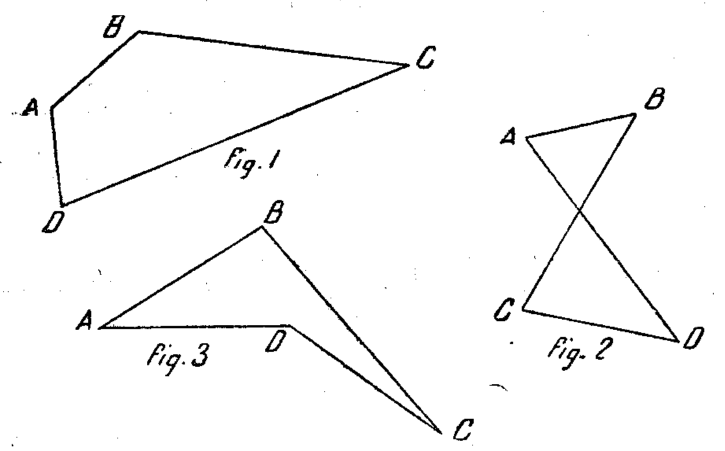
Def. ***Linea poligonale chiusa*** *è la figura ottenuta aggiungendo ad una poligonale aperta il segmento che ne congiunge gli estremi.*

Cosí, aggiungendo il segmento AE alla poligonale aperta $ABCDE$, si ottiene una poligonale chiusa, che ha gli stessi vertici della precedente ed ha in piú il lato AE.

In una poligonale chiusa si può assumere il primo vertice come consecutivo dell'*ultimo*. In tal guisa ogni vertice ha un vertice che lo precede ed uno che lo segue.

In una poligonale aperta o chiusa due lati che congiungano un vertice col precedente e col successivo si chiaman *consecutivi.*

Se due lati non consecutivi s' incontrano, com' è il caso dei lati BC, DA della fig. 2, la poligonale dicesi *intrecciata.*



Def. *Una linea poligonale dicesi* ***convessa*** *se resta da una medesima banda di ogni suo lato.*

Una linea poligonale non convessa dicesi ***concava.*** P. es. la poligonale della fig. 1 è una linea chiusa convessa; mentre la poligonale della fig. 3 è una linea chiusa concava.

Ogni poligonale intrecciata è evidentemente anche concava.

78. Data una linea poligonale chiusa convessa, i semipiani che la contengono ed hanno per contorni rispettivi le rette su cui giacciono i lati, s' intersecano secondo una figura convessa [10], il cui contorno [9] è costituito dalla linea data. Si può dunque dare la seguente

Def. *Chiamasi* ***poligono convesso*** *la figura piana contornata da una linea poligonale chiusa convessa.*

Secondo che il poligono ha 3, 4, 5, 6, ..., 10, ..., 15, ... vertici esso dicesi *triangolo, quadrangolo, pentagono, esagono,* ...., *decagono,* ...., *pentadecagono,* ....

I vertici ed i lati della poligonale sono i *vertici* e i *lati* del poligono. I segmenti congiungenti coppie di vertici non consecutivi, si chiaman *diagonali.*

È facile dimostrare [Es. 57] che *esistono poligoni convessi di quanti si vogliano vertici.*

D'ora innanzi, parlando di poligoni, si sottintenderà sempre *convessi.*

Angoli di un poligono son gli angoli che hanno i medesimi vertici del poligono e per lati le semirette contenenti due lati consecutivi; *angoli esterni* [61] son gli angoli adiacenti agli angoli del poligono.

Ogni angolo d'un poligono, essendo intersezione di due dei semipiani che determinano il poligono, contiene tutto il poligono.

Lati opposti o *vertici opposti* di un quadrangolo son due lati o vertici non consecutivi.

79. TEOR. *In un piano, una semiretta avente per origine un punto interno del poligono, ne incontra il contorno in uno ed in un sol punto.*

La proprietà, che ha del resto carattere intuitivo, sarà dimostrata negli Esercizi [Es. 59].

COR. *Il segmento che unisce un punto interno d'un poligono con un punto esterno, incontra il contorno in uno ed in un sol punto.*

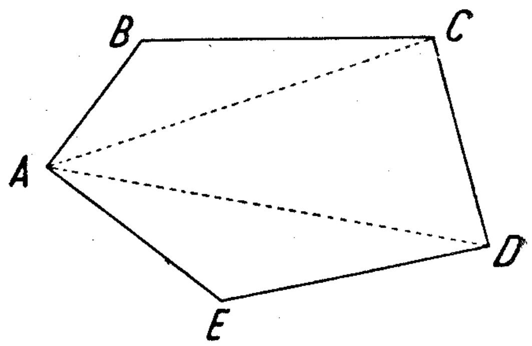
Proprietà dei poligoni.

80. TEOR. *Un lato di un poligono è minore della somma degli altri.*

Condotte infatti per un vertice A del poligono $ABCDE$ le diagonali AC, AD, il poligono resta decomposto in tre triangoli. Applicando a ciascuno di questi triangoli il teor. 66, si hanno le disuguaglianze:

$$AB < AC + BC, \quad AC < AD + CD, \quad AD < AE + DE,$$

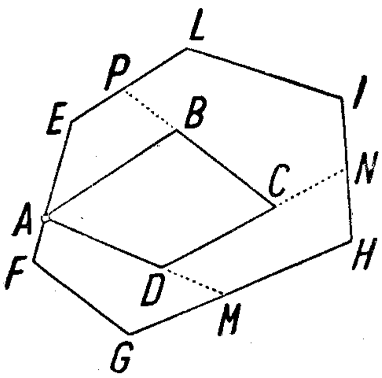
le quali sommate a membro a membro, dopo tolti i segmenti AC, AD, che son comuni ai due membri della disuguaglianza risultante, dànno:



$$AB < BC + CD + DE + EA ,$$

che è quanto volevasi dimostrare.

81. Teor. *Il perimetro* (1) *di un poligono è maggiore del perimetro di ogni poligono in esso contenuto.*



Sia p. es. il quadrangolo (convesso) $ABCD$, contenuto nell'esagono (convesso) $EFGHIL$. Vogliam provare che:

$$EF + FG + GH + HI + IL + \\ + LE > AB + BC + CD + DA .$$

Si determinino all'uopo, come in figura, i punti M, N, P sul contorno dell'esagono. Dal teor. precedente si trae:

$$AF + FG + GM > AD + DM,$$
$$DM + MH + HN > DC + CN,$$
$$CN + NI + IL + LP > CB + BP,$$
$$BP + PE + EA > AB .$$

Sommando a membro a membro queste disuguaglianze e invertendo convenientemente l'ordine dei termini, si ha:

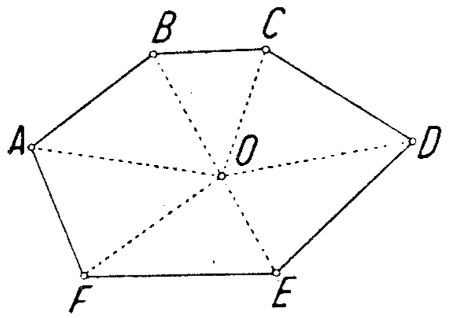
$$(EA + AF) + FG + (GM + MH) + (HN + NI) + \\ + IL + (LP + PE) + DM + CN + BP > AD + DC + \\ + CB + AB + DM + CN + BP ;$$

donde, colla soppressione dei termini DM, CN, BP comuni ai due membri, si trae la disuguaglianza da dimostrarsi.

(1) Si ricordi che il *perimetro* di un poligono è la somma dei lati.

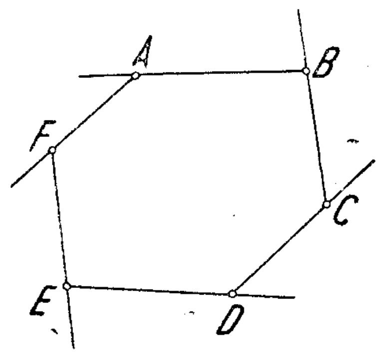
82. *La somma degli angoli d'un poligono di n lati è uguale ad $n - 2$ angoli piatti.*

Preso infatti un punto O interno al poligono, che sia per es. $ABCDEF$, e congiunto O coi vertici, si ottengon tanti triangoli OAB, OBC, ..., OFA, quanti son i lati. Sul piano del poligono, ogni semiretta di origine O, se non passa per un vertice, incontra un solo lato del poligono [79], epperò due qualunque degli angoli $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$, ..., $F\hat{O}A$ o hanno comune un lato e son consecutivi o non hanno comune che il vertice.



Pertanto la somma di tutti quegli angoli è uguale a due angoli piatti. D'altronde ognuno degli angoli del poligono, e sia p. es. l'angolo $\hat{A}$, vien decomposto dalla semiretta che esce dal suo vertice e passa per O, nella somma di due angoli, $F\hat{A}O, O\hat{A}B$, appartenenti a due successivi dei triangoli sopra ottenuti: dunque la somma degli angoli di tutti questi triangoli, che è di n angoli piatti, se n son i vertici del poligono, è uguale alla somma degli angoli del poligono e degli angoli attorno ad O, i quali forman insieme due angoli piatti. Per ottenere la somma degli angoli del poligono bisogna perciò toglier due angoli piatti da n angoli piatti.

Cor. *La somma degli angoli esterni di un poligono uguaglia due angoli piatti* (1).



Sia ancora n il numero dei vertici. Poiché la somma di un angolo del po-

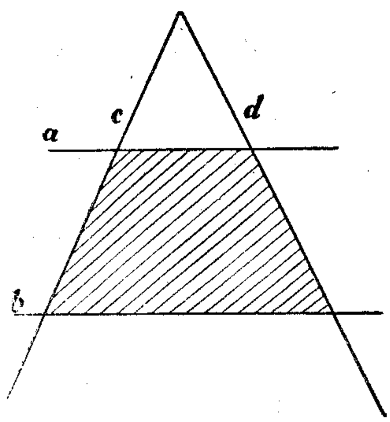
(1) Si sottintende che per ogni angolo del poligono si considera uno solo dei due angoli esterni adiacenti, come indica la figura.

ligono e di uno degli adiacenti angoli esterni è uguale ad un angolo piatto, la somma degli angoli del poligono e degli angoli esterni è uguale ad n angoli piatti. La somma degli angoli esterni risulta cosí uguale ad $n - (n - 2) = 2$ angoli piatti.

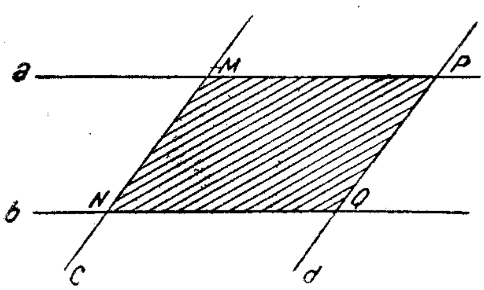
Parallelogrammi.

83. Ricordiamo [Es. 44] che, date due rette parallele, la figura convessa [9] comune ai due semipiani, ciascuno dei quali ha per contorno una di quelle rette e contiene l'altra, chiamasi una *striscia*, di cui le due parallele costituiscono il *contorno*.

84. La figura intersezione di una striscia ab con un angolo $\widehat{cd}$ avente il vertice esterno alla striscia, si chiama un trapezio. I due lati paralleli si chiaman *basi* del trapezio. È chiaro che un trapezio è un poligono convesso, perché intersezione di figure convesse [9]. Vi son dunque quadrangoli (convessi) con due lati paralleli e si può dare la seguente:



DEF. *Un **trapezio** è un quadrangolo con due lati paralleli.*

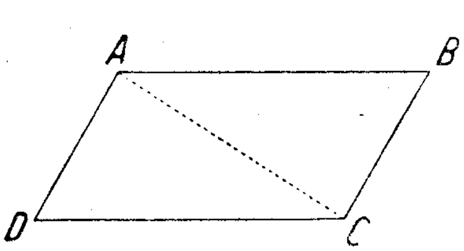


85. Sieno ora a,b due rette parallele di un piano e c,d altre due rette parallele dello stesso piano, che incontrino [56] le precedenti nei punti M,N,P,Q. La intersezione delle due striscie è un quadrangolo (convesso) [9], $MPQN$, avente i lati opposti [78] paralleli.

DEF. *Dicesi **parallelogrammo** un quadrangolo avente i lati opposti paralleli.*

86. TEOR. *Una diagonale divide un parallelogrammo in due triangoli uguali.*

Sia $ABCD$ il dato parallelogrammo. Condotta una diagonale AC, i due triangoli ABC, ADC in cui il parallelogrammo vien decomposto (¹) son uguali, perché hanno il lato AC comune ed uguali le coppie di angoli, $C\hat{A}B, A\hat{C}D$; $B\hat{C}A, D\hat{A}C$, in quanto trattasi di angoli alterno interni rispetto alle parallele AB, DC ; AD, BC tagliate dalla trasversale AC.



87. TEOR. *In un parallelogrammo son uguali i lati e gli angoli opposti, e le diagonali si taglian mutuamente per metà.*

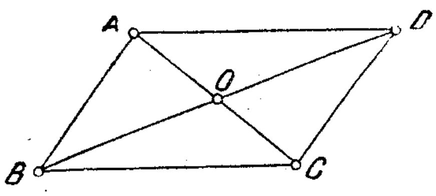
Sia il parallelogrammo $ABCD$. Per dimostrare che sono uguali le coppie di lati opposti, si tiri una diagonale, p. es. AC. I due triangoli ABC, CDA son uguali [86] epperò è $BC = AD$, $AB = CD$.

Inoltre dall'uguaglianza dei predetti triangoli segue l'uguaglianza dei loro angoli omologhi $A\hat{B}C, C\hat{D}A$. Similmente, dall'uguaglianza dei triangoli ABD, CDB, ottenuti

---

(¹) Indipendentemente dalla visione della figura, che può aiutare, ma non sostituire, il ragionamento, si può, per sola deduzione logica, affermare che i detti triangoli son parti del parallelogrammo. Infatti essi son figure convesse ed i vertici dei due triangoli appartengono al parallelogrammo, che è pure una figura convessa.

tracciando l'altra diagonale BD, si trae l'uguaglianza degli altri due angoli opposti $B\hat{A}D, D\hat{C}B$.

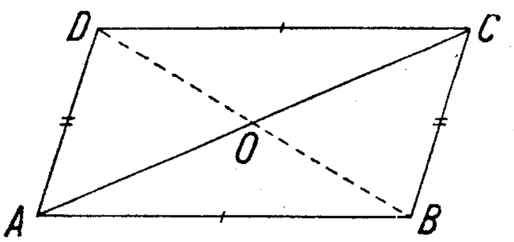


Per dimostrare infine che le diagonali AC, BD si dimezzano, si osservi in primo luogo che i segmenti AC, BD s' incontrano in un punto O. Invero, i punti B, D son da parti opposte della retta AC, onde il segmento BD incontra questa retta in un punto O, il quale è interno al parallelogrammo (perché questo è una figura convessa) ed è situato dunque sul segmento AC, che è l'unica parte della retta AC appartenente al parallelogrammo. Ciò premesso, si considerino i due triangoli AOD, COB. Essi son uguali, perché hanno $AD = CB$ ed hanno altresí uguali gli angoli adiacenti a questi lati, come angoli alterno interni formati dalle parallele AD, BC colle trasversali AC, BD. Dall'uguaglianza dei due triangoli segue $AO = CO$, $OD = OB$.

Def. *Il punto comune alle diagonali chiamasi* **centro** *del parallelogrammo.*

88. Teor. *Un quadrangolo* (1), *che abbia i lati o gli angoli opposti uguali, oppure le diagonali che si dimezzino è un parallelogramma.*

Sia il quadrangolo $ABCD$ coi lati opposti uguali: $AB = CD$, $AD = BC$. Tirata la diagonale AC, risultan uguali i triangoli ABC, CDA, che hanno i tre lati ordinatamente uguali. E quindi $B\hat{A}C = D\hat{C}A$, $A\hat{C}B = C\hat{A}D$.



(1) Si ricordi che ci riferiamo ai soli quadrangoli *convessi*. Se il quadrangolo fosse intrecciato, il teor. 88 ed il successivo teor. 89 non varrebbero in tutte le loro parti.

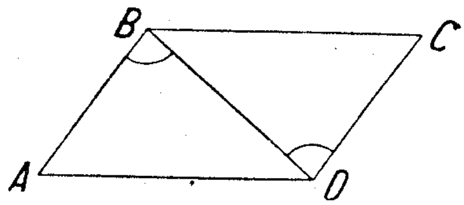
Dalla prima di queste due uguaglianze scende il parallelismo delle rette AB, CD, in quanto queste formano colla trasversale AC angoli alterno interni $B\hat{A}C, D\hat{C}A$ uguali fra loro. Dalla seconda delle due uguaglianze si deduce similmente il parallelismo delle rette AD, BC. Il quadrangolo ha dunque i lati opposti paralleli, ed è perciò un parallelogrammo.

Supponiamo invece di sapere che nel dato quadrangolo son uguali gli angoli opposti: $\hat{A} = \hat{C}$, $\hat{B} = \hat{D}$. Allora le somme $\hat{A} + \hat{B}$, $\hat{C} + \hat{D}$ risultano tra loro eguali. E siccome $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D}$ è uguale ad un angolo giro [82], cosí ciascuna delle somme $\hat{A} + \hat{B}$, $\hat{C} + \hat{D}$ è uguale ad un angolo piatto. Tanto basta per affermare che le AD, BC son parallele, perché formano colla AB angoli coniugati interni supplementari. Similmente, risultano uguali ad un angolo piatto ciascuna delle somme $\hat{A} + \hat{D}$, $\hat{B} + \hat{C}$, epperò son parallele anche le AB, DC. Si conclude cosí che il quadrangolo è un parallelogrammo.

Supponiamo infine che le diagonali AC, BD si dimezzino in O. Risultan allora uguali i due triangoli AOB, COD, perché hanno $OA = OC$, $OB = OD$, $A\hat{O}B = C\hat{O}D$. Ne deriva che $B\hat{A}O = D\hat{C}O$, epperò le AB, CD son parallele. Similmente, dall'uguaglianza dei triangoli AOD, COD si deduce il parallelismo delle BC, AD. Sicché il quadrangolo dato è un parallelogrammo.

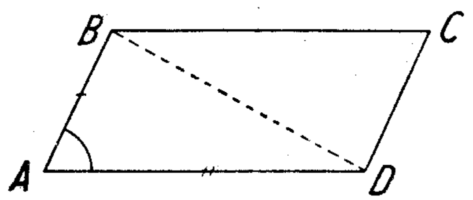
89. Teor. *Un quadrangolo avente due lati opposti uguali e paralleli è un parallelogrammo.*

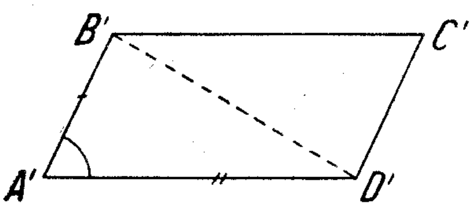
Se, invero, nel quadrangolo $ABCD$ son uguali e paralleli i lati AB, CD, tirata la diagonale BD risultan uguali



gli angoli alterno interni $A\hat{B}D$, $C\hat{D}B$; sicché i due triangoli ABD, CDB hanno due lati, AB,BD, del primo, rispettivamente uguali a due lati, CD,DB, dell'altro e gli angoli compresi uguali; onde essi son uguali. Ne segue che $A\hat{D}B = C\hat{B}D$; epperò risultan paralleli anche i lati AD,BC.

90. Teor. *Due parallelogrammi son uguali se hanno due lati consecutivi e l'angolo compreso rispettivamente uguali.*





Sieno $ABCD$, $A'B'C'D'$ due parallelogrammi pei quali:

$$AB = A'B' \;,\; AD = A'D',$$
$$B\hat{A}D = B'\hat{A}'D'.$$

I due triangoli BAD, $B'A'D'$ son uguali pel primo caso d'uguaglianza, onde si può con un movimento sovrapporre $B'A'D'$ a BAD.

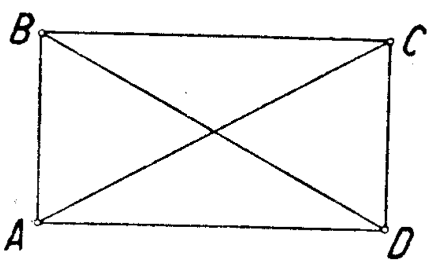
Questo movimento porta la parallela $B'C'$ da B' ad $A'D'$ e la parallela $D'C'$ da D' ad $A'B'$, rispettivamente nella parallela BC da B ad AD e nella parallela DC da D ad AB; sicché il punto C' comune alle $B'C'$, $D'C'$ va a cadere nel punto C comune alle BC, DC. I vertici dei due parallelogrammi son venuti cosí a coincidere; epperò coincidono anche i due parallelogrammi, perché son figure convesse. Ed è dimostrato che i due parallelogrammi son uguali.

Parallelogrammi particolari.

91. DEF. *Dicesi* ***rettangolo*** *un parallelogrammo coi quattro angoli retti.*

Affinché si possa affermare che un parallelogrammo è rettangolo basta sapere che è retto *uno* de' suoi angoli. Invero, gli angoli consecutivi a questo risultan retti, perché son di esso supplementari [59, Cor.]; e l'angolo opposto è pure retto, perché ad esso uguale [87].

92. TEOR. *Condizione necessaria e sufficiente perché un parallelogrammo sia un rettangolo, è che le sue diagonali sieno uguali.*



Sia il rettangolo $ABCD$. I due triangoli ABC, BCD son uguali, perché hanno $AB = DC$, il lato BC comune e gli angoli $A\hat{B}C, D\hat{C}B$ uguali, perché retti. Dunque $AC = BD$.

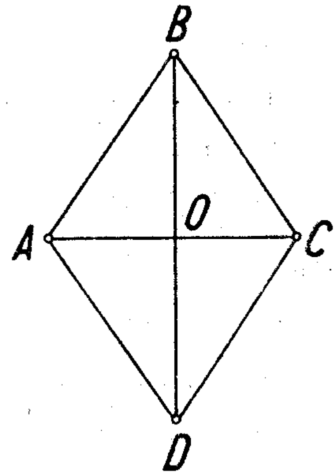
Viceversa, se nel parallelogrammo $ABCD$ è $AC = BD$, risultan uguali i due triangoli ABC, DCB che hanno i tre lati rispettivamente uguali; epperò $A\hat{B}C = D\hat{C}B$. Ma siccome questi due angoli son supplementari, ciascuno è retto, onde il parallelogrammo dato è un rettangolo [91].

93. DEF. *Dicesi* ***rombo*** o ***losanga*** *un parallelogrammo coi quattro lati uguali.*

Affinché si possa affermare che un parallelogrammo è un rombo, basta sapere che son uguali due lati consecutivi. Invero gli altri due risultan uguali ai precedenti, perché ad essi opposti.

94. TEOR. *Condizione necessaria e sufficiente perché un parallelogrammo sia un rombo, è che le diagonali siano perpendicolari ovvero che bisechino gli angoli interni.*

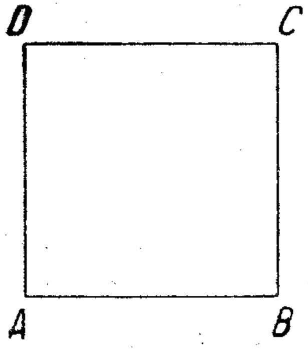
Sia $ABCD$ il dato rombo. Essendo $AB = BC$, $AD = DC$, i punti B, D appartengono all'asse del segmento AC [50]. Perciò la retta BD è perpendicolare ad AC. Cosí è dimostrato che le diagonali son perpendicolari. Inoltre la semiretta BD, essendo la perpendicolare alla base AC dal vertice B del triangolo isoscele ABC, biseca l'angolo al vertice B [72]. Similmente si vede che BD biseca l'angolo $\hat{D}$ e che l'altra diagonale biseca $\hat{A}, \hat{C}$.



Viceversa, suppongasi che nel parallelogrammo $ABCD$ le diagonali AC, BD sieno perpendicolari in O. Poiché O è medio fra A, C [87], la retta BD è l'asse del segmento AC e quindi $AB = BC$, $AD = DC$ e il parallelogrammo è un rombo [93].

Suppongasi infine che nel parallelogrammo $ABCD$ la diagonale BD bisechi l'angolo in $\hat{B}$. Siccome $A\hat{B}D = C\hat{D}B$, risulta $D\hat{B}C = C\hat{D}B$. Onde il triangolo BCD è isoscele, cioè $BC = CD$ e quindi il dato parallelogrammo è un rombo [93].

95. DEF. *Dicesi* ***quadrato*** *un parallelogrammo equiangolo ed equilatero.*



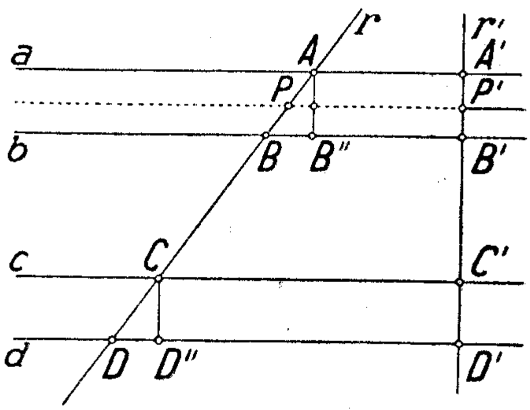
Un quadrato è dunque contemporaneamente un rettangolo ed un rombo. Ad esso son pertanto applicabili i teor. 92, 94 e si può enunciare il:

TEOR. *Condizione necessaria e sufficiente perché un parallelogrammo sia un* *quadrato è che le sue diagonali sieno uguali e si taglino ad angolo retto.*

Trasversali di un fascio di rette parallele.

96. L' insieme di tutte le rette di un piano parallele ad una retta data dicesi un *fascio di rette parallele.* Per ogni punto del piano passa una sola retta del fascio.

Una retta r, che incontri una retta del fascio, le incontra tutte [56], e si chiama una *trasversale del fascio.* Sia r' un'altra trasversale del dato fascio. Due punti di r, r' si dicon *corrispondenti* quando sono intersezioni di r, r' con una medesima retta del fascio. Cosí nella figura son corrispondenti A,A' ; B,B' ; C,C' ; D,D'. Dato un punto qualunque P su una r delle trasversali, vi è *un solo* corrispondente P' di P sull'altra trasversale r' ; e si ottiene tirando la retta del fascio per P e intersecandola in P' con r'. Similmente dato un punto qualunque dell'altra trasversale r', c' è un solo corrispondente di esso su r.



Se un punto si muove sopra una delle trasversali, p. es. su r, descrivendo un segmento AB, il punto corrispondente descrive sull'altra il segmento $A'B'$, che ha per estremi i punti A',B' corrispondenti degli estremi A,B del primo segmento (1). Perciò i due segmenti AB, $A'B'$ si dicon *corrispondenti.*

(1) La proprietà è intuitiva ; ma può anche dimostrarsi. Invero i segmenti AB,$A'B'$ appartengono per intero alla striscia ab, in quanto questa è una figura convessa. Preso ora un punto P interno al segmento

97. Teor. *Se un fascio di rette parallele è segato da due trasversali, a segmenti uguali dell'una corrispondono segmenti uguali dell'altra e alla somma di due segmenti dell'una corrisponde la somma dei due segmenti corrispondenti dell'altra.*

Le due trasversali r, r' determinino (fig. prec.) colle rette a, b, c, d del fascio, i segmenti uguali AB, CD. Dico che i segmenti corrispondenti $A'B'$, $C'D'$ son pure uguali.

Tiriamo da A, C le parallele ad r', le quali incontrino [56] rispettivamente b, d nei punti B'', D''. I due triangoli BAB'', DCD'' son uguali, perché hanno $AB = CD$, $B\hat{A}B'' = D\hat{C}D''$, trattandosi di angoli corrispondenti rispetto alle parallele [57] AB'', CD'' tagliate da r; inoltre $A\hat{B}B'' = C\hat{D}D''$, come angoli corrispondenti rispetto alle b, d tagliate da r. Dunque $AB'' = CD''$. Ma dai parallelogrammi $AB''B'A'$, $CD''D'C'$ deducesi che $AB'' = A'B'$, $CD'' = C'D'$; onde risulta $A'B' = C'D'$, il che dimostra la prima parte della tesi.

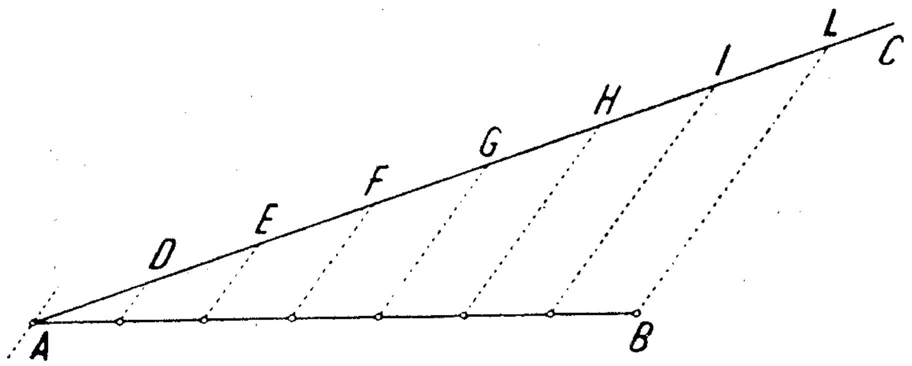
Quanto alla seconda, si osservi che alla somma $AC = AB + BC$ dei segmenti consecutivi AB, BC, corrisponde la somma $A'C' = A'B' + B'C'$ dei segmenti corrispondenti $A'B'$, $B'C'$, perché al punto B interno ad AC corrisponde il punto B' interno ad $A'C'$.

Cor. *Se per il punto di mezzo di un lato d'un triangolo si tira la parallela ad un altro lato, essa dimezza il lato rimanente.*

AB, la retta del fascio che passa per P è interna alla striscia ab, onde incontra la retta r' nella parte interna alla striscia stessa; cioè in un punto P' interno ad $A'B'$.

98. Problema. *Dividere un segmento in n parti uguali.*

Si tratti p. es. di dividere il segmento AB in $n = 7$ parti uguali. Per un estremo A del dato segmento conducasi comunque una semiretta AC, e su questa, a partire da A, si riportino successivamente $n = 7$ segmenti



uguali AD, DE, ..., IL. Congiunto L con B, si tirino dagli estremi dei predetti segmenti le parallele alla retta LB. Esse divideranno AB in $n = 7$ parti uguali [97].

Cor. *Dato un segmento, esiste sempre il summultiplo di questo secondo un numero n arbitrario.*

CENNI STORICI

99. *La nozione precisa di poligono apparisce molto tardi nella geometria.* Euclide *definisce quelle che chiama figure rettilinee, cioè limitate da rette: se da tre trilatere, se da quattro quadrilatere, se da più multilatere. Usa anche incidentalmente la parola poligono (che trovasi pure in* Aristotele*), fermandosi in modo speciale sui poligoni regolari, che studieremo più tardi. In* Euclide *il poligono vien sempre considerato come una parte di piano limitata da segmenti rettilinei, mentre esso vien considerato come linea spezzata chiusa (anche intrecciata) soltanto dal* XVII *secolo in poi* (Girard, 1676; Poinsot, 1810). *Lo studio più vasto di sistemi di segmenti di questa natura rientra come caso specialissimo nel quadro della Topologia, branca fiorente e importante della matematica contemporanea. Una poligonale chiusa non intrecciata, anche non piana, di n lati e vertici si può definire come un insieme di n segmenti tali che ciascuno abbia comune ognuno dei due estremi con un altro solo segmento* *dell' insieme e che due qualsiansi degli n segmenti non abbiano in comune punti interni. Nel testo abbiamo evitato questa definizione, troppo astratta.*

Nel secolo XIX *è stata posta in evidenza la necessità di stabilire razionalmente il fatto intuitivo che una poligonale chiusa non intrecciata del piano, divide questo in due parti (una finita e l'altra infinita) : caso particolare di un teorema di* Jordan, *di cui si conoscono oggi molte dimostrazioni. Quella esposta nel successivo Es.* 59 *vale per le poligonali convesse.*

La parola parallelogrammo è usata da Euclide *senza esplicita definizione. Negli Elementi euclidei già si trovano le proprietà fondamentali dei parallelogrammi. Rombi, rettangoli, quadrati son invece noti da più remota antichità.*

ESERCIZI

56. Quattro rette di un piano, delle quali due qualunque non siano parallele e non ne passin mai tre per un punto, si tagliano in sei punti. Fra questi ve ne sono quattro, vertici di un quadrangolo convesso, avente i lati sulle rette date.

57. Esistono poligoni convessi di quanti si vogliano vertici. (Per dimostrarlo si osservi in primo luogo che un poligono convesso è diviso da una retta, che congiunga due punti del contorno situati su lati distinti, in due poligoni convessi. Partendo da un triangolo, che è un poligono convesso, mediante la congiungente di due punti presi su lati consecutivi, si divide il triangolo in un quadrangolo convesso ed in un triangolo. Similmente da un quadrangolo convesso si ottiene un pentagono convesso ed un triangolo, ecc.).

58. Una retta non contenente alcun lato d'un poligono convesso non ne incontra il contorno in più di due punti. (Si consideri l' intersezione del poligono colla retta, che pure è una figura convessa).

59. In un piano, una semiretta avente per origine un punto interno ad un poligono convesso, ne incontra il contorno in uno ed in un sol punto. (Sia P il dato punto interno — lo scolaro faccia la figura — ed A un vertice del poligono. I lati AB, AC uscenti da A, son da parti opposte della retta AP, perché P è interno ad $\hat{A}$, onde gli angoli $A\hat{P}B, A\hat{P}C$ son consecutivi. Le semirette che vanno da P ai vertici successivi del poligono si succedono perciò in un determinato verso nell'angolo giro di vertice

P; e l'angolo di due consecutive contiene uno ed un sol lato del poligono. E siccome una semiretta di origine P, se non coincide con una di quelle semirette, è interna ad uno solo degli angoli suddetti, cosí essa incontra uno ed un sol lato del poligono).

60. Una retta uscente da un punto interno incontra in due punti il contorno di un poligono convesso, e si chiama una *retta secante.* Da una retta secante un poligono convesso è diviso in due poligoni convessi.

61. Due poligoni di ugual numero di lati son uguali se i vertici si corrispondono in modo che lati ed angoli corrispondenti sieno uguali, ad eccezione di due coppie di lati consecutivi e degli angoli fra essi compresi, dei quali non si sa nulla, Questo è il primo *caso di uguaglianza dei poligoni.* Si dimostra facilmente colla sovrapposizione dei due poligoni.

62. Due poligoni di ugual numero di lati sono uguali, se i vertici si corrispondon in modo che lati ed angoli corrispondenti sieno uguali ad eccezione di due coppie di angoli consecutivi e dei lati ad essi comuni, dei quali non si sa nulla. Anche questo *secondo caso di uguaglianza dei poligoni* si dimostra per mezzo del movimento che li sovrappone.

63. Un n-gono ha $n\ (n - 3) : 2$ diagonali. (Si cominci col contare le diagonali passanti per un vertice e si osservi che, mutando il vertice, ogni diagonale viene a contarsi due volte).

64. Due poligoni (convessi), con piú di tre vertici, son eguali, se hanno lati ed angoli ordinatamente eguali, ad eccezione di tre angoli consecutivi, dei quali non si sa nulla.

65. In un quadrangolo (convesso) la somma delle diagonali è minore del perimetro e maggiore del semiperimetro.

66. In un triangolo la mediana d'un lato è minore della semisomma degli altri due e maggiore della loro semidifferenza. (Si ricordi il § 87). La somma delle mediane è minore del perimetro e maggiore del semiperimetro.

67. Se due lati d'un triangolo son divisi nelle stesso numero di parti uguali, le congiungenti delle coppie dei punti di divisione corrispondenti son parallele.

68. Il segmento che unisce i punti medi di due lati di un triangolo è parallelo al terzo lato ed è uguale alla metà di questo.

69. Il segmento che unisce i punti medi dei lati non paralleli di un trapezio è parallelo alle basi ed eguale alla loro semisomma.

70. In un quadrangolo (convesso) le bisettrici di due angoli consecutivi formano un angolo eguale alla semisomma degli altri due e le bisettrici di due angoli opposti un angolo eguale alla semidifferenza degli altri due.

71. Il centro di un parallelogrammo è punto medio di ogni coppia di punti del contorno, con esso allineati. Da ciò la ragione del nome.

72. I punti medi dei lati di un quadrangolo (convesso) son vertici di un parallelogrammo.

73. Condizione necessaria e sufficiente perchè un quadrangolo convesso sia un quadrato, è che le sue diagonali sieno uguali, perpendicolari e bisechino gli angoli del quadrangolo.

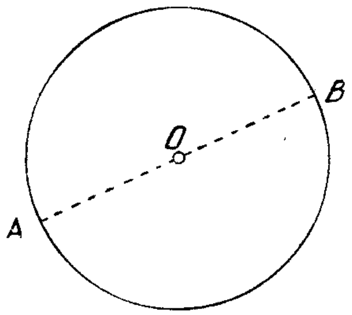
CAPITOLO QUINTO

DEL CERCHIO

Proprietà preliminari.

100. Def. ***Circonferenza*** *è il luogo dei punti di un piano aventi da un punto dato un'assegnata distanza.* Il punto dato dicesi *centro*, la distanza *raggio* della circonferenza.

Sia O il centro di una circonferenza. Sopra ogni semiretta di origine O c' è un sol punto della circonferenza; epperò sopra una retta passante pel centro vi son due punti A,B della medesima, da parti opposte di O.



Chiamasi *diametro* il segmento AB determinato dalla circonferenza sopra una retta passante pel centro. Talora si dice diametro anche la retta medesima. È chiaro che *un diametro è doppio del raggio*, e che *tutti i diametri son uguali fra loro.*

101. Def. *Chiamansi* ***punti interni*** *rispetto ad una circonferenza i punti che distan dal centro meno del raggio.*

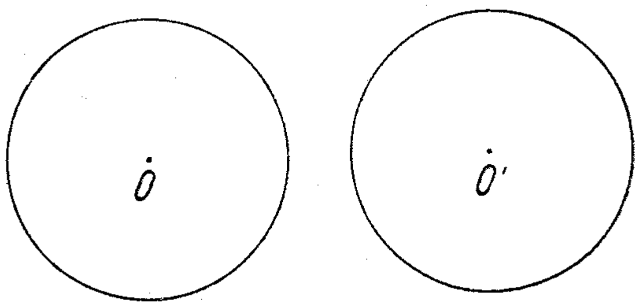
Sopra ogni diametro vi son infiniti punti interni. I punti della circonferenza ed i punti interni costituiscono complessivamente un *cerchio*, di cui la circonferenza è il *contorno*. Si ha cioè la:

Def. ***Cerchio*** *è l' insieme dei punti di un piano, che hanno da un assegnato punto distanza minore od uguale ad una data.*

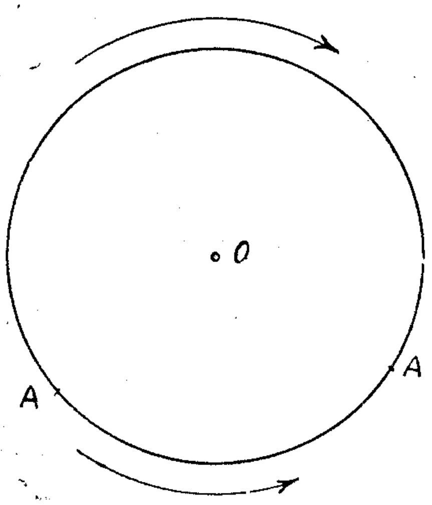
La circonferenza è una *linea*; il cerchio una *superficie.* I punti del piano esterni al cerchio distano dal centro piú del raggio e diconsi *esterni* rispetto alla circonferenza.

102. TEOR. *Due cerchi aventi uguali raggi son uguali e son altresí uguali le loro circonferenze.*

Infatti, un movimento che sovrapponga il piano di uno dei cerchi al piano dell'altro, in modo che il centro O del primo coincida col centro O' del secondo, porta ogni punto del primo piano, avente da O una data distanza, in un punto del secondo avente da O' la stessa distanza; e quindi punti interni al primo cerchio in punti interni al secondo, punti della prima circonferenza in punti della seconda. I due cerchi e le loro circonferenze vengon cosí a sovrapporsi, epperò sono uguali.



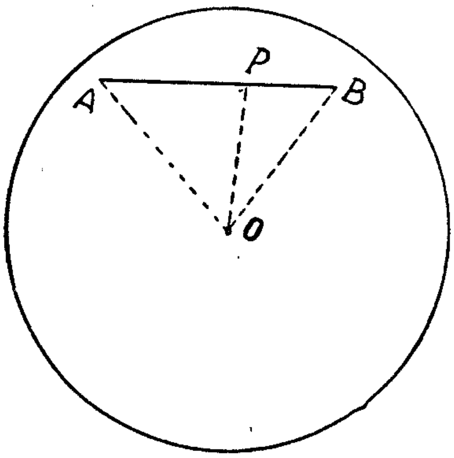
103. In particolare un cerchio di dato centro O può sovrapporsi a se medesimo con un movimento, che lasci fisso il centro, cioè con una *rotazione* attorno ad O.



La rotazione può essere eseguita in un *verso* o nel *verso opposto.* Uno dei due versi concorda con quello del movimento delle lancette dell'orologio e l'altro col verso contrario.

Fissati sulla circonferenza due punti A, A', vi sono due rotazioni, indicate in figura dalle frecce, che mutano il cerchio in sé, sovrapponendo A ad A'.

Osservazione. L'uso del compasso per tracciare una circonferenza deriva appunto dall'esistenza delle rotazioni attorno al centro, che sovrappongono un cerchio a se stesso.



104. Teor. *Il cerchio è una figura convessa.*

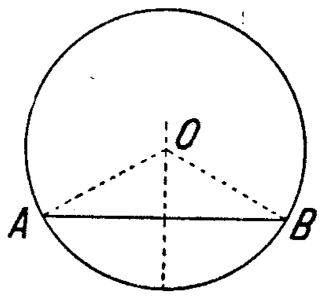
Sia un cerchio di centro O e di raggio r e sieno A,B due suoi punti. Si deve provare che il segmento AB consta di punti del cerchio [9]. Preso infatti un punto P interno ad AB, il segmento OP risulta minore di uno almeno dei segmenti OA,OB [65, Cor.]; e siccome ognuno di questi è minore o uguale ad r, cosí risulta $OP < r$; epperò P è interno al cerchio.

Corde del cerchio.
Rette secanti, esterne, tangenti.

105. Chiamasi ***corda*** di una circonferenza o del relativo cerchio il segmento che unisce due punti della circonferenza. La retta che unisce gli stessi punti chiamasi una ***secante***.

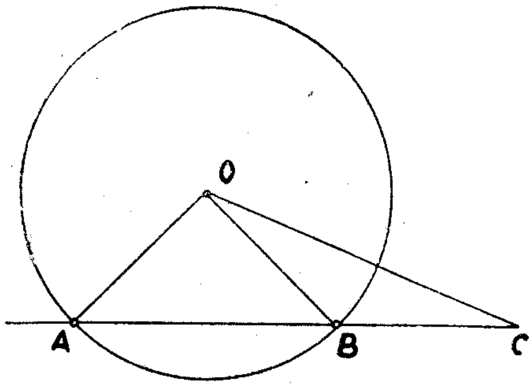
106. Teor. *L'asse di una corda qualunque passa pel centro del cerchio.*

Infatti l'asse della corda AB [50] contiene il centro O, perché questo è un punto equidistante dagli estremi della corda.



107. Teor. *I punti interni ad una corda sono interni al cerchio; quelli situati sui prolungamenti son esterni.*

Che i punti interni alla corda AB sieno interni al cerchio di centro O, risulta già dal § 104. Se ora C è un punto di un prolungamento, nel triangolo AOC il segmento OB è minore di uno almeno dei lati OA, OC [65, Cor.], e siccome $OB = OA$, cosí deve essere $OB < OC$. Onde C è esterno al cerchio.

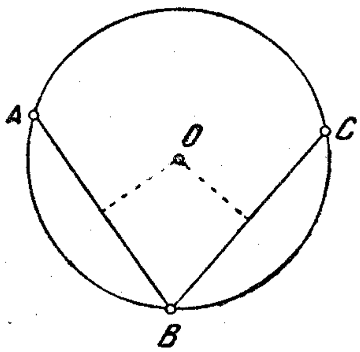


Cor. *Una retta non può avere piú di due punti comuni con una circonferenza.*

Invero, se la retta ha colla circonferenza due punti comuni, A, B, tutti i punti interni al segmento AB son interni al cerchio e tutti i punti dei prolungamenti son esterni.

108. Teor. *Per tre punti non allineati passa sempre una ed una sola circonferenza.*

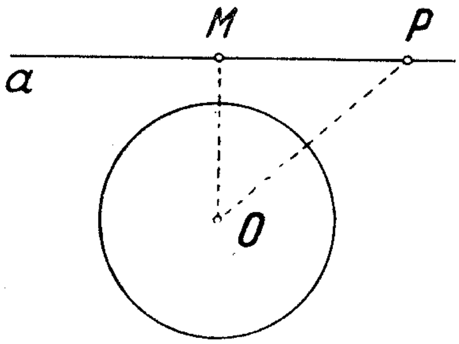
Sieno A, B, C i punti dati. Poiché le rette AB, BC s' incontrano, gli assi dei segmenti AB, BC concorrono in un punto O [54, Cor. 5°], che è equidistante da A, B, C. Onde la circonferenza di centro O e di raggio $OA = OB = OC$ contiene i tre punti. E siccome, viceversa, il centro di una circonferenza passante per A, B, C deve appartenere agli assi delle corde AB, BC [106], cosí nessun'altra circonferenza, diversa da quella costruita, può contenere i tre punti.



Cor. *Due circonferenze distinte non posson avere piú di due punti comuni.*

109. Teor. *Una retta che disti dal centro del cerchio più del raggio è tutta costituita da punti esterni.*

Infatti, il piede M della perpendicolare dal centro O alla retta a è esterno al cerchio, perché OM è maggiore del raggio r. Preso un altro punto P di a, l'obliqua OP è maggiore di OM, epperò $OP > r$; onde anche P è esterno.



Una retta, del piano di un cerchio, tutta costituita da punti a questo esterni, dicesi una ***retta esterna.***

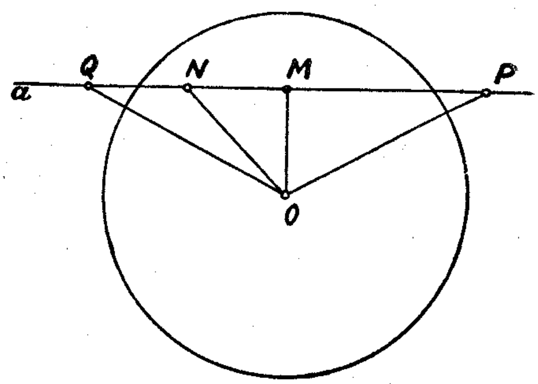
110. Se si taglia materialmente un foglio piano lungo una circonferenza, se ne distacca come pezzo a sè tutto il cerchio contornato dalla circonferenza. Quest'esperienza ci dice che la circonferenza divide il piano in due parti: la regione dei punti interni e la regione dei punti esterni. Non si può cioè passare con un cammino da un punto della prima ad un punto della seconda, senza traversare la circonferenza. Enuncieremo questo dato dell'esperienza col

Post. ***Il segmento che unisce un punto interno ad un cerchio con un punto esterno, incontra la circonferenza in un punto.***

111. Teor. *Una retta passante per un punto interno ad un cerchio è una retta secante.*

La retta data a passi per un punto N interno ad un cerchio di centro O. Condotta la OM perpendicolare da O ad a, sarà $OM \leq ON$ (1) e siccome ON è minore del raggio r del cerchio, sarà $OM < r$; cioè M risulterà, esso pure, interno al cerchio. Se ora si assume sulla a, p. es. a destra

(1) Il segno $=$ vale soltanto se M coincide con N.



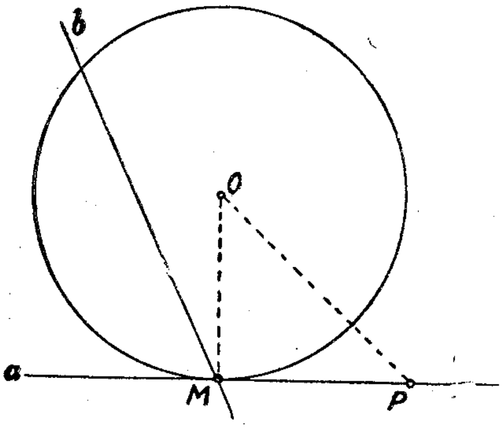
di M, un punto P siffatto che $MP = r$, sarà $OP > MP$, epperò $OP > r$ ed il punto P risulterà esterno al cerchio. Pertanto [110] il segmento MP contiene un punto della circonferenza. Un altro punto della medesima è similmente contenuto nel segmento $MQ = r$, a sinistra di M; onde la retta a è una secante [107, Cor.].

Cor. *Una retta distante dal centro meno del raggio è una secante.*

Infatti, il piede della perpendicolare dal centro alla retta risulta interno al cerchio; e, siccome la retta contiene un punto interno, è una secante.

112. Teor. *Una retta che disti dal centro quanto il raggio ha comune colla circonferenza un sol punto; e tutti gli altri punti della retta son esterni.*

Invero, il piede M della perpendicolare dal centro O alla data retta a, sta sulla circonferenza, perché OM è uguale al raggio r di questa; mentre ogni altro punto P di a dista da O del segmento $OP > OM$ ed è quindi esterno.



Una retta del piano di un cerchio avente un sol punto comune colla circonferenza, dicesi una ***retta tangente*** e quel punto dicesi il ***punto di contatto.***

Cor. *In un punto di una circonferenza vi è una sola tangente, che è perpendicolare al raggio passante per quel punto.*

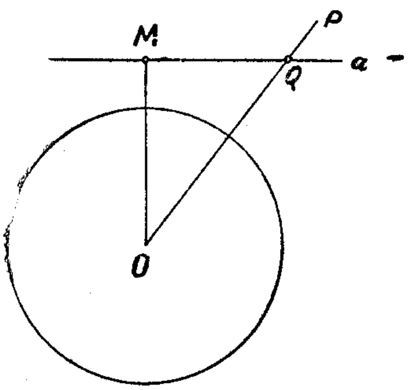
Invero (fig. prec.) se M è il punto dato, la retta a, perpendicolare in M al raggio OM, è tangente, perché dista da O quanto il raggio; mentre ogni altra retta b passante per M è secante, perché, essendo OM obliqua rispetto a b, la retta b dista dal centro meno del raggio.

113. Dato un cerchio, le proprietà delle rette distanti dal centro più del raggio o quanto il raggio o meno del raggio, si escludono a vicenda. Perciò in forza della legge delle inverse [65], si può enunciare il

TEOR. *Una retta secante, tangente o esterna rispetto ad una circonferenza, dista dal centro rispettivamente meno del raggio o quanto il raggio o più del raggio.*

114. TEOR. *Se una retta è esterna o tangente ad un cerchio, questo giace tutto da una banda della retta.*

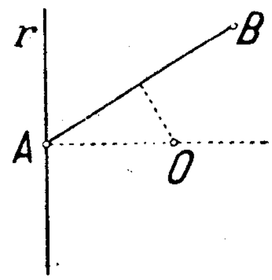
Infatti, se la retta a non è secante de dato cerchio di centro O, la distanza OM di a dal centro sarà maggiore



o uguale al raggio r. Preso un punto P del piano dalla parte opposta di O rispetto ad a, il segmento OP incontra a in un punto Q, ed è $OQ \geq OM$; e siccome $OP > OQ$, risulta $OP > r$, cioè il punto P è esterno. Dunque tutti i punti dalla banda opposta di O rispetto ad a sono esterni al cerchio, e pertanto questo deve essere tutto contenuto sul semipiano cui appartiene O.

115. TEOR. *Esiste una ed una sola circonferenza passante per due punti e tangente in uno di essi ad una retta data.*

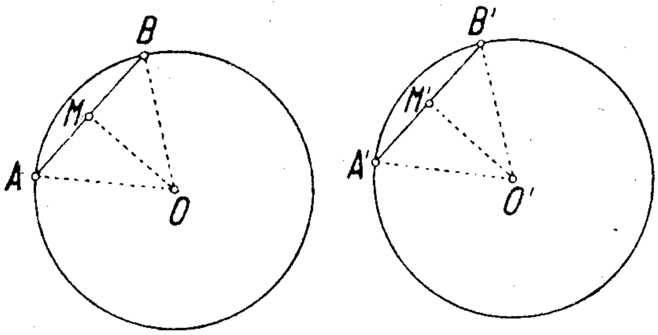
Infatti, se di una circonferenza si conosce il punto A, la tangente r ivi e un altro punto B, la circonferenza è ben determinata, perché se ne costruisce in un sol modo il centro e il raggio. Il centro O dovrà giacere sulla perpendicolare in A ad r e sull'asse del segmento AB, onde risulterà determinato come intersezione di queste due rette; il raggio sarà il segmento OA.



Cor. *Due circonferenze distinte aventi la stessa tangente in un punto comune, non hanno altri punti comuni.*

116. Teor. *In cerchi uguali o nello stesso cerchio corde uguali distano ugualmente dai rispettivi centri*; *e viceversa.*

Nei due cerchi uguali, di centri O, O', sieno le due corde uguali AB, $A'B'$. Tirate da O, O' le perpendicolari OM, $O'M'$ a tali corde, si tratta di provare che $OM = O'M'$.



Invero, poiché i segmenti AM, $A'M'$ son uguali, come metà di segmenti uguali [106], i triangoli rettangoli AMO, $A'M'O'$ hanno uguali l'ipotenusa ed un cateto e quindi son uguali [73]. Risultan perciò uguali i due cateti OM, $O'M'$.

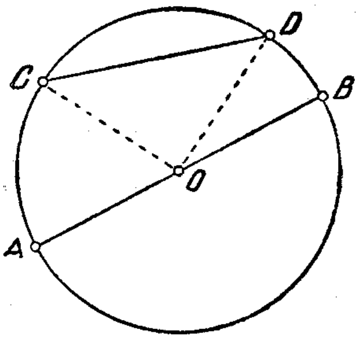
Viceversa, se $OM = O'M'$ i triangoli rettangoli predetti hanno $OA = O'A'$, $OM = O'M'$ e son dunque uguali. Onde $AM = A'M'$, epperò $AB = A'B'$, come doppi di segmenti uguali.

117. Teor. *In cerchi uguali o nello stesso cerchio, di due corde a disuguali distanze dai centri la maggiore è quella che dista di meno dal rispettivo centro.*

La dimostrazione, che può svilupparsi per esercizio, si riduce, in modo analogo a quello del § prec., al teor. dell' Es. 55.

118. TEOR. *Un diametro è la massima fra le corde del cerchio.*

Infatti, se AB è un diametro e CD una corda, dal triangolo COD ricavasi $CD < OC + OD$, e poiché $AB = OA + OB = OC + OD$, segue $CD < AB$.

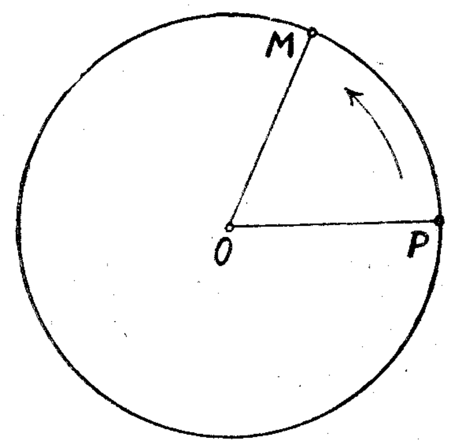


COR. *Il cerchio è una figura finita.*

Infatti il segmento che unisce due punti qualunque del cerchio è contenuto nella corda situata sulla congiungente dei due punti, epperò non supera un diametro.

Archi e settori circolari.

119. Se un raggio OM di una circonferenza si fa ruotare attorno al centro O in un determinato verso a partire da una posizione iniziale OP, l'estremo M descrive la circonferenza in un determinato *verso* e, quando il raggio ritorna alla posizione iniziale, il punto M ritorna in P. Perciò si dice che *la circonferenza è una linea chiusa*, percorribile in due *versi opposti* (¹).



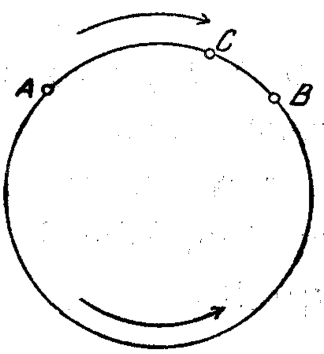
(¹) L'esistenza di questi due versi, che qui ci limitiamo a desumer dall' intuizione, potrebbe essere dedotta come teorema dalle proprietà dostulate nel § 103.

120. Def. ***Arco di circonferenza,*** *avente per estremi due punti A, B di questa, chiamasi l' insieme dei punti A, B e degli altri punti della circonferenza che seguono A e precedono B in un determinato verso.*

Due punti A, B dividono la circonferenza in due archi, perché due sono i sensi in cui si può percorrer la circonferenza da A a B.

Ogni punto di un arco, diverso dagli estremi, dicesi ***interno*** all'arco.

Un arco di estremi A, B s' indica con $\widehat{AB}$. Quando si voglia distinguerlo dall'altro arco, avente gli stessi estremi, se ne dà un punto interno C, e allora s' indica l'arco con $A\widehat{C}B$.



Il centro ed il raggio della circonferenza cui appartiene un dato arco, diconsi *centro* e *raggio dell'arco.*

Due archi *uguali,* cioè sovrapponibili, appartengono allo stesso cerchio o a cerchi uguali [102], ossia hanno ugual raggio.

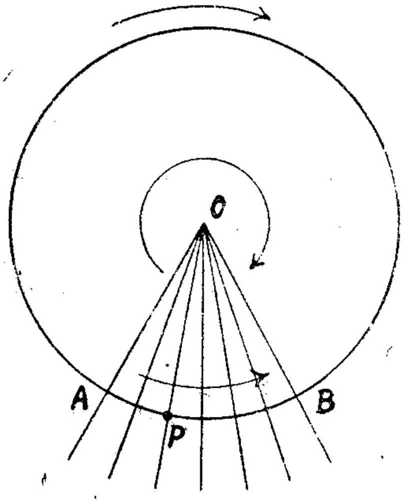
Se α, β son due archi di ugual raggio, si dice che α è *maggiore* di β, quando β è uguale ad una parte di α. Alla sua volta β dicesi *minore* di α.

Fra due archi α, β di ugual raggio passa una ed una sola delle relazioni $\alpha = \beta$, $\alpha < \beta$, $\alpha > \beta$. La proprietà è intuitiva, ma si potrebbe stabilire come teorema.

121. ***Corda di un arco*** dicesi il segmento che unisce gli estremi dell'arco. *Arco sotteso* da una corda di una circonferenza si chiama ognuno dei due archi aventi gli stessi estremi della corda.

122. ***Angolo al centro*** è un angolo che ha il vertice nel centro di un cerchio.

Sia $A\hat{O}B$ un angolo al centro, del cerchio di centro O. Se una semiretta, di origine O, descrive l'angolo muovendo dal lato OA al lato OB, il punto P dove la semiretta mobile incontra la circonferenza, si muove su questa in un determinato verso da A a B, cioè descrive un arco $\widehat{AB}$ [120].



Se poi la semiretta mobile descrive (nel verso opposto) l'angolo concavo $A\hat{O}B$, il punto ov'essa incontra la circonferenza descrive l'altro arco $\widehat{AB}$.

Ogni angolo al centro, convesso o concavo, *sottende* cosí un arco; e viceversa ad ogni arco *corrisponde* un angolo al centro, convesso o concavo. La corda di un arco corrispondente ad un dato angolo al centro, dicesi pure *sottesa* dall'angolo e questo *sotteso* da quella.

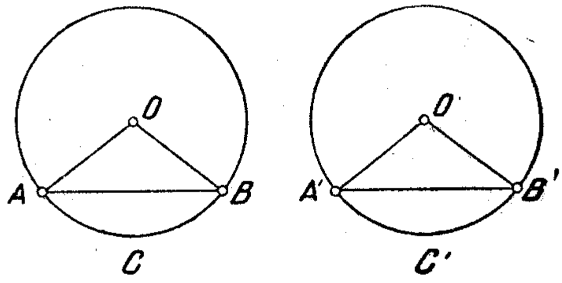
123. Def. *Dicesi* **settore** (*circolare*) *la parte di piano comune ad un cerchio e ad un suo angolo al centro.* Il settore e il relativo angolo al centro diconsi *corrispondenti*; il centro ed il raggio del cerchio cui appartiene il settore si chiamano *centro* e *raggio del settore.*

Un settore può anche definirsi come la parte di cerchio descritta da un raggio, il cui estremo mobile descriva un arco dato.

Ad ogni angolo al centro convesso corrisponde un settore convesso [10].

124. Teor. *In cerchi uguali o nello stesso cerchio ad angoli al centro uguali corrispondono settori uguali, e gli archi e le corde sottese son uguali; e viceversa.*

Se, infatti, i due angoli $A\hat{O}B$, $A'\hat{O}'B'$ son uguali, portando il primo sul secondo, in modo che si sovrappongano i lati OA, $O'A'$ ed i lati OB, $O'B'$, vengon a coincidere i punti A, A', i punti B, B' ed i due cerchi. Onde coincidono gli archi sottesi dai due angoli, le loro corde ed i settori corrispondenti.



Viceversa, se son uguali gli archi $A\overset{\frown}{C}B$, $A'\overset{\frown}{C'}B'$, sovrapponendo il primo al secondo, vengono a coincidere i centri dei due archi e gli estremi A, A' ; B, B'. Onde coincidono anche i cerchi contenenti i due archi, le corde di questi, gli angoli al centro e i settori corrispondenti.

Similmente si ragiona e si conclude, se si sa che sono uguali le corde o i settori.

125. Teor. *In cerchi uguali, o nello stesso cerchio, se due angoli al centro son disuguali, il maggiore sottende l'arco maggiore ; e viceversa.*

È una conseguenza quasi immediata del teor. prec. e della definizione di disuguaglianza fra due archi [120]. Si sviluppi la dimostrazione per esercizio.

126. Teor. *L'asse di una corda dimezza l'arco sotteso.*

Congiunti infatti col centro gli estremi della corda, si ha un triangolo isoscele, nel quale l'asse della corda è bisettrice dell'angolo opposto alla base [72].

127. Teor. *Un diametro divide la circonferenza in due archi uguali.*

Invero, ciascuno di questi archi ha per corrispondente angolo al centro un angolo piatto ; e gli angoli piatti son uguali fra loro.

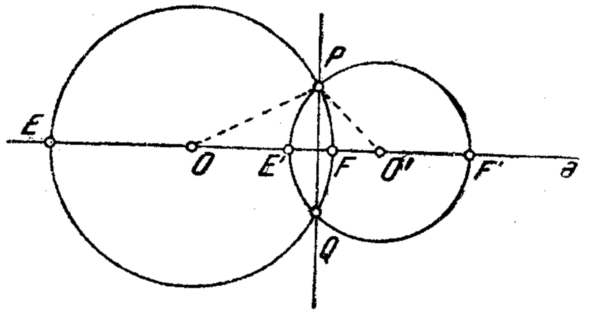
Ciascuno degli archi sottesi da un diametro chiamasi una *semicirconferenza.*

128. Il teor. 124 riconduce lo studio degli archi a quello dei corrispondenti angoli al centro. Si posson cosí trasportare agli archi di ugual raggio le nozioni di *somma*, di *differenza*, di *archi consecutivi*, ecc.; e per tali concetti sussistono proprietà analoghe a quelle valevoli per gli angoli.

129. Una corda, che non sia un diametro, sottende due archi disuguali, uno dei quali è minore e l'altro maggiore di una semicirconferenza. *D'ora innanzi parlando di arco sotteso da una corda minore d'un diametro s' intenderà (salvo contrario avviso) di alludere a quello minore di mezza circonferenza.*

Posizioni mutue di due cerchi.

130. Teor. *Se due circonferenze complanari hanno un punto comune fuori della retta congiungente i centri, esse passano anche pel punto simmetrico di quello rispetto a tale retta e non hanno altri punti comuni.*



Sieno due circonferenze complanari, di centri O, O', che s'incontrino in un punto P esterno alla retta $a \equiv OO'$. Costruiscasi il punto Q simmetrico di P rispetto ad a. Dico che Q è comune alle due circonferenze. Invero, poiché a è l'asse del segmento PQ, le distanze di Q da O e da O' uguagliano rispettivamente i raggi OP, $O'P$; epperò Q sta tanto sulla prima quanto sulla seconda circonferenza.

Che non vi sieno altri punti comuni risulta dal § 108.

131. TEOR. *Se due circonferenze complanari passano per un punto della retta congiungente i loro centri, esse hanno la stessa tangente in questo punto, e non posseggono altri punti comuni.*

Infatti, le due circonferenze hanno la stessa tangente nel punto comune, perché la perpendicolare in questo punto alla retta congiungente i centri è tangente ad entrambe [112, Cor.]. Esse poi non hanno altri punti comuni in virtú del § 115, Cor.

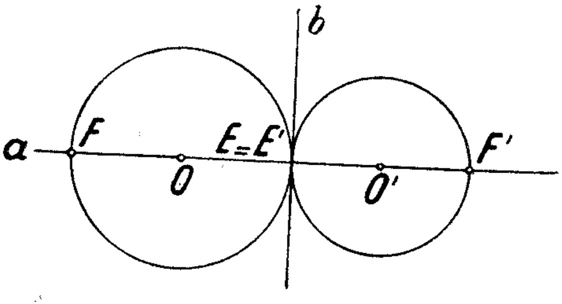
132. Allorché due circonferenze complanari hanno qualche punto comune, si può presentare soltanto uno dei due casi considerati dai precedenti teoremi. Invero: o il punto comune che si conosce è fuori della retta congiungente i centri, e allora si ricade nell'ipotesi del teor. 130; oppure è su tale congiungente e si ricade nell'ipotesi del teor. 131. Nel primo caso si dice che le due circonferenze sono ***secanti***; nel secondo che sono ***tangenti.***

133. TEOR. *Se due circonferenze complanari son secanti la distanza dei centri è minore della somma dei raggi ed è maggiore della loro differenza.*

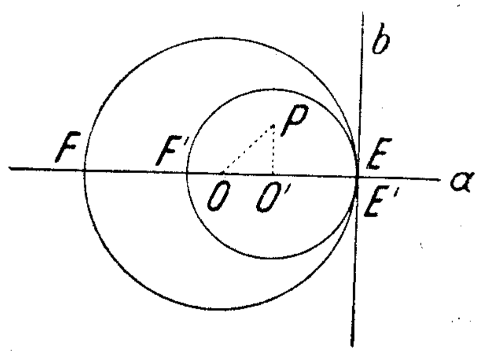
Infatti (ved. fig. precedente) dal triangolo OPO', supposto p. es. $OP \geq O'P$ si ricava [66] $OP - O'P < OO' < OP + O'P$.

134. TEOR. *Se due circonferenze complanari son tangenti la distanza dei centri è uguale alla somma o alla differenza dei raggi, secondo che esse si toccano esternamente od internamente.*

Invero, se le due circonferenze di centri O, O' si toccano nel punto $E \equiv E'$ della retta $a \equiv OO'$, o i due diametri $EF, E'F'$, situati nella retta a, son segmenti consecutivi come nella prima figura; oppure l'uno di essi, p. es. EF, contiene l'altro $E'F'$, come nella seconda figura.



Nel primo caso, la tangente b comune lascia da parti opposte i centri O, O', epperò anche i due cerchi [114]. Onde i due cerchi son mutuamente esterni, e si dice che le loro circonferenze ***si toccano esternamente.*** La distanza OO' dei centri è in tal caso uguale alla somma $OE + O'E'$ dei raggi.



Nel secondo caso, i centri O, O' si trovano dalla stessa parte della tangente comune e si dice che le circonferenze ***si toccano internamente.*** La distanza OO' dei centri è in tal caso uguale alla differenza $OE - O'E'$ dei raggi.

Osservazione. Quando le due circonferenze si toccano internamente, preso un punto P del cerchio di raggio minore $O'E'$, dal triangolo OPO' si ricava $OP \leq OO' + O'P$ (1), e siccome $O'P \leq O'E'$, si ha $OP \leq OO' + O'E'$. Ma $OO' + O'E' = OE$; dunque $OP \leq OE$. Onde P appartiene al cerchio di raggio maggiore. Si conclude cioè col

Cor. *Se le circonferenze di due cerchi si toccano internamente, il cerchio di raggio maggiore contiene tutto il cerchio di raggio minore.*

---

(1) Il segno $=$ può valere soltanto se P sta su a.

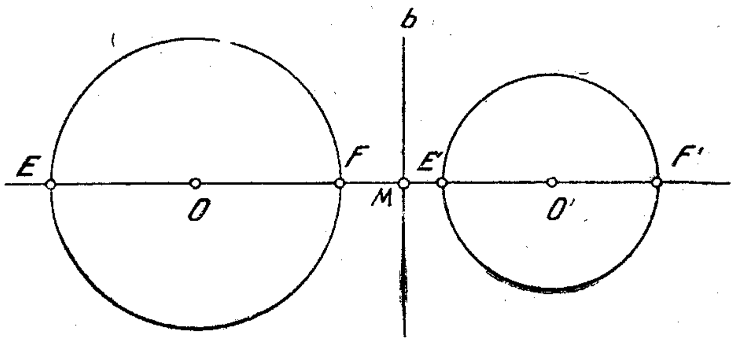
135. In base alle considerazioni intuitive del § 110 si può enunciare il

POST. ***Un arco congiungente un punto interno ad un cerchio con un punto esterno, incontra in un punto la circonferenza contorno.***

Ne segue che se due circonferenze complanari non hanno punti comuni, una di esse è tutta esterna o tutta interna all'altra. Nel primo caso le due circonferenze si dicono ***mutuamente esterne.***

136. TEOR. *Se due circonferenze son mutuamente esterne anche i rispettivi cerchi son mutuamente esterni e la distanza dei centri è maggiore della somma dei raggi.*

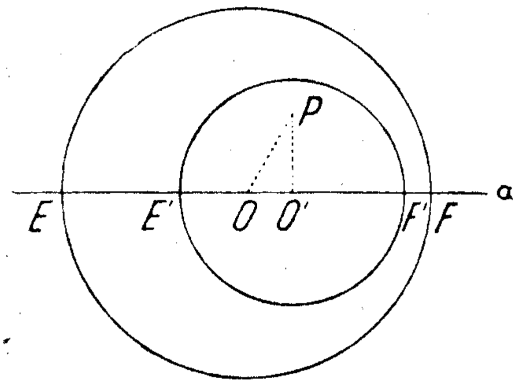
Invero, se la circonferenza di centro O' è esterna alla circonferenza di centro O, il diametro $E'F'$ della prima, situato sulla retta $a \equiv OO'$, è esterno al diametro EF della seconda, situato sulla stessa retta. Si può pertanto scegliere un punto M della a, che lasci da parti opposte i segmenti EF, $E'F'$. Allora la retta b perpendicolare ad a in M, è esterna ai due cerchi [109], e poiché O, O' son da parti opposte di b, i due cerchi sono essi pure da bande opposte di b [114] e quindi sono esterni l'uno all'altro.



Essendo $OO' = OF + FE' + E'O'$, risulta $OO' > OF + E'O'$, cioè OO' maggiore della somma dei raggi.

137. TEOR. *Se una circonferenza è interna ad un'altra, la distanza dei centri è minore della differenza dei raggi ed il cerchio della prima è tutto interno al cerchio della seconda.*

Suppongasi che la circonferenza di centro O' sia interna alla circonferenza di centro O. Allora il diametro $E'F'$ della prima sarà interno al diametro EF della seconda e quindi risulterà $O'F' < OF$. Uno dei due segmenti OE', OF', e sia OF', contiene O'; e dunque risulta $OO' + O'F' = OF' < OF$; donde $OO' < OF - O'F'$.



Preso inoltre un punto P del cerchio di raggio $O'F'$, dal triangolo OPO' ricavasi $OP \leq OO' + O'P$ (1), e perciò $OP \leq OO' + O'F' < OF$. Ne segue che P è interno rispetto alla circonferenza di raggio maggiore.

Osservazione. Se $O \equiv O'$, i due cerchi diconsi ***concentrici.***

138. Poiché ognuno dei casi considerati dai teoremi precedenti esclude gli altri, si può, riassumendo, enunciare il

Teor. *Dati due cerchi dello stesso piano, posson presentarsi soltanto i casi seguenti:*

a) La distanza dei centri è maggiore della somma dei raggi: i due cerchi son mutuamente esterni.

b) La distanza dei centri è compresa fra la somma e la differenza dei raggi: le circonferenze dei due cerchi son secanti.

c) La distanza dei centri è minore della differenza dei raggi: il cerchio di raggio minore è interno a quello di raggio maggiore.

---

(1) Il segno $=$ può valere solo se P sta sulla retta $a \equiv OO'$.

d) *La distanza dei centri è uguale alla somma dei raggi: le circonferenze dei due cerchi si toccano esternamente.*

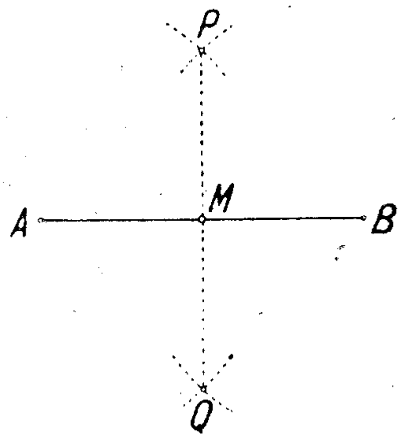
e) *La distanza dei centri è uguale alla differenza dei raggi: le circonferenze dei due cerchi si toccano internamente.*

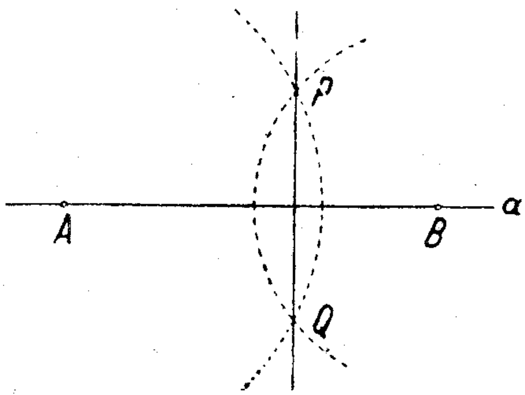
Alcune costruzioni fondamentali.

139. Esporremo qui alcune costruzioni elementari, di capitale importanza. Cominciamo dal

Prob. *Dividere un segmento per metà* [43].

Sia AB il dato segmento. Coi centri in A,B e con raggio r, assunto ad occhio maggiore della metà di AB, descrivansi due circonferenze uguali. Le due circonferenze si segano in due punti P,Q, simmetricamente disposti rispetto alla retta AB, perché la distanza dei loro centri è minore della somma [66] e maggiore della differenza (nulla) dei raggi. Il punto M dove il segmento PQ incontra la retta AB, è il punto medio richiesto. Invero, essendo $AP = BP = r$; $AQ = BQ = r$, la retta PQ è l'asse del segmento AB.

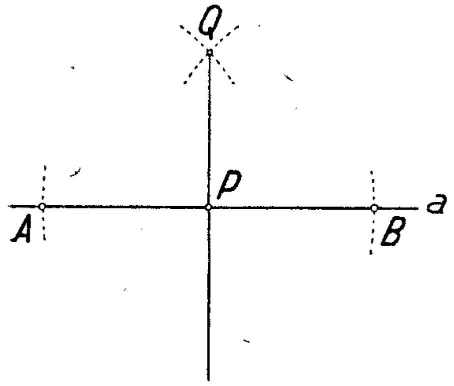




140. Probl. *Condurre per un punto la perpendicolare ad una retta.*

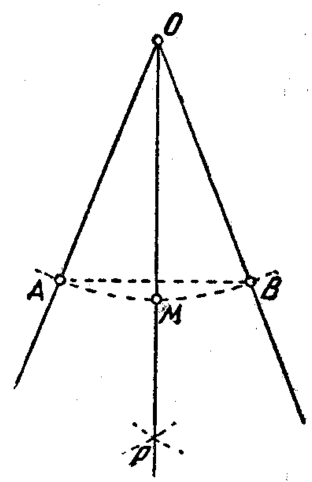
Sieno a la retta e P il punto dati. Supponiamo dapprima che P sia esterno ad a. Coi centri in due punti arbitrari A,B di a, descrivansi due circonferenze passanti per P. Esse s' incontrano nel punto Q, simmetrico di P rispetto ad a, e la retta PQ è la perpendicolare richiesta.

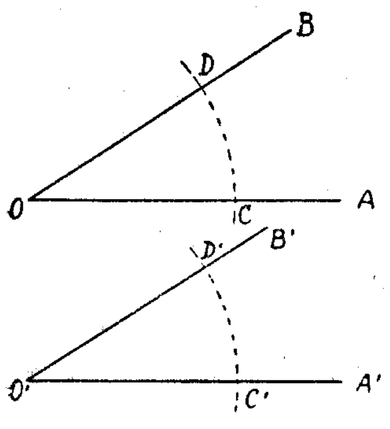
Supponiamo che P appartenga ad a. Si assumano col compasso su a due punti A,B equidistanti da P. Coi centri in A,B e raggio maggiore di AP, descrivansi due circonferenze e si consideri una, Q, delle loro intersezioni. Siccome P,Q appartengono all'asse del segmento AB, la retta PQ è la perpendicolare richiesta.



141. PROBL. *Costruire la bisettrice d'un angolo* [40].

Col centro nel vertice O dell'angolo e raggio arbitrario, descrivasi una circonferenza che incontri in A,B i lati dell'angolo. Coi centri in A,B e raggio maggiore della metà del segmento AB, descrivansi due circonferenze, e sia P una delle loro intersezioni. La retta OP è l'asse del segmento AB ed il triangolo AOB è isoscele. Onde [72] la retta OP biseca l'angolo al vertice.





142. PROBL. *Dato un angolo, costruirne uno eguale che giaccia in un assegnato semipiano ed abbia un dato lato.*

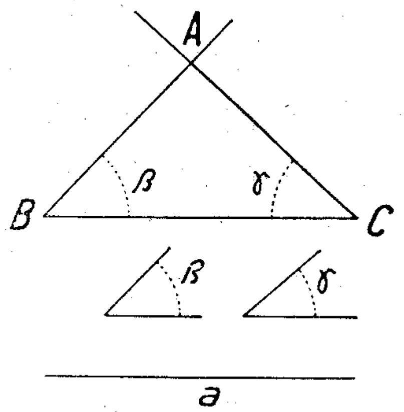
Sia $A\hat{O}B$ l'angolo dato; $O'A'$ il lato dell'angolo che si vuol costruire e $O'A'B'$ il semipiano su cui quest'angolo deve giacere. Descritte, coi centri in O,O' e sui piani considerati, due circonferenze di raggi uguali, sieno C,D le intersezioni della prima coi lati del dato angolo. Mediante il compasso, si stacchi sulla seconda circonferenza, nel senso debito, il punto D' tale che la corda $C'D'$ sia uguale alla corda CD. Congiunto O' con D' gli angoli $A\hat{O}B$, $A'\hat{O}'B'$ risultan uguali, perché sottendono corde uguali in circonferenze di raggi uguali.

143. Probl. *Costruire un triangolo dati due lati e l'angolo compreso.*

Non c' è che da riportare sui due lati dell'angolo, a partire dal vertice, due segmenti uguali ai dati e congiungere gli estremi distinti di questi segmenti.

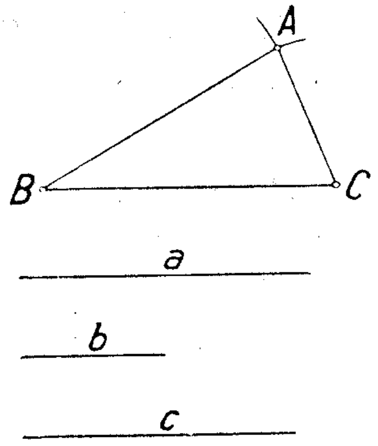
144. Probl. *Costruire un triangolo dati un lato e i due angoli adiacenti.*

Sieno a il lato e β,γ gli angoli dati. Sopra una retta arbitraria assumasi un segmento $BC = a$, e, sopra un semipiano avente per origine la retta BC, conducansi per B,C due semirette che formino col lato BC due angoli rispettivamente a β,γ uguali. Affinchè le due semirette s' incontrino occorre e basta che la somma degli angoli dati sia minore di un angolo piatto [63]. Se questa condizione è soddisfatta, il punto A d' intersezione delle due semirette e i punti B,C sono i tre vertici del triangolo richiesto.



145. Probl. *Costruire un triangolo dati i tre lati.*

Sieno a,b,c i tre lati dati. Sopra una retta arbitraria si assuma un segmento $BC = a$. In un piano per la retta



BC, coi centri in B,C e raggi rispettivamente uguali a c,b, descrivansi due circonferenze. S'esse si tagliano in un punto A, fuori di BC, il triangolo ABC soddisfa al problema. La condizione necessaria e sufficiente perché le suddette circonferenze s' incontrino fuori di B,C, cioè perché esista il triangolo domandato, è che [66, 138], se $c > b$, $b + c > a > c - b$ (1).

Angoli alla circonferenza.

146. Un angolo (si sottintende sempre convesso), che abbia il vertice sopra una circonferenza e per lati due rette secanti o una retta secante ed una tangente, dicesi un ***angolo alla circonferenza.***

Si dice che un angolo alla circonferenza *insiste* sull'arco di circonferenza ad esso interno, che ha gli estremi sui lati dell'angolo; od anche che *sottende* lo stesso arco. Infine si dice che l'angolo è *inscritto* nell'arco di circonferenza ad esso esterno che ha gli estremi sui lati.

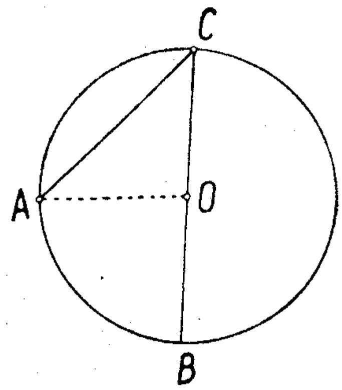
147. Teor. *Un angolo alla circonferenza è uguale alla metà dell'angolo al centro che sottende lo stesso arco.*

Per la dimostrazione distingueremo vari casi.

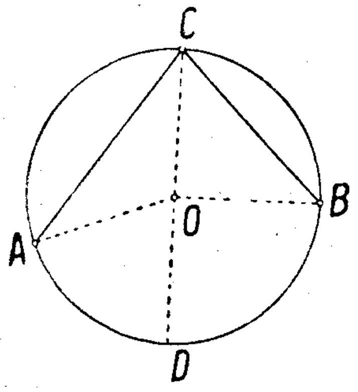
---

(1) Se per lato a si sceglie il maggiore dei tre segmenti, la condizione $a > c - b$ è senz'altro soddisfatta, onde basta soltanto che sia $a < b + c$.

1°. Un lato CB del dato angolo alla circonferenza $A\hat{C}B$, passi pel centro O. Allora l'angolo al centro $A\hat{O}B$ è esterno al triangolo AOC ed è quindi uguale alla somma degli angoli non adiacenti $\hat{A}, \hat{C}$ [61]. Ma siccome il triangolo AOC è isoscele, è $\hat{A} = \hat{C}$, epperò l'angolo $A\hat{O}B$ è doppio di $\hat{C}$.



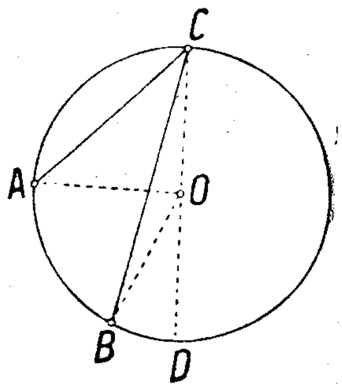
2°. Se nessuno dei lati dell'angolo passa pel centro, questo può esser interno all'angolo, come nel caso della prima delle figure qui sotto, oppure esterno, come nel caso della seconda. Nel primo caso si hanno le uguaglianze:



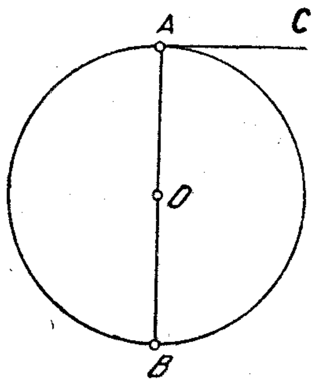
$$A\hat{C}B = A\hat{C}D + D\hat{C}B, \quad A\hat{O}B = A\hat{O}D + D\hat{O}B,$$

e nel secondo le:

$$A\hat{C}B = A\hat{C}D - B\hat{C}D, \quad A\hat{O}B = A\hat{O}D - B\hat{O}D.$$



Ma poiché, in forza della conclusione che precede, $A\hat{O}D = 2\,A\hat{C}D$, $B\hat{O}D = 2\,B\hat{C}D$, se ne deduce in ambedue i casi $A\hat{O}B = 2A\hat{C}B$.

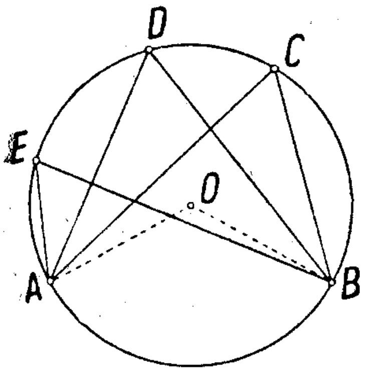


3°. Se l'angolo alla circonferenza ha un lato AC tangente, mentre l'altro AB passa pel centro, l'angolo al centro sotteso è piatto e il dato angolo è retto [112]. Onde il teorema vale anche in tal caso.

4°. Se infine uno dei lati dell'angolo è tangente e l'altro è secante, ma non passa pel centro, il teorema si dimostra come nel 2° caso, considerando gli angoli formati dai lati dell'angolo dato col diametro che passa pel vertice.

Cor. 1°. *Tutti gli angoli alla circonferenza inscritti nello stesso arco, son uguali fra loro.*

Infatti gli angoli $A\hat{C}B$, $A\hat{D}B$, $A\hat{E}B$, ... sono uguali, perché ognuno di essi è metà dell'angolo al centro $A\hat{O}B$.



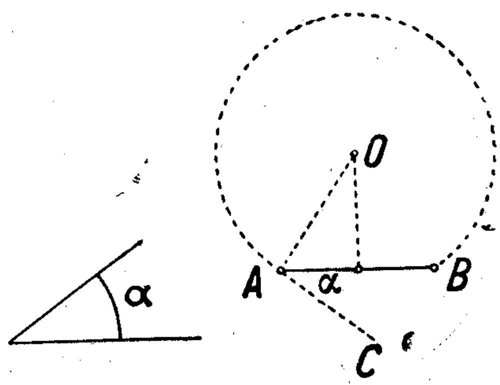
Se α è un angolo uguale ad uno degli angoli inscritti in un dato arco $\widehat{ACB}$, si dice che questo arco è *capace dell'angolo* α.

Cor. 2°. *Un angolo inscritto in una semicirconferenza è retto.*

Invero, esso è la metà dell'angolo al centro corrispondente, cioè di un angolo piatto.

148. Probl. *Dati in un piano due punti A,B ed un angolo α, costruire un arco $\widehat{AB}$ capace dell'angolo dato.*

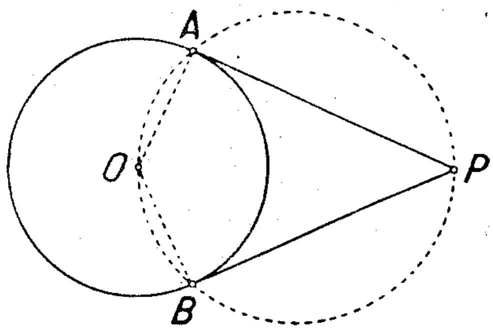
La tangente in A all'arco richiesto dovrà formare con AB un angolo uguale ad α [147, Cor. 1°], cosicché il centro dell'arco sarà situato sulla perpendicolare in A ad una semiretta AC formante con AB l'angolo $C\hat{A}B = \alpha$. Inoltre il centro stesso dovrà giacere sull'asse del segmento AB. Quest'asse e quella perpendicolare si tagliano in un punto O, perché son perpendicolari a due rette che s' incontrano [54, Cor. 5°]. L'arco ri-



chiesto è dunque quello di centro O e di raggio OA, situato dalla banda opposta di AC rispetto ad AB.

149. PROBL. *Tirare le tangenti ad una circonferenza da un punto esterno.*

Sia O il centro della circonferenza e P il punto esterno. La circonferenza di diametro OP taglia la data in due punti A,B, perchè passa per un punto O ad essa interno e per un punto P esterno. I due angoli $O\hat{A}P$, $O\hat{B}P$ sono retti [147, Cor. 2°], epperò le rette AP,BP, perpendicolari ai raggi OA,OB nei loro estremi, son tangenti alla data circonferenza.



Poligoni regolari [1].

150. Un poligono avente i vertici sopra una circonferenza si dice *iscritto* in questa. E la circonferenza dicesi *circoscritta* al poligono. Se invece il poligono ha i lati tangenti alla circonferenza, esso dicesi *circoscritto* a questa, e la circonferenza si dice *inscritta* nel poligono.

DEF. *Un poligono chiamasi* **regolare** *se ha i lati e gli angoli uguali.*

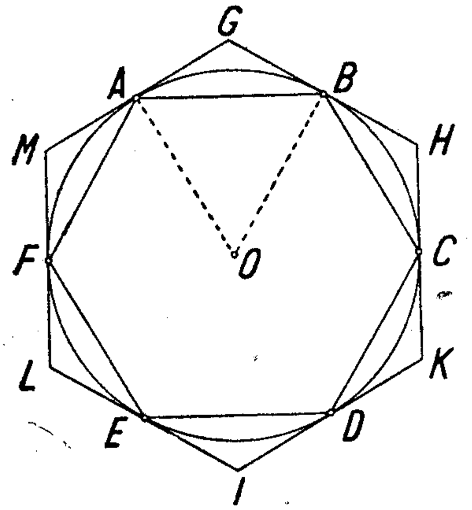
Un triangolo equilatero ed un quadrato offrono esempi di poligoni regolari.

---

[1] Per gli allievi del Liceo scientifico. Per quelli del Liceo classico basteranno le definizioni, gli enunciati dei teoremi 151, 152 e le pure e semplici costruzioni di un quadrato, di un esagono regolare e di un triangolo equilatero.

151. TEOR. *Un poligono equilatero inscritto in una circonferenza ed il poligono circoscritto, i cui lati toccan la circonferenza nei vertici del primo, sono regolari.*

Sia $ABCDEF$ il poligono dato, inscritto nella circonferenza di centro O. Per ipotesi i lati AB, BC, ..., FA del poligono sono fra loro uguali. Risultano perciò uguali gli archi sottesi $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}$, ..., $\overset{\frown}{FA}$ [124].



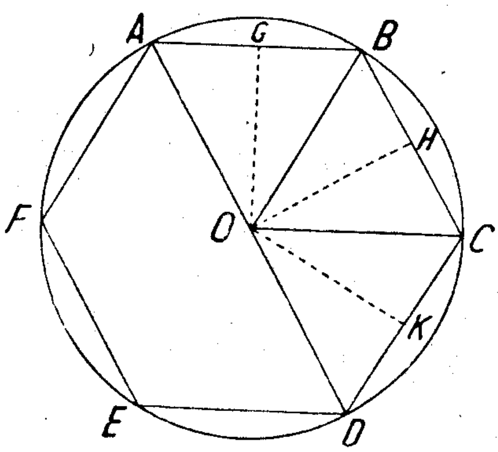
Conducansi le tangenti alla circonferenza nei vertici A, B, ..., F. Ciascuna di queste tangenti incontra la tangente nel vertice successivo. P. es., le tangenti in A, B s' incontrano, perchè son perpendicolari alle rette OA, OB che s'incontrano in O [54, Cor. 5°]. Pertanto le tangenti dànno luogo ad un poligono $GHKILM$, di cui esse sono i lati.

Proviamo anzitutto che il primo poligono è equiangolo. Invero, gli angoli del poligono che hanno i vertici in A, B sono uguali, perchè inscritti in archi uguali ($\overset{\frown}{FAB} = \overset{\frown}{FA} + \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{ABC}$). Per la stessa ragione son uguali due angoli qualunque del poligono. Dunque il poligono dato è equilatero ed equiangolo, epperò è regolare.

Dimostriamo che il poligono circoscritto è esso pure equilatero ed equiangolo. Infatti, i triangoli GAB, HBC, KCD,.... sono isosceli ed uguali, perchè hanno basi uguali e gli angoli alle basi sono pure uguali, giacchè sottendono archi uguali. Risultano perciò uguali gli angoli in G, H, K,.... e i lati GA, GB, BH, HC, CK, ... Onde $GH = HK = KI = ...$, in quanto questi segmenti son somme di coppie di segmenti uguali.

152. Teor. *Ogni poligono regolare è inscrittibile e circoscrittibile (rispetto ad una circonferenza).*

Sia $ABCDEF$ il dato poligono regolare. Poiché ciascuno degli angoli del poligono è minore d'un angolo piatto, la metà d'un angolo del poligono è minore d'un angolo retto. Ne segue che le bisettrici degli angoli consecutivi A,B del poligono s' incontrano in un punto O [63]; e il triangolo AOB risulta isoscele, avendo gli angoli alla base uguali. Congiungasi O con C. I due triangoli ABO,CBO son uguali, perché hanno $AB = CB$, il lato OB comune ed uguali gli angoli $A\hat{B}O$, $C\hat{B}O$. Risulta pertanto $OA = OC$. Ma $OA = OB$: dunque i punti A,B,C son equidistanti da O. Di piú, essendo isoscele anche il triangolo OBC, è $O\hat{B}C = O\hat{C}B$; e quindi CO biseca l'angolo $\hat{C}$ del poligono. Congiunto O con D, il confronto dei due triangoli BCO, DCO conduce similmente alla conclusione che $OD = OB$ e che OD biseca l'angolo $\hat{D}$. Cosí continuando si dimostra che tutti i vertici del poligono sono equidistanti da O; epperò il poligono può iscriversi nella circonferenza di centro O e di raggio OA.



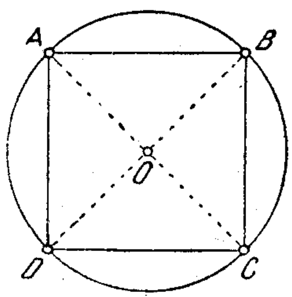
Infine, le altezze OG,OH,OK,.... dei triangoli isosceli e uguali AOB,BOC,COD,.... sono uguali tra loro, e quindi il poligono è circoscritto alla circonferenza di centro O e di raggio OG.

Def. Il centro delle circonferenze iscritta e circoscritta ad un poligono regolare dicesi ***centro del poligono.*** Il raggio della circonferenza circoscritta si chiama ***raggio del poligono,*** quello della inscritta ***apotema.***

153. Dai teoremi precedenti segue che i problemi di costruire un poligono regolare di n lati e di dividere una circonferenza in n parti uguali si riducono l'uno all'altro.

Ora la *divisione di una circonferenza in un numero n di parti uguali, che sia una potenza a esponente intero di* 2, si esegue facilmente colla riga e col compasso.

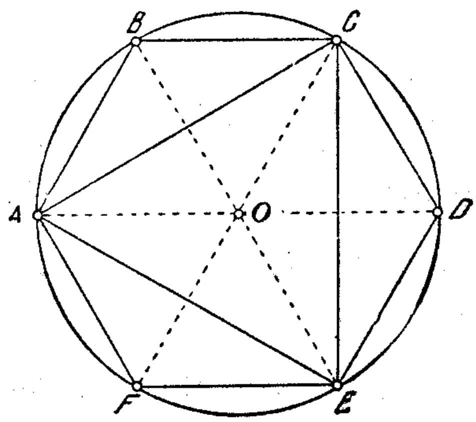
Invero, un diametro divide la circonferenza in 2 semicirconferenze; un diametro perpendicolare al precedente divide ciascuna delle semicirconferenze in due archi uguali, ognuno dei quali è ¼ della intera circonferenza; la bisettrice dell'angolo al centro sotteso da un tale arco, lo divide in due parti ognuna delle quali è 1/8 della circonferenza; e, cosí proseguendo, si divide successivamente la circonferenza in 2,4,8,16,32,64,.... archi uguali.



In particolare, la *costruzione di un quadrato $ABCD$ di dato raggio* si ottiene tirando due diametri perpendicolari AC, BD di un cerchio avente quel raggio e congiungendo gli estremi successivi dei due diametri.

154. TEOR. *Il lato di un esagono regolare è uguale al raggio.*

Sia $ABCDEF$ il dato esagono regolare ed O il suo centro. Nel triangolo isoscele AOB ($AO = OB$) l'angolo $A\hat{O}B$ è 1/6 dell'angolo giro, cioè 1/3 di un angolo piatto. Poiché la somma degli angoli di AOB è uguale ad un angolo piatto, la somma degli angoli $O\hat{A}B, O\hat{B}A$ uguaglia 2/3 di angolo piatto; e siccome i due angoli sono uguali, ciascuno d'essi uguaglia 1/3 di angolo piatto; ed



il triangolo AOB risulta equiangolo e quindi equilatero. Si conclude, come volevasi, che $OA = OB = AB$.

Viceversa *in un cerchio una corda uguale al raggio sottende un arco uguale a* 1/6 *di circonferenza*, perché il triangolo AOB risulta equilatero e quindi l'angolo $A\hat{O}B$ è uguale a 1/3 di un angolo piatto, cioè ad 1/6 dell'angolo giro.

Per *costruire un esagono di dato centro O e di raggio dato OA* basta dunque riportare successivamente sulla circonferenza, mediante il compasso, a partire p. es. da A, le corde AB, BC, CD, EF, FA uguali al raggio del cerchio.

Cor. Gli archi $\overset{\frown}{ABC}$, $\overset{\frown}{CDE}$, $\overset{\frown}{EFA}$ son ciascuno uguale a 1/3 della circonferenza, onde il triangolo ACE è equilatero. Resta cosí risoluto il problema di *costruire un triangolo equilatero di centro e di raggio dati.*

Se di un triangolo equilatero si dà invece il lato, la costruzione si ottiene particolarizzando quella esposta nel § 145.

Osservazione. Dividendo un arco uguale ad 1/6 di circonferenza in due parti uguali, mediante la bisettrice dell'angolo al centro sotteso, si ottiene un arco uguale ad 1/12 di circonferenza; e cosí di seguito. Si posson dunque costruire colla riga e col compasso i poligoni regolari di 3,6,12,24,48,.... lati.

CENNI STORICI

155. *L'origine della nozione di circonferenza risale alla più remota antichità. Fra i ricordi storici più lontani, i meno incerti si riferiscono a* Talete, *al quale si attribuisce il teorema che un angolo inscritto in una semicirconferenza è retto, e a* Pitagora, *che studiò il cerchio come la figura più bella del piano.* Dante *nel Paradiso allude al teorema dell'angolo retto inscritto in una semicirconferenza coi versi :*

O se del mezzo cerchio far si puote
Triangol sí, ch'un retto non avesse.

La definizione esplicita di circonferenza si fa risalire a Platone (429-348 *a. Cr.*). *Le principali proprietà del cerchio eran già note a* Ippocrate di Chio (V *sec. av. Cr.*). *Le posizioni mutue di una retta rispetto ad un cerchio o di due cerchi fra loro trovansi negli elementi euclidei, ma in modo razionalmente imperfetto. Le costruzioni della perpendicolare da un punto a una retta e di un angolo uguale ad uno dato sono da* Proclo *attribuite ad* Oinopide di Chio (*circa* 500 *a. Cr.*), *che le avrebbe indicate per scopi astronomici. Una costruzione delle tangenti ad una circonferenza da un punto esterno diversa da quella del* § 149 *è di* Euclide. *Quella del* § 149 *si trova nei geometri tedeschi* Voegelin (1549) *e* Fink (1583). *I poligoni regolari, in parte noti come elementi decorativi alle civiltà preelleniche, furon studiati specialmente dai pitagorici, che ne diedero le prime costruzioni con riga e compasso.*

Non tutti i poligoni regolari son costruibili colla riga e col compasso. Una delimitazione dei valori di n cui corrispondon poligoni di n lati costruibili con riga e compasso fu ottenuta soltanto nel 1801 *dal grande matematico tedesco* Gauss, *mediante elevati concetti della matematica moderna. P. es. i poligoni di* 7, 9, 11 *lati non son costruibili con riga e compasso. Con questi strumenti se ne ottengon costruzioni approssimate, due delle quali, pei poligoni di* 9 *e* 11 *lati, son dovute ad* Ipparco di Nicea (II *secolo a. Cr.*) *e una, relativa all'ettagono, ad* Erone.

La costruzione esatta dei poligoni di 7 *e di* 9 *lati si riconduce ai cosidetti problemi di* 3° *grado, che esorbitano dall'ambito della geometria elementare. Da questo punto di vista le costruzioni stesse furon considerate dagli arabi* (*intorno al* 1000 *della nostra era*) *e dai grandi algebristi italiani del Rinascimento* (Pacioli, Bombelli, Ferrari, Tartaglia, Cardano) *creatori dell'algebra, come oggi la concepiamo.*

ESERCIZI

74. Luogo dei centri delle circonferenze di dato raggio passanti per un punto.

75. Luogo dei centri delle circonferenze passanti per due punti del piano o tangenti in un punto dato ad una retta data.

76. Luogo dei punti medi delle corde d'un cerchio parallele ad una data retta.

77. Condurre per un punto interno ad un cerchio una corda che sia dimezzata dal punto.

78. La corda di cui all' Es. precedente è la minima fra le corde passanti pel punto. (Si tenga conto del teor. **117**).

79. Due corde che si dimezzino scambievolmente son diametri.

80. Luogo dei centri delle circonferenze tangenti a due rette date, che si incontrino o che sieno parallele.

81. Il luogo dei punti medi delle corde di un cerchio uguali ad una data, è una circonferenza concentrica, che è toccata da tutte quelle corde.

82. Luogo dei punti da cui escono tangenti ad una circonferenza uguali ad un dato segmento.

83. Luogo dei centri dei cerchi, di dato raggio, che toccano internamente od esternamente un dato.

84. I segmenti intercetti da due cerchi concentrici sopra una secante comune son uguali.

85. Trovare un punto equidistante da due dati punti A,B ed avente una data distanza da un terzo punto C. Questo problema risolvesi col *metodo dei luoghi geometrici*, che si applica in molti casi. Si cercano cioè i luoghi dei punti che soddisfano separatamente alle condizioni del problema e si determina l' intersezione di questi luoghi. Nel problema proposto il luogo dei punti equidistanti da A,B è l'asse del segmento AB; il luogo dei punti aventi una data distanza r da C, è la circonferenza di centro C e di raggio r. Il problema può avere due soluzioni, una o non averne alcuna, a seconda che quell'asse è secante, tangente o esterno rispetto a questa circonferenza.

86. Fra i segmenti che, in un piano, vanno da un punto ad una circonferenza, il minimo, detto *distanza dal punto alla circonferenza*, è quello il cui prolungamento passa pel centro; il massimo quello che contiene il centro.

87. Le rette che, in un piano, hanno un'assegnata distanza da un punto dato, toccano un cerchio.

88. Tirare da un punto una retta avente un'assegnata distanza da un altro punto.

89. Il punto di concorso delle bisettrici degli angoli interni di un triangolo [Es. 30] è il centro di un cerchio tangente ai tre lati, il quale chiamasi *cerchio inscritto* nel triangolo.

90. Il punto di concorso della bisettrice di un angolo interno e delle rette bisettrici degli angoli esterni adiacenti agli altri due angoli del triangolo [Es. 31], è il centro di un cerchio tangente ad un lato e ai prolungamenti degli altri due, il quale chiamasi *cerchio exinscritto* al triangolo. Vi sono tre cerchi exinscritti.

91. Gli angoli opposti di un quadrangolo (convesso) inscritto in una circonferenza son supplementari ; e viceversa.

92. Costruire un triangolo dati un lato, un angolo adiacente e l'angolo opposto. (Si tenga conto del § 148).

93. Se un quadrangolo è circoscritto ad una circonferenza la somma di due lati opposti uguaglia la somma degli altri due ; e viceversa.

94. Un poligono, concavo o convesso, è una figura finita. (Preso un punto O interno al poligono, le distanze di O dai punti del poligono non superano la massima fra le distanze di O dai vertici [65, Cor.], epperò il poligono è contenuto nel cerchio di centro O, che ha per raggio quella distanza massima).

95. Gli archi di una circonferenza compresi fra due corde parallele sono uguali.

96. Un trapezio inscritto in un cerchio è *isoscele*, cioè ha i lati non paralleli uguali (ed uguali gli angoli adiacenti ad una qualunque delle basi).

97. Dividere un angolo retto in tre parti uguali.

98. Un parallelogrammo inscrittibile è un rettangolo.

99. Un parallelogrammo circoscrittibile è un rombo. (Si tenga presente l' Es. 93).

100. Un rettangolo circoscrittibile è un quadrato.

101. Date nel piano due rette parallele ed un punto, condurre per questo una retta su cui le due date determinino un segmento di data lunghezza. Quante soluzioni ha il problema ?

102. Il segmento intercettato sopra una tangente da due tangenti parallele ad un cerchio è visto dal centro sotto angolo retto.

103. Il segmento intercettato sopra una tangente variabile da due tangenti fisse di un cerchio è visto dal centro sotto angolo costante.

104. Il luogo del punto medio di un segmento che si muova in guisa che i suoi estremi scorrano su due rette perpendicolari, è una circonferenza.

105. Dati in un piano tre punti non allineati A,B,C, trovare un punto O del piano tale che gli angoli $A\hat{O}B, B\hat{O}C$ sieno uguali a due angoli dati (*problema di Snellius-Pothenot*). (Si risolve col metodo dei luoghi geometrici, ricordando il § 148).

CAPITOLO SESTO

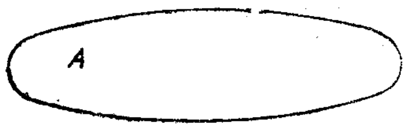
EQUIVALENZA DELLE SUPERFICIE PIANE

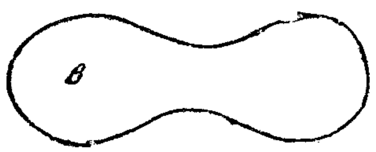
Definizioni e proprietà fondamentali.

156. Le proprietà delle figure piane, che abbiamo studiato finora, riferisconsi quasi tutte al modo come le figure considerate si dividono mutuamente in parti (*proprietà di connessione*) o alla *forma* delle figure, intendendosi che due figure eguali abbiano la *stessa forma*.

Oltre alle proprietà di connessione e di forma ve ne sono altre che riferisconsi alla *estensione*. Esse verranno studiate in questo Capitolo.

157. Sieno due superficie [1], come le A,B, qui vicino disegnate, e si vogliano tinger con un medesimo colore. Qualora per tinger l'una occorra la stessa quantità di colore che per tingere l'altra, si dirà che le due superficie hanno *eguale estensione*.





Se le stesse superficie A,B fossero due pezzi tagliati da una medesima lamina metallica, omogenea e di spessore uniforme, pesandole si troverebbe il medesimo peso.

Ancora: Se con pallini da fucile si volesse coprire completamente sia la A che la B si dovrebbe impiegare il medesimo numero di pallini.

---

[1] Ci riferiamo alla nozione intuitiva di *superficie piana* (finita) come insieme dei punti di un pezzo di piano.

158. DEF. *Due superficie aventi eguali estensioni, si dicono equivalenti*, e si scrive:

$$\overline{A} = \overline{B},$$

leggendo «l'estensione di A è eguale all'estensione di B» ovvero «A è equivalente a B». Il segno $=$ si riferisce dunque, non alle superficie A, B, considerate in estensione e forma, ma soltanto alle loro estensioni.

Sono d'immediata evidenza i postulati seguenti:

a) POST. *Ogni superficie piana è equivalente a se stessa:* cioè $\overline{A} = \overline{A}$ (*proprietà riflessiva* dell'equivalenza).

b) POST. *Se una superficie piana è equivalente ad un'altra, questa è equivalente alla prima:* cioè, se $\overline{A} = \overline{B}$ è altresì $\overline{B} = \overline{A}$ (*proprietà simmetrica* dell'equivalenza).

Sussiste inoltre il postulato:

c) POST. *Due superficie equivalenti ad una terza lo sono tra loro;* cioè se $\overline{A} = \overline{B}$ e $\overline{B} = \overline{C}$, allora $A = C$ (*proprietà transitiva* dell'equivalenza).

E difatti, se le A, C posson esser coperte con quantità di vernice o di pallini eguali a quelle con cui può ricoprirsi B, le quantità di vernice o di pallini che ricoprono A, C, confrontate, risultano eguali.

Se due superficie piane sono eguali (sovrapponibili), per coprirle ci vuol la stessa quantità di vernice o di pallini. Vale dunque anche questo altro postulato:

d) POST. *Due superficie piane eguali sono equivalenti.*

159. Abbiansi ora due superficie piane A, B, p. es. due poligoni (convessi o concavi), le quali non abbiano punti interni comuni, ma possano avere in comune punti dei loro contorni. L'insieme delle due superficie si chiama la loro *somma*, e s'indica con $A + B$. Se trattasi di poligoni, quest'insieme si chiama altresì la *figura poligonale*, somma dei due poligoni.

Si può similmente parlare di somma di un numero qualunque di superficie piane, non aventi a due a due punti interni comuni, e di figura poligonale somma di più poligoni.

La somma di più superficie piane gode delle proprietà commutativa ed associativa, perchè essa rimane identica a se medesima, se si scambia l'ordine degli addendi o se questi si raggruppan comunque in somme parziali. E restare identica a se medesima, vuol anche dire, a norma del postulato *d*), restare equivalente a se stessa.

Sieno A', B' due altre superficie piane prive di punti interni comuni, ed esse sieno rispettivamente equivalenti alle A, B. Allora la quantità di vernice o di pallini, che ci vuole a ricoprire la somma $A + B$, eguaglia la quantità di vernice o di pallini, che ci vuole a ricoprire la somma $A' + B'$. Si può quindi enunciare il postulato:

e) POST. *Somme di superficie equivalenti sono equivalenti.*

In particolare:

Somme di superficie eguali sono equivalenti.

160. DEF. *Due figure poligonali che sieno somme di poligoni a due a due eguali, chiamansi equicomposte.*

Dai postulati *d*), *e*) segue:

TEOR. *Due figure poligonali equicomposte sono equivalenti.*

È chiaro che *due figure poligonali eguali possono* (*in infiniti modi*) *considerarsi come equicomposte*, perchè il movimento che sovrappone l'una all'altra, muta i poligoni, che compongono la prima figura, in poligoni ordinatamente eguali, che compongono la seconda.

Poichè ogni poligono può decomporsi in triangoli, potremo enunciare il:

158. DEF. *Due superficie aventi eguali estensioni, si dicono equivalenti*, e si scrive:

$$\overline{A} = \overline{B},$$

leggendo «l'estensione di A è eguale all'estensione di B» ovvero «A è equivalente a B». Il segno $=$ si riferisce dunque, non alle superficie A, B, considerate in estensione e forma, ma soltanto alle loro estensioni.

Sono d'immediata evidenza i postulati seguenti:

a) POST. *Ogni superficie piana è equivalente a se stessa:* cioè $\overline{A} = \overline{A}$ (*proprietà riflessiva* dell'equivalenza).

b) POST. *Se una superficie piana è equivalente ad un'altra, questa è equivalente alla prima:* cioè, se $\overline{A} = \overline{B}$ è altresì $\overline{B} = \overline{A}$ (*proprietà simmetrica* dell'equivalenza).

Sussiste inoltre il postulato:

c) POST. *Due superficie equivalenti ad una terza lo sono tra loro;* cioè se $\overline{A} = \overline{B}$ e $\overline{B} = \overline{C}$, allora $A = C$ (*proprietà transitiva* dell'equivalenza).

E difatti, se le A, C posson esser coperte con quantità di vernice o di pallini eguali a quelle con cui può ricoprirsi B, le quantità di vernice o di pallini che ricoprono A, C, confrontate, risultano eguali.

Se due superficie piane sono eguali (sovrapponibili), per coprirle ci vuol la stessa quantità di vernice o di pallini. Vale dunque anche questo altro postulato:

d) POST. *Due superficie piane eguali sono equivalenti.*

159. Abbiansi ora due superficie piane A, B, p. es. due poligoni (convessi o concavi), le quali non abbiano punti interni comuni, ma possano avere in comune punti dei loro contorni. L'insieme delle due superficie si chiama la loro *somma*, e s'indica con $A + B$. Se trattasi di poligoni, quest'insieme si chiama altresì la *figura poligonale*, somma dei due poligoni.

Si può similmente parlare di somma di un numero qualunque di superficie piane, non aventi a due a due punti interni comuni, e di figura poligonale somma di più poligoni.

La somma di più superficie piane gode delle proprietà commutativa ed associativa, perchè essa rimane identica a se medesima, se si scambia l'ordine degli addendi o se questi si raggruppan comunque in somme parziali. E restare identica a se medesima, vuol anche dire, a norma del postulato *d*), restare equivalente a se stessa.

Sieno A',B' due altre superficie piane prive di punti interni comuni, ed esse sieno rispettivamente equivalenti alle A,B. Allora la quantità di vernice o di pallini, che ci vuole a ricoprire la somma $A + B$, eguaglia la quantità di vernice o di pallini, che ci vuole a ricoprire la somma $A' + B'$. Si può quindi enunciare il postulato:

e) Post. *Somme di superficie equivalenti sono equivalenti.*

In particolare:

Somme di superficie eguali sono equivalenti.

160. Def. *Due figure poligonali che sieno somme di poligoni a due a due eguali, chiamansi equicomposte.*

Dai postulati *d*), *e*) segue:

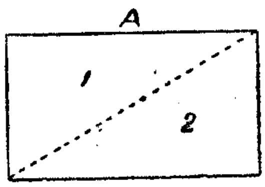
Teor. *Due figure poligonali equicomposte sono equivalenti.*

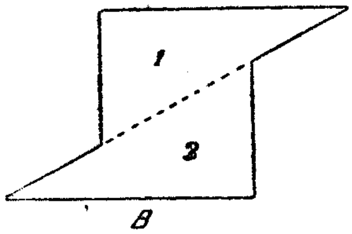
È chiaro che *due figure poligonali eguali possono* (*in infiniti modi*) *considerarsi come equicomposte*, perchè il movimento che sovrappone l'una all'altra, muta i poligoni, che compongono la prima figura, in poligoni ordinatamente eguali, che compongono la seconda.

Poichè ogni poligono può decomporsi in triangoli, potremo enunciare il:

TEOR. *Due figure poligonali equicomposte si posson decomporre in triangoli ordinatamente eguali.*

Facciamo un esempio di figure equicomposte. Prendiamo un rettangolo A e dividiamolo in due triangoli rettangoli (eguali) 1, 2, con una diagonale. Poi facciamo scorrere l'ipitenusa del triangolo 1 sull'ipotenusa del triangolo 2, in modo che le due ipotenuse continuino ad avere un segmento comune. La figura A è la somma dei due triangoli nella primitiva posizione, la figura B la somma dei due triangoli (o meglio di due triangoli ad essi eguali) nella nuova posizione. Le figure A,B sono equicomposte, epperò equivalenti.





161. Se A,B son due superficie e B è equivalente ad una parte di A, si dice che l'estensione di A è *maggiore* dell'estensione di B, ovvero che A è *prevalente* a B; od anche che l'estensione di B è *minore* dell'estensione di A, ovvero che B è *suvvalente* ad A; e si scrive:

$$\overline{A} > \overline{B}, \text{ ovvero: } \overline{B} < \overline{A}.$$

Date due superficie qualunque A,B, la quantità di vernice o di pallini, che ci vuole a coprire A, è eguale, maggiore o minore rispetto alla quantità di vernice o di pallini, che ci vuole a coprire B; ed uno di questi casi esclude gli altri due. Epperò si può enunciare il postulato:

f) POST. *Date due superficie piane A,B fra le loro estensioni passa sempre una ed una sola delle relazioni:*

$$\overline{A} = \overline{B}\,,\ \overline{A} > \overline{B}\,,\ \overline{A} < \overline{B}.$$

162. Sia una superficie A, decomposta in due parti B,C, non aventi punti interni comuni.

Si dice che C è la *differenza* delle due superficie A,B e si rappresenta col simbolo $A - B$.

Sia A' un'altra superficie, decomposta in due parti B',C', non aventi punti interni comuni, e le superficie A',B' sieno rispettivamente equivalenti ad A,B:

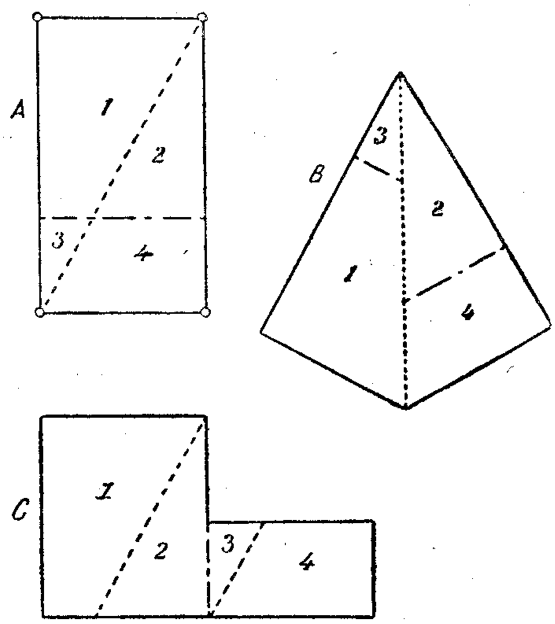
$$\overline{A} = \overline{A'}\,,\, \overline{B} = \overline{B'}.$$

Allora la quantità di vernice o di pallini occorrente a ricoprire C, è la differenza delle quantità di vernice o di pallini occorrenti a ricoprire le A,B. E similmente per ricoprire C' ci vuole una quantità di vernice o di pallini eguale alla differenza tra le quantità occorrenti per coprire le A',B'.

Ma le quantità occorrenti a ricoprire le A,B son rispettivamente eguali a quelle che occorrono per coprire A',B'; onde C,C' son ricoperte dalle stesse quantità di vernice o di pallini, e sono perciò equivalenti. Dunque:

POST. *Differenze di superficie equivalenti sono equivalenti.*

Questa proposizione va considerata come un postulato, perchè è stata giustificata soltanto in base a considerazioni intuitive. Ma l'alunno volenteroso potrà *dedurla*, per esercizio, dai postulati precedenti.



163. TEOR. *Due poligoni equicomposti rispetto ad un terzo, son equicomposti fra loro.*

Sieno A,B,C i tre poligoni, tali che A,B sieno equicomposti mediante le parti poligonali eguali (nel caso della figura, triangoli), separate dalle linee punteggiate; ed A,C sieno equicomposti mediante parti (quadrangolari) eguali, separate da linee a tratti e punti. Dico che anche B, C si posson decomporre in parti poligonali ordinatamente eguali.

Consideriamo su A tanto la prima che la seconda decomposizione. Queste due, sovrapponendosi, dànno luogo ad una terza decomposizione, in parti più piccole, del poligono A. Così, nel caso speciale cui riferiscesi la figura, il segmento punteggiato, che separa su A le parti della prima decomposizione, attraversa ciascuna delle parti della seconda e la fraziona in pezzi più piccoli 1, 2; 3, 4, i quali, diversamente accoppiati (1, 3 e 2, 4), forniscono le due parti della prima decomposizione di A.

Ora le due parti della prima decomposizione si ritrovano, diversamente disposte, in B; e quindi in B si ritrovan pure i quattro pezzi 1, 3; 2, 4. Similmente le due parti della seconda decomposizione, si ritrovan, diversamente disposte, in C; e quindi in C ritrovansi altresì i quattro pezzi 1, 2; 3, 4. In conclusione B, C vengon decomposti nello stesso numero di parti poligonali 1, 2, 3, 4, ordinatamente eguali; che è quanto volevasi provare.

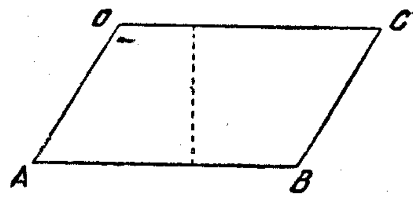
Parallelogrammi e triangoli equivalenti.

164. Prima di occuparci del confronto delle estensioni di parallelogrammi e di triangoli, occorre un nuovo richiamo all'intuizione, espresso dal seguente *postulato di* ARCHIMEDE (dal nome del grande matematico siracusano, vissuto circa due secoli a. C., che ne fece uso sistematico):

POST. *Dati due segmenti diseguali, esiste sempre un multiplo conveniente del minore, che supera l'altro.*

OSSERVAZIONE. Un postulato analogo vale altresì per gli angoli e per gli archi, cioè:

Dati due angoli diseguali o due archi diseguali, di raggi eguali, esiste un multiplo conveniente del minore, che supera il maggiore (¹).



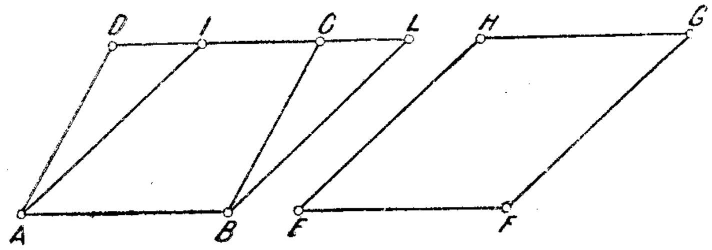
165. Dato un parallelogrammo *ABCD*, un suo lato qualunque, p. es. *AB*, può assumersi come *base*: allora la larghezza della striscia intercetta fra quel lato ed il suo opposto chiamasi *altezza* del parallelogrammo.

Teor. *Due parallelogrammi aventi basi ed altezze eguali, sono equicomposti.*

Sieno i parallelogrammi *ABCD*, *EFGH* aventi eguali le basi *AB*,*EF* e le altezze relative.

Costruiscasi su *AB* come base, e dalla parte del primo parallelogrammo, un parallelogrammo *ABLI* eguale ad *EFGH*. Basta all'uopo costruire $I\widehat{A}B = H\widehat{E}F$ ed $AI = EH$ [90]. Il lato opposto alla base *AB*, nel parallelogrammo *ABLI*, dovrà esser situato sulla retta che contiene *DC*, a causa della uguaglianza dell'altezza dei due dati parallelogrammi.

Ciò premesso, si debbon distinguere tre casi:



1°. I due segmenti *DC*,*IL* si separano. Allora il parallelogrammo *ABCD* si scinde nella somma del trapezio *ABCI* e del triangolo *ADI*; mentre il parallelogrammo *ABLI* si scinde nella somma del trapezio *ABCI* e del triangolo *BCL*. Se proveremo l'egua-

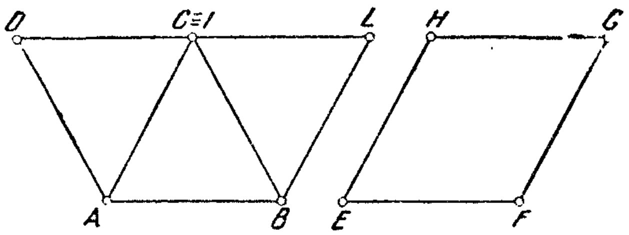
(¹) La proposizione di Archimede relativa agli angoli si potrebbe dedurre da quella relativa ai segmenti e quella relativa agli archi dalla proposizione concernente gli angoli.

glianza dei triangoli *ADI*, *BCL*, ne risulterà che i due parallelogrammi nominati, come somme di poligoni ordinatamente eguali, sono equicomposti.

E poichè, alla sua volta *ABLI* è eguale ad *EFGH*, risulteranno equicomposti anche i due parallelogrammi dati.

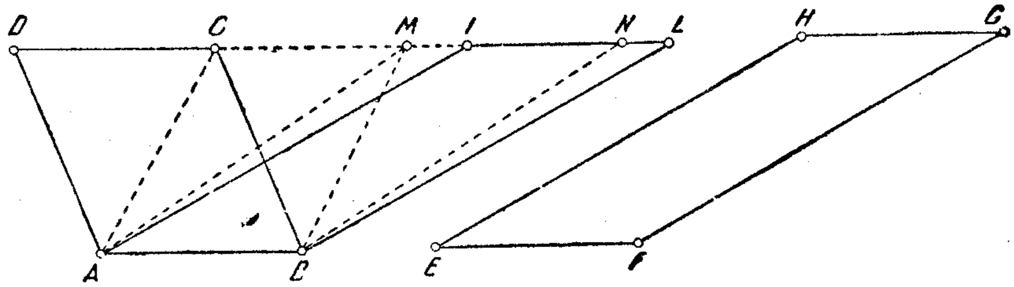
Ora i due triangoli *ADI*, *BCL* sono eguali, perchè hanno due lati e l'angolo compreso eguali. Infatti, essendo $DC = AB$, $IL = AB$ [87], risulta $DC = IL$ e quindi $DI = DC - IC = IL - IC = CL$; sicchè i lati *DI*, *CL* sono eguali. Inoltre $AD = BC$ [87] e $A\widehat{D}I = B\widehat{C}L$ trattandosi di angoli corrispondenti rispetto alle parallele *AD*,*BC* tagliate dalla *DC*.

2°. I due segmenti *DC*, *IL* hanno un estremo comune $C = I$. Allora il parallelogrammo *ABCD* si decompone nella somma dei due triangoli eguali *ADC*, *ABC* [88] e il parallelogrammo *ABLI* nella somma dei due triangoli eguali *ABC*, *BCL*.



Onde i due parallelogrammi sono equicomposti, e così i due parallelogrammi dati.

3°. I due segmenti *DC*, *IL*, situati sulla medesima parallela ad *AB*, sono esterni l'uno all'altro. Si può allora determinare un multiplo del segmento *DC*, che superi il



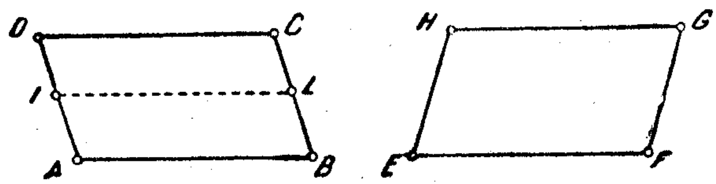
segmento *DL* [164]. Considereremo anzi il più piccolo multiplo di *DC* maggiore di *DL*: sia p. es. $4DC$. Allora $3DC = DN$ sarà minore di *DL*, ma il punto *N* cadrà entro IL; cosicchè, indicato con M il punto di divisione precedente ad N, i due segmenti MN, IL si separeranno.

Ciò posto, in virtù del 2° caso, saranno equicomposti i parallelogrammi $ABCD$, $ABMC$ ed i parallelogrammi $ABMC$,$ABNM$; ed, in virtù del 1° caso, saranno equicomposti i parallelogrammi $ABNM$,$ABLI$ (1). Onde [163] risulteranno equicomposti $ABCD$ ed $ABLI$, epperò anche $ABCD$ ed $EFGH$.

166. Teor. *Se due parallelogrammi equivalenti hanno basi eguali, essi hanno eguali anche le altezze.*

Sieno i due parallelogrammi equivalenti $ABCD$,$EFGH$, aventi le basi eguali $AB = EF$. Proviamo ch'essi non posson avere altezze diseguali.

S'essi avessero altezze diseguali, l'altezza del secondo, p. es., sarebbe minore dell' altezza del primo. Condotta, dalla parte del parallelogrammo $ABCD$, la parallela IL ad AB, ad una distanza eguale all'altezza del secondo parallelogrammo, il parallelogrammo $ABLI$, avendo base ed altezza eguali a quelle di $EFGH$, sarebbe equivalente a quest'ultimo [165].



Ma allora i parallelogrammi $ABCD$, $ABLI$, equivalenti ad $EFGH$, sarebbero equivalenti fra loro [158, post. c)]. E questo è assurdo, perchè $ABLI$, come parte di $ABCD$, è suvvalente a quest'ultimo [161, post. f)].

Corollario 1°. Allo stesso modo si prova che, se

(1) Potrebbe darsi, in particolare, che il segmento DL fosse multiplo di DC; p. es. $DL = 3DC$. Allora N coinciderebbe con L ed M con I, e si concluderebbe lo stesso.

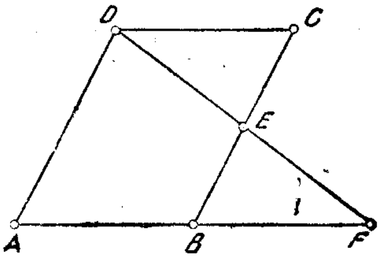
in due parallelogrammi equivalenti sono eguali le altezze, risultano eguali anche le basi.

Corollario 2°. I due parallelogrammi, trovandosi nelle condizioni previste dal teor. 165, sono altresì equicomposti.

Corollario 3°. Lo stesso tipo di ragionamento serve a dimostrare che:

Quadrati equivalenti sono eguali.

167. Teor. *Un parallelogrammo è equicomposto rispetto ad un triangolo avente eguale altezza e base doppia.*



Sia $ABCD$ il dato parallelogrammo; E il punto medio del lato BC. Congiungasi D con E. La retta DE incontra certamente AB [55]: diciamo F l'intersezione delle due rette.

I due triangoli DEC, FEB sono eguali, perchè hanno $D\widehat{E}C = F\widehat{E}B$ (angoli opposti al vertice); $D\widehat{C}E = F\widehat{B}E$ (angoli alterno interni rispetto alle parallele DC,FB tagliate dalla BC); $EC = EB$ (segmenti metà di BC). Ne segue che $DC = FB$; ed essendo $DC = AB$ [87] si conclude che il triangolo DAF ha la base AF doppia della base AB del parallelogrammo. È poi evidente che triangolo e parallelogrammo hanno la stessa altezza.

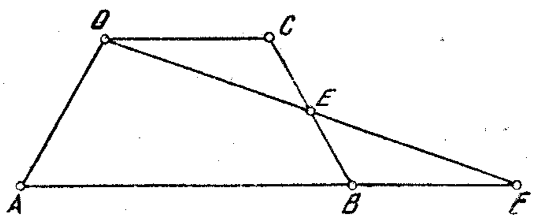
Inoltre il triangolo DAF è equicomposto rispetto al parallelogrammo $ABCD$, perchè essi son composti da parti ordinatamente eguali; e cioè: il triangolo dal trapezio $ABED$ e dal triangolo FEB, il parallelogrammo dal trapezio medesimo e dal triangolo DEC.

Corollario 1°. *Due triangoli aventi basi ed altezze eguali sono equicomposti.*

Infatti essi sono equicomposti rispetto a due parallelogrammi, costruiti a partire da ciascuno di essi come $ABCD$ dal triangolo AFD; e quindi [163] sono equicomposti fra loro.

Corollario 2°. *Un trapezio è equicomposto rispetto ad un triangolo avente eguale altezza e base eguale alla somma delle basi del trapezio.*

Infatti, nel ragionamento precedente l'ipotesi che la retta AD sia parallela a BC non interviene, se non quando si afferma che la base AF del triangolo è doppia della base AB del parallelogrammo. Ma se a quest'asserzione si sostituisce l'altra che AF è eguale alla somma dei lati AB,DC, si ha un risultato valido anche pel trapezio.



Corollario 3°. *La somma di più triangoli aventi eguale altezza è equivalente ad un triangolo della medesima altezza e avente per base la somma delle basi.*

Corollario 4°. Poichè un poligono regolare di n lati è diviso, dai segmenti che dal centro vanno ai suoi vertici, in n triangoli (isosceli) eguali [153], che hanno l'altezza eguale all'apotema del poligono, si conclude, in forza del Corollario 3°, che:

Un poligono regolare è equivalente ad un triangolo, che ha per base il perimetro del poligono e per altezza l'apotema.

168. Teor. *Due triangoli equivalenti di egual base hanno le altezze eguali.*

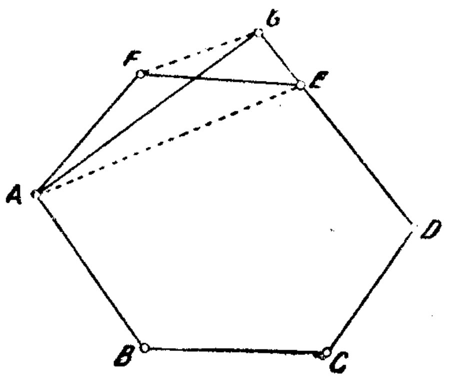
Infatti essi sono equicomposti rispetto a due parallelogrammi aventi le basi eguali (metà di quelle dei triangoli) e le altezze eguali a quelle dei triangoli dati [167]. Ora questi due parallelogrammi, equicomposti rispetto a figure equivalenti, sono equivalenti fra loro, e quindi hanno la stessa altezza [166].

Corollario. Allo stesso modo si prova che due triangoli equivalenti di eguale altezza, hanno eguali basi.

Trasformazioni di poligoni in altri equivalenti.

169. Problema. *Trasformare un poligono in un triangolo equicomposto rispetto al poligono.*

Sia $ABCDEF$ il dato poligono. Considerati tre vertici consecutivi E,F,A, si tiri la diagonale AE, che riunisce il primo e il terzo di essi. Indi dal vertice intermedio F, si tiri la parallela ad AE, e sia G il punto ov'essa incontra la retta DE [56]. Congiungasi infine A con G.



Il poligono $ABCDG$ ha un lato di meno del dato ed è rispetto ad esso equicomposto. Infatti i due poligoni hanno la parte poligonale comune $ABCDE$, e quello dato contiene inoltre il triangolo AFE, quello trasformato il triangolo AGE.

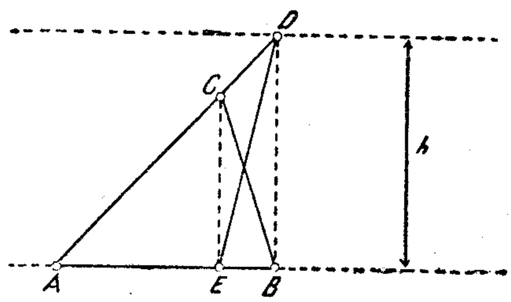
Ora questi due triangoli son equivalenti, perchè hanno la base comune AE e la stessa altezza, che è la distanza delle parallele AE,GF. Risultano pertanto equicomposti anche i due poligoni.

Si può applicare lo stesso procedimento al poligono $ABCDG$, trasformandolo in un poligono equicomposto di un lato di meno; e così proseguendo, finchè si arrivi ad un triangolo.

170. Problema. *Trasformare un triangolo in un altro equicomposto di data altezza.*

Sia ABC il triangolo dato ed h l'altezza assegnata.

Tirata, dalla parte del triangolo dato, la parallela ad AB, alla distanza h, s'intersechi questa in D colla semiretta AC [56], si congiunga poscia D con B; da C si tiri la parallela a BD, che incontri [56] AB nel punto E; e si congiunga infine D con E.



I due triangoli ABC,AED sono equicomposti, perchè (supposto p. es. D esterno al lato AC) essi constano della parte triangolare comune ACE, ed il primo contiene inoltre il triangolo CEB, il secondo il triangolo CED; e questi ultimi due triangoli sono equicomposti, perchè hanno la stessa base CE e la stessa altezza (distanza delle parallele CE,BD).

Così si è trasformato ABC in un triangolo equicomposto AED, avente l'altezza data h.

Osservazione. Se, dato il segmento AB ed il triangolo AED, s'inverte la costruzione precedente, *si ottiene un triangolo ABC, di data base, equicomposto rispetto ad un triangolo dato AED.*

171. Teor. *Due poligoni equivalenti qualunque sono equicomposti.*

Dati infatti i due poligoni P,P', possiamo costruire due triangoli T,T' equicomposti rispettivamente a P,P', i quali abbiano un'altezza assegnata [169, 170].

I due triangoli T,T' equicomposti, epperò equivalenti, a P,P', sono equivalenti fra loro [158, post. *c*)]; e quindi, poichè essi hanno la stessa altezza, hanno basi eguali [168, Cor.]. Ma allora dal Cor. 1° del § 167, segue ch'essi sono equicomposti.

Infine i due poligoni P,P', equicomposti rispetto a due altri poligoni T,T', equicomposti fra loro, risultano essi pure equicomposti [163].

Osservazione. Questo importante teorema ci dice che *per le figure poligonali il concetto generale di equivalenza, quale deriva dai postulati dei* §§ 158, 159, 161, *coincide col concetto di equicomposizione* [*scomponibilità dei due poligoni in parti poligonali, o addirittura in triangoli* [160], *ordinatamente eguali*].

Non è così, evidentemente, per due superficie piane qualunque. È p. es. intuitivo che un cerchio ed un quadrato, aventi la stessa estensione, non sono decomponibili in parti poligonali ordinatamente eguali.

172. Problema. *Trasformare un poligono in un rettangolo equivalente di data altezza.*

Sia P il poligono dato. Lo si trasformi in primo luogo in un triangolo equivalente di data altezza h. Sia b la base di questo triangolo. Costruito un rettangolo di altezza h e di base $\frac{1}{2}b$, questo risulterà equivalente al triangolo [167], epperò anche al dato poligono.

Osservazione 1ª. Nel § 175 vedremo il modo di trasformare un rettangolo in un quadrato equivalente, cosicchè ne seguirà la possibilità di *trasformare un poligono in un quadrato equivalente.*

Osservazione 2ª. Dati n poligoni equivalenti ad un medesimo P, l'estensione della loro somma S, chiamasi *multipla secondo* n dell'estensione di P, e quest'ultima, alla sua volta, dicesi *summultipla* secondo n della estensione di S.

Per le estensioni dei poligoni vale la proposizione di Archimede [164]:

Dati due poligoni disequali P,P', *esiste un multiplo dell'estensione del minore, che supera l'estensione dell'altro.*

Si trasformino infatti i due poligoni P,P' $(\overline{P} < \overline{P}')$ in due rettangoli ad essi equivalenti T,T', di data altezza h. Sieno b,b' le basi di questi rettangoli. Sarà $b < b'$ [165].

Si può determinare un multiplo mb di b che superi b' [164]. Il rettangolo di altezza h e di base mb sarà allora prevalente rispetto al rettangolo di altezza h e di base b'. Onde $m\overline{P} > \overline{P}'$.

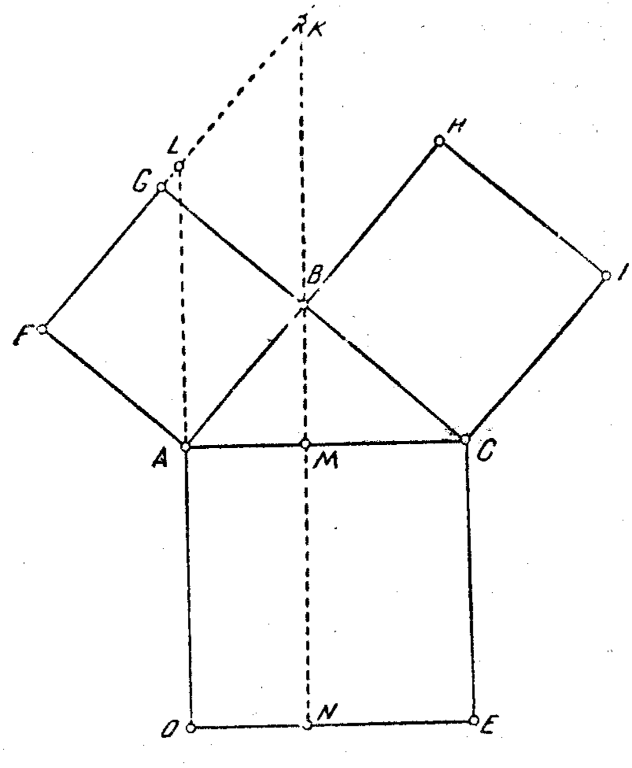
Relazione fra i quadrati costruiti sui lati d'un triangolo rettangolo.

173. Dati due segmenti a,b, un rettangolo che abbia due lati consecutivi (base e altezza) eguali ad a,b, si chiama *rettangolo dei due segmenti*. L'estensione di questo rettangolo s'indica con (a,b).

In particolare, se $b = a$, si ha il *quadrato del segmento* a, la cui estensione s'indica con (a,a) o più semplicemente con (a).

174. Teor. *In un triangolo rettangolo il quadrato dell'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati dei cateti.*

Sia il triangolo ABC rettangolo in B. Vogliamo dimostrare che il quadrato $ADEC$ dell'ipotenusa AC, è equivalente alla somma dei quadrati $ABGF,BCIH$ dei cateti AB,BC.



A tale scopo, si tiri da B la perpendicolare all'ipotenusa AC: il piede M di questa perpendicolare è interno all'ipotenusa [70] ed il suo prolungamento incontra perpendicolarmente, nel punto N, il lato DE, del quadrato $ADEC$, opposto ad AC [54, Cor. 3°]; cosicchè questo quadrato vien diviso, dal segmento MN, in due rettangoli $ADNM$, $MNEC$ (il primo dei quali è il rettangolo dei segmenti AD,AM, ovvero AC,AM; ed il secondo il rettangolo dei segmenti EC,MC, ovvero AC,MC).

Le rette BM,AD incontrano la retta FG nei punti K,L [56] e resta così determinato un parallelogrammo $ABKL$, che è equivalente al quadrato $ABGF$, perchè ha la stessa base AB e la stessa altezza AF [165]. Dico ora che il parallelogrammo $ABKL$ è equivalente al rettangolo $ADNM$. Poichè parallelogrammo e rettangolo hanno la stessa altezza AM, basterà provare che le loro basi AL,AD sono eguali.

Si considerino perciò i due triangoli ABC,AFL. Essi sono eguali, perchè hanno $AB = AF$, $A\widehat{B}C = A\widehat{F}L$ (angoli retti) e inoltre hanno gli angoli eguali $F\widehat{A}L, B\widehat{A}C$, essendo ambedue questi angoli complementari di $L\widehat{A}B$. Dunque $AC = AL$; ma $AC = AD$, epperò $AD = AL$.

Riassumendo: il quadrato $ABGF$ ed il rettangolo $ADNM$ son equivalenti fra loro [158, *c*), ovvero 163].

Similmente si prova che il quadrato $BCIH$ è equivalente al rettangolo $MNEC$. Pertanto la somma dei quadrati dei cateti risulta equivalente alla somma dei rettangoli $ADNM,MNEC$ [159, *e*)], cioè al quadrato dell'ipotenusa.

Osservazione. Il teorema dimostrato fu scoperto da Pitagora (6° secolo a. C.), e va appunto sotto il nome di *teorema di Pitagora.*

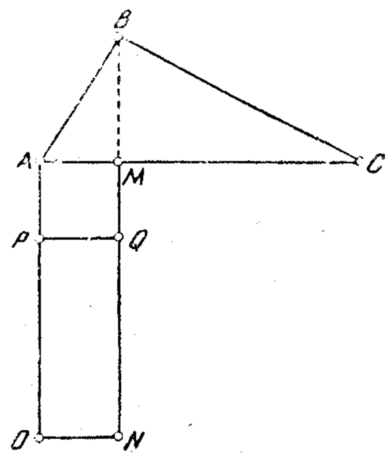
In base al teor. 171 deve esser naturalmente possibile di decomporre i quadrati costruiti sui cateti in parti tali, da poter ricomporre con esse il quadrato costruito sull'ipotenusa. Questo si vedrà negli esercizi [Es. 113].

Corollario 1°. *In un triangolo rettangolo il quadrato di un cateto è equivalente al rettangolo dell'ipotenusa e della proiezione* [74] *del cateto sulla ipotenusa.*

Infatti, nel corso della precedente dimostrazione, abbiamo provato che il quadrato di AB è equivalente al rettangolo di AC e di AM; ed AM è la proiezione del cateto AB sull'ipotenusa.

Corollario 2°. *In un triangolo rettangolo il quadrato dell'altezza tirata dal vertice dell'angolo retto sull'ipotenusa, è equivalente al rettangolo delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.*

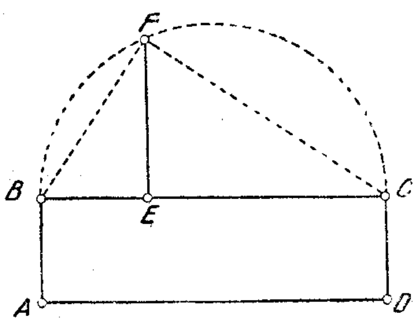
Infatti, nel triangolo rettangolo ABC, il quadrato di AB è equivalente al rettangolo $ADNM$; e d'altra parte, in virtù del teorema di Pitagora applicato al triangolo AMB, rettangolo in M, quel quadrato è altresì equivalente alla somma dei quadrati di AM e di MB. Onde quest'ultima somma è equivalente al rettangolo $ADNM$.



Staccati su AD, MN i segmenti AP, MQ eguali ad AM, il quadrangolo $APQM$ è il quadrato di AM [95] e quindi [162] il rettangolo $PDNQ$ è equivalente al quadrato di BM.

D'altra parte, essendo $AD = AC$, $AP = AM$, è $AD - AP = AC - AM$, cioè $PD = MC$; e siccome $PQ = AM$, il rettangolo $PDNQ$ non è che il rettangolo delle proiezioni, AM, CM, dei cateti sull'ipotenusa.

175. Un'applicazione facilissima del Cor. 1° (§ prec.) conduce a risolvere il [172, Oss. 1ª]:



Problema. *Trasformare un dato rettangolo in un quadrato equivalente.*

Sia $ABCD$ il dato rettangolo; e BC ne sia il lato maggiore. Descrivasi la semicirconferenza di diametro BC, e, staccato su BC il segmento

$BE = AB$, si tiri in E la perpendicolare a BC, finchè incontri [112] in F la semicirconferenza tracciata.

Poichè il triangolo BFC, inscritto in una semicirconferenza, è rettangolo [148, Cor. 2°], il quadrato di BF è equivalente al rettangolo di BC,BE, cioè al rettangolo BC,AB, di che è il rettangolo dato.

ESERCIZI

106. Costruire un quadrato equivalente alla somma o alla differenza di due altri.

107. Se in un triangolo il quadrato di un lato equivale alla somma dei quadrati degli altri due, l'angolo opposto al primo lato è retto (teorema inverso a quello di Pitagora). (Si ragioni per assurdo).

108. Se per un punto di una diagonale di un parallelogrammo P si tirano le parallele ai lati, P resta diviso in quattro parallelogrammi e i due non attraversati dalla diagonale son equivalenti (teorema del *gnomone*). (I due parallelogrammi, di cui trattasi di dimostrar l'equivalenza, risultan differenze di figure poligonali eguali).

109. Un trapezio equivale ad un parallelogrammo avente la stessa altezza e base eguale alla semisomma delle basi.

110. Fra i triangoli che hanno una base data e un dato angolo opposto, il massimo (cioè quello che ha l'estensione maggiore) è l'isoscele.

111. Fra i triangoli che hanno due lati dati, il massimo è quello per cui i due lati risultano perpendicolari.

112. Il parallelogrammo ottenuto congiungendo i punti medi dei lati di un quadrilatero equivale alla metà di questo.

113. Dato un triangolo ABC, rettangolo in B, costruiscasi, sul piano del triangolo, il quadrato $ADEC$ di lato AC, situato dalla parte opposta del triangolo. Delle due perpendicolari da D,E alla BC, quella per E, insieme alla retta AB, forma una striscia contenente il quadrato. Denotiamo con F il piede di tale perpendicolare su BC. Considerando il pentagono $BADEF$ si ottiene un'altra dimostrazione del teorema di Pitagora, perchè si constata direttamente la possibilità di decomporre in parti eguali il quadrato dell'ipotenusa e la somma dei quadrati dei cateti. (Si traccino da A,E le parallele a BC).

114. Dato un triangolo ABC, sopra un suo lato AB costruiscasi un parallelogrammo $ABDE$, in guisa che il punto C sia interno alla striscia fra AE, BD (pur potendo però essere esterno al parallelogrammo). Tirate da D, E le parallele rispettive ai lati BC, AC, queste s'incontrino in F. Congiunto F con C, i quadrangoli $ACFE$, $BCFD$ risultan parallelogrammi. La loro somma equivale al primo parallelogrammo costruito; ed a questo perciò equivale altresì la somma di due parallelogrammi qualunque, costruiti sui lati AC, BC e aventi i lati rispettivamente opposti ad AC, BC, che passan per E,D. (Teorema di Pappo). In particolare se ABC è rettangolo in C, si ha di nuovo il teorema di Pitagora.

115. Dividere un segmento in due parti tali che il quadrato della prima sia equivalente al rettangolo dell'intero segmento e della seconda. (Costruiscasi il quadrato $ABCD$ sui dato segmento AB e, preso il punto medio E dal lato AD, si stacchino sulla AD, da ambo le parti di E, i segmenti EF, EG eguali ad EB. Sia F dalla banda di A. Allora AF risulta eguale alla prima delle due parti richieste. (Per dimostrarlo si applichi al triangolo rettangolo FBG il Cor. 2º del § 174).

116. Trasformare un triangolo in uno isoscele equivalente di data base o di data altezza.

117. Trasformare un triangolo in uno rettangolo equivalente di data ipotenusa. Condizione di possibilità del problema.

118. Trasformare un triangolo in uno isoscele equivalente, i cui lati eguali sieno eguali a un dato segmento. Condizione di possibilità. (Si trasformi prima il triangolo in un altro del quale un lato sia eguale al dato segmento).

119. Trasformare un triangolo in un rombo equivalente di lato dato. Condizione di possibilità.

120. La somma dei triangoli che da un punto interno proiettano due lati opposti di un parallelogrammo, equivale alla metà di questo.

121. Un esagono regolare equivale al doppio del triangolo equilatero inscritto nello stesso cerchio ed ai $^3/_4$ dell'esagono regolare circoscritto.

122. Dividere un segmento in tre parti tali che le due estreme sieno eguali e la somma dei loro quadrati sia equivalente al quadrato della parte mediana. (Pel teorema di Pitagora il problema precedente equivale al problema di costruire un triangolo rettangolo isoscele di dato perimetro. E quest'ultimo problema si risolve imaginando già costruito il triangolo, prolungandone l'ipotenusa, dalle due parti, di segmenti eguali ai cateti, ed osservando che il triangolo isoscele che ha i vertici negli estremi di tali prolungamenti e nel vertice dell'angolo retto, ha gli angoli alla base eguali ad $\frac{1}{4}$ di angolo retto).

123. Il quadrato della somma di due segmenti è equivalente alla somma dei quadrati dei due segmenti e del doppio loro rettangolo.

124. Il quadrato della differenza di due segmenti è equivalente alla differenza tra la somma dei loro quadrati e il doppio loro rettangolo.

125. In un triangolo ottusangolo il quadrato del lato opposto all'angolo ottuso equivale alla somma dei quadrati degli altri due lati e del doppio rettangolo di uno di essi e della proiezione dell'altro su questo.

126. In un triangolo qualunque il quadrato del lato opposto ad un angolo acuto è equivalente alla differenza fra la somma dei quadrati degli altri due lati e il doppio rettangolo di uno di essi e della proiezione dell'altro su questo.

127. Se due corde AB, CD di un cerchio si tagliano ad angolo retto in O, la somma dei quadrati dei segmenti OA, OB, OC, OD equivale al quadrato del diametro. (Si abbassino dal centro M le perpendicolari alle due corde; si applichino ai triangoli MOA, MOB, MOC, MOD gli Es. 125, 126, prendendo ogni volta come lato, a cui applicare i teoremi stessi, quello eguale al raggio del cerchio, e si sommino a membro a membro le equivalenze ottenute).

128. Fra i triangoli aventi una data base ed equivalenti ad un dato triangolo, l'isoscele è quello che ha il perimetro minimo. (Si ricordi l'Es. 54 del Cap. III).

129. Fra i triangoli di base e perimetro dati, l'isoscele è il massimo. (Costruito il triangolo isoscele con quella base e quel perimetro, ogni altro triangolo avente la stessa base e la stessa altezza, in virtù dell'Es. 128, ha perimetro maggiore. Ne deriva che ogni triangolo avente la stessa base e lo stesso perimetro del triangolo isoscele deve avere altezza minore).

130. Fra i triangoli di dato perimetro il massimo è l'equilatero.

131. Di due triangoli equilateri aventi lati diseguali il maggiore è quello che ha il lato maggiore.

132. Ogni triangolo non equilatero equivalente a un dato triangolo equilatero, ha il perimetro maggiore del perimetro di questo. (Si dimostri per assurdo tenendo conto degli Es. 129, 130).

133. Le mediane di un triangolo lo dividono in sei triangoli equivalenti. (Che siano equivalenti due adiacenti dei sei triangoli aventi due lati consecutivi sopra un medesimo lato del triangolo dato, è immediato; che lo sieno due aventi angoli opposti al vertice, segue dal considerare una coppia di triangoli che hanno un lato comune col triangolo dato e per vertici opposti i punti medi degli altri due lati).

134. La somma dei quadrati di due lati d'un triangolo equivale al doppio della somma del quadrato della metà del terzo lato e del quadrato della corrispondente mediana [Es. 125, 126].

135. La somma dei quadrati dei lati di un quadrangolo (convesso) è equivalente alla somma dei quadrati delle diagonali e del quadruplo quadrato della retta che unisce i loro punti medi. (Teorema di EULERO).

136. Costruire un triangolo equivalente ad un lato, avente la stessa base di questo e un dato angolo adiacente.

137. Costruire un triangolo equivalente a un dato, avente la stessa base e un dato angolo opposto. (Si costruisca su quella base l'arco capace del dato angolo. Discussione del problema).

138. Il rettangolo della somma e della differenza di due segmenti è equivalente alla differenza dei loro quadrati.

INDICE