COLLEZIONE DI TESTI DI MATEMATICA
DIRETTA DA FRANCESCO SEVERI

FRANCESCO SEVERI

MARIA MASCALCHI

ARITMETICA

PER LE SCUOLE TECNICHE AGRARIE,
COMMERCIALI, INDUSTRIALI E PER LE
SCUOLE PROFESSIONALI FEMMINILI

FRANCESCO SEVERI MARIA MASCALCHI

ARITMETICA

PER LE SCUOLE TECNICHE AGRARIE, COMMERCIALI, INDUSTRIALI E PER LE SCUOLE PROFESSIONALI FEMMINILI

VALLECCHI EDITORE FIRENZE

Severi

Mascelli

Firenze, 20 Aprile 1938 XVI. — Stab. Grafici di A. Vallecchi, Viale dei Mille, 72

PREFAZIONE

Quest'Aritmetica, scritta insieme a mia nipote, non è un rifacimento dei nostri testi per le scuole medie inferiori e per le scuole di avviamento, ma un libro concepito e composto ex novo, *onde soddisfare nel miglior modo alle esigenze delle scuole tecniche e professionali.*

Nel ricapitolare le proprietà da cui occorre prender le mosse per esporre i complementi prescritti dai programmi, i richiami, pur costretti dalla necessaria concisione, sono esposti in modo da rievocare con chiarezza i concetti e le operazioni fondamentali, in vista degli scopi che la ricapitolazione si propone.

Basta leggere le prime pagine e quanto si riferisce alle approssimazioni numeriche, per rendersi conto fin da principio che questo libro, come gli altri della mia Collezione, affronta e risolve i problemi didattici con spirito nuovo, contro i luoghi comuni ove sono di frequente condensati e tramandati gli errori che già chiamai venerandi.

L'aderenza al senso comune, la visione del fine delle scuole a cui il libro si dirige, del grado di maturità degli scolari e della necessità di usare il linguaggio ad essi più accessibile e gradito, sono stati anche stavolta i criteri direttivi del nostro lavoro, al quale confidiamo non mancherà la volenterosa cooperazione degli insegnanti.

FRANCESCO SEVERI.

CAPITOLO PRIMO

Numeri decimali e frazionari.

Numeri decimali.

1. Ricordiamo anzitutto la definizione di ***numero decimale***.

Un numero decimale è la somma di un numero intero di unità, di un numero intero di decimi, di un numero intero di centesimi ; ecc.

Inoltre : 10 decimi formano 1 unità ; 10 centesimi formano 1 decimo e quindi 100 centesimi formano 10 decimi, cioè 1 unità ; 10 millesimi formano 1 centesimo ; 100 millesimi formano 1 decimo e 1000 millesimi 1 unità ; ecc. Un decimo, un centesimo, un millesimo ; ecc. sono *unità decimali.*

P. es. se si hanno 25 lire, 4 pezzi da 10 centesimi ed 1 da 5 centesimi, si hanno complessivamente ***L*** 25,45. Il numero 25,45 è un numero decimale costituito da 2545 centesimi, cioè da 2 decine, da 5 unità, da 4 decimi e da 5 centesimi.

Consideriamo un altro esempio. Siano dati 32 unità, 12 decimi, 134 centesimi e 6 millesimi. Per potere scrivere il numero decimale così costituito, bisogna prima di tutto ridurre tutte le unità intere e decimali alle unità più piccole date, cioè in questo caso a millesimi.

Si hanno in tal modo:

32	unità	=	32000 millesimi
12	decimi	=	1200 millesimi
134	centesimi	=	1340 millesimi
6	millesimi	=	6 millesimi

In totale dunque: 34546 millesimi.

Il numero si scrive allora:

34,546

separando con una virgola da destra a sinistra tre cifre denotanti rispettivamente i numeri di millesimi, di centesimi, di decimi, contenuti nel numero dato.

Si ha cioè la seguente:

REGOLA PER LA NUMERAZIONE DECIMALE SCRITTA. *Si riducono tutte le unità contenute nel numero dato alle unità decimali più piccole; si sommano i risultati e nel numero ottenuto si separa con una virgola, da destra a sinistra, tante cifre quante sono le unità decimali delle varie specie contenute nel numero dato.*

Quando un numero decimale è scritto secondo questa regola, qualcuno dei numeri a destra della virgola può risultare uguale a 0 e possono risultare uguali a 0 anche tutti.

Sieno p. es. 3 unità, 25 decimi, 57 centesimi, 3 millesimi. Riducendo alle unità decimali più piccole si hanno millesimi (3000 + 2500 + 570 + 3) = 6073 millesimi e quindi il numero decimale è 6,073, in cui il numero dei decimi è 0.

Ancora: sieno 2 unità, 9 decimi, 9 centesimi e 10 millesimi. Riducendo alle unità decimali più piccole si hanno millesimi (2000 + 900 + 90 + 10) = 3000 millesimi, e quindi il numero decimale è 3,000, in cui tutti i numeri a destra della virgola sono uguali a 0.

Quando in un numero decimale tutti i numeri a destra della virgola sono uguali a 0, il numero decimale è uguale ad un numero intero.

In tal caso può esser soppressa la virgola e tutti gli 0 che la seguono. Similmente, se in un numero decimale sono uguali a 0 tutte le cifre decimali che si trovano a destra della virgola da una certa in poi, queste cifre 0 possono essere soppresse e si ottiene un numero uguale al dato.

Viceversa, in un numero decimale è lecito di porre a destra dell'ultima unità decimale quanti 0 si vogliano, senza che cambi il valore del numero.

2. Ripetiamo ora sopra qualche esempio le operazioni sui numeri decimali.

PROBLEMA. Ho speso prima *L* 158,35, poi *L* 62,40 e infine *L* 5,65. Quanto ho speso in tutto?

Eseguisco la somma: *L* 158,35 + *L* 62,40 + *L* 5,65. Dispongo perciò gli addendi in colonna, con le virgole una sotto l'altra:

$$\begin{array}{r} 158{,}35\ + \\ 62{,}40\ + \\ 5{,}65 \\ \hline 226{,}40 \end{array}$$

Ho dunque speso in tutto *L* 226,40.

3. In modo analogo si eseguisce la sottrazione. P. es. debbasi calcolare *m* 2,305 — *m* 0,81. Si ottiene:

$$\begin{array}{r} 2{,}305\ - \\ 0{,}81 \\ \hline 1{,}495 \end{array}$$

4. PROBLEMA. Quanto costano *m* 3,70 di stoffa a *L* 12,35 al metro?

Debbo calcolare *L* 12,35 × 3,70. Dispongo i fattori in colonna, sopprimendo lo 0 finale del secondo fattore. Eseguisco prima la moltiplicazione, senza tener conto delle virgole. Nel risultato separo con la virgola 3 cifre decimali (cioè tante quante ne hanno complessivamente i fattori) (1).

(1) Nell'eseguire la moltiplicazione si assume per semplicità il moltiplicatore col minor numero di cifre, perchè un prodotto non cambia cambiando l'ordine dei fattori.

Si ha così :

$$\begin{array}{r} 12,35 \times \\ 3,7 \\ \hline 8645 \\ 3705 \\ \hline 45,695 \end{array}$$

cioè ***L*** 12,35 × 3,70 = ***L*** 45,695. In pratica, siccome non esistono le monete da meno di 5 centesimi, la spesa sarà o di ***L*** 45,65 o di ***L*** 45,70.

5. Prima di richiamare le regole della divisione bisogna parlare dei numeri decimali illimitati.

Finora abbiamo considerato i numeri decimali con un numero limitato di cifre decimali o ***numeri decimali limitati.*** Ma talvolta accade che, eseguendo un'operazione, il risultato che si cerca si presenta come numero decimale di cui non si riesce a calcolare un'ultima cifra, perchè l'operazione non ha mai termine e possono ottenersi perciò sempre nuove cifre decimali del risultato.

*Quando una determinata operazione non ha mai termine e dà ogni volta una nuova cifra decimale del numero che si cerca, si dice che mediante essa si costruisce un **numero decimale illimitato.***

Un esempio semplicissimo di un'operazione che non ha mai termine, è dato dalla divisione di 10 per 3. Si ha infatti :

$$\begin{array}{l|l} 10 & 3 \\ \hline 10 & 3,333.... \\ 10 & \\ 10 & \\ .... & \end{array}$$

Ogni volta che si eseguisce la divisione per ottenere le unità, i decimi, i centesimi, i millesimi; ecc. del quoziente, si perviene al resto 1 e si pone alla sua destra uno 0. Dopo ciò si deve di nuovo dividere 10 per 3 ; e così indefinitamente. Le successive unità decimali del

numero decimale illimitato, che si costruisce con questa divisione, son tutte uguali a 3.

Si dice che *un numero decimale illimitato è un **numero decimale periodico** quando, da un certo punto in poi, una cifra o un gruppo di due cifre o di tre cifre ; ecc. si riproduce successivamente tal quale.*

Il gruppo di cifre che si riproduce si chiama ***periodo.***

I numeri

3,333.... ; 32,57327272727.... ; 271,325325325....

sono periodici ; nel primo il periodo è 3, nel secondo è 27, nel terzo è 325. Essi s'indicano brevemente così :

$$3,\overline{3} \ ; \ 32,573\overline{27} \ ; \ 271,\overline{325} \ ,$$

sopralineando il periodo. Nel secondo dei tre il numero 573, formato dalle prime tre cifre decimali, non si riproduce e si chiama ***antiperiodo*** ; nel primo e nel terzo l'antiperiodo non c'è. Nel numero $0,0\overline{21}$ la parte intera è 0, l'antiperiodo è 0 e il periodo è 21 ; nel numero $0,\overline{21}$ invece non vi è antiperiodo.

6. Ricordiamo ora le regole della divisione.

1°) Sia da dividere il numero intero 414 pel numero intero 18. Si ottiene :

$$\begin{array}{r|l} 414 & 18 \\ \cline{2-2} 54 & 23 \\ 00 & \end{array}$$

Il quoziente esatto o quoto è allora il numero intero 23.

2°) Sia da dividere 534 per 48. Siccome in 534 il divisore 48 sta 11 volte con resto 6, poniamo a destra di questo uno 0 e proseguiamo la divisione per ottenere la cifra dei decimi del quoziente. Ottenuto il nuovo resto 12, poniamo a destra di questo uno 0 e proseguiamo la divisione per ottenere la cifra dei centesimi.

Analogamente per la cifra dei millesimi. Dopo ciò l'operazione ha termine:

$$\begin{array}{l|l}
534 & 48 \\ \cline{2-2}
\;\;54 & 11{,}125 \\
\;\;\;60 & \\
\;\;\;120 & \\
\;\;\;\;\;240 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;0 &
\end{array}$$

Il quoziente esatto o quoto è, in tal caso, il numero decimale limitato 11,125.

3°) Abbiamo già considerato nel § 5 l'esempio della divisione di 10 per 3, che non può mai dare come quoziente esatto un numero decimale limitato, perchè non ha termine. *Si definisce allora come quoziente esatto o quoto il numero decimale illimitato, le cui successive cifre si costruiscono colla divisione medesima.*

Facciamo un altro esempio. Sia da dividere 106 per 165. Eseguendo la divisione nel solito modo otteniamo il numero decimale periodico $0{,}6\overline{42}$, che ha per antiperiodo 6 e per periodo 42.

7. Abbiamo visto così su varii esempi che il quoto di due numeri interi può essere un numero intero o un numero decimale finito o un numero decimale periodico. Non vi sono altre possibilità, cioè:

La divisione di due numeri interi dà luogo sempre ad un quoto intero o decimale limitato o decimale periodico.

Di fatto, dividendo un numero intero per un altro, può darsi che esaurite le cifre intere del dividendo, si abbia per resto 0. In tal caso il quoto è intero. Oppure può essere 0 uno dei resti ottenuti proseguendo la divisione per trovare le successive cifre decimali. In questo caso il quoto è un numero decimale limitato. O infine, per quanto si prosegua la divisione, non s'ottiene mai un resto 0. Allora, se il divisore è, p. es., 7, i resti che si possono via via presentare sono compresi fra i numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, così che ogni volta si divide per 7 uno dei 6 numeri 10, 20, 30, 40, 50, 60. Perciò, dopo

6 volte, al massimo, le cifre del quoziente devon ripetersi. Onde il quoto è decimale periodico.

Osservazione. Sussiste anche la proprietà seguente, di cui ci limitiamo a dar notizia:

Ogni numero decimale periodico può sempre considerarsi come quoto di due convenienti numeri interi.

8. Occupiamoci ora della divisione di un numero decimale per un numero intero.

Per calcolare 351,62 : 32 si opera come precedentemente, abbassando, dopo esaurite le cifre della parte intera del dividendo, successivamente il 6 e il 2. Di poi si dispone a destra di ciascuno dei successivi resti uno 0 e si procede nella divisione, com'è qui indicato:

$$\begin{array}{l|l}
351{,}62 & 32 \\ \cline{2-2}
\;\;316 & 10{,}988125 \\
\;\;\;\;282 & \\
\;\;\;\;\;260 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;40 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;80 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;160 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;0 &
\end{array}$$

Dunque $351{,}62 : 32 = 10{,}988125$, e il quoto è un numero decimale limitato.

Nello stesso modo si procede per calcolare 41,5 : 12. Si ottiene in tal caso:

$$\begin{array}{l|l}
41{,}5 & 12 \\ \cline{2-2}
\;\;55 & 3{,}4583 \\
\;\;\;70 & \\
\;\;\;100 & \\
\;\;\;\;\;\;40 & \\
\;\;\;\;\;\;\;4 &
\end{array}$$

e poichè il resto 4 si ripete d'ora in poi sempre, nel quoziente si ripete la cifra 3. Quindi $41{,}5 : 12 = 3{,}458\overline{3}$, e il quoto è un numero decimale periodico.

9. Trattiamo infine della divisione di due numeri decimali.

Debbasi calcolare 3,15 : 8,1. Moltiplichiamo anzitutto dividendo e divisore per 10, in modo che il divisore divenga intero. Avremo così da dividere 31,5 per 81. Otteniamo:

31,5	81
720	0,38
72	

Dunque $3{,}15 : 8{,}1 = 0{,}3\overline{8}$, e il quoto è un numero decimale periodico.

Analogamente 0,8 : 1,25 dà, moltiplicando i due termini per 100,

800	125
500	0,64
0	

e il quoto è in tal caso un numero decimale limitato.

Osservazione. Nel caso considerato della divisione di due numeri decimali, resta anche incluso, in particolare, il caso della divisione di un numero intero per un numero decimale.

10. Da quanto precede [8,9] (1) risulta che la proprietà stabilita al § 7 pei numeri interi vale anche pei numeri decimali, cioè:

La divisione di due numeri decimali dà luogo sempre ad un quoto intero o decimale limitato o decimale periodico.

Proprietà delle potenze dei numeri interi e decimali (2).

11. Rammentiamo che chiamansi *potenze* scritture del tipo:

$$3^5 \quad ; \quad 4{,}2^2,$$

cui si dà il significato:

$$3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \quad ; \quad 4{,}2^2 = 4{,}2 \times 4{,}2 \; ;$$

(1) I numeri dei paragrafi, chiusi fra parentesi quadre, indicano allo scolaro precedenti proprietà, che occorre ricordare.

(2) Soltanto per gli allievi delle scuole commerciali.

si legge 3 *elevato a* 5 ; 4,2 *elevato a* 2 . Inoltre 4^1 ; $0{,}2^1$; $2{,}21^1$ significano rispettivamente 4 ; 0,2 ; 2,21, e 4^0 ; $0{,}2^0$; $2{,}21^0$ sono tutte uguali a 1. Alla scrittura 0^0 non si attribuisce invece alcun significato. Nelle scritture 3^5 ; 4^1 ; 4^0 i numeri 3 ; 4 ; 4 sono la *base* della potenza; 5, 1, 0 ne sono l'*esponente*. Dunque:

Un numero intero o decimale elevato ad un esponente uguale ad un dato numero intero maggiore di 1, è il prodotto di tanti fattori uguali al primo quante sono le unità del secondo. La potenza ad esponente 1 di un numero intero o decimale è uguale al numero; la potenza ad esponente 0 di un numero intero o decimale diverso da 0 è uguale a 1.

12. Sussistono per le potenze le seguenti proprietà:

a) Il prodotto (o il quoto) di due potenze di egual base è la potenza della stessa base, avente per esponente la somma (o rispettivamente la differenza) degli esponenti.

Nel caso del quoto l'esponente della potenza dividendo deve esser non minore di quello della potenza divisore.

Così:

$$3^4 \times 3^5 \times 3^2 = 3^{4+5+2} = 3^{11} \; ; \; 0{,}5^2 \times 0{,}5^3 = 0{,}5^{2+3} = 0{,}5^5 \; ;$$
$$0{,}7^3 : 0{,}7^2 = 0{,}7^{3-2} = 0{,}7^1.$$

b) La potenza di una potenza si ottiene formando la potenza della stessa base e prendendo come esponente il prodotto degli esponenti.

Così:

$$(3^5)^4 = 3^{5\times 4} = 3^{20} \; ; \; (0{,}1^2)^3 = 0{,}1^{2\times 3} = 0{,}1^6.$$

c) La potenza con dato esponente di un prodotto (o quoto) è il prodotto (o rispettivamente il quoto) delle potenze dei singoli termini elevati a quell'esponente.

Così:

$$(2 \times 2{,}5 \times 7)^3 = 2^3 \times 2{,}5^3 \times 7^3 \quad ; \quad (21 : 4)^3 = 21^3 : 4^3 \; ;$$
$$(0{,}21 : 0{,}4)^5 = 0{,}21^5 : 0{,}4^5 .$$

d) Il prodotto (o il quoto) di potenze di eguale esponente è la potenza, con quell'esponente, del prodotto (o rispettivamente del quoto) delle basi.

Questa proprietà è la inversa della precedente. Così:

$$1{,}5^2 \times 2^2 = (1{,}5 \times 2)^2 = 3^2 = 9 \; ; \; 2^3 \times 0{,}5^3 \times 7^3 = (2 \times 0{,}5 \times 7)^3 = 343 \; ; \; 3{,}5^4 : 1{,}4^4 = (3{,}5 : 1{,}4)^4 = 2{,}5^4 = 39{,}0625.$$

Frazioni [1].

13. Ricapitoliamo le già apprese nozioni sulle frazioni.

Si chiamano ***unità frazionarie*** *i simboli*

$$\frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{3}\,,\ \frac{1}{4}\,,\ \ldots.$$

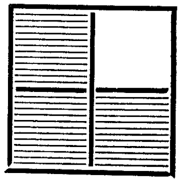
che servono a contare e a qualificare le parti in cui è stata divisa una grandezza A, che sia divisibile in un numero qualunque di parti uguali. Esse si leggono: un mezzo, un terzo, un quarto, ...; 2, 3, 4, ... si chiama ***denominatore*** della unità frazionaria.

Le unità decimali sono particolari unità frazionarie, col denominatore 10, 100, 1000, ... Sicchè scriveremo:

$$0{,}1 = \frac{1}{10}\ ;\ 0{,}01 = \frac{1}{100}\ ;\ 0{,}001 = \frac{1}{1000}\ ;\ \ldots.$$

14. *Si dice* ***frazione*** $\frac{m}{n}$, *di numeratore m e di denominatore n, l'insieme o somma di m unità frazionarie* $\frac{1}{n}$; m ed n sono i *termini* della frazione.

Così $\frac{3}{4}$ del quadrato disegnato è costituito dalla parte tratteggiata, che risulta dalla riunione di 3 pezzi uguali alla quarta parte del quadrato dato [2].



E $\frac{7}{5}$ di ***L*** 100 son costituiti da 7 volte la quinta parte di ***L*** 100. Poichè $100 : 5 = 20$; $20 \times 7 = 140$, $\frac{7}{5}$ di ***L*** 100 sono ***L*** 140.

[1] Soltanto per gli allievi delle scuole agrarie ed industriali.

[2] Notisi che $\frac{1}{4}$ del quadrato può ottenersi in altri modi, p. es. dividendo il quadrato in 4 parti uguali con le diagonali; ecc..

Le unità frazionarie non sono che frazioni col numeratore eguale a 1.

I numeri interi si considereranno come *particolari frazioni, aventi il denominatore* 1; cioè, se p è un numero intero, si pone, per definizione, $\frac{p}{1} = p$. Il simbolo $\frac{p}{0}$ non ha invece significato.

15. Da quanto precede risulta che le scritture 0,1 e $\frac{1}{10}$; 2,121 e $\frac{2121}{1000}$ hanno lo stesso significato. Dunque *i numeri decimali sono frazioni.* Ma sono particolari frazioni di denominatore 10, 100, 1000, ...; e si chiamano perciò *frazioni decimali.* Non occorre ripetere le regole che permettono di passare dal numero decimale alla frazione decimale uguale e viceversa, perchè sono molto semplici.

Da quanto precede risulta altresì che:

I numeri interi e i numeri decimali sono particolari frazioni.

Le frazioni (in particolare i numeri interi e decimali) si chiamano pure *numeri razionali.*

Proprietà delle frazioni.

16. Quando si prendono gli m n-esimi di una grandezza A o di un numero intero p divisibile per n, si dice che si fa il *prodotto della frazione* $\frac{m}{n}$ *per la grandezza A o pel numero p*; e si scrive:

$$\frac{m}{n} \times A \quad \text{oppure} \quad \frac{m}{n} A\ ,$$

$$\frac{m}{n} \times p \quad \text{oppure} \quad \frac{m}{n} p\ .$$

Si dice che due frazioni sono ***uguali*** *quando sono uguali i loro prodotti per una medesima grandezza o per uno stesso intero divisibile pei loro denominatori.*

P. es. $\frac{5}{7} = \frac{15}{21}$, perchè:

$$\frac{5}{7}(7 \times 21) = 5 \times 21 = 105 \; ;$$

$$\frac{15}{21}(7 \times 21) = 15 \times 7 = 105 \; .$$

Per verificare l'uguaglianza di due frazioni basta verificare che sono uguali i loro prodotti per una *particolare* grandezza o per un *particolare* numero intero divisibile pei loro denominatori.

Si dice che una frazione è ***maggiore*** *di un'altra, se moltiplicando le due frazioni per una stessa grandezza o numero intero divisibile pei loro denominatori, il primo prodotto è maggiore del secondo. La seconda frazione dicesi allora* ***minore*** *della prima.*

P. es. $\frac{3}{4} > \frac{5}{7}$ oppure $\frac{5}{7} < \frac{3}{4}$, perchè:

$$\frac{3}{4}(4 \times 7) = 21 \quad ; \quad \frac{5}{7}(4 \times 7) = 20 \; .$$

17. Da queste definizioni si deducono le proprietà seguenti:

a) Una frazione coi termini uguali è uguale ad 1.

b) Una frazione, il cui numeratore è multiplo del denominatore, è uguale al quoto dei suoi termini; e si dice ***apparente.***

c) Una frazione avente il numeratore minore del denominatore è minore di 1; e si dice ***propria.***

d) Una frazione avente il numeratore maggiore del denominatore è maggiore di 1; e si dice ***impropria.***

e) Date due frazioni di ugual numeratore, la maggiore è quella che ha denominatore minore: mentre se le due frazioni hanno ugual denominatore, la maggiore è quella che ha il numeratore maggiore.

18. Vale pure la proprietà seguente, che, per la sua importanza, si chiama PROPRIETÀ FONDAMENTALE DELLE FRAZIONI.

Moltiplicando ambo i termini di una frazione per uno stesso intero diverso da zero o dividendoli per un loro divisore comune, si ottiene una frazione uguale.

Così:

$$\frac{3}{2} = \frac{3 \times 2}{2 \times 2} = \frac{6}{4} \; ; \quad \frac{3}{2} = \frac{3 \times 3}{2 \times 3} = \frac{9}{6} \; ;$$

$$\frac{3}{2} = \frac{3 \times 4}{2 \times 4} = \frac{12}{8} \; ; \text{ ecc.}$$

$$\frac{375}{105} = \frac{375 : 3}{105 : 3} = \frac{125}{35} = \frac{125 : 5}{35 : 5} = \frac{25}{7} \; .$$

Quando si dividono i due termini d'una frazione per un loro divisore comune, se questo è maggiore di **1**, si ottiene una frazione uguale coi termini più piccoli. Perciò si dice che *si è semplificata la frazione sopprimendo quel divisore comune.*

P. es. $\frac{375}{105}$ è stata successivamente semplificata sopprimendo 3 eppoi 5. I termini della frazione $\frac{25}{7}$, uguale a $\frac{375}{105}$, non hanno più divisori comuni, maggiori di 1; cioè sono primi fra loro.

Una frazione coi termini primi fra loro dicesi ***irriducibile*** *o* ***ridotta ai minimi termini.***

19. Ecco ora la:

REGOLA PER RIDURRE UNA FRAZIONE AI MINIMI TERMINI. *Si può procedere in due modi;*

a) Si semplifica la frazione sopprimendo successivamente gli eventuali divisori comuni ai due termini.

b) Si semplifica la frazione sopprimendo il massimo comun divisore dei due termini.

P. es. $\frac{375}{105}$ è stata sopra ridotta ai minimi termini soppri mendo successivamente 3 e 5; ma può anche ottenersi subito la frazione irriducibile uguale a $\frac{375}{105}$, sopprimendo il massimo comun divisore dei due termini, che è $3 \times 5 = 15$.

20. La riduzione di una frazione ai minimi termini è importante. Essa giova in particolare nella seguente:

Regola per trasformare una frazione in una di dato denominatore. *Distinguiamo tre casi:*

1°) *Il denominatore assegnato è multiplo di quello della frazione data. Si calcola allora il quoto dei denominatori e si moltiplicano i due termini della frazione per questo quoto.*

2°) *Il denominatore assegnato è multiplo del denominatore della frazione irriducibile uguale alla data. Si trasforma allora la frazione irriducibile in una col denominatore assegnato, come nel* 1°) *caso.*

3°) *Se non si verifica nè il* 1°) *nè il* 2°) *caso, la trasformazione è impossibile.*

21. La riduzione ai minimi termini si applica pure nella:

Regola per ridurre più frazioni allo stesso denominatore. *Si riducono ai minimi termini quelle, delle date frazioni, che non siano già irriducibili, eppoi ciascuna frazione si trasforma, colla regola precedente, in una uguale avente per denominatore il minimo comune multiplo dei denominatori delle frazioni irriducibili date od ottenute.*

Operazioni sulle frazioni.

22. Ripetiamo ora, su qualche esempio, l'addizione e la sottrazione delle frazioni.

Problema. Un operaio ha fatto $\frac{1}{5}$ del lavoro il primo giorno; $\frac{3}{10}$ il secondo giorno e $\frac{2}{7}$ il terzo. Quanta parte del lavoro ha fatto complessivamente nei tre giorni? Quanta ne deve ancora fare?

La parte di lavoro fatto si ottiene dalla somma $\frac{1}{5}+\frac{3}{10}+\frac{2}{7}$. Poichè le tre frazioni sono irriducibili e il minimo comune multiplo di 5, 10, 7 è 70, abbiamo:

$$\frac{1}{5}+\frac{3}{10}+\frac{2}{7}=\frac{14}{70}+\frac{21}{70}+\frac{20}{70}=\frac{55}{70}=\frac{55:5}{70:5}=\frac{11}{14}.$$

La parte di lavoro fatta è dunque $\frac{11}{14}$ e siccome l'intero lavoro è $\frac{14}{14}$, la parte da fare è $\frac{14}{14}-\frac{11}{14}=\frac{3}{14}$.

Problema. Sommando i $\frac{3}{100}$ ed i $\frac{2}{5}$ di un numero e sottraendo indi $\frac{1}{3}$ dello stesso, si ottiene come risultato 145. Qual'è il numero?

Calcoliamo la somma $\frac{3}{100}+\frac{2}{5}=\frac{3}{100}+\frac{40}{100}=\frac{43}{100}$.

Togliendo da questa somma $\frac{1}{3}$, si ha:

$$\frac{43}{100}-\frac{1}{3}=\frac{129}{300}-\frac{100}{300}=\frac{29}{300}.$$

Dunque i $\frac{29}{300}$ del numero cercato uguagliano 145. La 29-esima parte di questa frazione, cioè $\frac{1}{300}$ del numero incognito, sarà uguale a $145 : 29 = 5$. Il numero richiesto si otterrà moltiplicando $\frac{1}{300}$ di esso per 300. Risulta così $5 \times 300 = 1500$.

23. Gli esempi esposti richiamano la seguente:

Regola per eseguire l'addizione o la sottrazione delle frazioni.

Per addizionare due o più frazioni :

1°) *Se hanno lo stesso denominatore, si forma la frazione che ha per numeratore la somma dei numeratori e per denominatore il denominatore comune.*

2°) *Se non hanno lo stesso denominatore, si riducono a uno stesso denominatore e si procede poi come nel* 1°) *caso.*

Per eseguire la differenza di due frazioni :

Si riducono allo stesso denominatore, se già non lo sono, e si forma indi la frazione avente per numeratore la differenza dei numeratori e per denominatore il denominatore comune.

Naturalmente, affinchè la sottrazione sia possibile, occorre che la frazione minuendo sia maggiore della frazione sottraendo.

24. Il numero $5 + \frac{3}{4}$, somma di un intero con una frazione propria, chiamasi *numero misto.* Poichè $5 = \frac{5 \times 4}{4} = \frac{20}{4}$, si ha:

$$5 + \frac{3}{4} = \frac{5 \times 4 + 3}{4} = \frac{23}{4}.$$

Dunque *un numero misto è uguale a una frazione impropria.* Inversamente *una frazione impropria può ridursi a numero misto.* P. es. $\frac{13}{5} = 2 + \frac{3}{5}$, perchè 13 : 5 dà 2 per quoziente e 3 per resto, onde $\frac{13}{5} = \frac{5 \times 2}{5} + \frac{3}{5} = 2 + \frac{3}{5}$.

25. Abbiamo già definito [16] gli $\frac{m}{n}$ di una grandezza o di un numero intero, divisibile per n, come il prodotto della frazione per quella grandezza o per quel numero. Più generalmente gli $\frac{m}{n}$ di una frazione $\frac{p}{q}$

definiscono il ***prodotto*** $\frac{m}{n} \times \frac{p}{q}$ della prima frazione per la seconda. Sussiste in proposito la seguente :

REGOLA PER MOLTIPLICARE DUE O PIÙ FRAZIONI. *Il prodotto di due o più frazioni è la frazione avente per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori.*

Facciamo un esempio :

PROBLEMA. I $\frac{3}{4}$ dei $\frac{6}{7}$ dei $\frac{14}{21}$ di un numero dànno 150. Qual' è il numero ?

Secondo quanto si è detto sopra, i $\frac{3}{4}$ dei $\frac{6}{7}$ dei $\frac{14}{21}$ del numero incognito, non sono che la frazione prodotto $\frac{3}{4} \times \frac{6}{7} \times \frac{14}{21}$ del numero. Ora, a norma della regola di moltiplicazione delle frazioni, si ha :

$$\frac{3}{4} \times \frac{6}{7} \times \frac{14}{21} = \frac{3 \times 6 \times 14}{4 \times 7 \times 21}.$$

In quest'ultima frazione il prodotto $3 \times 4 \times 7$ è divisore comune al numeratore e al denominatore. Sopprimendo tale divisore comune, si ottiene la frazione $\frac{3}{7}$ del numero incognito. Dunque i $\frac{3}{7}$ di questo numero uguagliano 150 ; epperò $\frac{1}{7}$ del numero uguaglia $150 : 3 = 50$; e poichè l' intero numero è costituito da $\frac{7}{7}$, esso si otterrà dal prodotto $50 \times 7 = 350$.

26. Dalla regola per moltiplicare due o più frazioni [§ prec.] si deduce che :

Il prodotto di più frazioni gode della proprietà commutativa.

Infatti:

$$\frac{3}{4}\times\frac{1}{7}\times\frac{2}{5}=\frac{3\times1\times2}{4\times7\times5}=\frac{3\times2\times1}{4\times5\times7}=$$

$$=\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{7}=\frac{2\times3\times1}{5\times4\times7}=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{7};\ \text{ecc.}$$

Un'altra conseguenza della regola del § prec. è questa:

Per moltiplicare una frazione per un numero intero (o un numero intero per una frazione) si moltiplica il numeratore della frazione per quel numero, lasciando immutato il denominatore.

Invero:

$$\frac{5}{4}\times3=\frac{5}{4}\times\frac{3}{1}=\frac{5\times3}{4}=\frac{3\times5}{4}=\frac{3\times5}{1\times4}=$$

$$=\frac{3}{1}\times\frac{5}{4}=3\times\frac{5}{4}.$$

27. Si chiama ***reciproca*** o ***inversa di una frazione,*** diversa da 0, la frazione che si ottiene dalla data scambiando fra loro il numeratore e il denominatore.

Così $\frac{2}{3}$ ha per inversa $\frac{3}{2}$; $\frac{1}{5}$ ha per inversa 5; ecc.

Dicesi ***quoto*** *di una prima frazione* ***(dividendo)*** *per una seconda frazione* ***(divisore),*** *diversa da 0, il prodotto della prima per l' inversa della seconda.*

P. es. $\frac{5}{9}:\frac{2}{7}=\frac{5}{9}\times\frac{7}{2}=\frac{5\times7}{9\times2}=\frac{35}{18}.$

In particolare:

Per dividere una frazione per un numero intero si moltiplica il denominatore della frazione per quel numero.

Infatti:

$$\frac{5}{4}:3=\frac{5}{4}:\frac{3}{1}=\frac{5}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{5\times1}{4\times3}=\frac{5}{4\times3}.$$

Inoltre:

Il quoto di un numero intero (dividendo) per un altro intero (divisore) è la frazione avente per numeratore il primo e per denominatore il secondo.

Invero:

$$5:8=\frac{5}{1}:\frac{8}{1}=\frac{5}{1}\times\frac{1}{8}=\frac{5\times1}{1\times8}=\frac{5}{8}.$$

A norma di questa proprietà, le due scritture $5:8$ e $\frac{5}{8}$ esprimono la stessa cosa.

Per analogia, invece di scrivere $\frac{3}{4}:\frac{7}{8}$ si scrive $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{7}{8}}$ e quest'ultima scrittura si chiama *frazione a termini frazionari.*

Vediamo una applicazione:

PROBLEMA. La larghezza di un pavimento rettangolare è di $m\left(3+\frac{1}{2}\right)$; la superficie è di $m^2\left(15+\frac{5}{16}\right)$. Qual' è la lunghezza?

Poichè $3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$; $15+\frac{5}{16}=\frac{245}{16}$, per trovare la lunghezza del pavimento calcoleremo:

$$m\left(\frac{245}{16}:\frac{7}{2}\right)=m\left(\frac{245}{16}\times\frac{2}{7}\right)=m\,\frac{245\times2}{16\times7}.$$

Sopprimendo il divisore 2×7 comune al numeratore e al denominatore, si ottiene la frazione:

$$m\,\frac{35}{8}=m\left(4+\frac{3}{8}\right).$$

28. *Il quoto di due frazioni, moltiplicato pel divisore, riproduce il dividendo.*

Se, invero, consideriamo il quoto $\frac{2\times9}{5\times11}$ della divisione $\frac{2}{5} : \frac{11}{9}$, moltiplicando il quoto pel divisore $\frac{11}{9}$, avremo:

$$\frac{2 \times 9}{5 \times 11} \times \frac{11}{9} = \frac{2 \times 9 \times 11}{5 \times 11 \times 9},$$

donde, soppresso il fattore 9×11 comune ai due termini, si ricava la frazione $\frac{2}{5}$, cioè il dividendo.

Numeri reali.

29. Le frazioni (compresi dunque i numeri interi e decimali) si chiamano, come abbiamo detto [15], *numeri razionali.* Siccome una frazione è uguale al quoto dei suoi termini [27], così essa è uguale ad un numero intero o ad un numero decimale limitato o ad un numero decimale periodico [7].

Viceversa, poichè [7, Oss.] ogni numero decimale periodico è uguale al quoto di due numeri interi, e d'altronde i numeri interi e i decimali son particolari frazioni, si può affermare che:

Ogni numero intero o decimale limitato o decimale periodico è un numero razionale.

Sussiste la proposizione:

Il quoto di due frazioni (in particolare di due numeri decimali) è sempre un numero razionale.

Infatti il quoto di due frazioni è un'altra frazione [27].

30. Esistono anche numeri decimali con infinite cifre e non periodici, p. es. il rapporto fra la circonferenza e il suo diametro $\pi = 3,14159265....$; il numero che si ottiene estraendo la radice quadrata da 2; ecc. Nel primo caso l'operazione con cui si calcolano una dopo l'altra le successive cifre di π, è di origine geometrica; nel secondo si tratta invece di un'operazione di puro carattere aritmetico; ma, sia nell'uno che nell'altro caso, si conosce il modo di costruire le successive cifre del

numero decimale illimitato. Senza di ciò questo non si potrebbe considerare dato. I numeri decimali illimitati, non periodici, si dicono ***numeri irrazionali.*** I numeri razionali e irrazionali si chiaman complessivamente ***numeri reali.***

Riassumendo:

I numeri reali possono essere razionali (cioè frazioni) e allora, ridotti a numeri decimali, dànno o numeri interi o numeri decimali limitati o numeri decimali periodici; oppure posson esser irrazionali e allora sono uguali a numeri decimali illimitati non periodici.

ESERCIZI

1. Leggere i numeri:

$$32,47 \;;\; 0,0093 \;;\; 871,02 .$$

2. Scrivere i numeri:
523 millesimi ; 60 interi e 2 centesimi ; 49 decimillesimi.

3. Nel numero 47509 si separano, con una virgola, l'ultima, o le ultime due, o le ultime tre cifre a destra. Come si legge il numero risultante? Quale operazione si è fatta sul numero dato?

4. Calcolare:

$$25 \text{ decimi} + 732 \text{ millesimi} + 4 \text{ unità};$$
$$2 \text{ decimi} - 14 \text{ millesimi};$$
$$23,14 \times 2 \quad ; \quad 315,702 : 3 .$$

5. Trovare il valore di:

$$415,2 \times 31,7 \quad ; \quad 8,426 \times 13,82 ;$$
$$14,8 \times 0,09 \quad ; \quad 0,027 \times 3,1 ;$$
$$0,1^2 \;;\; 0,01^3 \;;\; 0,2^2 \;;\; 0,4^2 \;;\; 0,12^2 .$$

6. Calcolare i quozienti:

$$7 : 41 \quad ; \quad 85,6 : 14 \quad ; \quad 605,4 : 81,31 ,$$

arrestando il calcolo alla seconda cifra decimale.

7. Il primo gennaio 1901 fu di martedì. Quali sono i successivi tre anni del secolo che cominciarono di martedì?

8. Per ogni telegramma ordinario si spendono ***L*** 2 fino a 10 parole, più ***L*** 0,25 per ogni parola oltre le 10; di più si paga

L 0,10 per la ricevuta, che è obbligatoria. Le parole che contengono più di 15 lettere contano come due parole.

Quanto si spende per un telegramma di 19 parole normali ?

9. Si dispone di *L* 10,35. Qual' è il numero di parole normali delle quali può essere composto un telegramma di questo prezzo ?

10. Con *L* 10,50 si inviano 5 telegrammi. Ve ne può essere qualcuno con più di 10 parole ?

11. Con *L* 11,75 si spediscono 5 telegrammi, ognuno formato da più di 10 parole. Posson avere differente numero di parole ?

12. È maggiore la spesa per 6 telegrammi, ognuno di non più di 10 parole, o per un telegramma di 50 parole di cui 1 di 16 lettere e 1 di 18 ?

13. Se scambiamo i termini di una divisione, otteniamo 43. Qual' è il valore per difetto del quoto richiesto, a meno di un millesimo ?

14. La radice quadrata di un numero è 0,78. Qual' è il numero ?

15. Un industriale dà al rappresentante la decima parte delle somme riscosse. Quanto deve consegnare, se riscuote *L* 47756 ?

16. Quanto misura, in ***km***, un arco di meridiano di 1 grado ?

17. Quanto misura la lega geografica, in ***km*** ? (Nell'arco di 1 grado sono contenute 25 leghe).

18. Un bimbo ha riportato, agli esami, le classificazioni di 9, 7, 8, 7, 7. Qual' è, in centesimi, il suo voto medio ?

19. Un numero è eguale a $\frac{5}{4}$ di un altro ; la somma di essi è 25,74. Calcolare i due numeri.

20. I $\frac{7}{100}$ di un numero sono 27,37. Qual' è il numero ?

21. Una pezza di tela misura ***m*** 15,50 più di un'altra ed è lunga una volta e mezza questa. Qual'è la lunghezza di ciascuna pezza?

22. Una stoffa costa *L* 27,90 al metro. A quanto al metro bisogna venderla per guadagnare su 18 metri il costo di un metro?

23. Un negoziante ha acquistato 6 dozzine di fazzoletti che rivende al prezzo globale di *L* 126, con un guadagno di $\frac{2}{5}$ di lira per ogni fazzoletto. Quanto ha pagato ogni fazzoletto ?

24. Si sono acquistate 465 uova a *L* 35 il centinaio e si sono rivendute a *L* 5,60 la dozzina. Quanto si è guadagnato ?

25. Una stoffa alta ***cm*** 75 costa *L* 28,50 al metro ; un'altra, della stessa qualità, alta ***cm*** 90, costa *L* 32,50 al metro. Quale delle due stoffe è più conveniente per l'acquisto ?

26. Calcolare :

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{8} + \frac{7}{12} \; ; \; \frac{32}{10} + \frac{15}{16} \; ; \; \frac{7}{5} + 3 - \frac{17}{20} \; ;$$

$$5 - \frac{2}{3} \; ; \; \frac{27}{9} - 1 \; ; \; \frac{85}{14} - \frac{1}{7} \; ; \; 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \; .$$

27. Calcolare :

$$3 + \frac{2}{4} \times \frac{5}{3} \; ; \; \left(3 + \frac{3}{4}\right) \times \frac{5}{3} \; ; \; 5 \times \frac{8}{3} \times \left(2 - \frac{1}{5}\right) \; ;$$

$$\left(\frac{4}{5} \times \frac{9}{8} - \frac{2}{3}\right)^2 \; ; \; \frac{4^2}{3} \; ; \; \frac{3}{4} \times \frac{5}{7} - \frac{1}{6} \; ; \; \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} + 1 \; .$$

28. Trovare, fra le seguenti coppie di espressioni aritmetiche, la maggiore :

a) $3 + \frac{2}{5} \times \frac{7}{3} \; ; \; \left(3 + \frac{2}{5}\right) \times \frac{7}{3}$.

b) $\left(2 - \frac{1}{4}\right)^2 \; ; \; 2^2 - \frac{1}{4}$.

c) $\frac{1}{2} \times \left(\frac{3^2}{4} + \frac{3}{4^2}\right) \; ; \; \left(\frac{3}{4}\right)^2$.

d) $\left(2 + \frac{1}{5}\right) : 6 \; ; \; \left(\frac{8}{9}\right)^2 + \left(\frac{8}{9}\right)^1 + \left(\frac{8}{9}\right)^0$.

29. Sono stati fatti $\frac{3}{5}$ di un lavoro e si è speso *L* 250. Quale parte del lavoro rimane da fare ? quanto si spenderà ancora ?

30. Se una somma vien diminuita prima dei suoi $\frac{2}{9}$, poi ancora dei suoi $\frac{2}{9}$ e infine dei suoi $\frac{5}{12}$, rimangono *L* 260. Qual'era la somma ?

31. Se una somma viene aumentata prima dei suoi $\frac{6}{7}$, poi dei $\frac{3}{4}$ del totale, si ottiene *L* 9100. Qual'era la somma ?

32. Una frazione è eguale a $\frac{2}{3}$ e la somma dei suoi termini è 20. Qual' è la frazione ?

33. Quale frazione del giorno è il secondo ?

34. Sono trascorsi i $\frac{7}{12}$ della giornata. Che ora è ?

35. La somma di due numeri è 28 e uno è $\frac{3}{4}$ dell'altro. Quali sono i due numeri ?

36. Un numero è $\frac{5}{3}$ di un altro e la loro differenza è 322. Quali sono i due numeri ?

37. Un rubinetto riempie una vasca in 5 ore, mentre insieme ad un altro ci mette 3 ore e mezzo. Quanto tempo impiega quest'ultimo a riempire la vasca ?

38. I $\frac{5}{3}$ della somma di due numeri sono 425 ed uno è $\frac{6}{7}$ dell'altro. Quali sono i due numeri ?

CAPITOLO II.

Calcolo approssimato.

Regole di calcolo approssimato [1].

31. Dato un numero decimale limitato o illimitato, chiamiamo *valore decimale approssimato per difetto a meno d'una unità o d'un decimo o d'un centesimo ; ecc.* del numero dato, il numero da questo ottenuto arrestandolo alla cifra delle unità o dei decimi o dei centesimi ; ecc.

Se il numero decimale dato è limitato o periodico, il suo *valore esatto* si può esprimere con una frazione. Se si prende, invece del valore esatto, un valore approssimato a meno d'un'unità o d'un decimo o d'un centesimo; ecc., si commette un *errore* rispettivamente minore di 1 o di 0,1 o di 0,01 ; ecc.

Inoltre, quando le cifre decimali che si trascurano, da una certa in poi, son tutte uguali a zero, i valori ottenuti non sono più approssimati, ma coincidono col valore esatto del numero dato, che, in tal caso, è un numero decimale limitato.

P. es. 2 ; 2,7 ; 2,72 son valori decimali approssimati per difetto a meno di 1 ; di 0,1 ; di 0,01 del numero decimale limitato 2,725, di cui il valore esatto è appunto 2,725.

[1] Soltanto per gli allievi delle scuole commerciali e professionali femminili. Gli esercizi di calcolo rapido e mentale prescritti per gli allievi delle scuole agrarie, commerciali e professionali femminili trovansi alla fine del Capitolo dal n. 46 in poi.

I valori 3 ; 3,1 ; 3,14 ; 3,141 ; 3,1415 son valori decimali approssimati per difetto a meno di 1 ; di 0,1 ; di 0,01; di 0,001 ; di 0,0001 del numero irrazionale $\pi = 3,14159265....$

Dicesi *valore decimale approssimato per eccesso a meno d'un'unità o d'un decimo o d'un centesimo ; ecc.* d'un numero decimale limitato o illimitato, il corrispondente valore decimale approssimato per difetto a meno d'un'unità o d'un decimo o d'un centesimo; ecc., aumentato rispettivamente d'un'unità o d'un decimo o d'un centesimo ; ecc.

P. es. 3 ; 2,8 ; 2,73 son valori decimali approssimati per eccesso a meno di 1 ; di 0,1 ; di 0,01 del numero 2,725.

I valori 4 ; 3,2 ; 3,15 sono valori decimali approssimati per eccesso a meno di 1 ; di 0,1 ; di 0,01 del numero π.

[1] Nel definire i valori decimali approssimati per eccesso a meno di 1 ; di 0,1 ; di 0,01 ; ecc. si escludono implicitamente i decimali scritti sotto forma di numeri periodici di periodo 9. Effettivamente queste scritture posson essere abbandonate, senza che si venga ad escludere dalla rappresentazione decimale qualche numero razionale.

Consideriamo, invero, il numero decimale periodico $0,\overline{9}$, di periodo 9. I suoi valori decimali approssimati per difetto a meno di 1 ; di 0,1 ; di 0,01 ; di 0,001 ; ecc. sono :

$$0 \ ; \ 0,9 \ ; \ 0,99 \ ; \ 0,999 \ ; \text{ecc.}$$

Aumentando questi numeri rispettivamente di 1 unità, di 1 decimo, di 1 centesimo, di 1 millesimo, ecc. si ottiene sempre il numero 1 :

$$0 + 1 = 1 \ ; 0,9 + 0,1 = 1 \ ; 0,99 + 0,01 = 1 \ ; 0,999 + 0,001 = 1 \ ;....$$

Cioè : il valore approssimato 0 differisce da 1 di 1 unità ; il valore approssimato 0,9 differisce da 1 di 1 decimo; il valore approssi-

[1] Le parti stampate in carattere piccolo, quando non sieno prescritte per un determinato tipo di scuole, posson essere omesse in un primo studio.

mato 0,99 differisce da 1 di 1 centesimo; e così via. Onde i successivi valori decimali approssimati del numero dato si avvicinano indefinitamente ad 1, e quindi si può scrivere:

$$1 = 0,\overline{9}\,.$$

Se ora consideriamo il numero $31,2754\overline{9}$, avremo:

$$31,2754\overline{9} = 31,2754 + 0,0000\overline{9}\,,$$

e siccome $0,0000\overline{9}$ è uguale a $0,\overline{9}$, cioè ad 1, diviso per 10000, così risulterà:

$$0,0000\overline{9} = 0,0001\,,$$

epperò:

$$31,2754\overline{9} = 31,2754 + 0,0001 = 31,2755\,.$$

Dunque:

Ogni numero decimale periodico di periodo 9 *si può anche scrivere sotto forma di numero decimale limitato, aumentando di* 1 *la cifra (minor di* 9), *che precede il periodo, e sopprimendo tutte le cifre successive.*

È pertanto vero che i numeri decimali di periodo 9 possono escludersi, senza omettere nessun numero razionale [1].

Pei numeri decimali di periodo 9, quelli che si son chiamati valori decimali approssimati per eccesso, da un certo momento in poi, coincidono col valore esatto.

Ma, anche escludendo le scritture periodiche a periodo 9, può accadere che i valori decimali approssimati per eccesso di un numero periodico non siano tutti distinti fra loro.

Prendiamo p. es. il numero periodico $0,\overline{59}$. I suoi valori decimali approssimati per eccesso a meno di 0,1; di 0,01; di 0,001 sono:

$$0,5 + 0,1 = 0,6 \quad ; \quad 0,59 + 0,01 = 0,60 \quad ; \quad 0,595 + 0,001 = 0,596 \quad ;$$
$$0,5959 + 0,0001 = 0,5960 \quad ; \quad \text{ecc.}$$

Come si vede, i valori 0,6 e 0,60, approssimati a meno di un decimo e di un centesimo, sono uguali; e così sono uguali i valori 0,596 e 0,5960 approssimati a meno di 1 millesimo e di 1 decimillesimo.

32. Oltre ai valori decimali approssimati per difetto e per eccesso a meno d'un'unità, d'un decimo, d'un centesimo; ecc. d'un dato numero razionale o irrazio-

[1] La esclusione delle scritture decimali periodiche a periodo 9 è vantaggiosa, anche perchè, dopo averla compiuta, si può dimostrare che ogni numero reale ammette una sola rappresentazione decimale e quindi i suoi valori decimali approssimati per difetto e per eccesso son pienamente determinati.

nale, si posson anche considerare più in generale *valori approssimati per difetto e per eccesso*, che non sieno necessariamente costruiti nel modo sopra indicato.

Chiamasi valore approssimato per difetto di un dato numero reale ogni numero razionale minore o uguale ad un valore decimale approssimato per difetto, a meno d'un'unità decimale data; valore approssimato per eccesso ogni numero razionale maggiore o uguale ad un valore decimale approssimato per eccesso, a meno di un'unità decimale data.

I valori approssimati per difetto (risp. per eccesso) si dicono anche *minori* (risp. *maggiori*) del dato numero reale.

Per *limitare l'errore* che si commette prendendo come valore di un numero reale un suo valore approssimato, p. es. per difetto, basta considerare un valore approssimato per eccesso del numero stesso. La differenza fra i due valori approssimati è certamente maggiore del predetto errore.

33. La sostituzione dei numeri decimali coi loro valori approssimati può essere in qualche caso utile, ma non è mai necessaria, allorchè si tratta di numeri decimali limitati.

Invece, quando si tratta di numeri decimali illimitati, questa sostituzione è sempre necessaria (rispetto alle regole che conosciamo), perchè nel calcolo non si può tener conto che di un numero finito di cifre.

Si sostituiranno dunque ai numeri decimali illimitati (periodici o irrazionali) loro valori approssimati, com'è indicato nelle regole seguenti, le quali permettono di calcolare non già la somma o la differenza o il prodotto o il quoto di due numeri decimali illimitati, ma *valori approssimati* di questi numeri.

34. *Addizionando (o moltiplicando) valori approssimati per difetto di due o più numeri si ottengono valori approssimati per difetto del loro totale (o rispettivamente del loro prodotto). Addizionando (o moltiplicando) valori approssimati per eccesso si ottengono valori approssimati per eccesso.*

Dovendo p. es. calcolare:

$$2{,}1\overline{45} + 0{,}\overline{36} + 8{,}4\overline{01}$$

possiamo procedere così. Sommiamo anzitutto valori per difetto:

$$2{,}14 + 0{,}36 + 8{,}40 = 10{,}90\ ;$$

sommiamo poi valori per eccesso:

$$2{,}15 + 0{,}37 + 8{,}41 = 10{,}93\ .$$

La somma richiesta è allora compresa fra 10,90 e 10,93, che ne sono valori approssimati rispettivamente per difetto e per eccesso.

Siccome il numero è compreso fra 10,90 e 10,93, l'errore che si commette prendendo come suo valore 10,90 o 10,93 è minore di 10,93 — 10,90 = 0,03, cioè 10,90 e 10,93 sono *valori approssimati per difetto e per eccesso con un errore minore di* 0,03.

Calcolando invece:

$$2{,}145 + 0{,}363 + 8{,}401 = 10{,}909\ ,$$
$$2{,}146 + 0{,}364 + 8{,}402 = 10{,}912\ ,$$

si ottengono i numeri 10,909 e 10,912, che son valori approssimati rispettivamente per difetto e per eccesso, con un errore minore di 10,912 — 10,909 = 0,003.

Osservazione. Nell'eseguire l'addizione è utile che gli addendi abbiano lo stesso numero di cifre decimali. Talora perciò conviene di trascurare qualche cifra di uno o più addendi, anche perchè questo non diminuisce notevolmente l'approssimazione.

Consideriamo p. es. la somma:

$$\pi + \sqrt{3}\ ,$$

ove

$$\pi = 3{,}14159265....\ ;\ \sqrt{3} = 1{,}732....$$

Se calcoliamo:

$$3{,}141 + 1{,}732 = 4{,}873\ \ ;\ \ 3{,}142 + 1{,}733 = 4{,}875\ ,$$

otteniamo i due valori approssimati per difetto e per eccesso 4,873 e 4,875, ciascuno dei quali esprime $\pi + \sqrt{3}$ con un errore minore di 0,002.

Se calcoliamo invece:

$3{,}14159 + 1{,}732 = 4{,}87359\ ;\ 3{,}14160 + 1{,}733 = 4{,}87460$, otteniamo come valori approssimati rispettivamente per difetto e per eccesso di $\pi + \sqrt{3}$, i numeri 4,87359 e 4,87460, con un errore minore di 0,00101. In ambedue i casi dunque, nonostante che nel secondo caso si sieno considerate più cifre di π, non possediamo, come cifre decimali sicure del risultato, altro che le prime due.

35. Si debba calcolare la misura della circonferenza il cui diametro è misurato, in metri, da $\sqrt{2}$.

Occorre calcolare $\sqrt{2} \times \pi$. Essendo $\sqrt{2} = 1{,}414....$; $\pi = 3{,}141....$, eseguiamo il prodotto di due valori per difetto:

$$1{,}41 \times 3{,}14 = 4{,}4274\ ;$$

e il prodotto di due valori per eccesso:

$$1{,}42 \times 3{,}15 = 4{,}4730\ .$$

Si deduce che 4,4274 e 4,4730 sono valori approssimati del prodotto rispettivamente per difetto e per eccesso con un errore minore di 4,4730 — 4,4274 = 0,0456. Le sole cifre sicure del prodotto sono 4,4. Otteniamo così il valore decimale approssimato per difetto, a meno d'un decimo, della misura della circonferenza.

36. Si debba ora calcolare:

$$2{,}4\overline{6} \times 0{,}42379 + 6{,}4\overline{93}\ .$$

Calcoliamo prima:

$$2{,}46 \times 0{,}42 = 1{,}0332\ \ ;\ \ 1{,}0332 + 6{,}4939 = 7{,}5271\ ;$$

e poi:

$$2{,}47 \times 0{,}43 = 1{,}0621\ ;\ 1{,}0621 + 6{,}4940 = 7{,}5561\ .$$

Il numero cercato è compreso fra 7,5271 e 7,5561. Questi due valori sono approssimati rispettivamente per difetto e per eccesso, con errore minore di 7,5561 — — 7,5271 = 0,0290.

Possiamo considerare 7,52 e 7,56 come valori finali, approssimati rispettivamente per difetto e per eccesso, con errore minore di 7,56 — 7,52 = 0,04.

37. Occupiamoci ora dei valori approssimati della differenza di due numeri decimali.

Bisogna, come si sa, che il minuendo sia non minore del sottraendo. Anzi il caso che il minuendo sia uguale al sottraendo non ha interesse, perchè la differenza è 0. Sia dunque *il minuendo maggiore del sottraendo.* Esistono in tal caso numeri razionali maggiori del sottraendo e minori del minuendo, e quindi valori approssimati per eccesso del sottraendo, minori di valori approssimati per difetto del minuendo.

La differenza tra un valore approssimato per difetto del minuendo e un valore approssimato per eccesso del sottraendo, che sia minore del precedente, dà un valore approssimato per difetto della differenza.

La differenza tra un valore approssimato per eccesso del minuendo e un valore approssimato per difetto del sottraendo, dà invece un valore approssimato per eccesso della differenza.

Ecco un esempio. Debbasi calcolare $5,\overline{483} - \pi$. Procuriamoci anzitutto:

$$5,483 - 3,142 = 2,341 \; ; \; 5,484 - 3,141 = 2,343.$$

Otteniamo così 2,341 e 2,343, che son valori approssimati rispettivamente per difetto e per eccesso di $5,\overline{483} - \pi$ con errore minore di 2,343 — 2,341 = 0,002.

Osservazione. Come nella somma [34, Oss.], anche nella sottrazione è conveniente che i due termini abbiano lo stesso numero di cifre decimali.

38. I valori approssimati del quoto di due dati numeri reali si ottengono con la regola seguente:

Il quoto di un valore approssimato per difetto del dividendo e di un valore approssimato per eccesso del divisore, dà un valore approssimato per difetto del quoto dei due dati numeri. Se invece si fa il quoto di un valore approssimato per eccesso del dividendo per un valore approssimato per difetto del divisore, si ottiene un valore approssimato per eccesso del quoto dei due dati numeri.

Debbasi, ad esempio, calcolare il quoto di $5,\overline{483} : \pi$. Dividendo il valore approssimato per difetto 5,483, del primo numero, pel valore approssimato per eccesso 3,142 del secondo, viene:

$$5,483 : 3,142 = 1,74506....$$

Dividendo invece il valore per eccesso 5,484 del primo, pel valore per difetto 3,141 del secondo, si ha:

$$5,484 : 3,141 = 1,74594....$$

Tralasciamo nel numero 1,74506.... le cifre successive al 6. Otterremo così un valore approssimato per difetto del quoto 5,483 : 3,142 e quindi un valore approssimato per difetto del quoto $5,\overline{483} : \pi$. Similmente 1,74595, valore approssimato per eccesso di 5,484 : 3,141, è un valore approssimato per eccesso di $5,\overline{483} : \pi$.

Si hanno dunque pel quoto richiesto le seguenti coppie di valori approssimati per difetto e per eccesso:

1,74506 ; 1,74595 ; errore minore di 0,00089 ;

1,745 ; 1,746 ; errore minore di 0,001.

Così 1,745 è il valore approssimato del quoto che si cerca, a meno di 1 millesimo per difetto.

39. Quando in un calcolo da eseguire vi sono numeri decimali limitati e illimitati, i primi si posson prendere con tutte le loro cifre, purchè il numero di queste non superi il numero delle cifre, che conviene considerare, nello scrivere i valori approssimati degli altri numeri.

Così, dovendo calcolare l'espressione $2,1 \times \pi - 5,\overline{381}$, se assumiamo per π e per 5,381 valori approssimati con una o più cifre decimali, conviene prendere l'intero valore esatto 2,1 del primo fattore.

Uso di tabelle per abbreviare moltiplicazioni e divisioni (1).

40. Per abbreviare i calcoli vi sono artifici molto utili, di alcuni dei quali ora parleremo.

Si debbano calcolare i prodotti di un numero fisso per molti altri numeri. Conviene allora costruire una tabella contenente i prodotti del numero fisso per 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Dopo ciò, il calcolo di uno dei prodotti richiesti si riduce a quello di una somma.

Facciamo un esempio: Un impiegato deve percepire come indennità di viaggio ***L*** 15,49 per ogni ***L*** 100 di spesa. Quanto gli spetta su ***L*** 230,25 ?

Su ogni lira l' impiegato deve percepire l'indennità di ***L*** 0,1549.

Giova ora costruire una tabella, perchè calcoli del genere dovranno esser ripetuti di frequente (ogni quindicina, ogni mese; ecc.).

0,1549 × 1 = 0,1549	0,1549 × 6 = 0,9294
0,1549 × 2 = 0,3098	0,1549 = 7 = 1,0834
0,1549 × 3 = 0,4647	0,1549 × 8 = 1,2392
0,1549 × 4 = 0,6196	0,1549 × 9 = 1,3941
0,1549 × 5 = 0,7745	

Per calcolare l' indennità su ***L*** 230,25 procederemo allora così:

Indennità	per	***L*** 200	. . . . . .	***L*** 30,98
»	»	***L*** 30	. . . . . .	***L*** 4,647
»	»	***L*** 0,2	. . . . . .	***L*** 0,03098
»	»	***L*** 0,05	. . . . . .	***L*** 0,007745
»	»	***L*** 230,25	. . . . . .	***L*** 35,665725,

ossia, arrotondando, ***L*** 35,65.

41. Similmente si può procedere quando devono eseguirsi molte divisioni per un numero fisso.

P. es. si debbano trasformare varie lunghezze, espresse in metri, in *canne romane*. Una canna romana è ***m*** 2,234. Occorre dunque dividere le varie misure per 2,234; oppure, se vogliamo ridurre in millimetri, per 2234. A questo scopo costruiamo anzitutto la tabella:

(1) Tutta la parte che segue in carattere piccolo è soltanto per gli allievi delle scuole tecniche commerciali.

2234 × 1 = 2234	2234 × 6 = 13404
2234 × 2 = 4468	2234 × 7 = 15638
2234 × 3 = 6702	2234 × 8 = 17872
2234 × 4 = 8936	2234 × 9 = 20106
2234 × 5 = 11170	

Per eseguire la riduzione in canne romane di ***m*** 2149,72, ossia di ***mm*** 2149720, si deve dividere 2149720 per 2234. Mediante la tabella costruita la divisione si fa rapidamente, perchè le successive cifre del quoziente vengono suggerite subito dal confronto dei prodotti della tabella coi dividendi delle singole divisioni parziali:

```
2149720 | 2234
20106   | 962
-------
 13912
 13404
 -----
  5080
  4468
  ----
   612
```

Si ha così risparmio notevole di tempo.

Moltiplicazione abbreviata.

42. Quando si calcola un valore approssimato del prodotto di due numeri approssimati, l'errore dipende dalla grandezza delle parti intere dei numeri dati.

Debbasi calcolare p. es. $86,\overline{93} \times 6,42145324....$ Un valore approssimato per difetto di questo prodotto è [34]:

$$86,939 \times 6,421 = 558,235319\ ;$$

ed un valore approssimato per eccesso è [34]:

$$86,940 \times 6,422 = 558,328680\ .$$

Le sole cifre esatte del prodotto richiesto, che ricaviamo con questi due valori approssimati, son quelle dalla parte intera 558; cioè otteniamo il prodotto a meno d'un'unità, nonostante si siano impiegati valori approssimati a meno di 1 millesimo.

Occorre dunque cercare un metodo per ottenere più rapidamente migliori approssimazioni.

Vogliasi calcolare il prodotto $86,\overline{93} \times 6,42145324....$ con errore minore di 1 centesimo per difetto.

A questo scopo *arrestiamo il moltiplicando ed il moltiplicatore a cifre tali, che il prodotto dell'unità corrispondente alla prima cifra* *significativa a sinistra di ciascuno dei numeri dati per l'unità corrispondente alla prima cifra a destra dell'altro, sia la centesima parte dell'unità fissata per l'approssimazione*, ossia, nel nostro caso, 1 decimillesimo. Dovremo perciò arrestare il moltiplicando ai decimillesimi e il moltiplicatore ai centomillesimi, eseguendo il prodotto

$$86{,}9393 \times 6{,}42145\,.$$

I numeri dati vengon così ad avere, a prescindere dalle virgole, lo stesso numero di cifre.

Disponiamo i due numeri in colonna uno sotto l'altro tralasciando le virgole, ma scrivendo il moltiplicatore con le cifre in ordine inverso :

$$\begin{array}{r} 869393 \\ 541246\,. \end{array}$$

Fatto questo, moltiplichiamo 869393 per 6 e scriviamo come al solito il prodotto parziale ottenuto ; moltiplichiamo indi 86939 (cioè quel che rimane nel moltiplicando dopo soppressa la prima cifra a destra) per 4 (seconda cifra del moltiplicatore) e disponiamo il prodotto sotto al precedente, in modo che le ultime cifre a destra dei due prodotti siano sulla stessa colonna ; moltiplichiamo dipoi 8693 per 2 e disponiamo similmente il prodotto in colonna coi precedenti ; moltiplichiamo 869 per 1 ; 86 per 4 e infine 8 per 5, disponendo di volta in volta in colonna i prodotti parziali. Sommati questi prodotti, il totale viene espresso in decimillesimi. Onde occorre separare in esso quattro cifre decimali :

$$\begin{array}{r} 869393 \\ \underline{541246} \\ 5216358 \\ 347756 \\ 17386 \\ 869 \\ 344 \\ \underline{40} \\ 558{,}2753 \end{array}$$

Il risultato 558,2753 è un valore approssimato per difetto del prodotto assegnato. L'errore è inferiore a decimillesimi :

$$(6 + 4 + 2 + 1 + 4 + 5) + 8 + 1 = 31\,.$$

Il numero 31 si ottiene addizionando le unità dei diversi ordini del moltiplicatore, l'unità d'ordine più alto del moltiplicando e infine 1.

Nel nostro caso l'errore risulta dunque minore di 31 decimillesimi ; epperò $558{,}2753 + 0{,}0031 = 558{,}2784$ è un valore approssimato per eccesso del prodotto dato. Siccome i due valori approssimati ottenuti hanno le prime due cifre decimali eguali, 558,27 è il richiesto valore approssimato per difetto a meno di un centesimo.

43. Se i due valori approssimati ottenuti col metodo esposto non hanno uguali tutte le cifre che si vogliono possedere con sicurezza, occorre procedere oltre nel calcolo, prendendo una cifra di più tanto nel moltiplicando che nel moltiplicatore.

Così, volendosi ottenere quattro cifre decimali esatte del prodotto $0{,}975875775\ldots \times 0{,}91929394\ldots$, procediamo nel calcolo in modo simile a quello sopra esposto :

$$\begin{array}{r} 97587 \\ \underline{92919} \\ 878283 \\ 9758 \\ 8775 \\ 194 \\ \underline{81} \\ 897091 \end{array}$$

Poichè $(9 + 1 + 9 + 2 + 9) + 9 + 1 = 40$, l'errore è minore di 0,000040 e il prodotto considerato risulta compreso fra 0,897091 e 0,897131, cioè questi valori sono approssimati per difetto e per eccesso rispettivamente con un errore inferiore a 0,00004, e, a maggior ragione, inferiore a 0,0001. Tuttavia non possiamo assegnare le prime quattro cifre decimali del prodotto, perchè le cifre dei decimillesimi sono disuguali. Dovremo perciò spingere oltre il calcolo, così :

$$\begin{array}{r} 975875 \\ \underline{392919} \\ 8782875 \\ 97587 \\ 87822 \\ 1950 \\ 873 \\ \underline{27} \\ 8971134 \end{array}$$

L'errore è inferiore a $\frac{43}{10000000}$, perchè $(9 + 1 + 9 + 2 + 9 + 3) + 9 + 1 = 43$. Dunque 0,8971134 e 0,8971177 sono valori approssimati per difetto e per eccesso del prodotto considerato, con errore inferiore a 0,0000043. S'ottengono in tal guisa 5 cifre decimali esatte del prodotto.

44. Passiamo a giustificare il procedimento esposto [1]. Ri-

[1] Questo § può essere omesso in un primo studio.

torniamo alla moltiplicazione di $86,\overline{93}$ per 6,42145324.... . Sostituendo a 6,42145324... il numero 6,42145, trascuriamo 0,00000324... , che è un numero minore di 0,00001. Perciò nel prodotto per $86,\overline{93}$ si viene a trascurare meno di $0,00086\overline{93}$, ossia meno di decimillesimi $(8 + 1) =$ *decimillesimi* 9.

Vediamo ora come si può eseguire la moltiplicazione di $86,\overline{93}$ per 6,42145, cioè di decimillesimi $869393,\overline{93}$ per 6,42145, ossia di decimillesimi $869393,\overline{93} \times (6 + 0,4 + 0,02 + 0,001 + 0,0004 + 0,00005)$.

Per eseguire questa moltiplicazione dovremmo calcolare:

1°) decimillesimi $869393,\overline{93} \times 6$. Calcoleremo invece decimillesimi $869393 \times 6 =$ decimillesimi 5216358, trascurando così decimillesimi $0,\overline{93} \times 6$, minore di *decimillesimi* 6.

2°) decimillesimi $869393,\overline{93} \times 0,4 =$ decimillesimi $86939,3\overline{93} \times 4$. Calcoleremo invece decimillesimi $86939 \times 4 =$ decimillesimi 347756, trascurando così decimillesimi $0,3\overline{93} \times 4$, minore di *decimillesimi* 4.

3°) decimillesimi $869393,\overline{93} \times 0,02 =$ decimillesimi $8693,\overline{93} \times 2$. Calcoleremo invece decimillesimi $8693 \times 2 =$ decimillesimi 17386, trascurando così decimillesimi $0,\overline{93} \times 2$, minore di *decimillesimi* 2.

4°) decimillesimi $869393,\overline{93} \times 0,001 =$ decimillesimi $869,3\overline{93} \times 1$. Calcoleremo invece decimillesimi $869 \times 1 =$ decimillesimi 869, trascurando decimillesimi $0,3\overline{93} \times 1$, minore di *decimillesimi* 1.

5°) decimillesimi $869393,\overline{93} \times 0,0004 =$ decimillesimi $86,\overline{93} \times 4$. Calcoleremo invece decimillesimi $86 \times 4 =$ decimillesimi 344, trascurando così decimillesimi $0,\overline{93} \times 4$, minore di *decimillesimi* 4.

6°) decimillesimi $869393,\overline{93} \times 0,00005 =$ decimillesimi $8,6\overline{93} \times 5$. Calcoleremo invece decimillesimi $8 \times 5 =$ decimillesimi 40, trascurando così decimillesimi $0,6\overline{93} \times 5$, minore di *decimillesimi* 5.

Poichè i varî risultati son tutti espressi in decimillesimi, essi posson disporsi in colonna e sommarsi nel modo indicato nel § 42. Il risultato richiesto s'otterrà separando quattro cifre decimali dal totale espresso in decimillesimi.

Osservazione. Se le cifre considerate del moltiplicatore son 9 o meno, il valore ottenuto con la moltiplicazione abbreviata è approssimato per difetto a meno dell'unità scelta ed è inutile calcolare una limitazione superiore dell'errore. Questa limitazione invece occorre se le cifre del moltiplicatore son più di 9 o se si tratta di calcolare un determinato numero di cifre decimali esatte del prodotto.

Moltiplicazione fulminea.

45. Un altro metodo rapidissimo per eseguire prodotti anche non approssimati o per trovare valori approssimati, con data approssimazione, di un prodotto, è costituito dalla cosidetta *moltiplicazione fulminea* od *ordinata*.

Vediamo prima come la moltiplicazione si eseguisca pel calcolo di prodotti non approssimati.

Sia da moltiplicare 62 per 35. Osserviamo che in 62×35 son contenute:

(6×3) centinaia (6 decine per 3 decine);

$(6 \times 5 + 2 \times 3)$ decine (6 decine per 5 unità e 2 unità per 3 decine);

(2×5) unità (2 unità per 5 unità).

Può dunque scriversi:

6×3	18
$6 \times 5 + 2 \times 3$	36
2×5	10

$62 \times 35 = 2170$.

Similmente per calcolare 4739×425 formiamo la tabella:

4×4	16
$4 \times 2 + 7 \times 4$	36
$4 \times 5 + 7 \times 2 + 3 \times 4$	46
$7 \times 5 + 3 \times 2 + 9 \times 4$	77
$3 \times 5 + 9 \times 2$	33
9×5	45

$4739 \times 425 = 2014075$.

46. Il calcolo si eseguisce più comodamente scrivendo sopra una lista di carta il moltiplicatore con le cifre in ordine inverso. Si pone la lista sopra il moltiplicando, in modo che la prima cifra a sinistra del moltiplicando e la prima a destra del moltiplicatore si dispongano in colonna, e si sposta ogni volta la lista in modo che si dispongan successivamente in colonna due, tre cifre, ecc. del moltiplicando e del moltiplicatore. Ogni volta si moltiplican fra loro i numeri espressi dalle singole cifre incolonnate e, quando i prodotti son due o più di due, si sommano i risultati che si dispongono opportunamente scalati.

Così nel precedente prodotto si ha:

4739 $\quad \boxed{524}$

$\boxed{524}$
4739 $\qquad 4 \times 4 = 16$

$\boxed{524}$
4739 $\qquad 4 \times 2 + 7 \times 4 = 36$

$\boxed{524}$
4739 $\qquad 4 \times 5 + 7 \times 2 + 3 \times 4 = 46$

$\boxed{524}$
4739 $\qquad 7 \times 5 + 3 \times 2 + 9 \times 4 = 77$

$\boxed{524}$
4739 $\qquad 3 \times 5 + 9 \times 2 = 33$

$\boxed{524}$
4739 $\qquad 9 \times 5 = 45$

2014075

47. La moltiplicazione fulminea è particolarmente utile nel calcolo del prodotto di numeri decimali, quando occorre trovare un assegnato numero di cifre decimali. Occorre perciò tener conto della posizione della virgola, come indicheremo subito con un esempio.

Cerchiamo di nuovo il valore approssimato per difetto con due cifre decimali esatte di $86,\overline{93} \times 6,4214532....$.

Scriveremo sopra una striscia di carta il moltiplicatore con le cifre in ordine invertito, lasciando però la virgola fra le cifre 6 e 4. Così dovremo lavorare sui numeri:

86,939393.... ; $\boxed{....2354124,6}$

Procederemo come nel caso dei prodotti esatti:

$\boxed{....2354124,6}$
86,939393 $\qquad 8 \times 6 = 48$ (decine)

$\boxed{....2354124,6}$
86,939393 $\qquad 8 \times 4 + 6 \times 6 = 68$ (unità)

$\boxed{....2354124,6}$
86,939393 $\qquad 8 \times 2 + 6 \times 4 + 9 \times 6 = 94$ (decimi)

$\boxed{....2354124,6}$
86,939393 $\qquad 8 \times 1 + 6 \times 2 + 9 \times 4 + 3 \times 6 = 74$ (centesimi)

$\boxed{....2354124,6}$
86,939393 $\qquad 8 \times 4 + 6 \times 1 + 9 \times 2 + 3 \times 4 + 9 \times 6 = 122$ (millesimi)

$\boxed{....2354124,6}$
86,939393 $\qquad 8 \times 5 + 6 \times 4 + 9 \times 1 + 3 \times 2 + 9 \times 4 + 3 \times 6 = 133$ (decimillesimi)

$\boxed{....2354124,6}$
86,939393 $\qquad 8 \times 3 + 6 \times 5 + 9 \times 4 + 3 \times 1 + 9 \times 2 + 3 \times 4 + 6 \times 9 = 177$ (centomillesimi)

A questo punto possiamo arrestare l'operazione, perchè è evidente che la parte trascurata non si ripercuote sulle prime due cifre decimali. Si eseguisce la somma secondo lo schema:

```
48
 68, . . . . . . . . (unità)
  94
   74
   122
    133
     177
---------
558,27
```

procedendo così:

7 centomillesimi; li trascuriamo;

3 + 7 = 10 decimillesimi formano 1 millesimo; riportiamo 1;

1 (di riporto) + 2 + 3 + 1 = 7 millesimi, che non formano centesimi; li trascuriamo;

4 + 2 + 1 = 7; scriviamo la cifra 7 del risultato;

ecc.

Insomma si scrivono le sole cifre del risultato che interessano.

Divisione abbreviata.

48. Si debba calcolare rapidamente un valore approssimato di $34,\overline{37} : 6,\overline{243}$ con errore minore di un millesimo. Il calcolo mentale già ci dice che il quoziente ha la parte intera di una sola cifra. Ciò premesso, consideriamo il numero che si ottiene da 6,243243.... tralasciando la virgola e prendendo nel numero 6243243.... da sinistra a destra : 1 cifra (quante ve ne sono nella parte intera del quoziente) + + 3 cifre (per avere un errore inferiore a $\left.\frac{1}{1000}=\frac{1}{10^3}\right)$ + 2 cifre (numero fisso). Al numero 624324 ottenuto si aggiunga 1. Si perviene così al numero 624325, che si assume come divisore. Come dividendo prendiamo il numero che si ottiene da 34,3737.... tralasciando la virgola e prendendo da sinistra a destra tante cifre in modo da formare un numero compreso fra 624325 e 624325 × 10. Otteniamo in tal modo il dividendo 3437373.

Dopo ciò, iniziamo la divisione :

$$\begin{array}{r|l} 3437373 & 624325 \\ \cline{2-2} 315748 & 5 \end{array} .$$

Dividiamo ora il resto 315748 per 62433, che è il valore approssimato per eccesso a meno di 1 della decima parte del divisore precedentemente impiegato :

$$\begin{array}{r|l} 315748 & 62433 \\ \cline{2-2} 3583 & 5 \end{array} .$$

Dividiamo il resto 3583 per 6244, che è il valore approssimato per eccesso a meno di 1 della decima parte del divisore precedentemente impiegato :

$$\begin{array}{r|l} 3583 & 6244 \\ \cline{2-2} & 0 \end{array} .$$

Analogamente dividiamo 3583 per 625 :

$$\begin{array}{r|l} 3583 & 625 \\ \cline{2-2} 458 & 5 \end{array} ,$$

e successivamente :

$$\begin{array}{r|l} 458 & 63 \\ \cline{2-2} 17 & 7 \end{array} ,$$

$$\begin{array}{r|l} 17 & 7 \\ \cline{2-2} 3 & 2 \end{array}$$

Le cifre ottenute si scrivono una dopo l'altra nel quoziente. L'operazione si dispone così :

$$\begin{array}{r|l} & 73543 \\ 3437373 & 624325 \\ \cline{2-2} 315748 & 550572 \\ 3583 & \\ 458 & \\ 17 & \\ 3 & \end{array}$$

La virgola si può ora mettere a posto, rammentando che la parte intera del quoziente ha una sola cifra. Otteniamo in tal guisa 5,50572.

Se, come nel nostro caso, le cifre d'ordine più alto del dividendo e del divisore non sono rispettivamente 9 e 1, l'errore commesso è per difetto ed inferiore a tante unità dell'ordine più piccolo del quoziente quante se ne ottengono contando le cifre del divisore, aggiungendo 1, moltiplicando il totale per 10 e, se l'ultimo resto non è 0, aumentando di 1.

L'errore, nel calcolo eseguito, è inferiore perciò a centomillesimi 10 × (6 + 1) + 1 = 71. Così 5,50572 e 5,50572 + 0,00071 = = 5,50643 sono valori approssimati del quoziente assegnato per difetto e per eccesso rispettivamente a meno di 0,00071, quindi a meno di 0,001.

49. Se occorrono tre cifre decimali esatte del quoto $34,\overline{37} : 6,\overline{243}$, bisogna ripetere il calcolo prendendo una cifra in più nel dividendo e nel divisore.

Si noti inoltre che se il divisore della divisione abbreviata ha 8 cifre o meno, il valore ottenuto ha l'approssimazione richiesta. Se il divisore ha 9 cifre o più occorre aumentare di una o più cifre dividendo e divisore.

50. Facciamo qualche altro esempio :

Debbasi calcolare un valore approssimato con errore minore di un centesimo di $1435,\overline{74}$: 3,14159265.... .

L'operazione :

$$\begin{array}{r|l} & 425260 \\ 14357474 & 3141593 \\ \cline{2-2} 1791102 & 4570122 \\ 220302 & \\ 390 & \\ 75 & \\ 11 & \\ 3 & \end{array}$$

fornisce 457,0122, che è il valore richiesto. Se poi si vuol sapere quali sono le cifre esatte del risultato, si dovrà calcolare :

$$10 \times (7 + 1) + 1 = 81.$$

Il quoto assegnato è allora compreso fra:

$$457{,}0122 \quad \text{e} \quad 457{,}0122 + 0{,}0081 = 457{,}0203.$$

La seconda cifra decimale è dunque incerta. Dovendo calcolarla, si eseguirà la divisione abbreviata di 143574747 per 31415927.

Osserviamo che nella divisione eseguita i divisori successivi sono 3141593 ; 314160 ; 31416, perchè la decima parte di 314160 è esattamente 31416.

51. Debbasi calcolare $99{,}\overline{989} : 1{,}\overline{021}$ con un errore inferiore a un millesimo. L'operazione:

$$\begin{array}{r|l}
 & 213213 \\
9998998 & 1021022 \\ \cline{2-2}
809800 & 9793110 \\
95079 & \\
3180 & \\
114 & \\
11 & \\
0 &
\end{array}$$

conduce al valore 97,93110 [1].

L'errore per difetto commesso si calcola come al § 48; ma, siccome la prima cifra del dividendo è 9 e la prima del divisore è 1, occorre aggiungere alla quantità ivi indicata una unità dell'ordine più piccolo.

Siccome poi le cifre del divisore sono 7 e il resto è 0, nulla occorre ulteriormente aggiungere. L'errore è perciò inferiore a centomillesimi $10 \times (7 + 1) + 1 = 81$. Dunque il quoto assegnato è compreso fra:

$$97{,}93110 \quad \text{e} \quad 97{,}93110 + 0{,}00081,$$

ossia fra 97,93110 e 97,93191, valori approssimati rispettivamente per difetto e per eccesso con errore minore di $0{,}00081 < 0{,}001$. Le prime tre cifre decimali del risultato sono pertanto esatte.

La seconda osservazione del § 49 vale anche in questo caso.

52. Dovendosi calcolare con l'approssimazione di un decimillesimo $3{,}14159265\ldots : 39{,}\overline{83}$, moltiplicheremo il dividendo per 100, ossia per una potenza di 10 tale che il quoto venga ad avere la parte intera di una cifra.

Dovremo allora calcolare:

$$314{,}159265\ldots : 39{,}\overline{83},$$

[1] Si noti che il quoziente ha tante cifre quante il divisore; se uno dei dividendi successivi è multiplo del corrispondente divisore, le cifre seguenti del quoziente sono 0, ma debbono essere scritte quando occorra fare il calcolo dell'errore.

con errore inferiore a 100 decimillesimi, ossia a 1 centesimo. Il risultato dovrà essere diviso per 100.

53. Per trovare con un'assegnata approssimazione il quoto di due numeri minori di 1, si moltiplicheranno entrambi (e con questo il quoto non cambia) per una potenza di 10 tale che entrambi divengano maggiori di 1. Di poi si procede come si è precedentemente indicato.

ESERCIZI

39. Eseguire le seguenti operazioni:

$$51{,}\overline{83} + \pi \;;\; 7{,}4\overline{85} - \pi \;;$$
$$3{,}5 + 6{,}8\overline{4} \;;\; 87{,}6 - 51{,}\overline{3}\,,$$

assegnando un valore approssimato per difetto a meno di 0,01 del risultato.

40. Calcolare, con l'approssimazione di 0,01:

$$\pi \times 2 \;;\; \pi \times \sqrt{2} \;;\; \sqrt{2} \times \sqrt{3} \;;\; \pi^2 \;;$$
$$2 : \pi \;;\; \pi : 2 \;;\; \pi : \sqrt{2} \;;\; \sqrt{2} : \pi\,.$$

Calcolare inoltre i risultati delle precedenti operazioni con due cifre decimali esatte.

41. Rammentando che l'Equatore misura circa 40000 ***km***, calcolare:

la lunghezza del raggio terrestre approssimato a meno di un ettometro, per difetto e per eccesso;

l'area della superficie della Terra, approssimata a meno di 100 km^2, per difetto e per eccesso.

42. Calcolare, coll'approssimazione di 1 millesimo, mediante la moltiplicazione abbreviata:

$$54{,}\overline{81} \times 36{,}\overline{884} \;;\; 14{,}0\overline{924} \times 0{,}08\overline{74}\;;$$
$$6{,}9432 \times 0{,}\overline{008} \;;\; 314{,}\overline{41} \times 1347{,}\overline{2}\,.$$

43. Calcolare, con la moltiplicazione fulminea:

$$625 \times 4156 \;;\; 87409 \times 56743 \;;\; 640952 \times 435166\,.$$

44. Calcolare con tre cifre decimali esatte, mediante la moltiplicazione fulminea:

$$415{,}\overline{61} \times 67{,}\overline{72} \;;\; 815{,}\overline{39} \times 9{,}\overline{09}\,.$$

45. **Trovare il valore per difetto e per eccesso, con l'approssimazione di 1 millesimo, di:**

$$145,\overline{64} : 61,\overline{3} \quad ; \quad 56,963 : 8,\overline{61} \quad ; \quad 6,\overline{1} : 6,\overline{12} ;$$

$$84,\overline{41} : 0,\overline{34} \quad ; \quad 3,4 : 0,\overline{2} \quad ; \quad 0,0\overline{4} : 0,0\overline{919} ,$$

mediante la divisione abbreviata.

Esporremo una serie di norme che servono a semplificare o a render più rapidi i calcoli numerici.

46. *a*) Dovendo eseguire rapidamente l'addizione di molti termini conviene cercar di associare, quando è possibile, gli addendi in modo che il totale delle somme parziali termini con 0; così, per calcolare:

$$25 + 43 + 137 + 214 + 15 + 16 ,$$

conviene fare:

$$(25 + 15) + (43 + 137) + (214 + 16) ,$$

ossia,

$$40 + 180 + 230 = 450 .$$

Questo metodo si chiama *addizione per parti*. Esso viene adoperato dai contabili nel calcolo delle somme di numeri in colonna.

b) Dovendo addizionare 425 e 372, poichè $372 = 300 + 70 + 2$, si può aggiungere a 425 successivamente 300, poi 70, poi 2.

c) Dovendo aggiungere 11 ad un numero, si può aggiungere 10, poi 1; analogamente, dovendo aggiungere 101, si può aggiungere 100, poi 1.

d) Dovendo aggiungere 9 ad un numero, si può aggiungere 10, poi togliere 1; analogamente, dovendo aggiungere 99, si può aggiungere 100 poi togliere 1.

e) Similmente si opera quando si debba aggiungere ad un numero p. es. $503 = 500 + 3$; $497 = 500 - 3$; ecc.

47. *a*) Dovendo sottrarre 157 da 239, poichè $157 = 100 + 50 + 7$, si può togliere da 239 successivamente 100, poi 50, poi 7.

b) Dovendo togliere 11 da un numero, si può togliere 10, poi 1; analogamente dovendo togliere 101.

c) Dovendo togliere 9 da un numero, si può togliere 10, poi aggiungere 1; analogamente dovendo togliere 99.

d) Analogamente si opera dovendo togliere da un numero p. es. $503 = 500 + 3$; $497 = 500 - 3$.

e) Dovendo eseguire la sottrazione $4539 - 503$, si può anzitutto toglier 3 da ambo i termini, riducendosi così a $4536 - 500 = 4036$.

f) Dovendo eseguire la sottrazione $4539 - 497$, si può anzitutto aumentare i due termini da 3 riducendosi a $4542 - 500 = 4042$.

48. *a*) Per moltiplicare un numero per 20, 30, 40,... si moltiplica il numero per 2, 3, 4.... e poi per 10.

b) Per moltiplicare un numero per 11, si moltiplica il numero per 10 e si aggiunge il numero stesso; analogamente si opera per 101.

c) Per moltiplicare un numero per 21, si moltiplica il numero per 20 poi si aggiunge il numero. Analogamente dicasi per 201.

d) Per moltiplicare un numero per 5 si moltiplica per 10, poi si divide per 2. Analogamente si procede per moltiplicare per $15 = 30 : 2$; per $25 = 100 : 4$; per $125 = 1000 : 8$.

e) Per moltiplicare un numero per 9 si moltiplica il numero per 10 e si toglie il numero. Analogamente si procede per moltiplicare per $99 = 100 - 1$; $19 = 20 - 1$; $18 = 20 - 2$.

f) Per moltiplicare un numero per 0,5, si divide il numero per 2, essendo $0,5 = 1 : 2$. Analogamente, per moltiplicare per 0,25, si divide per 4, essendo $0,25 = 1 : 4$; e per moltiplicare per 0,125, si divide per 8, essendo $0,125 = 1 : 8$.

g) Per moltiplicare a mente due numeri di due cifre, p. es. 24 e 36, si può procedere così. Si fa il prodotto dei numeri espressi dalle cifre delle unità: $4 \times 6 = 24$; si scrive 4 e si riporta mentalmente 2. Si fa indi la somma del riporto e dei prodotti dei numeri espressi dalla cifra delle unità di ciascuno dei due numeri e delle decine dell'altro: $2 + (2 \times 6) + (4 \times 3) = 2 + 12 + 12 = 26$; si scrive 6 davanti al precedente 4 e si riporta 2. Si fa la somma del riporto e del prodotto dei numeri espressi dalle cifre delle decine dei due numeri: $2 + (2 \times 3) = 8$. Il risultato è 864.

Questo metodo può utilmente applicarsi al calcolo del quadrato di un numero di due cifre. Così per avere 79^2, si ha:

$$9 \times 9 = 81 ;$$

scriviamo 1 e riportiamo 8;

$$8 + (7 \times 9) + (7 \times 9) = 8 + (2 \times 7 \times 9) = 8 + 126 = 134 ;$$

scriviamo 4 e riporiamo 13;

$$13 + (7 \times 7) = 13 + 49 = 62 .$$

Risulta 6241.

49. *a*) Per dividere un umero per 20, 30, 40 si divide per 2, 3, 4,... e poi per 10.

b) Per dividere un numero per 5, prima si divide per 10, poi si moltiplica per 2, essendo $5 = 10 : 2$. Analogamente, per dividere per $25 = 100 : 4$, si divide per 100 e si moltiplica per 4; per dividere per $125 = 1000 : 8$, si divide per 1000 e si moltiplica per 8.

c) Per dividere un numero per 0,5, si moltiplica il numero per 2, essendo $0,5 = 1 : 2$; analogamente per dividere per 0,25, essendo $0,25 = 1 : 4$, si moltiplica per 4; e per dividere per $0,125 = 1 : 8$, si moltiplica per 8.

50. *a)* Per passare dal quadrato di un numero intero al quadrato del suo successivo, si aggiunge al quadrato del numero il doppio del numero e 1.

Così, essendo $10^2 = 100$, è:

$$11^2 = 10^2 + (2 \, . \, 10) + 1 = 100 + 20 + 1 = 121\,;$$
$$12^2 = 11^2 + (2 \, . \, 11) + 1 = 121 + 22 + 1 = 144\,;$$
$$13^2 = 12^2 + (2 \, . \, 12) + 1 = 144 + 24 + 1 = 169\,; \text{ ecc.}$$

b) Per passare dal quadrato di un numero intero al quadrato del suo precedente, si aggiunge 1 al quadrato del numero e si toglie il doppio del numero dato.

Così, essendo $20^2 = 400$, è:

$$19^2 = 20^2 + 1 - (2 \times 20) = 400 + 1 - 40 = 361\,;$$
$$18^2 = 19^2 + 1 - (2 \times 19) = 361 + 1 - 38 = 324\,;$$
$$17^2 = 18^2 + 1 - (2 \times 18) = 324 + 1 - 36 = 289\,; \text{ ecc.}$$

c) Per fare il quadrato di un numero intero che termina per 5 si moltiplica il numero delle decine per il suo consecutivo e si pone accanto al prodotto 25. Così per ottenere 65^2, si calcola $6 \times 7 = 42$, e si trova $65^2 = 4225$; e per avere 125^2 si calcola $12 \times 13 = 156$, e si ottiene $125^2 = 15625$; ecc.

d) Il quadrato di un numero di due cifre, la cui cifra delle decine è 5, si ottiene scrivendo la somma di 25 e del numero espresso dalla cifra delle unità, seguita dal quadrato di questo numero, preceduto da uno 0, se tale quadrato è d' una sola cifra. Così pel calcolo di 59^2, ci si deve procurare $25 + 9 = 34$, e $9^2 = 81$. Il risultato è 3481.

Esponiamo, anche a proposito delle frazioni, una serie di norme che servono a semplificare o a render più rapidi i calcoli numerici (1).

51. *a)* Dovendo eseguire una serie di addizioni e di sottrazioni, si può aggiungere alla prima frazione tutte quelle che sono precedute dal segno +; indi fare la somma di quelle che sono precedute dal segno —, poi fare la differenza fra le due somme.

Così, per avere:

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{7} - \frac{2}{3} + \frac{5}{12} - \frac{3}{14},$$

si può calcolare:

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{7} + \frac{5}{12} = \frac{63 + 60 + 35}{84} = \frac{158}{84} = \frac{79}{42}\,;$$

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{14} = \frac{28 + 9}{42} = \frac{37}{42}\,; \text{ e infine } \frac{79}{42} - \frac{37}{42} = \frac{42}{42} = 1\,.$$

(1) Soltanto per gli allievi delle scuole agrarie.

b) Dovendo fare una serie di somme, conviene associare gli addendi interi e gli addendi che hanno lo stesso denominatore.

Così, per avere:

$$2 + \frac{5}{12} + \frac{7}{4} + \frac{3}{12} + 9 + \frac{7}{12} + \frac{5}{4},$$

si calcola:

$$(2 + 9) + \frac{5 + 3 + 7}{12} + \frac{7 + 5}{4} = 11 + \frac{15}{12} + \frac{12}{4} =$$

$$= 11 + \frac{5}{4} + 3 = 14 + \frac{5}{4} = \frac{61}{4}\,.$$

c) Dovendosi dare il risultato di una serie di somme sotto forma di numero misto, conviene estrarre singolarmente, da ogni frazione, gli interi. Così, nell'esempio precedente, si ha:

$$11 + \frac{5}{4} + 3 = 14 + 1 + \frac{1}{4} = 15 + \frac{1}{4}\,.$$

Analogamente:

$$\frac{27}{5} + \frac{33}{7} = 5 + \frac{2}{5} + 4 + \frac{5}{7} = 9 + \frac{14 + 25}{35} = 9 + \frac{39}{35} = 10 + \frac{4}{35}\,.$$

d) Dovendo eseguire una differenza fra due numeri misti si può togliere, se è possibile, la frazione dalla frazione e l' intero dall' intero. Così:

$$\left(3 + \frac{5}{6}\right) - \left(2 + \frac{1}{5}\right) = 1 + \frac{5}{6} - \frac{1}{5} = 1 + \frac{25 - 6}{30} = 1 + \frac{19}{30}\,.$$

Se la sottrazione delle frazioni non è possibile, conviene aggiungere alla frazione che fa parte del minuendo una unità, tolta dalla parte intera, poi procedere come sopra. Così:

$$\left(4 + \frac{5}{7}\right) - \left(2 + \frac{8}{9}\right) = 1 + \frac{12}{7} - \frac{8}{9} = 1 + \frac{108 - 56}{63} = 1 + \frac{52}{63}\,.$$

52. *a)* Per moltiplicare una frazione per un numero summultiplo del suo denominatore, si divide questo pel numero. Così:

$$\frac{2}{9} \times 3 = \frac{2}{9 : 3} = \frac{2}{3}\,.$$

b) Per dividere una frazione per un numero summultiplo del suo numeratore, si divide questo pel numero. Così:

$$\frac{12}{5} : 3 = \frac{12 : 3}{5} = \frac{4}{5}\,.$$

c) Per moltiplicare più frazioni, si può eseguire il prodotto dei numeratori e quello dei denominatori dopo aver proceduto a tutte le possibili semplificazioni. Così: $\frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{12} \times \frac{3}{28} \times \frac{9}{5}$ = (sopprimendo un fattore 3) $= \frac{1}{4} \times \frac{5}{2} \times \frac{7}{12} \times \frac{3}{28} \times \frac{9}{5}$ = (sopprimendo i fattori 5 e 7) $= \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{12} \times \frac{3}{4} \times \frac{9}{1}$ = (sopprimendo un fattore 3) $= \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times 9 = \frac{9}{128}$.

d) Per calcolare una frazione a termini frazionari si può moltiplicarne numeratore e denominatore per il m.c.m. dei due denominatori parziali. Così, essendo m.c.m. (26,40) = 520,

$$\frac{\frac{35}{26}}{\frac{123}{40}} = \frac{\frac{35}{26} \times 520}{\frac{123}{40} \times 520} = \frac{35 \times 20}{123 \times 13}.$$

La semplificazione è notevole se i due denominatori sono eguali. Così:

$$\frac{\frac{3}{14}}{\frac{5}{14}} = \frac{3}{5}.$$

CAPITOLO TERZO

Quadrati e radici quadrate.

Radici quadrate (¹).

54. Ricordiamo che la seconda potenza di un numero si chiama *quadrato* di questo. Se, assegnato un numero razionale (in particolare intero), esiste un secondo numero razionale il cui quadrato sia eguale al primo, il secondo numero dicesi *radice quadrata* del primo e questo chiamasi *quadrato perfetto*.

Per esprimere che la radice quadrata di 36 è 6, si scrive $\sqrt{36} = 6$. Similmente $\sqrt{361} = 19$, perchè $19^2 = 361$; $\sqrt{4{,}41} = 2{,}1$, perchè $2{,}1^2 = 4{,}41$; $\sqrt{\frac{360}{250}} = \frac{6}{5}$, perchè $\left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{36}{25} = \frac{360}{250}$.

Vi sono numeri razionali e numeri interi, che non sono quadrati perfetti, p. es. 2. Non esiste cioè nessun numero razionale, il cui quadrato sia uguale a 2.

Se un numero razionale non è un quadrato perfetto, non possono che costruirsi valori razionali i cui quadrati differiscon di poco, per difetto o per eccesso, dal numero dato. Cioè della radice quadrata del numero in tal caso si conoscono soltanto valori approssimati, in quanto trattasi di un numero irrazionale. P. es. $\sqrt{2}$ è un numero irrazionale.

Si dice ***valore decimale approssimato a meno di una unità o di un decimo o di un centesimo; ecc., per difetto, della radice quadrata*** *(razionale o irrazionale) di un numero dato, un numero arrestato alla cifra delle unità o dei decimi o dei centesimi, ecc., il cui quadrato è minore del numero dato, ma è inoltre tale che aumentandone di 1 l'ultima cifra, ed elevando a quadrato il numero così aumentato, si ottiene un valore maggiore del numero dato. Quest'ultimo valore chiamasi* ***valore decimale approssimato per eccesso a meno di una unità, di un decimo, di un centesimo; ecc.*** (²).

(¹) Soltanto per gli allievi delle scuole agrarie e industriali.

(²) Si sottintendono escluse, conformemente al § 31, le scritture decimali periodiche a periodo 9.

55. Vediamo come si estrae la radice quadrata esatta o a meno di 1 unità da un numero intero.

Se il numero è di due cifre, l'estrazione si fa a mente. Così, essendo 93 compreso fra 81 e 100, cioè fra 9^2 e 10^2 è $\sqrt{93}^{\,1} = 9$, ove $\sqrt{\ }^{\,1}$ denota la radice quadrata intera approssimata a meno di 1 per difetto.

Se il numero ha più di due cifre, si procede come segue.

Si debba estrarre la radice quadrata da 8649. Si divide il numero in gruppi di due cifre a partire da quella della unità (il primo gruppo di cifre a sinistra potendo risultare anche di una sola cifra) e si dispone l'operazione così:

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{86\dot{4}9} & \\ \hline & \end{array}$$

Si calcola (a mente) la radice quadrata esatta o intera approssimata per difetto a meno di 1 del primo gruppo a sinistra (che è 86). Tale radice (che è 9) si scrive nello spazio fra le due parallele a destra, mentre il suo quadrato (che è 81) si pone sotto 86 (le cifre delle unità in colonna) e si fa la differenza (che risulta 5, ma potrebbe risultare anche 0). Si ha così:

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{86\dot{4}9} & 9 \\ \underline{81} & \\ \ \ 5 & \end{array}$$

Si scrive sotto alla radice trovata il suo doppio (che è 18) e accanto alla differenza trovata si pone il secondo gruppo (che è 49), separando con un puntino la cifra delle unità (che è 9). Si ha così:

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{86\dot{4}9} & 9 \\ \underline{81} & \overline{18} \\ \ \ 54\dot{}9 & \end{array}$$

Si calcola (a mente) quante volte il doppio della radice trovata sta nel numero delle decine del numero scritto in basso a sinistra, cioè, a mente, si calcola il quoziente di $54 : 18$, che è 3. Si pone 3 accanto al doppio della radice trovata, cioè a 18 e si moltiplica il numero così formato per 3. Si ha così:

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{86\dot{4}9} & 9 \\ \underline{81} & \overline{183 \times 3 = 549} \\ \ \ 54\dot{}9 & \end{array}$$

Si confronta il prodotto trovato col numero scritto in basso a sinistra: se il primo non è maggiore del secondo, si scrive quello sotto questo (cifra delle unità in colonna) e si fa la differenza. Si pone

poi la cifra 3, che abbiamo scritto accanto a 18, vicino a 9, fra le due parallele a destra. Si ha così:

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{86\dot{4}9} & 93 \\ \underline{81} & \overline{183 \times 3 = 549} \\ \ \ 54\dot{}9 & \\ \ \ \underline{549} & \\ \ \ \ 00 & \end{array}$$

L'operazione è finita e, poichè la differenza è zero, 93 è la radice quadrata di 8649, cioè $\sqrt{8649} = 93$.

Se si fosse cercata la radice di 8641, il prodotto 183×3 sarebbe risultato maggiore di 541, numero da cui si deve togliere; in tal caso si deve sostituire la cifra 3 con 2 e si ripete l'operazione, così:

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{86\dot{4}1} & 92 \\ \underline{81} & \overline{183 \times 3 = 549} \\ \ \ 54\dot{}1 & 182 \times 2 = 364 \\ \ \ \underline{364} & \\ \ \ 177 & \end{array}$$

La differenza non è 0, dunque $\sqrt{8641}^{\,1} = 92$.

Se il numero ha più di quattro cifre, si divide in gruppi di due cifre a partire da destra e si procede come nel caso precedente per i primi due gruppi a sinistra. Dovendosi estrarre la radice quadrata, p. es. da 62394732, si dispone l'operazione così:

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{62\dot{3}94\dot{7}32} & 78 \\ \underline{49} & \overline{149 \times 9 = 1341} \\ 133\dot{}9 & 148 \times 8 = 1184 \\ \underline{1184} & \\ \ \ 155 & \end{array}$$

Si tira ora una riga sotto il prodotto 148×8 e si procede, abbassando il terzo gruppo, nello stesso modo come quando si abbassava il secondo e così di seguito finchè vi sono gruppi.

Si ha perciò:

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{62\dot{3}94\dot{7}32} & 7899 \\ \underline{49} & \overline{149 \times 9 = 1341} \\ 133\dot{}9 & \underline{148 \times 8 = 1184} \\ \underline{1184} & \underline{1569 \times 9 = 14121} \\ \ \ 1554\dot{}7 & 15789 \times 9 = 142101 \\ \ \ \underline{14121} & \\ \ \ \ \ 14263\dot{}2 & \\ \ \ \ \ \underline{142101} & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ 531 & \end{array}$$

Dunque $\sqrt{62394732}^1 = 7899$.

Vediamo un altro esempio :

$$
\begin{array}{l|l}
\sqrt{5\dot{3}29\dot{5}27} & 2308 \\
\ \ 4 & 43 \times 3 = 129 \\
\hline
\ \ 13\dot{2} & 4608 \times 8 = 36864 \\
\ \ 129 & \\
\hline
\quad 39\dot{5}2\dot{7} & \\
\quad 36864 & \\
\hline
\quad\ \ 2663 &
\end{array}
$$

Essendo 0 la terza cifra, si abbassa immediatamente il gruppo successivo. Dunque $\sqrt{5329527}^1 = 2308$.

Per fare la prova della radice quadrata, cioè per assicurarsi se l'operazione è fatta bene, si procede così :

Se la radice trovata è esatta, il suo quadrato deve risultare uguale al numero dato.

Se la radice trovata non è esatta, l'ultima differenza trovata, che si chiama *resto*, non deve superare il doppio della radice trovata. Inoltre il quadrato di questa, aumentato del resto, deve dare per totale il numero dato.

Così, negli esempi fatti deve risultare :

$93^2 = 8649$;

$92^2 + 177 = 8641$, essendo $177 < 2 \times 92$, ecc.

56. Sussiste la :

REGOLA PER ESTRARRE LA RADICE QUADRATA INTERA APPROSSIMATA A MENO DI 1 PER DIFETTO DA UN NUMERO DECIMALE E DA UNA FRAZIONE NON DECIMALE. *Si estrae la radice quadrata dalla parte intera del numero.*

Così, essendo $\sqrt{135}^1 = 11$, è $\sqrt{135{,}72}^1 = 11$; essendo $\frac{27}{7} =$
$= 3 + \frac{6}{7}$ e $\sqrt{3}^1 = 1$, è $\sqrt{\frac{27}{7}}^1 = 1$.

REGOLA PER TROVARE LA RADICE QUADRATA DECIMALE APPROSSIMATA A MENO DI $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, ... DI UN NUMERO INTERO. *Si pongono a destra del numero, separati da una virgola, 2 o 4 o 6 .... zeri. Si estrae la radice quadrata dal numero ottenuto, senza tener conto della virgola. Nel risultato si pone la virgola a destra della cifra ottenuta abbassando il gruppo di cifre che precede la virgola.*

Così, volendosi la radice quadrata decimale approssimata per difetto a meno di $\frac{1}{100}$ di 2, si ottiene :

$$
\begin{array}{l|l}
\sqrt{2{,}0\dot{0}00} & 1{,}41 \\
\ 1 & 25 \times 5 = 125 \\
\hline
\ 10\dot{0} & 24 \times 4 = 96 \\
\ \ 96 & 281 \times 1 = 281 \\
\hline
\ \ \ 40\dot{0} & \\
\ \ \ 281 & \\
\hline
\ \ \ 119 &
\end{array}
$$

quindi $\sqrt{2}^{\frac{1}{100}} = 1{,}41$, avvertendo che le scritture $\sqrt{\ \ }^{\frac{1}{100}}$, $\sqrt{\ \ }^{0{,}10}$ indicano la radice decimale approssimata per difetto a meno di $\frac{1}{100}$.

57. Si ha inoltre la :

REGOLA PER ESTRARRE LA RADICE QUADRATA DECIMALE APPROSSIMATA PER DIFETTO A MENO DI $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ . .... DA UN NUMERO DECIMALE LIMITATO O PERIODICO. *Si procede come per un intero scrivendo a destra della parte intera le prime 2, o 4, ... cifre decimali del numero (od eventualmente, taluni 0).*

La stessa regola vale per estrarre la radice quadrata da un numero razionale qualunque, che si ridurrà prima a decimale, limitato o periodico.

Così, dato il numero 2,314, per avere $\sqrt{2{,}314}^{0,1}$, calcoliamo $\sqrt{2{,}31}^{0,1} = 1{,}5$. Per avere $\sqrt{\frac{23}{7}}^{0,01}$, poichè $\frac{23}{7} = 3{,}2857....$, calcoliamo $\sqrt{3{,}2857}^{0,01} = 1{,}81$.

Se estraendo la radice quadrata da un numero decimale limitato, dopo aver esaurito tutte le cifre significative, si ha resto 0, il numero è un quadrato perfetto.

Così, $\sqrt{1{,}2321} = 1{,}11$, mentre $\sqrt{1{,}2321}^1 = 1$; $\sqrt{1{,}2321}^{0,1} = 1{,}1$.

Uso delle tavole dei quadrati (¹).

58. Per calcolare rapidamente il quadrato e la radice quadrata di un numero, si può usare la tavola dei quadrati posta alla pag. 107 e seguenti.

(¹) Soltanto per gli allievi delle scuole agrarie.

In essa, sulla medesima riga, si trovano, per i numeri compresi fra 1 e 300, nella prima colonna (contrassegnata con n), il numero; nella seconda (contrassegnata con n^2), il suo quadrato; nella quarta (contrassegnata con $\sqrt{n}$), la radice quadrata decimale approssimata, per difetto, a meno di $\frac{1}{1000}$ (esatta, se intera).

Usando questa tavola possiamo ottenere il quadrato di un numero non maggiore di 300, leggendolo direttamente nella seconda colonna, sulla stessa riga.

Nella quarta colonna si legge direttamente, sulla stessa riga, la radice quadrata decimale approssimata a meno di $\frac{1}{1000}$, per difetto, del numero considerato, compreso fra 1 e 300.

Se il numero è maggiore di 300 e minore di 90000, si cerca nella seconda colonna: se ve lo troviamo, sulla stessa riga nella prima colonna, leggiamo la radice quadrata esatta. Se non lo troviamo, esso sarà compreso fra due numeri della seconda colonna. Al minore dei due corrisponde, sulla stessa riga nella prima colonna, un numero che è la radice quadrata approssimata per difetto a meno di 1 del numero dato.

Si voglia p. es. trovare la radice quadrata di 45796.

Poichè questo numero trovasi nella seconda colonna in corrispondenza al numero 214 della prima colonna, avremo $\sqrt{45796} = 214$.

Si voglia trovare la radice quadrata di 38792. Questo numero è compreso fra i numeri 38416 e 38809, della seconda colonna, al minore dei quali corrisponde, nella prima colonna, 196, quindi:

$$\sqrt{38792}^{\,1} = 196 .$$

Se il numero è maggiore di 90000, procediamo così:

Per ottenere $\sqrt{758342135}^{\,1}$, separiamo nel numero da destra tanti gruppi di due cifre quanti ne occorre affinchè rimanga a sinistra un numero minore di 90000. Si ottiene:

$$7583\dot{4}2\dot{1}35$$

e poichè $\sqrt{75834}^{\,1} = \sqrt{75625} = 275$, disponiamo l'operazione così:

$\sqrt{7583\dot{4}2\dot{1}35}$	275
75625	

Eseguiamo la differenza fra i due numeri scritti a sinistra e procediamo nella estrazione col metodo noto:

$\sqrt{7583\dot{4}2\dot{1}35}$	27538
75625	$5503 \times 3 = 16509$
= =20921	$55068 \times 8 = 440544$
16509	
441235	
440544	
= 691	

Dunque $\sqrt{758342135}^{\,1} = 27538$.

Se il numero di cui si cerca la radice è decimale, possiamo spostare la virgola di 2, 4, 6, ... posti verso destra o sinistra; cercare la radice quadrata del numero ottenuto e, nel numero risultante, spostare la virgola di 1, 2, 3.... posti in verso contrario.

Così, volendosi calcolare:

$$\sqrt{375,12} ,$$

troviamo:

$$\sqrt{37512}^{\,1} = 193, \text{ quindi:}$$

$$\sqrt{375,12}^{\,0,1} = 19,3 .$$

ESERCIZI

Estrarre la radice quadrata intera dai numeri:

53. 529 ; 3721 ; 81225 ; 49204 .

54. 790 ; 1540 ; 4995 ; 15756 .

55. 10978 ; 10191 ; 4202531 ; 783225 .

56. 212324252 ; 500409031 ; 48494547101 .

Estrarre la radice quadrata decimale approssimata, per difetto, a meno di $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, da:

57. 314 ; 1426 ; 9439 ; 87725 ; 643283 .

58. 0,08 ; 53,4 ; 81,372 ; 0,044 ; 591,4432 .

59. Qual' è la radice quadrata decimale approssimata, per difetto e per eccesso, a meno di $\frac{1}{1000}$, di 2 ? e di 80 ? e di 0,081 ?

60. Qual' è la radice quadrata decimale approssimata, per difetto e per eccesso, a meno di $\frac{1}{100}$, di 0,084372 ? di 54,4937215 ?

61. Un quadrato perfetto termina con 6. Quale può essere la cifra delle unità della sua radice quadrata ? E se termina con 9 ? o con 4 ?

62. Un numero di tre cifre è un quadrato perfetto : termina con 5 e la prima cifra a sinistra è 6. Di quale numero è il quadrato ?

63. Fra quali successivi multipli di 10 è compresa la radice quadrata di un numero di quattro cifre, la cui prima cifra a sinistra è 5 ?

64. Un quadrato perfetto, di quattro cifre, ha la prima cifra a sinistra 7 e l'ultima 4. Di quale numero può essere il quadrato ?

65. Un numero di tre cifre ha per cifra delle centinaia 5. Quante cifre ha la sua radice quadrata ? Quale è la cifra delle decine di questa radice ?

66. Verificare su esempi numerici che, per ottenere il quadrato di un numero, si può aggiungere al quadrato del suo precedente il doppio di questo e l'unità.

CAPITOLO QUARTO

Sistema metrico decimale.

59. L' insieme delle unità di misura delle lunghezze, delle superficie, dei solidi, delle capacità e dei pesi costituisce, come si sa, il ***sistema metrico decimale,*** la cui unità fondamentale è il *metro* (dal greco, metron : misura). Il metro è la lunghezza di una sbarra di platino iridato, che si conserva nell'Archivio Nazionale di Parigi (1).

Il sistema si chiama *decimale*, perchè ogni unità di misura è 10 volte (se si tratta di misure di lunghezza o di capacità o di peso) o 100 volte (se si tratta di misure di superficie) o 1000 volte (se si tratta si misure di volume) l'unità della stessa specie immediatamente più piccola ed è rispettivamente la decima o la centesima o la millesima parte dell'unità immediatamente più grande.

60. Le unità del sistema metrico decimale si raggruppano in :

Unità di misura delle lunghezze :

unità fondamentale : il *metro* (***m***) (2).

Unità summultiple del metro :

il *decimetro* (***dm***) che è ***m*** 0,1 ;

il *centimetro* (***cm***) che è ***dm*** 0,1 e

il *millimetro* (***mm***) che è ***cm*** 0,1.

(1) Tale lunghezza deve essere considerata alla temperatura di 0 centigradi. La lunghezza di una sbarra varia (in misura relativa piccolissima) al variare della temperatura.

(2) Poniamo a destra del nome, fra parentesi, la corrispondente abbreviazione convenzionale.

Unità multiple del metro:

il *decametro* (***dam***) che è 10 ***m***;
l'*ettometro* (***hm***) che è 10 ***dam***;
il *chilometro* (***km***) che è 10 ***hm*** e
il *miriametro* (***Mm***) che è 10 ***km***.

Le distanze microscopiche si misurano col *micron*, che è un millesimo di millimetro o con altre unità di misura ancor più piccole. Il micron e le unità più piccole si usano nello studio dei fenomeni luminosi (ottica) e della costituzione della materia.

Le distanze fra le stelle invece si misurano in *anni luce*. Un anno luce è la lunghezza percorsa dalla luce in un anno. Siccome la luce percorre 300000 chilometri al secondo e in un anno vi sono $60 \times 60 \times 24 \times 365$ secondi, un anno luce risulta di ***km*** $300000 \times 60 \times 60 \times 24 \times 365$.

Unità di misura delle superficie:

Unità fondamentale: il *metro quadrato* (***m²***), che è l'estensione di un quadrato di lato un metro.

Unità summultiple del metro quadrato:

il *decimetro quadrato* (dm^2) che è m^2 0,01;
il *centimetro quadrato* (cm^2) che è dm^2 0,01 e
il *millimetro quadrato* (mm^2) che è cm^2 0,01.

Unità multiple del metro quadrato:

il *decametro quadrato* (dam^2) che è 100 m^2 e si chiama anche *ara* (***a***);
l'*ettometro quadrato* (hm^2) che è 100 dam^2 e si chiama anche *ettara* (***ha***) e
il *chilometro quadrato* (km^2) che è 100 hm^2.

Il metro quadrato si chiama anche *centiara*. L'ara, la sua summultipla centiara e la sua multipla ettara, che comunemente si pronuncia al maschile *ettaro*, si chiamano anche *misure agrarie*.

Unità di misura dei solidi:

Unità fondamentale: *il metro cubo* (m^3), che è l'estensione di un cubo di spigolo un metro.

Unità summultiple del metro cubo:

il *decimetro cubo* (dm^3) che è m^3 0,001;
il *centimetro cubo* (cm^3) che è dm^3 0,001 e
il *millimetro cubo* (mm^3) che è cm^3 0,001.

Unità di misura delle capacità:

Unità fondamentale: il *litro* (***l***) che è la capacità di un decimetro cubo.

Unità summultiple del litro:

il *decilitro* (***dl***) che è ***l*** 0,1,
il *centilitro* (***cl***) che è ***dl*** 0,1 e
il *millilitro* (***ml***) che è ***cl*** 0,1.

Unità multiple del litro:

il *decalitro* (***dal***) che è ***l*** 10 e
l'*ettolitro* (***hl***) che è ***dal*** 10.

Unità di misura dei pesi:

Unità fondamentale: il *grammo* (***g***), che è il peso di un centimetro cubo di acqua purissima (distillata) alla temperatura di 4 centigradi (1).

Unità summultiple del grammo:

il *decigrammo* (***dg***) che è ***g*** 0,1;
il *centigrammo* (***cg***) che è ***dg*** 0,1 e
il *milligrammo* (***mg***) che è ***cg*** 0,1.

Unità multiple del grammo:

il *decagrammo* (***dag***) che è 10 ***g***;
l'*ettogrammo* (***hg***) che è 10 ***dag***;
il *chilogrammo*, o chilo (***kg***) che è 10 ***hg***;
il *miriagrammo*, o miria (***Mg***), che è 10 ***kg***;
il *quintale* (***q***) che è 10 ***Mg*** e
la *tonnellata* (***t***) che è 10 ***q***.

61. Un centimetro cubo d'acqua pesa un grammo. Ma un centimetro cubo di un altro corpo, p. es. olio, ferro; ecc., pesa generalmente più o meno di un grammo.

(1) Si precisa la temperatura, perchè il peso di un dato volume d'acqua varia colla temperatura. E si sceglie la temperatura di 4 centigradi, perchè a 4 gradi un dato peso d'acqua occupa il più piccolo spazio.

Il peso in g di 1 cm^3 di un corpo è il *peso specifico* di questo ed è uguale al peso in kg di 1 dm^3 e in t di 1 m^3 del corpo. Insomma *il peso specifico è uguale al rapporto fra il peso del corpo (espresso in* g *o* kg *o* t*) ed il suo volume (espresso rispettivamente in* cm^3, dm^3 *o* m^3*).*

Indicando con p il peso specifico di un corpo, con P il suo peso e con V il suo volume, è dunque $p = \frac{P}{V}$, da cui:

$$P = pV \quad ; \quad V = \frac{P}{p} .$$

Riportiamo nella seguente tabella il peso specifico di alcune sostanze:

acqua	1	olio	0,93 circa	benzina	0,69 circa
ghiaccio	0,92	vino	0,94 circa	petrolio	0,8 circa
ferro	7,8	aceto	1,01 circa	burro	0,94 circa
alcool	0,80	latte	1,03 circa	cera	0,97 circa.

62. Ricordiamo qualche nozione sul nostro *sistema monetario*. L'unità fondamentale è la lira (***L*** o ***Lit***). Essa, dopo la stabilizzazione voluta e attuata da BENITO MUSSOLINI nel 1927, vale g 0,079 di oro puro. Nella circolazione è rappresentata da una moneta circolare di nichel. Il diametro, lo spessore, il peso e le figure impresse sulle due faccie sono fissati da apposito decreto del Governo. Non esistono denominazioni speciali pei multipli della lira; mentre la centesima parte di una lira, che è la più piccola unità monetaria nazionale, si chiama il *centesimo*. La più piccola moneta effettivamente esistente e non nominale, è la moneta da cinque centesimi.

Esistono, per l'uso comune, monete di nichel del valore di due lire, di mezza lira (50 centesimi) e di un quinto di lira (20 centesimi); monete di una lega di rame, stagno e zinco (bronzo) del valore di un decimo di lira (dieci centesimi) e di un ventesimo di lira (cinque centesimi, ossia un soldo) e monete di una lega di argento ed altri metalli da ***L*** 5, del peso di g 5. Vi sono infine anche monete d'oro.

Per facilitare gli scambi e i pagamenti vi sono poi biglietti detti *carta monetata* o *biglietti di Stato* e *di banca*, emessi rispettivamente dallo Stato e dalla Banca d'Italia, unico Istituto di Emissione autorizzato dallo Stato. Essi sono stampati in carta speciale filogranata, con disegni stabiliti, ed hanno numeri e lettere che li distinguono. I biglietti di Stato sono di un sol taglio e cioè da ***L*** 10; i biglietti di banca rappresentano invece valori di ***L*** 50, ***L*** 100, ***L*** 500 e ***L*** 1000.

ESERCIZI

67. Quale parte di un metro sono ***cm*** 23 ? e ***cm*** 35 ? Se 1 ***m*** di pizzo costa ***L*** 6,50, quanto costeranno ***cm*** 25 ? e ***cm*** 35 ?

68. Quale parte di ***ha*** 1 sono m^2 2 ? e m^2 5 ? Un decimo di m^2 quanti dm^2 contiene ? Un decimo di m^2 e un decimetro quadrato sono uguali ?

69. Quanti dm^3 son contenuti in un decimo di m^3; in un centesimo di m^3 ? Scrivere in numero decimale di m^3 l'insieme di 3 decimi di m^3, 4 centesimi di m^3 e 22 decimetri cubi.

70. Scrivere in cifre:
trentadue decigrammi; quattrocentotre centigrammi; due decine di grammi; tre centinaia di decigrammi; un quintale e un miriagrammo; ventisette centimetri cubi e due millimetri cubi.

71. Completare le uguaglianze:

$$dm^3\ 27 = cm^3 \quad ; \quad cg\ 14728 = g \quad = dag \quad = km \quad ;$$
$$l\ 0{,}3 = dl \quad = cl \quad = hl \quad ; \quad m\ 4136 = hm \quad = km \quad .$$

72. Calcolare:

$$hg\ 2,\ dag\ 4 + kg\ 6,\ dag\ 7 = kg \quad ;$$
$$dm^3\ 12,\ cm^3\ 327 + cm^3\ 1412 = dm^3 \quad ;$$
$$ha\ 2 - a\ 125,\ ca\ 14 = ha \quad .$$

73. Calcolare:
12 volte ***l*** 14, ***dl*** 2;
la quinta parte di ***q*** 6, ***Mg*** 4.

74. Quale parte di ***km*** 1 sono ***m*** 80 ? e ***dm*** 465 ?

75. Un gallone vien fabbricato in pezze di ***m*** 4,50, che costano ***L*** 7,60 ciascuna. Quanto costa il gallone al ***m*** ? e al ***dm*** ?

76. Il passo di una persona è, in media, di 75 ***cm***. Quanti passi dovrebbe fare quella persona per percorrere un meridiano ?

77. Lungo un viale, alla distanza di ***m*** 12,50 l'uno dall'altro, sono 27 alberi. Se il piede di ogni albero ha il diametro di ***cm*** 75, dire quanto è lungo il viale.

78. Per seminare un campo di ***a*** 27,15 sono occorsi ***l*** 63 di seme. Quanto seme occorre per seminare un'ara ? e un'ettaro ?

79. In Italia, nel 1930, furono prodotti ***t*** 30000 di seta vegetale e nel 1931, ***t*** 34500. Di quanto è aumentata dal 1930 al 1931 la produzione della seta vegetale in Italia ?

80. Una pompa versa in un serbatoio litri 7,2 in tre minuti. Quanto tempo impiega a riempire il serbatoio il cui volume è m^3 9,35 ?

81. Esprimere, in ***kg***, il peso delle seguenti quantità :

acqua : ***l*** 1 ; ***l*** 2,3 ; dm^3 6,7 ; ***cl*** 6 ; cm^3 8,276 ;
olio : ***l*** 1 ; ***l*** 2,3 ; dm^3 6,7 ; ***cl*** 6 ; cm^3 8,276.

82. Dire quale volume, in dm^3, occupano le seguenti quantità :

acqua : ***l*** 1 ; ***g*** 27 ; ***q*** 3 ; ***cg*** 1743 ; ***hl*** 6,37 ;
petrolio : ***l*** 1 ; ***g*** 27 ; ***kg*** 1 ; ***dl*** 79,3 ; ***hg*** 14.

83. Un braccialetto massiccio pesa ***g*** 52,3 ed ha il volume di cm^3 6,46. Può essere di argento puro ? (peso specifico dell'argento 10,54).

84. Con ***L*** 1804 si sono acquistati ***m*** 8 di stoffa da dividersi in due tagli, uno dei quali di ***m*** 4,50. Come deve esser ripartita la spesa fra le due persone che utilizzano i tagli d'abito ?

85. Per fare un tappeto occorrono ***m*** 2,10 di stoffa a ***L*** 15,50 al metro ; si spende ***L*** 9,50 pel cotone da ricamo e ***L*** 33 di fattura. Quanto costa il tappeto finito ?

86. Una cucitrice compra ***m*** 37 di stoffa per camicie da uomo e confeziona tutte quelle che può ricavare, consumando ***m*** 3,50 per camicia. Ponendole in vendita, deve calcolare la spesa complessiva della stoffa che ha pagato ***L*** 6,35 al metro e la spesa di confezione in ***L*** 6,10 per camicia, conteggiando un guadagno di ***L*** 2,25 per capo. A quanto vende ogni camicia ?

87. In un collegio si confezionano le uniformi per 25 allieve. In media per ogni sottana occorrono ***m*** 3,10 di stoffa a ***L*** 4,20 al metro e per ogni camicetta ***m*** 2 a ***L*** 2,25 al metro ; determinare la spesa di acquisto totale.

88. Per confezionare una focaccia occorrono 400 ***g*** di farina, 250 ***g*** di burro, 4 uova e 210 ***g*** di zucchero. Quanto viene a costare la focaccia, se la farina costa ***L*** 1,80 al ***kg***, il burro ***L*** 1,25 all' ***hg***, le uova ***L*** 4,90 alla dozzina, lo zucchero ***L*** 6,10 al ***kg*** e la cottura consuma mezzo m^3 di gas che costa ***L*** 0,69 al m^3 ?

89. Per confezionare due materassi occorrono 10 ***m*** di stoffa da ***L*** 7,50 al ***m***. La lana occorrente pei due materassi è ***kg*** 20 e costa ***L*** 12,50 al ***kg***. Il materassaio, per la confezione d'ogni materasso, richiede ***L*** 11. Quanto si spende in tutto ?

90. Una massaia prepara la cera per pavimenti adoperando 3 ***hg*** di cera da ***L*** 2,80 all'etto e 800 ***g*** di acqua ragia da ***L*** 9,90 al ***kg***. Quanto costa la cera così preparata ?

91. Con macchine perfezionate, da 50 litri di latte si ottengono, in una latteria, ***kg*** 1,90 di burro da ***L*** 16 al ***kg***. Col metodo vecchio, da 100 litri di latte si ottenevano ***kg*** 3,10 di burro di qualità peggiore che si vendeva a ***L*** 13,50 al ***kg***. Quale vantaggio si realizza col nuovo sistema lavorando ogni giorno 200 litri di latte ?

92. Un tappeto rettangolare ha tutto intorno un bordo di ***cm*** 7 ; la lunghezza totale è ***m*** 3,18 e il rettangolo interno misura m^2 7,52. Qual' è la larghezza totale del tappeto ?

93. Una tovaglia quadrata ha per lato ***m*** 1,20. Nel centro si ricama un quadrato che ne occupa i $\frac{9}{25}$. Qual' è il lato di questo quadrato ?

94. In una stanza vi sono 15 bambini e la custode. Le dimensioni della stanza sono ***m*** 4,5 ; ***m*** 6,50 e ***m*** 4. Dire se le condizioni della stanza sono igieniche per la respirazione, sapendo che un adulto deve avere a disposizione m^3 15 di aria, e un bimbo m^3 8.

95. Un litro d'aria, nelle condizioni comuni, pesa circa ***g*** 1,293. Quanto pesa l'aria contenuta nella vostra aula scolastica, le cui dimensioni sono.... ?

96. Una bottiglia pesa piena d'acqua ***kg*** 2,350 e vuota ***kg*** 0,420. Quant' è la sua capacità ?

97. Una bottiglia pesa piena d'olio ***kg*** 2,150 e vuota ***kg*** 0,420. Quant' è la sua capacità ? Quanto pesa piena d'acqua ?

98. Una bottiglia pesa piena d'acqua ***kg*** 2,350 e vuota ***kg*** 0,420. Piena di un altro liquido pesa ***kg*** 2,715. Qual' è il peso specifico di quel liquido ?

99. In una classe vi sono 30 scolari il cui peso medio è ***kg*** 40. Pesano più tutti gli scolari insieme, o un volume d'acqua uguale a quello della cattedra che è lunga ***m*** 1,20 ed ha la larghezza e l'altezza di ***cm*** 80 ?

100. Un foglio di latta quadrata, di lato ***cm*** 82, pesa ***kg*** 2,616. Qual' è il suo spessore ? (peso specifico della latta 7,78).

101. La differenza fra il peso di una bottiglia piena d'acqua e piena d'olio è ***g*** 22. Qual' è la capacità della bottiglia ?

102. Se mettiamo ***g*** 35 di zucchero in ***kg*** 1 di acqua, il volume aumenta di $\frac{1}{10}$. Qual' è il peso specifico della soluzione ?

103. Qual' è il volume di ***kg*** 1 di olio ? di petrolio ? di ferro ?

104. Qual'è il volume della Terra in m^3? Quale ne è il peso, se il suo peso specifico medio è 5,6 [1]?

105. Quanti litri d'acqua occorrono per fabbricare un parallelepipedo di ghiaccio avente le dimensioni di ***cm*** 75, ***cm*** 20 e ***cm*** 22?

106. Un oste compera ***hl*** 3,6 di vino a ***L*** 0,95 al litro. Ne vende un terzo a ***L*** 1,45 al litro e smercia poi il rimanente a ***L*** 0,83 al litro, perchè minacciava di guastarsi. Quell'oste guadagna o perde?

107. In una famiglia si consumano, in media, ***hg*** 3,25 di zucchero al giorno. Una provvista di ***kg*** 20 durò 65 giorni. Vi fu economia? Di quanto?

108. Un decigrammo d'oro può dare 324 ***m*** di filo sottilissimo. Quanto oro occorre, in peso e in volume, per circondare la Terra lungo un meridiano con quel filo? (peso specifico dell'oro 19,5).

109. Una tonnellata di grano assorbe dal terreno ***kg*** 21 di azoto, 8 di acido fosforico e 5 di potassa. In un podere si coltivano a grano ***ha*** 28 di terreno, con la produzione media di ***q*** 15,5 per ***ha***. Quanti ***kg*** di azoto, di acido fosforico e di potassa assorbe il grano prodotto in quel podere?

110. Un negoziante vende legna da ardere a ***L*** 17 al quintale, oppure a ***L*** 70 allo stero [2]. Il peso di uno stero di quella legna è ***kg*** 420. Quale dei due modi di acquisto è conveniente pel compratore?

111. Quanto costa al quintale un legname del peso specifico medio di 0,85, che si paga ***L*** 60 al metro cubo?

112. Da una cava si estrae un blocco di marmo a forma di parallelepipedo rettangolo lungo ***m*** 5,30, largo ***m*** 2,15, alto ***m*** 3. Quanto pesa il blocco, se il peso specifico del marmo è 2,75?

113. Si fa scavare un fosso di scolo largo ***m*** 0,80, profondo ***m*** 0,60 e lungo ***m*** 102. I lavori di sistemazione inerenti costano ***L*** 32 e per ogni m^3 di terra scavato si paga ***L*** 3,15. Quanto costa il lavoro?

114. Un serbatoio cilindrico alto ***m*** 2,40 è pieno d'olio. Quest'olio si travasa in latte della capacità di ***l*** 3,140 e si vende a ***L*** 9,80 il ***kg***, ricavando ***L*** 43957,20. Quante latte si sono riempite? Qual'è il raggio di base del serbatoio?

115. Quanto pesa l'aria contenuta in un pallone sferico sottilissimo di superficie m^2 28,725? (peso di un litro d'aria, es. 95).

116. Per convincere gli scolari che $m^2\ 1 = dm^2\ 100$, un maestro costruisce in filo di ferro un quadrato di lato ***m*** 1 e lo divide, pure col filo di ferro, in quadrati di lato ***dm*** 1. Quanti decimetri di filo di ferro gli occorrono? (I fili sono saldati; così non vi è impiego di filo nelle piegature).

---

[1] La Terra è costituita da materiali diversamente distribuiti; perciò si può parlare solamente di peso specifico medio.

[2] Lo *stero*, unità di volume pel legname, vale m^3 1. Suo summultiplo è il *decistero*, che ne è la decima parte, e suo multiplo è il *decastero*, che è 10 steri.

117. Una stanza ha forma di parallelepipedo rettangolo, ed è alta ***m*** 3,50, larga ***m*** 4,25 e lunga ***m*** 5,10. Quanto si spende per tappezzarla con carta da parati da ***L*** 5,50 il rotolo di ***cm*** 50 per ***m*** 7, se si lascia da terra un bordo di ***cm*** 70 già ricoperto di lincrustra e se le parti da non tappezzare (porte e finestre) occupano $\frac{1}{7}$ della superficie rimanente delle pareti?

118. Una vasca cilindrica profonda ***m*** 1,25 ha il contorno di ***m*** 6. Quanto pesa l'acqua ch'essa può contenere? Vi sono due rubinetti che versano acqua nella vasca e che, separatamente, la riempiono, uno in 5 ore, l'altro in 7. Qual'è la portata di ciascun rubinetto all'ora? Quanto tempo impiegano i due rubinetti, insieme, per colmare la vasca?

CAPITOLO QUINTO

Misure non decimali più comuni; misure inglesi; vecchie misure locali (1).

63. Il sistema metrico decimale è molto diffuso, ma non universalmente. Inoltre talune categorie di grandezze (angoli, archi di circonferenza, intervalli di tempo) si misurano con ***unità non decimali*** (2). Lo stesso può dirsi per certe vecchie misure locali, che continuano talora ad usarsi, specialmente nelle contrattazioni agricole, in provincie e regioni italiane.

Diamo taluni sistemi di misura non decimali.

64. ***Misura del tempo:***

Unità fondamentale: il *giorno* (3).

Unità summultiple del giorno:

l'*ora*, che è la ventiquattresima parte del giorno;

il *minuto primo*, che è la sessantesima parte dell'ora e

(1) Le misure di tempo e degli angoli sono per tutti i tipi di scuole, escluse le commerciali. Le misure locali sono per le scuole agrarie. Quelle inglesi per le scuole professionali femminili.

(2) Cioè con sistemi di unità in cui un'unità non è la decima o la centesima ....parte della sua più piccola multipla.

(3) Il giorno, anzi il *giorno solare medio*, è la media annuale dei *giorni solari*. Il giorno solare è l' intervallo di tempo fra due successivi passaggi del sole al meridiano del luogo, il che avviene quando il sole ha la massima altezza sull'orizzonte. In questo istante è *mezzogiorno* (il mezzogiorno vero, cioè solare; non quello segnato dagli orologi). I giorni solari non sono tutti uguali.

il *minuto secondo*, che è la sessantesima parte del minuto primo.

Unità multiple del giorno:

il *mese*, di 30 giorni (1) e

l'*anno*, di 12 mesi.

Per indicare 8 anni, 6 mesi, 7 giorni, 4 ore, 36 minuti primi e 28 minuti secondi si scrive $8^a 6^M 7^g 4^h 36^m 28^s$.

65. ***Misura degli angoli:***

Unità fondamentale: il *grado*, che è la novantesima parte dell'angolo retto.

Unità summultiple del grado:

il *minuto primo*, o semplicemente *primo*, che è la sessantesima parte del grado e

il *minuto secondo*, o semplicemente *secondo*, che è la sessantesima parte del primo.

Per indicare 25 gradi, 14 primi e 29 secondi si scrive $25^\circ 14' 29''$.

66. ***Misure inglesi:***

a) *Monetarie:*

Unità fondamentale: la *lira sterlina.*

Unità summultiple della lira sterlina:

lo *scellino*, che è la ventesima parte della lira sterlina;

il *penny* (plurale *pence*), che è la dodicesima parte dello scellino e

il *farthing*, che è la quarta parte del penny.

Per indicare 18 lire sterline, 5 scellini, 9 pence e 3 farthing, si scrive $18^{Lst}\ 5^{sh}\ 9^{p}\ 3^{f}$.

b) *Di lunghezza:*

Unità fondamentale: la *yard*. Una yard è lunga ***m*** 0,914.

Unità summultiple della yard:

il *piede*, che è la terza parte della yard,

il *pollice*, che è un dodicesimo del piede e

la *linea*, che un dodicesimo del pollice.

(1) In commercio i mesi si considerano tutti di 30 giorni e perciò l'anno di 360 giorni.

Per indicare 820 yards, 2 piedi, 7 pollici e 3 linee, si scrive $820^{y}\ 2^{pi}\ 7^{po}\ 3^{li}$.

67. ***Vecchie misure locali italiane:***

a) Piemontesi.

Di lunghezza: il *trabucco*, di 6 *piedi*. Un trabucco è ***m*** 3,086.

Di capacità:

Pei grani: il *sacco* di 5 *emine*, la emina di 8 *coppi*. Una emina è *l* 23,055.

Pei liquidi: il *carro* di 10 *brente*, la brenta di 36 *pinte*, la pinta di 2 *boccali*. Una brenta è ***l*** 49,307.

Di peso: il *rubbo* di 25 libbre; la libbra di 12 *once*. Un rubbo è ***kg*** 9,222.

b) Lombarde.

Di lunghezza: il *trabucco* di 6 *piedi*. Un trabucco è ***m*** 2,611.

Di capacità:

Pei grani: il *moggio* di 8 *staia*, lo staio di 4 *quartari*. Uno staio è ***l*** 18,275.

Pei liquidi: la *brenta* di 96 *boccali*. Una brenta è ***l*** 75,56.

Di peso: la *libbra* di 28 *once*. Una libbra è ***kg*** 0,763.

c) Toscane.

Di lunghezza: il *braccio da panno* di 2 *palmi*. Un braccio è ***m*** 0,583.

Di capacità:

Pei grani: il *moggio* di 8 *sacchi*. Un moggio è ***l*** 584,7.

Pei liquidi: il *barile* di 20 *fiaschi*. Un barile è ***l*** 45,58.

Di peso: la *libbra* di 12 *once*. Una libbra è ***kg*** 0,339.

d) Romane.

Di lunghezza: la *canna* di 10 *palmi*, il *palmo* di 12 *once*. Una canna è ***m***. 2,234.

Di capacità:

Pei grani: il *rubbio* di 22 *scorzi*. Un rubbio è ***l*** 294,5.

Pei liquidi: il *barile da vino* di 32 *boccali*, il boccale di 4 *fogliette*. Un barile è ***l*** 58,342.

Di peso: la *libbra* di 12 *once*. Una libbra è ***kg*** 0,339.

e) Napoletane.

Di lunghezza: la *canna* di 8 *palmi*. La canna è ***m*** 2,116.

Di capacità:

Pei grani: il *carro* di 36 *tomoli*. Un carro è ***l*** 1991.

Pei liquidi: il *barile* di 60 *caraffe*. Un barile è ***l*** 43,625.

Di peso: la *libbra* di 12 *once*. Una libbra è ***kg*** 0,320.

68. Il valore della moneta di un determinato Stato in relazione con la lira italiana non è costante, ma è soggetto alle vicende del *cambio*, che può mutare anche

di giorno in giorno in conseguenza di svariati fattori economici, finanziari, politici.

Il cambio, per ciascuno dei paesi con cui l'Italia ha rapporti economici più frequenti, si legge nel listino di borsa, che tutti i giornali quotidianamente riproducono.

Supponiamo che il cambio inglese sia oggi di ***L*** 93,25. Ciò significa che 1 lira sterlina vale lire italiane 93,25. Risolviamo in proposito i due problemi seguenti:

PROBLEMA. Quante lire italiane valgono $5^{Lst}\ 12^{sh}$?

Poichè 1^{Lts} vale ***L*** 93,25, lire sterline 5 varranno ***L*** $93,25 \times 5 =$ ***L*** 466,25. Inoltre 1^{sh}, ventesima parte di 1^{Lst} varrà ***L*** $93,25 : 20$ e 12^{sh} varranno ***L*** $93,25 : 20 \times 12 =$ $=$ ***L*** $93,25 \times 12 : 20 =$ ***L*** 55,95. Perciò $5^{Lst}\ 12^{sh}$ valgono oggi ***L*** $466,25 +$ ***L*** $55,95 =$ ***L*** 522,20.

PROBLEMA. Quanta moneta inglese ci vuole oggi per comprare ***L*** 1500?

Poichè ***L*** 93,25 valgono 1^{Lst}, ***L*** 1500 varranno $(1500 : 93,25)^{Lst}$. Eseguendo la divisione otteniamo 16 di quoziente e 8 di resto. ***L*** 1500 valgono perciò 16^{Lst} con ***L*** 8 di resto.

Uno scellino vale ***L*** $93,25 : 20 =$ ***L*** 4,662, perciò ***L*** 8 valgono $(8 : 4,662)^{sh}$. Poichè si ottiene 1 per quoziente e 3,338 di resto, concludiamo che ***L*** 1500 valgono $16^{Lst}\ 1^{sh}$ con ***L*** 3,338 di resto.

Un penny vale ***L*** $4,662 : 12 =$ ***L*** 0,388, quindi ***L*** 3,338 valgono $(3,338 : 0,388)^{p}$, cioè 8^{p} col resto 0,234. Dunque ***L*** 1500 valgono $16^{Lst}\ 1^{sh}\ 8^{p}$ con ***L*** 0,234 di resto.

Un farthing vale ***L*** $0,388 : 4 =$ ***L*** 0,097; ne segue che ***L*** 0,234 valgono $(0,234 : 0,097)^{f}$, ossia 2^{f}. L'avanzo è trascurabile. Perciò ***L*** 1500 valgono oggi $16^{Lts}\ 1^{sh}\ 8^{p}\ 2^{f}$.

69. Le operazioni sulle misure non decimali si eseguiscono tenuto conto dei rapporti fra le varie misure. Facciamo qualche esempio:

PROBLEMA. Si debbono riscuotere $15^{Lst}\ 15^{sh}\ 7^{p}$ e $17^{sh}\ 11^{p}$ e si debbono pagare $12^{Lst}\ 18^{sh}$. Quale somma si avrà in fine?

La somma da riscuotere è $15^{Lst}\,15^{sh}\,7^{p} + 17^{sh}\,11^{p}$. Abbiamo:

$$7^{p} + 11^{p} = 18^{p} = 1^{sh}\,6^{p}.$$
$$15^{sh} + 17^{sh} + 1^{sh} \text{ (di riporto)} = 33^{sh} = 1^{Lst}\,13^{sh}.$$
$$15^{Lst} + 1^{Lst} \text{ (di riporto)} = 16^{Lst}.$$

La somma da riscuotere è $16^{Lst}\,13^{sh}\,6^{p}$. La somma che rimane, dopo il pagamento, è $16^{Lst}\,13^{sh}\,6^{p} - 12^{Lst}\,18^{sh}$.

Dai 13^{sh} del minuendo non si possono togliere 18^{sh} del sottraendo. Pensiamo perciò le 16^{Lst} del minuendo formate da 15^{Lst} e $1^{Lst} = 20^{sh}$. Gli scellini del minuendo divengono $13 + 20 = 33$.

$$33^{sh} - 18^{sh} = 15^{sh};$$
$$15^{Lst} - 12^{Lst} = 3^{Lst}.$$

La somma residua è $3^{Lst}\,15^{sh}\,6^{p}$.

PROBLEMA. Si sono comprate 4 pezze di nastro lunghe ciascuna $6^{y}\,2^{pi}$. Quanti metri di nastro si sono comprati?

La lunghezza totale è $6^{y}2^{pi} \times 4$.

$$2^{pi} \times 4 = 8^{pi} = 2^{y}\,2^{pi};$$
$$6^{y} \times 4 = 24^{y}\ ;\ 24^{y} + 2^{y} \text{ (di riporto)} = 26^{y},$$

dunque la lunghezza totale è $26^{y}\,2^{pi}$.

Poichè una yard vale m 0,914, ogni piede vale m 0,914 : 3 = m 0,304 e la lunghezza totale in metri sarà m 0,914 × 26 + m 0,304 × 2 = m 24,372.

PROBLEMA. A Torino si è acquistato merce del peso di rubbi 14, libbre 20 e once 8, ripartita in 3 colli uguali. Quanti rubbi pesa ogni collo? E quanti ***kg***?

Dobbiamo calcolare rubbi 14, libbre 20, once 8, il tutto diviso per 3. Abbiamo:

rubbi 14 : 3 = rubbi 4, con rubbi 2 di resto;
rubbi 2 = libbre 25 × 2 = libbre 50;
libbre 50 + libbre 20 = libbre 70;
libbre 70 : 3 = libbre 23, con libbre 1 di resto;
libbra 1 = once 12;

once 12 + once 8 = once 20;
once 20 : 3 = once 6, con once 2 di resto.

Otteniamo dunque rubbi 4, libbre 23, once 6 come peso di ogni collo. Poichè ogni rubbo è ***kg*** 9,222, ogni libbra è ***kg*** 9,222 : 25 = ***kg*** 0,369; ed ogni oncia è ***kg*** 0,369 : 12 = ***kg*** 0,030. Ogni collo peserà:

kg (9,222 × 4 + 0,369 × 23 + 0,03 × 6) = ***kg*** 45,555.

PROBLEMA. Una yard di stoffa costa $12^{sh}\,8^{p}$. Quanto costano $15^{y}\,2^{pi}$?

Yard 1 di stoffa costa $12^{sh}\,8^{p}$, cioè $(12 \times 12 + 8)^{p} = 152^{p}$. Ma $1^{y} = 3^{pi}$, quindi 1^{pi} di stoffa costa $\left(\frac{152}{3}\right)^{p}$.

Si acquistano $15^{y}\,2^{pi}$ di stoffa, ossia $(15 \times 3 + 2)^{pi} = 47^{pi}$ di stoffa; si spenderà perciò $\left(\frac{152}{3} \times 47\right)^{p} = \left(\frac{7144}{3}\right)^{p} = \left(2381 + \frac{1}{3}\right)^{p}$.

La terza parte di 1 penny, cioè di 4 farthing, è $\frac{4}{3}$ di farthing, ossia è 1 farthing e $\frac{1}{3}$ di farthing. Perciò:

$$\left(2381 + \frac{1}{3}\right)^{p} = 2381^{p}\,1^{f}\left(\frac{1}{3}\right)^{f} = 198^{sh}\,5^{p}\,1^{f}\left(\frac{1}{3}\right)^{f} =$$
$$= 9^{Lst}\,18^{sh}\,5^{p}\,1^{f}\left(\frac{1}{3}\right)^{f}.$$

PROBLEMA. Un taglio di stoffa lungo $5^{y}\,2^{pi}$ costa $1^{Lst}\,15^{sh}$. Quanto costa la stoffa alla yard?

La stoffa misura $5^{y}\,2^{pi}$, cioè 17^{pi} e costa $1^{Lst}\,15^{sh} = 35^{sh}$. Il costo di un piede sarà $\frac{35}{17}$ di scellini e il costo di 1 yard, cioè di 3 piedi, è dunque scellini $\frac{35 \times 3}{17}$, ossia scellini $\frac{105}{17}$.

Poichè 105 : 17 = 6 con resto 3, il costo di una yard di stoffa è 6^{sh} e $\frac{3}{17}$ di scellino. Inoltre $1^{sh} = 12^{p}$, quindi $\left(\frac{3}{17}\right)^{sh} = \left(\frac{3 \times 12}{17}\right)^{p} = \left(\frac{36}{17}\right)^{p} = \left(2 + \frac{2}{17}\right)^{p}$. Ma $1^p = 4^f$,

quindi $\left(\frac{2}{17}\right)^{p} = \left(\frac{2 \times 4}{17}\right)^{f} = \left(\frac{8}{17}\right)^{f}$, che non formano un farthing essendone circa la metà. Concludendo il costo della stoffa per ogni yard è $6^{sh}\,2^{p}$ e circa mezzo farthing.

ESERCIZI

119. La lumaca percorre, in media, 10 *cm* al minuto. Qual' è la sua velocità al minuto secondo ? all'ora ?

120. La rondine percorre *km* 4 al minuto primo. Quanto tempo impiegherebbe la rondine, se volasse ininterrottamente, a fare il giro della Terra lungo un meridiano ?

121. La luce percorre 300000 *km* al minuto secondo. Quanto percorre in un minuto primo ? Se un aeroplano si muovesse con la velocità massima finora raggiunta, di *km* 709,209 all'ora [1], quanto tempo impiegherebbe per percorrere lo spazio che la luce percorre in un minuto secondo ? e in un minuto primo ?

122. Quanti minuti primi vi sono in un giorno ? in un mese ? e quanti minuti secondi sono contenuti nello stesso tempo ?

123. Quanti minuti primi vi sono in $199^{g}\,20^{h}\,17^{m}$?

124. Un angolo misura 18°23′. Quanti secondi misura ?

125. In mezz'ora un orologio anticipa di 1 minuto e $\frac{3}{4}$ ed è stato caricato a mezzogiorno. Quanto segnerà domani alla stessa ora ?

126. Tre angoli misurano 29°14′ , 1800′, 99999″. Quale dei tre angoli è il maggiore ? Quale il minore ?

127. Esprimere la misura di *m* 1 in trabucchi piemontesi; trabucchi lombardi; bracci toscani; canne romane; canne napoletane.

128. La velocità del suono nell'aria è di *m* 340 al secondo circa. Calcolare tale velocità in braccia toscane.

129. Due punti posti sull' Equatore hanno le longitudini che differiscono fra loro di 1°. Qual' è la loro distanza in *km* ? [2]. (Si consideri la lunghezza dell' Equatore eguale a quella del meridiano).

---

[1] Primato mondiale dell' italiano Agello su motore Fiat.

[2] La *longitudine* di un punto sulle superficie della Terra è la misura in gradi dell'arco di *parallelo* passante pel punto, compreso fra il meridiano di Greenwich e il punto stesso. Parallelo per un punto è il circolo minore, sezione della sfera terrestre col piano passante pel punto e perpendicolare all'asse di rotazione della Terra e, perciò, parallelo all' Equatore. I gradi si contano da 0° a 180° dal meridiano iniziale verso Est od Ovest, aggiungendo quindi l'attributo Est od Ovest.

130. Un paese posto sull' Equatore ha la longitudine di 22°12′. Un paese posto pure sull' Equatore dista da quello di 450 *km*. Quale può essere la sua longitudine ?

131. Due punti posti sull' Equatore hanno longitudini uguali, una Est e una Ovest e distano di 585 *km*. Qual' è la loro longitudine ?

132. Due punti di uno stesso meridiano distano ugualmente dall' Equatore, trovandosi uno nell'emisfero Nord e uno nell'emisfero Sud. Qual' è la loro distanza, se la loro latitudine è 10°12′ [1] ?

133. Qual' è la distanza in *km* dall' Equatore, contata sul meridiano, di un paese situato sul Tropico del Cancro ? o sul Circolo polare artico ? [2].

134. Due paesi sono posti sullo stesso meridiano, nello stesso emisfero, alle latitudini di 25°14′12″ e 40°26′17″. Qual' è la loro distanza in *km* ?

135. Quante yards vale un metro ? Quanti m^2 vale un quadrato di lato una yard ?

136. Quanti metri di filo sono contenuti in un rocchetto d yards 400 ? E quante yards in una di *m* 400 ?

L'unità monetaria francese è il *franco*. Il valore del franco in relazione a quello della lira è variabile. Sui giornali quotidiani si legge il *cambio francese*, cioè la somma di lire italiane che equivale a 100 franchi.

137. Quando il cambio francese è 84,60, qual' è il valore, in lire, di un franco ? e, in franchi, di una lira ?

138. Quanti franchi si acquistano con *L* 1740, se il cambio è 84,50 ?

139. Quante lire vale un foglio da 1000 franchi, quando il cambio è 82,75 ?

140. Franchi 2150 sono stati cambiati con *L* 1765,15. Qual'era il cambio francese il giorno della operazione ?

141. Si sono cambiate *L* 4000 in franchi un giorno in cui il cambio su Parigi era 82,50; non avendo poi usato il denaro francese, si cambia in lire un giorno in cui il cambio è disceso a 80. Si ha perdita o guadagno ? A quanto ammonta ?

142. Si comprano franchi 1500 un giorno in cui il cambio è 81,20 e si paga, quale compenso sulla operazione, *L* 0,50 su ogni 100 lire sborsate. Quanto si paga in tutto ?

143. Quando il cambio inglese è 79,65, quante lire sterline si acquistano con *L* 2750 ? Viceversa, dovendo pagare una fattura di $42^{Lst}\,15^{sh}$, quante lire occorrono ?

---

[1] La *latitudine* è la misura in gradi dell'arco di *meridiano* passante pel punto, compreso fra l' Equatore e il punto. Si aggiunge l'attributo Nord se il punto è nell'emisfero boreale, Sud se è nell'australe.

[2] La latitudine dei Tropici è 23°28′, quello dei Circoli polari è 66°32′.

144. Qual' era il cambio inglese un giorno in cui *L* 439,60 sono state cambiate con $5^{Lst}\,15^{sh}$?

145. Si sono acquistate $14^{Lst}\,12^{sh}$ un giorno in cui il cambio su Londra era 74,20 e si sono rivendute un giorno in cui il cambio era 75,15. C' è stata perdita o guadagno ? A quanto ammonta ?

146. Una banca cambia denaro italiano in moneta inglese, ritirando quale compenso *L* 0,50 su 100 lire. Quanto si paga per avere $6^{Lst}\,12^{sh}$, se il cambio inglese è 62,30 ?

147. Quanto costano $5^{Lst}\,12^{sh}$ e 750 franchi, se il cambio inglese è 71,25 e quello francese è 81,15 ?

148. Qual' è il costo alla yard di $15^{y}\,2^{pi}\,6^{po}$ di stoffa, pagate *L* 320 ? E qual' è il costo al metro ?

149. Con $4^{Lst}\,15^{sh}$ si sono comperate $12^{y}\,2^{pi}$ di stoffa. Qual' è il costo al metro in lire, se il cambio è 74,50 ?

CAPITOLO SESTO

Proporzioni numeriche e loro applicazioni più comuni. Calcoli per cento e per mille. Interesse e sconto.

Rapporti e proporzioni.

70. ***Rapporto di due numeri a, b*** *è il quoto a : b del primo pel secondo.* Esso si esprime con la frazione avente per numeratore il primo e per denominatore il secondo [1].

Così il rapporto fra 7 e 5 è $7:5=\frac{7}{5}=1,4$; il rapporto fra 5 e 7 è $5:7=\frac{5}{7}=0,\overline{714285}$. I due rapporti $\frac{7}{5}$ e $\frac{5}{7}$, espressi da due frazioni inverse l'una dell'altra [27], si chiamano *inversi* o *reciproci*.

Il rapporto fra $\frac{5}{3}$ e 2 è $\frac{5}{3}:2=\frac{5}{6}$; fra $\frac{8}{5}$ e $\frac{5}{12}$ è $\frac{8}{5}:\frac{5}{12}=\frac{8}{5}\times\frac{12}{5}=\frac{96}{25}$; fra 0,15 e 8,2 è $\frac{0,15}{8,2}=\frac{15}{820}=\frac{3}{164}$.

71. *Si dice che quattro numeri a, b, c, d formano una* ***proporzione***

$$a:b=c:d$$

se il rapporto a : b fra il primo e il secondo è uguale al rapporto c : d fra il terzo e il quarto.

[1] La definizione va riferita soltanto a numeri pei quali è stato precisato il significato di quoto. Quando i due numeri *a, b* son razionali già sappiamo [27] che il loro quoto è uguale alla frazione $\frac{a}{b}$.

Si legge: a sta a b come c sta a d. I numeri a, c si chiaman ***antecedenti***; i numeri b, d ***conseguenti***; i numeri a, d ***estremi*** e b, c ***medi***. I quattro numeri a, b, c, d diconsi ***termini*** della proporzione.

Così i numeri 12, 5, 24 e 10 formano in quest'ordine una proporzione, perchè $12 : 5 = 24 : 10$.

72. *Se quattro numeri sono in proporzione, il prodotto dei medi è uguale a quello degli estremi* (Proprietà fondamentale delle proporzioni).

Mediante questa proprietà si risolve una proporzione con un termine incognito, ossia si trova uno dei quattro numeri, essendo noti gli altri tre. Indicheremo il termine incognito con x.

Esempi.

1°) $2 : 5 = 3 : x$; $2 \times x = 5 \times 3$; $x = 5 \times 3 : 2 = 7{,}5$.

In questo caso x si chiama *quarto proporzionale* dopo i numeri 2; 5 e 3.

2°) $7 : 9 = x : 15$; $9 \times x = 7 \times 15$;
$x = 7 \times 15 : 9 = 105 : 9 = 11{,}\overline{6}$.

3°) $2{,}1 : x = 3 : 7$; $3 \times x = 2{,}1 \times 7$;
$x = 2{,}1 \times 7 : 3 = 4{,}9$.

4°) $x : 25 = 9 : 15$; $15 \times x = 25 \times 9$;
$x = 25 \times 9 : 15 = 15$.

5°) $6 : 9 = 9 : x$; $6 \times x = 9 \times 9$;
$x = 9 \times 9 : 6 = 81 : 6 = 13{,}5$.

La proporzione risultante, $6 : 9 = 9 : 13{,}5$, coi medi uguali dicesi *continua* e il quarto termine, 13,5, si chiama *terzo proporzionale* dopo il primo e il secondo numero. Il medio 9 dicesi *medio proporzionale* fra 6 e 13,5.

Riassumendo:

Un medio di una proporzione si ottiene dividendo il prodotto degli estremi per l'altro medio; un estremo si ottiene dividendo il prodotto dei medi per l'altro estremo.

73. Per risolvere $3 : x = x : 12$ si applica la proprietà fondamentale $x \times x = 3 \times 12$, e si ottiene $x^2 = 36$; $x = \sqrt{36} = 6$.

Poichè x è medio proporzionale fra 3 e 12, potremo dire che:

Il medio proporzionale fra due numeri è la radice quadrata del loro prodotto.

Proporzioni dedotte da una data.

74. *Se sussiste la proporzione*

$$a : b = c : d,$$

sussiston le proporzioni:

1°) $a : c = b : d$, ottenuta *invertendo fra loro i medi;*

$d : b = c : a$, ottenuta *invertendo fra loro gli estremi;*

$d : c = b : a$, ottenuta *invertendo fra loro i medi e gli estremi;*

$$\left.\begin{array}{l} b : a = d : c; \\ c : a = d : b; \\ b : d = a : c; \\ c : d = a : b; \end{array}\right\}$$
ottenute dalle quattro precedenti *scambiando ciascun antecedente col proprio conseguente;*

2°) $$\left.\begin{array}{l} (a + b) : b = (c + d) : d; \\ a : (a + b) = c : (c + d) \end{array}\right\}$$
che si dicono ottenute *componendo;*

3°) se $a > b$ e quindi $c > d$ [1],
$$\left.\begin{array}{l} (a - b) : b = (c - d) : d; \\ a : (a - b) = c : (c - d); \end{array}\right\}$$
che si dicono ottenute *decomponendo.*

75. Se $a : b = c : d = e : f = g : h \ldots$, è pure:

$$(a + c + e + g + \ldots) : (b + d + f + h + \ldots) = a : b = \ldots$$

[1] Se $a > b$ il rapporto fra a e b è maggiore di 1 e tale è quindi il rapporto fra c e d: donde $c > d$.

Grandezze proporzionali.

Regola del tre.

76. ***Rapporto di due grandezze omogenee*** (p. es. due segmenti, due angoli, due superficie; ecc.) *è il rapporto dei numeri che dànno la misura delle due grandezze rispetto ad una determinata unità.*

Si potrebbe dimostrare che il rapporto così definito rimane lo stesso cambiando l'unità di misura (purchè ogni volta le due grandezze si misurino colla stessa unità).

Due grandezze, dipendenti l'una dall'altra, diconsi ***direttamente proporzionali*** *se il rapporto di due valori qualsiansi dell'una è uguale al rapporto dei valori corrispondenti dell'altra.*

Ecco alcune coppie di grandezze direttamente proporzionali:

il numero degli operai che lavorano in un giorno e il lavoro fatto;

il salario percepito da un operaio e il numero di giornate di lavoro;

la superficie di un rettangolo di data base, che varia al variare dell'altezza, e tale altezza.

77. *Due grandezze, dipendenti l'una dell'altra, diconsi* ***inversamente proporzionali*** *se il rapporto di due valori qualsiansi dell'una è uguale al reciproco del rapporto dei valori corrispondenti dell'altra.*

Sono inversamente proporzionali:

la velocità di un treno e il tempo che impiega a percorrere un dato tratto ferroviario;

il numero dei giorni occorrenti per arare un dato terreno e il numero degli aratri con cui si lavora;

il tempo necessario a riempire una vasca di data capacità e la portata d'una conduttura d'acqua che sbocchi nella vasca;

il peso specifico d'un pezzo di metallo e il volume ch'esso occupa; ecc.

Osservazione. Non tutte le coppie di grandezze variabili, dipendenti fra loro, son di necessità proporzionali direttamente o inversamente.

Così la superficie di un quadrato non è proporzionale (nè direttamente nè inversamente) al suo lato, perchè p. es. raddoppiando il lato la superficie diviene quattro volte più grande.

78. Risolviamo ora qualche *problema del tre semplice.* Così chiamasi ogni problema che riducasi alla risoluzione di una proporzione.

Problema. La verniciatura di un portone della superficie di m^2 10,25 costa L 15,75. Quando costa quella di un portone della superficie di m^2 12,40 ?

Dai dati del problema ricavasi la tabella:

superficie del portone in m^2	Costo della verniciatura in L
10,25	15,75
12,40	x .

Le due grandezze sono direttamente proporzionali, perciò:

$$10{,}25 : 12{,}40 = 15{,}75 : x\,,$$

da cui $x = 12{,}40 \times 15{,}75 : 10{,}25 = 19{,}05$.

Il costo richiesto è L 19,05.

Lo stesso problema può esser risolto anche così:

Se per verniciare m^2 10,25 si spendono L 15,75, per verniciare m^2 1 si spenderanno L 15,75 : 10,25 e per verniciare m^2 12,40 si spenderanno:

$$L\,15{,}75 : 10{,}25 \times 12{,}40 = L\,15{,}75 \times 12{,}40 : 10{,}25 = L\,19{,}05.$$

Questo metodo si chiama di *riduzione all'unità.*

Problema. In 14 giorni 27 operai han fatto $\frac{2}{3}$ di un dato lavoro. Quanto tempo impiegheranno 20 operai a terminarlo ?

Il lavoro fatto è $\frac{2}{3}$ dell'intero lavoro; ne rimane perciò da fare $\frac{1}{3}$, cioè la metà di quello fatto. Se 27 operai han fatto $\frac{2}{3}$ del lavoro in 14 giorni, in 7 giorni ne avran fatto $\frac{1}{3}$. La questione da risolvere è ora questa:

Se 27 operai han fatto un lavoro $\left(\frac{1}{3}\text{ del dato}\right)$ in 7 giorni, in quanti giorni 20 operai ne faranno un altro uguale?

Formiamo la tabella:

Numero degli operai	giorni impiegati
27	7
20	x.

Le due grandezze sono inversamente proporzionali, perciò:

$$27 : 20 = x : 7,$$

da cui $x = 27 \times 7 : 20 = 9 + \frac{9}{20}$.

Occorrono dunque 9 giorni e $\frac{9}{20}$ del giorno lavorativo, cioè 9 giorni e mezzo circa.

Calcoli per cento e per mille. (1)

79. Un'applicazione importante delle proporzioni conduce alla risoluzione dei *problemi di percentuale.*

P. es. se un negoziante sul pagamento di una merce accorda al cliente uno sconto o un ribasso del 3 *per cento,* ciò significa che per ogni 100 lire di valore della merce si contenta di ricevere $L\ (100 - 3) = L\ 97$. Invece di scrivere «3 per cento» si scrive più brevemente 3%.

(1) Per le scuole agrarie, industriali e professionali femminili.

Si può chiedere allora qual' è lo sconto complessivo sopra un valore di L 2732,50. Ecco un problema di percentuale.

Formeremo la tabella:

Somma totale in L	Sconto accordato in L
100	3
2732,50	x.

Le due grandezze sono direttamente proporzionali onde:

$$100 : 2732{,}50 = 3 : x;$$
$$x = 2732{,}50 \times 3 : 100 = 81{,}975.$$

Lo sconto complessivo accordato è di L 81,975, ossia L 81,95.

Il problema è stato così risolto col *metodo delle proporzioni.*

Col *metodo di riduzione all'unità* ragioneremo così:

Se su L 100 si accorda lo sconto di L 3,
su L 1 si accorda lo sconto di $L\ 3 : 100 = L\ 0{,}03$ e
su L 2732,50 si accorda lo sconto di

$$L\ 0{,}03 \times 2732{,}50 = L\ 81{,}975.$$

80. In un paese la natalità e la mortalità, durante un certo periodo di tempo, si possono esprimere col numero totale dei nati e dei morti ed allora si hanno la *natalità assoluta* e la *mortalità assoluta.* Se invece si esprimono col numero medio dei nati e dei morti su 100, o meglio, praticamente, su 1000 abitanti, si ottengono la *natalità relativa* e la *mortalità relativa.* Così se la natalità relativa in un certo periodo è stata dell' 11 per mille, cioè dell' 11 ‰, come si scrive, ciò significa che, in media, da ogni 1000 persone sono nati 11 bambini.

81. Supponiamo che la percentuale del c % sopra una quantità A sia B. Fra A, B e c passa una relazione che si rileva dallo specchietto:

quantità	percentuale
100	c
A	B

Le due grandezze, quantità e percentuale, sono direttamente proporzionali, quindi:

$$100 : A = c : B ;$$
$$100 \times B = A \times c ,$$

da cui:

$$B = A \times c : 100 \quad ; \quad A = 100 \times B : c ; \quad c = 100 \times B : A .$$

Ne segue:

a) La percentuale B del c % si calcola moltiplicando A per c e dividendo per 100.

Problema. Un libraio accorda al Patronato scolastico il ribasso dell' 8 %. Quanto il Patronato deve pagare effettivamente per un conto di *L* 425 ?

Il ribasso accordato è di *L* 425 × 8 : 100 = *L* 34.

La somma dovuta è *L* 425 — *L* 34 = *L* 391 .

Si può, d'altronde, osservare che, se l'abbuono è dell' 8 %, si paga il 100 — 8 su 100, cioè il 92 %, epperò si pagano *L* 425 × 92 : 100 = *L* 391 .

Problema. Un negoziante ha praticato un ribasso del 10 % su tutti i prezzi, che però aveva prima accresciuto del 10 %. I prezzi sono aumentati o diminuiti ? Di quanto ?

Un oggetto che inizialmente costava *L* 100, è contrassegnato col prezzo di *L* 110, cioè 100 aumentato del 10 %. Il compratore paga, per quell' oggetto, *L* 110 diminuite della percentuale del 10 %, cioè di *L* 110 × 10 : 100 = *L* 11. Vengono dunque pagate *L* 99. I prezzi sono perciò diminuiti soltanto dell' 1 %.

b) La quantità A, la cui percentuale del c % è B, si ottiene moltiplicando B per 100 e dividendo per c.

Problema. Un tale che ha destinato il 12 % delle sue rendite a opere di beneficenza, ha nell'annata elargito *L* 1530. Qual' è stata la sua rendita di quest'anno ?

La rendita richiesta è *L* 1530 × 100 : 12 = *L* 12750.

c) Il tasso di percentuale c si ottiene moltiplicando per 100 la percentuale B e dividendo per la quantità A su cui si calcola la percentuale.

Problema. Un conto di *L* 350 è stato saldato con *L* 320. Quanto per cento di ribasso è stato accordato ?

Il ribasso è *L* 350 — *L* 320 = *L* 30 e il tasso percentuale è *L* 30 × 100 : 350 = *L* 8,57 .

82. Le regole *a*), *b*), *c*) del § 81, quando si tratti di calcoli per 1000, anzichè per 100, valgono purchè si sostituisca 1000 a 100.

Si usa il tanto su 1000, anzichè su 100, in questioni di statistica (demografia, mortalità, disoccupazione, ...) e nelle leghe dei metalli.

Vediamo qualche esempio.

Problema. Una sbarra contenente rame al titolo di 800 [1] pesa ***kg*** 5,420. Quant' è il peso del rame puro ch'esso contiene ?

La quantità di rame è di ***kg*** 5,420 × 800 : 1000 = = ***kg*** 4,336 .

Problema. Si sono fusi ***kg*** 5 di argento insieme a ***kg*** 2,5 di rame. Nella lega risultante qual' è il titolo dell'argento ? e quello del rame ?

Il titolo dell' argento è $5 \times 1000 : (5 + 2,5) = 5000 : 7,5 = 666,\overline{6}$.

Il titolo del rame è $2,5 \times 1000 : (5 + 2,5) = 333,\overline{3}$.

Interesse [2].

83. La formula che dà l' interesse I di un capitale C, impiegato per anni t al tasso r, o, come si suol dire, all'r %, è:

$$I = \frac{Ctr}{100} ; \qquad (1)$$

I, C, r sono espressi in lire.

Questo impiego di capitale si chiama ad ***interesse semplice.***

[1] Ossia con 800 parti in peso di rame puro su 1000 parti in peso della sbarra.

[2] Per le scuole agrarie, industriali e professionali femminili.

Dalla formula precedente segue:

$$100\,I = Ctr\,,$$

da cui:

$$(2) \qquad C = \frac{100\,I}{tr}\;;\; r = \frac{100\,I}{Ct}\;;\; t = \frac{100\,I}{Cr}\,.$$

84. Se il tempo è espresso in mesi o in giorni, si sostituisce nella (1) e nelle prime due formule (2) a 100 rispettivamente 1200 e 36000.

L'ultima formula (2) dà il tempo in anni; volendolo in mesi o in giorni si sostituisce a 100 rispettivamente 1200 e 36000.

85. Problema. La somma di ***L*** 54000 è posta all'interesse del 4 %. Quanto frutta in 12 anni? e in 3 anni e 4 mesi? e in 2 anni, 2 mesi e 15 giorni?

Applicando la (1), nei vari casi, otteniamo:

L'interesse in 12 anni è $L\ \dfrac{54000 \times 4 \times 12}{100} =$
$= L\ 25920.$

L'interesse in 3 anni e 4 mesi, cioè in mesi $(12 \times 3 + 4) =$ mesi 40 è $L\ \dfrac{54000 \times 4 \times 40}{1200} = L\ 7200\,.$

L'interesse in 2 anni, 2 mesi e 15 giorni, cioè in giorni $(360 \times 2 + 30 \times 2 + 15) =$ giorni 795, è

$$L\ \frac{54000 \times 4 \times 795}{36000} = L\ 4770\,.$$

Problema. In quanto tempo un capitale di ***L*** 12000 frutta, all'interesse semplice, col tasso 3,50, la somma di ***L*** 1750?

Il tempo, in anni, è:

$$\frac{1750 \times 100}{12000 \times 3{,}5} = \frac{25}{6} = 4 + \frac{1}{6}\,.$$

La sesta parte dell'anno, cioè di 12 mesi, è 2 mesi. Il tempo richiesto, dunque, è $4^a\,2^M$.

Calcolando il tempo in mesi, otteniamo:

$$\frac{1750 \times 1200}{12000 \times 3{,}5} = \frac{1750}{35} = 50\,.$$

E 50 mesi formano appunto 4 anni e 2 mesi.

Problema. Un capitale impiegato in una industria si è raddoppiato in 28 anni. A quale tasso di interesse semplice dovrebbe esser posto per dare lo stesso interesse nello stesso tempo?

Nella formula $r = \dfrac{100\,I}{Ct}$ poniamo $I = C$ (perchè se il capitale si raddoppia, l'interesse è uguale al capitale) e $t = 28$. Otteniamo:

$$r = \frac{100}{28} = \frac{25}{7} = 3 + \frac{4}{7}\,.$$

Il tasso d'interesse è $L\left(3 + \dfrac{4}{7}\right)$.

Problema. Il *montante* (1) di un capitale impiegato al 3 % è $\dfrac{7}{6}$ del capitale medesimo. Per quanto tempo il capitale è stato a frutto?

Se il montante è $\dfrac{7}{6}$ del capitale, l'interesse è $\dfrac{1}{6}$ del capitale. Perciò un capitale di ***L*** 6 dà ***L*** 1 di interesse. Calcolando il tempo in anni, abbiamo:

$$t = \frac{100\,I}{Cr} = \frac{100 \times 1}{6 \times 3} = \frac{100}{18} = 5 + \frac{5}{9}\,.$$

I $\dfrac{5}{9}$ di anno sono $\dfrac{5 \times 12}{9}$, o $\dfrac{20}{3}$ di mese, ossia mesi $\left(6 + \dfrac{2}{3}\right) =$ mesi 6, giorni 20.

Il tempo richiesto è $5^a\,6^M\,20^g$.

(1) Cioè la somma del capitale con l'interesse.

86. [1] Quando gli interessi di un capitale impiegato a un certo tasso vengono aggiunti al capitale, dopo un periodo prefissato, e divengono fruttiferi, si dice che l' impiego del capitale è ad ***interesse composto*** con quel tasso e per quel *periodo di capitalizzazione*.

PROBLEMA. Calcolare l' interesse di un capitale di L 10000 impiegato, per 2 anni e 3 mesi al 1° gennaio di un anno all' interesse composto del 5 %, con periodo di capitalizzazione 1 anno.

L 10000, durante il primo anno, fruttano $L \dfrac{10000 \times 5}{100} = L$ 500 ;

il capitale, alla fine del primo anno, è L 10000 + L 500 = L 10500 ;

L 10500, durante il secondo anno, fruttano $L \dfrac{10500 \times 5}{100} = L$ 525 ;

il capitale, alla fine del secondo anno, è L 10500 + L 525 = L 11025 ;

L 11025, nei 3 mesi successivi, fruttano $L \dfrac{11025 \times 5 \times 3}{1200} = L$ 137,81

e la somma totale, il montante, al fine dell' impiego, è L 11025 + + L 137,81 = L 11162,81.

L' interesse richiesto è, dunque, L 11162,81 — L 10000= = L 1162,81.

Sconto [2].

87. Lo ***sconto,*** cioè il ribasso che si accorda a chi paga una somma in anticipo sulla data fissata, si calcola con le stesse formule dell' interesse, sostituendo s ad I. Lo sconto calcolato con tale norma si chiama *sconto commerciale* o *sconto in fuori* [3].

PROBLEMA. La somma di L 18000 vien pagata con un anticipo di 4 mesi sulla data fissata. Il tasso di sconto è del 4 %. Quant' è la somma che si paga effettivamente ? Qual'è il montante che si otterrebbe dopo 4 mesi mettendo la somma riscossa a frutto col tasso 4 ?

Lo sconto in fuori è $L \dfrac{18000 \times 4 \times 4}{1200} = L$ 240.

[1] Può omettersi in un primo studio.

[2] Per le scuole agrarie, industriali e professionali femminili.

[3] Lo *sconto razionale*, o *sconto in dentro*, è tale che la somma effettivamente versata, messa a frutto pel tempo e al tasso convenuti, dà un montante uguale alla somma totale da restituire. Ciò non avviene per lo sconto in fuori, che è più favorevole al creditore, come risulta dall'esempio successivo.

La somma pagata ammonta a L 18000 — L 240 = L 17760.

Questa somma in 4 mesi al 4% frutta $L \dfrac{17760 \times 4 \times 4}{1200} =$ = L 236,80.

Il relativo montante è di L 17996,80, e chi riscuote ha una perdita di L 3,20, rispetto a quello che dovrebbe essergli corrisposto.

PROBLEMA. Nello scontare una cambiale per 215 giorni si è accordata la diminuzione del 2,4 %. Qual' è il tasso di sconto ?

Su L 100 di capitale si è accordata la diminuzione di L 2,40. La formula :

$$r = \frac{36000\ s}{Ct},$$

essendo s = 2,40, C = 100, t = 215, dà :

$$r = \frac{36000 \times 2{,}40}{100 \times 215} = \frac{36 \times 24}{215} = \frac{864}{215} = 4{,}01....$$

Il tasso di sconto è 4,01.

Prontuari e loro uso [1].

88. In pratica, dovendosi calcolare l' interesse semplice o composto di un capitale variabile impiegato per un tempo variabile a un tasso fisso, si usano talune tabelle che si chiamano *prontuari* e che permettono maggior rapidità di calcolo.

Ci limitiamo a spiegare come è fatto e come è usato un prontuario d'interesse semplice.

Ogni pagina del prontuario corrisponde a un dato numero di giorni di durata dell' impiego. La successiva pag. 110 è tolta da un prontuario e vale per giorni 53.

Nella prima colonna sono segnati i capitali, cominciando da 10000 e diminuendo di 1000 alla volta, fino a 1000, poi diminuendo di 100 alla volta, fino a 100, poi diminuendo di 10 alla volta, fino a 10 e infine diminuendo di 1 alla volta, fino a 1.

Le colonne successive portano in alto l' indicazione del relativo

[1] Soltanto per gli allievi delle scuole agrarie ed industriali.

tasso d' interesse e sulla riga corrispondente ad ogni capitale sono segnati, in ciascuna colonna, l' interesse di quel capitale, a quel tasso, pel numero di giorni segnato in alto della pagina.

Dovendosi calcolare l'interesse di ***L*** 7436 impiegate per 53 giorni al 3,5 %, otteniamo :

per ***L*** 7000	***L*** 36,07 ;
per ***L*** 400	***L*** 2,06 ;
per ***L*** 30	***L*** 0,15 ;
per ***L*** 6	***L*** 0,03 ;
per ***L*** 7436	***L*** 38,31 .

L' interesse richiesto è ***L*** 38,31.

Il prontuario dell' interesse semplice non contempla periodi superiori ad un anno, perchè nelle banche gli interessi maturati durante l'anno divengono fruttiferi col primo gennaio successivo. Cioè, per periodi di tempo superiori ad un anno, l' impiego è ad interesse composto, col periodo di capitalizzazione un anno. Si useranno allora i prontuari relativi, più complessi, che tutte le banche posseggono.

ESERCIZI

150. Qual' è il rapporto fra il metro e il decametro ? Fra il metro quadrato e il decimetro quadrato ? Fra il metro cubo e il centimetro cubo ?

151. Qual' è il rapporto fra il metro e la yard ? Fra la yard e il braccio toscano ? Fra la brenta piemontese e quella lombarda ?

152. In una carta geografica, a ***km*** 1 sulla superficie terrestre corrisponde $\frac{1}{10}$ di ***mm***. Qual' è la scala [1] della carta ?

153. Una tonnellata di felci seccate (concime) contiene ***kg*** 24,6 di nitrato sodico e ***kg*** 18,60 di potassa. Determinare il rapporto esistente fra questi due pesi ed i rapporti di questi due pesi col peso complessivo.

154. La popolazione italiana risulta :

nel 1861 di 25020000 di abitanti ;
nel 1881 di 28460000 ;
nel 1901 di 32475000 ;
nel 1921 di 38755000.

[1] La *scala* è il rapporto fra una lunghezza del disegno e quella vera rappresentata dalla prima, espresse entrambe con la stessa unità di misura.

Calcolare l' aumento assoluto e relativo [1] di 20 in 20 anni e l'aumento assoluto e relativo dal 1861 al 1921.

155. Una merce pesa ***kg*** 450 e l' imballaggio ***kg*** 15. Qual' è il rapporto fra il peso netto e il lordo ? Qual' è il rapporto fra la tara e il peso lordo ?

156. La popolazione del Regno d' Italia, il 21 aprile 1936 XVI, risulta di 42438104 abitanti su ***km***² 310164. Qual' è la densità [2] della popolazione ?

157. In una pianta topografica la cui scala è da 1 a 2000, un prato è rappresentato con un rettangolo, di lati ***mm*** 62 e ***mm*** 22. Qual' è la superficie del prato ?

158. Nel progetto di un fabbricato a base rettangolare, coperto a terrazza, rappresentato nella scala da 1 a 50, la lunghezza è ***cm*** 50,2, la larghezza ***cm*** 30,3 e l'altezza fuori terra ***cm*** 38,4. Quale volume occuperà il fabbricato ?

159. Qual' è il rapporto fra il lato di un quadrato e la sua diagonale ? fra il lato di un triangolo equilatero e la sua altezza ?

160. Il rapporto fra i lati di due quadrati è 2. Qual' è il rapporto fra le loro superficie ?

161. Qual' è il rapporto fra il raggio di un cerchio e il lato del quadrato inscritto ? oppure e il lato dell'esagono regolare inscritto ? oppure e il lato del triangolo equilatero inscritto ? oppure e il lato del quadrato circoscritto ?

162. Si congiungono i punti di mezzo dei lati di un quadrato (o di un triangolo equilatero). Qual' è il rapporto fra i perimetri o fra le aree dei due quadrati (o dei due triangoli) ?

163. Una piramide e un prisma hanno la stessa base e lo stesso volume. Qual' è il rapporto delle loro altezze ?

164. Un cubo ha lo spigolo doppio di quello di un altro cubo. Qual' è il rapporto fra le loro superficie ? E fra i loro volumi ?

165. Si raddoppiano gli spigoli di un parallelepipedo rettangolo. Per qual numero la superficie viene moltiplicata ? Di quanto aumenta ? Le stesse questioni pel volume.

166. Il diametro del Sole è 109 volte quello della Terra. Quante Terre potrebbero essere contenute nel Sole (ossia qual' è il rapporto fra i volumi del Sole e della Terra) ?

167. Risolvere le proporzioni :

$$20 : x = 35 : 62 \quad ; \quad x : 9 = 8 : 13 ;$$

$$x : 2,\overline{1} = 0,5 : 4 \quad ; \quad 29 : 15 = x : 45 ;$$

[1] L'aumento relativo è il rapporto fra la popolazione alla fine e quella al principio del periodo considerato.

[2] La densità è il numero di abitanti, in media, su 1 *km.*².

$$x : 2{,}9 = 2{,}\overline{9} : 3 \quad ; \quad 1 : 2 = \frac{3}{4} : x ;$$

$$\left(2 + \frac{1}{3}\right) : x = \left(2 + \frac{1}{3}\right)^2 : \left(2 + \frac{1}{3}\right).$$

168. Trovare il quarto proporzionale dopo i tre numeri 2 ; 5 ; 6, presi in tutti i possibili ordini. Si ottiene sempre lo stesso numero?

169. Trovare il terzo proporzionale dopo 5 e 8. Scambiando fra di loro i due numeri, il risultato cambia? Lo stesso pel medio proporzionale fra 5 e 8.

170. Il medio proporzionale fra 2 e 8 è maggiore del medio aritmetico fra gli stessi numeri? [1]. E fra 5 e 7? Fra 4 e 9?

171. Il rapporto fra due numeri è 5 e il maggiore di essi è 9. Qual' è l'altro?

172. Due numeri stanno fra loro come 4 a 9. Se uno di essi è 7, quanto può essere l'altro?

Risolvere le proporzioni:

173. $(x - 3) : 7 = 21 : 4 \quad ; \quad 12 : (x + 1) = 7 : 5 .$

174. $3x : 5 = 9 : 6 \quad ; \quad x : 12 = 4 : 2x .$

175. $6 : 7 = 25 : \frac{x}{4} \quad ; \quad 33 : 5 = \frac{2}{x} : 9 .$

176. $(x + 3) : x = 8 : 5 \quad ; \quad (2x + 8) : x = 6 : 2 .$

177. $x : (x - 2) = 12 : \frac{9}{4} \quad ; \quad 2x : (x - 2) = 12 : \frac{9}{4} .$

Trovare due numeri x e y sapendo che:

178. $x : y = 5 : 9$ e $x + y = 4$;

$x : y = 22 : \frac{4}{5}$ e $x + y = 3$.

179. $2x : y = 5 : 7$ e $x + y = 4$;

$x : y = 17 : 6$ e $4x + y = 7$.

180. $x : 2 = y : 3$ e $x + y = 1$;

$2x : 3y = 15 : 7$ e $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 12$.

181. $x : y = 9 : 3$ e $x - y = 6$;

$x : y = 2 : 12$ e $y - x = 17$.

182. $x : 11 = y : 7$ e $x - y = 25$;

$x : 1 = y : 7$ e $y - x = 2{,}5$.

183. Due numeri stanno fra loro come 5 a 9. Qual' è il rapporto dei loro quadrati?

184. Due numeri stanno fra loro come 10 a 13 e la loro somma è 460. Quali sono i due numeri?

185. Una frazione è uguale a $\frac{3}{4}$ e la somma dei suoi termini è 35. Qual' è la frazione?

---

[1] Il *medio aritmetico* fra due numeri è la metà della loro somma.

186. Due numeri stanno fra loro come 5 a 13 e la somma dei loro quadrati è 15714. Trovare i due numeri.

187. Per comperare 3 dozzine di uova si sono spese ***L*** 12,60; quanto costano le uova al centinaio?

188. Un reggimento deve percorrere 405 ***km***. Per percorrere i primi 125 ***km*** ha impiegato 4 giorni. Quanto impiegherà per giungere a destinazione, mantenendo sempre la stessa velocità giornaliera?

189. Un capitale di ***L*** 75000, impiegato nell'acquisto di immobili, dà un reddito annuo netto di ***L*** 3250. Qual' è il reddito di ***L*** 100?

190. Da un bozzolo si ricavano circa ***g*** 0,30 di seta, di cui il 50 % rappresenta cascame. Quanti bozzoli occorrono per ottenere 1 ***kg*** di seta pura?

191. Una vite avanza per ogni giro di $\frac{3}{5}$ di millimetro. Quanto avanzerà in 12 giri? e quanti giri dovrà fare per avanzare di 17 ***mm***?

192. Da 324 ***kg*** di olive si son ricavati ***l*** 67 di olio. Quanti chilogrammi di olive occorrono per ottenere 1 ***l*** d'olio? E quanto olio si ricava da 1 ***kg*** di olive?

193. Un ettolitro di grano pesa, in media, ***kg*** 76. Quanto si guadagna, su un quintale di grano, se su un ettolitro si guadagna ***L*** 13,20?

194. L' Italia produce annualmente ***q*** 11218000 di olive, che dànno ettolitri 1992000 di olio. Quanti ***kg*** di olio si possono ricavare da ***q*** 1 di olive?

195. Il Po nasce dal Monviso a ***m*** 2042 di altezza e sfocia dopo un percorso di 652 ***km***. Calcolare la pendenza media per metro di corso e la pendenza percentuale.

196. Quant' è alta l'antenna verticale di una stazione radio, se la sua ombra è lunga ***m*** 20,15, mentre un bastoncino piantato verticalmente nel terreno ed alto ***m*** 1,25 dà un'ombra di ***cm*** 75?

197. Il tracciato della sezione di una macchina è a $\frac{3}{20}$ dal vero. Qual' è la superficie di un disco che nel tracciato ha il diametro di ***cm*** 11?

198. Due ruote dentate ingranano l'una nell'altra; la prima ha il diametro di ***cm*** 25 e l'altra lo ha di ***cm*** 8. Quanti giri fa la seconda ruota mentre la prima ne fa 5? Se ciò avviene in un secondo, qual' è la velocità di un punto della seconda ruota distante ***cm*** 4 dal centro di questa?

199. In ***km*** 2,300 di strada ci si è innalzati di ***m*** 131,60. Qual' è la pendenza percentuale?

200. Il caffè, nella tostatura, perde il 20 % del suo peso. Quanto caffè tostato si ottiene da ***kg*** 4,150 di caffè crudo?

201. Quanti ***kg*** di farina si ricavano macinando ***kg*** 476,80 di grano, se in media se ne ricava il 74,85 %?

202. Una merce è imballata in modo che la tara è $\frac{1}{14}$ del peso lordo. Qual' è la percentuale della tara sul peso lordo ? e sul peso netto ?

203. Il riso vialone contiene il 3,40 % di cellulosa. In quanti ***kg*** di riso è contenuto 1 ***kg*** di cellulosa ?

204. In Sicilia, su 25738 ***km***^{2} di superficie, 24350 sono adibiti a produzione agraria. In tutta Italia il terreno produttivo è il 92 % della superficie totale [1]. La percentuale del terreno produttivo è, in Sicilia, maggiore o minore della percentuale generale italiana ?

205. La produzione annuale del riso in tutto il mondo si aggira su ***q*** 1250000000 ; quella italiana nel 1924 fu di ***q*** 5900000 su ***ha*** 146000. Dire qual' è la percentuale del raccolto italiano su quello mondiale, e qual' è la produzione media italiana per unità di superficie.

206. La raccolta annuale del vino in tutto il mondo è stata nel 1935 di 165 milioni di ettolitri, nel 1934 di 219 milioni di ettolitri e negli anni precedenti, in media, di 140 milioni di ettolitri. Qual' è la percentuale di variazione nel raccolto degli anni 1934 e 35 rispetto ai precedenti e del 1935 rispetto al 1934 ?

207. In Sardegna ***ha*** 78000 sono occupate dal sughero. I $\frac{3}{5}$ appartengono alla provincia di Sassari. Qual' è la superficie coltivata a sughero nel resto dell' isola e qual' è la percentuale del terreno così coltivato, rispetto alla superficie totale della Sardegna, che è di ***km***^{2} 23818 ?

208. Un oggetto si vende guadagnando il 14 % sul prezzo di acquisto. Quanto per cento si guadagna sul prezzo di vendita ?

209. Un oggetto è venduto col guadagno del 15 % sul prezzo di vendita. Quanto per cento si guadagna sul prezzo di acquisto ?

210. Una fattura di ***L*** 116 vien saldata con ***L*** 110. Qual' è la percentuale di riduzione ?

211. Si comperano bottoni a ***L*** 75 la grossa e si rivendono a ***L*** 1,20 ciascuno. Quanto per cento si guadagna sul prezzo di compera ?

212. Lo stipendio mensile netto di un impiegato è di ***L*** 957,60. Le ritenute ammontano al 24 % dello stipendio lordo. Trovare l' importo di questo.

213. Un negoziante dà ai creditori il 36 % di ciò che loro spetta. Quanto riscuote un tale che avanzava ***L*** 2560 ? E quanto era il credito di un altro che riceve ***L*** 527 ?

214. Il fitto di una casa è ***L*** 6000 ; le imposte e le altre spese sono ***L*** 2420. La casa costa ***L*** 102300 ; qual' è il ricavo netto per cento ?

215. Una casa vale ***L*** 60200 ; affittandola se ne trae un utile del 6,25 % lordo delle imposte e spese. Questi oneri ammontano a ***L*** 1115. Qual' è l'utile netto per cento ?

---

[1] Con la bonifica integrale questa percentuale va aumentando.

216. Nella ripartizione dell'attivo di un fallimento un creditore di ***L*** 45700 ne riceve 6400. Gli altri due creditori ricevono ***L*** 16000 e ***L*** 9500. Qual' è il credito effettivo degli altri due creditori ? Quanto per cento essi ricevono ?

217. Un capitale di ***L*** 45000 impiegato all' interesse semplice al 5 % ha fruttato ***L*** 5062,50. Quanto tempo è durato l' impiego del capitale ?

218. Si è impiegata una somma di ***L*** 300 all' interesse semplice al 4 % e si sono riscosse, alla fine dell' impiego, ***L*** 400. Quanto tempo è durato l'impiego ?

219. Dopo quanto tempo un capitale posto ad interesse semplice al tasso 5 si raddoppia ?

220. Dopo quanto tempo un capitale posto ad interesse semplice al tasso 5 aumenta della metà ?

221. A qual tasso bisogna porre un capitale affinchè in 25 anni si raddoppi ?

222. A qual tasso bisogna porre un capitale affinchè aumenti della metà in 10 anni ?

223. In 2 anni un capitale è cresciuto di $\frac{1}{10}$. A qual tasso è stato impiegato ?

224. Un capitale è cresciuto di $\frac{3}{16}$ in 2 anni e 3 mesi. A qual tasso è stato impiegato ?

225. In 12 giorni un capitale è cresciuto di $\frac{1}{1000}$. A qual tasso è stato impiegato ?

226. In 3 mesi un capitale è cresciuto dell' 1 %. A qual tasso è stato impiegato ?

227. Un capitale è impiegato al 4 %. Di quanto per cento aumenta in 3 mesi ? e in 3 anni ?

228. Dopo quanto tempo un capitale impiegato al 3% aumenta di $\frac{1}{10}$? di $\frac{1}{3}$? Di quanto per cento aumenta in un giorno ?

229. Una somma impiegata al 4% ha fruttato $\frac{3}{25}$ del capitale ; alla fine dell' impiego si sono ritirate in tutto ***L*** 99400. Qual'era la somma impiegata ? Quanto tempo ha durato l' impiego ?

230. Un capitale di ***L*** 14000, aumentato degli interessi maturati in 5 anni e 8 mesi, dà un montante di ***L*** 16380. A quale tasso d' interesse è stato impiegato ?

231. Un capitale di ***L*** 17000 rimane, dal 1º gennaio di un anno al 15 marzo dell'anno successivo, in deposito fruttifero all' interesse semplice del 4 % ; a questa seconda data vengono ritirate ***L*** 8000 e si registrano gli interessi maturati, che divengono fruttiferi ; al 31 dicembre dello stesso anno si estingue il deposito. Quanto si ritira ?

232. Si depositano, il 20 maggio, *L* 1400 al 3 %. Quanto si ritirerà il 20 agosto dell'anno successivo, se il 1º gennaio gli interessi divengono fruttiferi ?

233. Una macchina agricola si può acquistare in due modi: o a contanti, pagandola *L* 5600, o in due rate, una all'atto dell'acquisto e una dopo un anno, entrambe di *L* 3000. Se il denaro frutta il 5 %, quale dei due modi è più conveniente per l'acquisto ?

234. Se il tasso diminuisce dal 5 al 4,50 %, l' interesse di un capitale in un anno diminuisce di *L* 1000. Qual' è il capitale ?

235. Un capitale è impiegato al 3,50 %, ed un altro, uguale, impiegato al 4%, frutta annualmente 500 lire più del primo. Quanto fruttano insieme, in un anno ?

236. Un' enciclopedia può acquistarsi pagando *L* 900 subito, oppure *L* 200 subito e successivamente quattro rate annuali di *L* 200 ciascuna. Se il denaro frutta il 5%, dire quale dei due modi è più conveniente per l'acquisto.

237. Un capitale di *L* 5000 rimasto per 3 anni e 2 mesi in deposito ad interesse semplice al 4 %, vien ritirato, coi frutti, per acquistare denaro inglese. Il cambio è 67,50. Quante lire sterline si acquistano ?

238. Una cambiale, scadente il 30 aprile, si sconta il 25 gennaio, col tasso 5. La riduzione accordata è di *L* 77. A quanto ammonta la cambiale ?

239. Oggi vale più una cambiale di *L* 500 pagabile fra tre mesi, o un titolo di rendita del valore nominale di *L* 500, il cui corso è 99 (1) ? Il tasso di sconto è 5.

240. Un titolo di rendita 3 % del valore nominale di *L* 500, si acquista per *L* 403. Qual' è il tasso effettivo di impiego ?

241. Rende di più la rendita 3 % acquistata a *L* 82, o quella 4 % acquistata a *L* 87,50 ?

242. Un titolo di rendita 4% del valore nominale di *L* 500 ha reso effettivamente il 5 %. A quanto è stato acquistato ?

---

(1) Ciò significa che *L* 100 di valore nominale valgono effettivamente *L* 99.

CAPITOLO SETTIMO

Divisione in parti proporzionali ; miscuglio e alligazione (1).

Divisione in parti proporzionali.

89. *Per dividere un numero A in parti direttamente proporzionali ai numeri p, q, r, ..., si divide A per la somma p + q + r + ... dei numeri dati e si moltiplica il risultato successivamente per p, per q, per r, ...*

Dette P, Q, R, ... le parti ottenute, si ha dunque :

$$P=\frac{Ap}{p+q+r+..}\ ;\ Q=\frac{Aq}{p+q+r+..}\ ;\ R=\frac{Ar}{p+q+r+..},...$$

Pertanto P è i $\dfrac{p}{p+q+r+..}$ di A ; così Q ne è i $\dfrac{q}{p+q+r+..}$; ecc.

Problema. Un lavoro è stato eseguito da tre operaie e compensato con *L* 325. Dire quanto spetta a ciascuna, sapendo che la più anziana riceve un compenso che è $\frac{4}{3}$ di quello che spetta ad ognuna delle altre due.

Indicando con 1 il compenso di ciascuna delle operaie più giovani, quello della più anziana è $\frac{4}{3}$. I com-

---

(1) Per le scuole agrarie, industriali e professionali femminili.

pensi stanno perciò fra loro come:

$$\frac{4}{3}\,,\ 1\ ,\ 1\ ,$$

cioè come 4, 3, 3 [1].

Si ha perciò:

compenso spettante alla operaia anziana:

$$L\ \frac{325 \times 4}{4+3+3} = L\ 32{,}5 \times 4 = L\ 130\ ;$$

compenso spettante a ciascuna delle altre due operaie:

$$L\ \frac{325 \times 3}{4+3+3} = L\ 32{,}5 \times 3 = L\ 97{,}50\ .$$

Per riprova: L 130 + L 97,50 + L 97,50 = L 325.

Problema. Tre soci hanno impiegato in un'azienda rispettivamente L 17000, L 40000 e L 35500. Dopo un periodo di lavoro comune il primo riscuote L 3400 di utile. Quant'è l'utile complessivo? Quant'è l'utile degli altri soci?

L'utile si suppone diviso in parti proporzionali ai capitali impiegati. Perciò L 3400 costituiscono i $\frac{17000}{17000+40000+35500}$ dell'utile complessivo, cioè ne sono i $\frac{17000}{92500} = \frac{34}{185}$.

Se $\frac{34}{185}$ dell'utile sono L 3400,

$\frac{1}{185}$ dell'utile sarà L 3400 : 34 = L 100,

e l'utile complessivo $\left(\frac{185}{185}\right)$ ammonterà a $L\,100 \times 185 =$ $= L$ 18500.

[1] Moltiplicando i tre numeri per 3, i loro mutui rapporti non cambiano. Lo stesso accade moltiplicandoli o dividendoli per un numero qualsiasi (diverso da 0).

L'utile del secondo socio è $L\ \frac{40000 \times 18500}{92500} =$ $= L$ 8000 e quello del terzo socio è $L\ \frac{35500 \times 18500}{92500} =$ $= L$ 7100.

Questo problema e gli altri analoghi riguardanti gli utili o le perdite di un'azienda di più soci, si chiamano *problemi di società*; la regola di ripartizione prende allora il nome di *regola di società*.

90. *Per dividere un numero A in parti inversamente proporzionali ai numeri p, q, r, ..., si divide A in parti direttamente proporzionali ai numeri* $\frac{1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{1}{r}, \ldots$.

Problema. Una persona lascia la somma di L 125000 da dividere fra 4 persone in ragione inversa al grado di parentela che ha con esse. Due sono parenti in quarto grado, una in quinto e una in sesto. Quanto spetta a ciascun erede?

Devesi dividere L 125000 in parti inversamente proporzionali a 4, 4, 5, 6, ossia direttamente a:

$$\frac{1}{4}\,,\ \frac{1}{4}\,,\ \frac{1}{5}\,,\ \frac{1}{6}\ ;$$

$$\frac{15}{60}\,,\ \frac{15}{60}\,,\ \frac{12}{60}\,,\ \frac{10}{60}\ ;$$

$$15\ ,\ 15\ ,\ 12\ ,\ 10\ .$$

Alla prima e alla seconda persona spettano, per ciascuna, $L\ \frac{125000 \times 15}{52} = L$ 36057,69;

alla terza spettano $L\ \frac{125000 \times 12}{52} = L$ 28846,15;

e alla quarta $L\ \frac{125000 \times 10}{52} = L$ 24038,46.

La somma delle quattro parti è 124999,99, perchè i calcoli non riquadrano esattamente.

91. *Per dividere un numero A in parti direttamente proporzionali ai numeri* $p_1, q_1, r_1, \ldots ;\ p_2, q_2, r_2, \ldots$

e inversamente ai numeri $t_1, u_1, v_1, \ldots$; $t_2, u_2, v_2, \ldots$, *si divide* A *in parti direttamente proporzionali ai numeri*

$$\frac{p_1\, p_2 \ldots}{t_1\, t_2 \ldots}\ ;\ \frac{q_1\, q_2 \ldots}{u_1\, u_2}\ ;\ \frac{r_1\, r_2 \ldots}{v_1\, v_2 \ldots}\ .$$

PROBLEMA. Con L 15500 si sono comprati tre cavalli che sono stati pagati in ragione diretta alle loro forze, che stanno fra loro come 8 sta 9 sta 10, e inversamente alle loro età che sono di 4 anni e 6 mesi, 5 anni, e 4 anni e 8 mesi. Quanto costa ciascun cavallo?

Devesi dividere L 15500 in parti direttamente proporzionali a:

$$8,\ 9,\ 10\ ,$$

e inversamente a:

$$54,\ 60,\ 56\ ,$$

(numeri dei mesi di età dei cavalli). Questi ultimi numeri son tutti divisibili per 2, quindi possono sostituirsi con:

$$27,\ 30,\ 28\ .$$

Devesi dunque dividere 15500 in parti direttamente proporzionali a:

$$\frac{8}{27}\ ,\ \frac{9}{30}\ ,\ \frac{10}{28}\ ,$$

ossia a:

$$\frac{8}{27}\ ,\ \frac{3}{10}\ ,\ \frac{5}{14}\ ,$$

$$\frac{560}{1890}\ ,\ \frac{567}{1890}\ ,\ \frac{675}{1890}\ ,$$

quindi a:

$$560\ ,\ 567\ ,\ 675\ .$$

Il primo cavallo costa $L\ \dfrac{15500 \times 560}{1802} = L\ 4816{,}87$;

il secondo costa $L\ \dfrac{15500 \times 567}{1802} = L\ 4877{,}08$;

e il terzo costa $L\ \dfrac{15500 \times 675}{1802} = L\ 5806{,}04$.

PROBLEMA. Tre soci hanno guadagnato in una impresa L 20000. Il primo vi ha impiegato L 25000 per 3 mesi, il secondo L 40000 per 40 giorni e il terzo L 15000 per 4 mesi. Quanto spetta a ciascuno?

L'utile si divide in parti direttamente proporzionali ai capitali ed ai tempi d'impiego. Perciò si divide proporzionalmente a

$$25000 \times 90\ ,\ 40000 \times 40\ ,\ 15000 \times 120\ ,$$

(dove il tempo è espresso in giorni), ossia a:

$$25 \times 9\ ,\ 40 \times 4\ ,\ 15 \times 12\ ,$$
$$5 \times 9\ ,\ 8 \times 4\ ,\ 3 \times 12\ ,$$
$$45\ ,\ 32\ ,\ 36\ .$$

Le parti saranno:

$$L\ \frac{20000 \times 45}{113}\ ,\ L\ \frac{20000 \times 32}{113}\ ,\ L\ \frac{20000 \times 36}{113}\ ,$$

ossia L 7964,60 ; L 5663,71 ; L 6371,68 .

Miscuglio e alligazione.

92. Daremo ora alcuni esempi di *problemi di miscuglio e alligazione.*

PROBLEMA. Si mescolano l 150 di vino da L 1,80 al litro con l 180 di vino da L 2,10 al litro. Quanto viene a costare ogni litro del miscuglio?

Il costo totale del miscuglio è di L $(1{,}80 \times 150 + 2{,}10 \times 180) = L$ 648. Il numero dei litri ottenuto è $150 + 180 = 330$; dunque il costo di un litro è

$$L\ \frac{648}{330} = L\ 1{,}96\ldots.$$

Problema. Si mescolano *l* 125 di vino da *L* 1,30 al litro con *hl* 2,3 di vino da *L* 1,60 al litro e si aggiungono *l* 60 di acqua. Volendo guadagnare *L* 60, a quanto al litro si venderà il miscuglio?

La somma da ricavare è:

$$L\,(1{,}30 \times 125 + 1{,}60 \times 230 + 60)\,;$$

il numero dei litri ottenuto è:

$$125 + 230 + 60\,,$$

perciò il prezzo di vendita unitario è:

$$L\,\frac{1{,}30 \times 125 + 1{,}60 \times 230 + 60}{125 + 230 + 60} = L\;1{,}42$$

Poichè si non può vendere il vino a *L* 1,42 al litro, al minuto, si venderà a *L* 1,45, con un guadagno lievemente superiore a *L* 60.

Problema. Si ha a disposizione vino da *L* 200 all'ettolitro e vino da *L* 140 all'ettolitro. Quanto vino delle due qualità occorre mescolare per avere 540 litri di miscuglio al costo di *L* 1,75 al litro?

Nel vendere *l* 1 del vino migliore a *L* 1,75, si perde *L* 0,25; nel vendere *l* 1 dell'altro vino allo stesso prezzo si guadagna *L* 0,35. La somma perduta vendendo x litri del vino migliore deve essere eguale a quella guadagnata vendendone y dell'altro. Deve perciò essere:

$$0{,}25 \times x = 0{,}35 \times y\,,$$

ossia:

$$x : y = 0{,}35 : 0{,}25\,,$$

e inoltre:

$$x + y = 540\,.$$

Si deve perciò dividere 540 in parti proporzionali a 0,35 e 0,25, cioè a 35 e 25, ossia a 7 e 5. Si ottiene:

$$l\,\frac{540 \times 7}{12} = l\,315, \text{ quantità del vino migliore;}$$

$$l\,\frac{540 \times 5}{12} = l\,225, \text{ quantità dell'altro vino.}$$

In pratica si scrive così:

costo del vino migliore al litro:		costo dell'altro vino al litro:
L 2		*L* 1,40
	costo del miscuglio al litro: *L* 1,75	

Si calcolano le differenze in croce, ottenendo a sinistra 0,35 e a destra 0,25; infine si divide 540 in parti proporzionali a tali differenze.

Problema. Quanto argento al titolo dell'800 ‰ e quanto argento al titolo del 650 ‰ dovranno esser fusi insieme per ottenere 6 *kg* di argento al 720 ‰?

Si ottiene, analogamente al problema precedente:

I° titolo		II° titolo
800		650
	Titolo del miscuglio 720	
70		80.

Devesi dividere *kg* 6 in parti direttamente proporzionali a 70 e 80, cioè a 7 e 8. Perciò:

occorrono $kg\;\frac{6 \times 7}{15} = kg\;2{,}8$ dell'argento all'800 ‰ e

occorrono $kg\;\frac{6 \times 8}{15} = kg\;3{,}2$ dell'argento al 650 ‰.

ESERCIZI

243. Dividere 4500 in parti direttamente proporzionali a $\frac{5}{4}$, $\frac{3}{5}$ e $\frac{6}{7}$.

244. Dividere 54010 in parti inversamente proporzionali a $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$.

245. Due persone devono spartirsi *L* 15000, proporzionalmente a 5 e 9. Quanto spetta a ciascuna?

246. In un fallimento vi son 4 creditori, cui spettano rispettivamente ***L*** 45000, ***L*** 60000, ***L*** 82000 e ***L*** 90000. Come verrà ripartito fra di essi l'attivo di ***L*** 142000 ? Quanto per cento riceveranno ?

247. Dividere 3451 in tre parti, in modo che la prima stia alla seconda come 1 a 2 e la seconda stia alla terza come 3 a 4.

248. La somma delle tre dimensioni di un parallelepipedo rettangolo è ***cm*** 50 ; esse stanno fra loro come 5 ; 7 e 8. Quanto misura il lato del quadrato equivalente alla superficie totale del parallelepipedo ?

249. Due tagli di stoffa costano complessivamente ***L*** 280 e il valore del primo taglio sta a quello del secondo come 4 sta a 3. Quanto costa ciascun taglio di stoffa ?

250. Un commerciante ha venduto ***m*** 115 di una stoffa e altrettanto di un'altra, ricevendo in tutto ***L*** 8050. Dire a quanto ha venduto ogni stoffa, sapendo che tre metri della prima costano quanto due della seconda.

251. Due bottiglie eguali pesano ***g*** 250 ciascuna, vuote. Riempiendole una di acqua e l'altra d'olio, si ottiene come peso totale lordo ***kg*** 3,333. Qual' è la capacità di ogni bottiglia ?

252. Due soci partecipano ad un' impresa con capitali che stan fra loro come 7 a 9. Il secondo ricava un utile di ***L*** 27000. Quanto ricava il primo ?

253. Un numero è diviso in parti proporzionali a 5 ; 12 e 17. La parte maggiore risulta eguale a 624. Trovare le altre due parti e il numero.

254. Due soci partecipano ad un' impresa con capitali che stanno fra loro come 2 a 3. Il secondo percepisce un utile che supera di ***L*** 4000 quello del primo. Quanto riscuote ciascuno ?

255. Trovare tre numeri, sapendo che i $\frac{3}{4}$ del doppio della loro somma, divisi in parti proporzionali ai numeri cercati, dànno 513 ; 330 e 450.

256. Trovare tre numeri sapendo che la metà della loro somma diminuita di 641 e divisa in parti proporzionali ai numeri dà 512 ; 320 e 450.

257. Si sono acquistati in blocco per ***L*** 150 due scampoli di panno, uno di ***m*** 4, segnato ***L*** 25 al metro, e uno di ***m*** 3, segnato ***L*** 30 al metro. Come va ripartita la spesa fra le due persone che usano i due scampoli ?

258. Due operaie lavorano ad un ricamo. Da sola, la prima, lo farebbe in 21 giornate di 8 ore e la seconda in 17 di 9 ore. Quanto tempo impiegano a fare il ricamo insieme, lavorando 10 ore al giorno ? Come va ripartito fra esse il compenso di ***L*** 180 ?

259. Due operai fanno un lavoro a cottimo per ***L*** 450. Uno dei due operai ha lavorato 12 giorni, e prende un salario giornaliero superiore di $\frac{1}{4}$ a quello dell'altro, che ha lavorato 15 giorni. Quanto spetta a ciascuno ?

260. La ghiaia necessaria ad un lavoro fu provvista da un imprenditore che, non trovandola tutta pronta in una cava, ne fece venire m^3 124 da ***km*** 3,5 di distanza, m^3 80 da ***km*** 6,5 e m^3 55 da ***km*** 8. Valutando il compenso in ragione dei metri cubi e dei chilometri, trovare come fu ripartita la somma di ***L*** 4251,70 fra i tre fornitori.

261. Si fondono insieme ***kg*** 1,35 di argento puro con ***kg*** 0,52 di nichel. Qual' è il titolo della lega risultante ?

262. Si mescolano ***kg*** 30 di farina da ***L*** 142 al quintale e ***kg*** 52 di farina da ***L*** 165 al quintale. A quanto al ***kg*** si deve vendere il miscuglio, se si vuol guadagnare ***L*** 11 ?

263. Quanta acqua si è aggiunta a 550 litri di vino da ***L*** 180 l'ettolitro, per vendere il miscuglio a ***L*** 1,45 al litro senza perdita, nè guadagno ?

264. Si son mescolati 45 litri di vino da ***L*** 171 l'ettolitro, con 27 litri di altro vino. Il costo del miscuglio è di ***L*** 180 l'ettolitro. Qual' è il costo del secondo vino all'ettolitro ?

265. Quanto rame bisogna aggiungere a ***g*** 135 di argento puro per ottenere una verga del titolo 800 ‰ ?

266. Una lega di argento e nichel contiene il primo metallo al titolo dell' 800 ‰ ; il peso totale è ***g*** 750. Quanto argento bisognerebbe aggiungere per far crescere il titolo a 900 ‰ ? E quanto nichel bisognerebbe aggiungere per far diminuire il titolo a 750 ‰?

267 (1). Riguardo alla produzione mondiale del petrolio, si hanno i seguenti dati :

anno 1929	tonnellate 211050000
anno 1934	tonnellate 208982000
anno 1935	tonnellate 226119000.

Dire di quanto per cento in più o in meno, rispetto alla pro duzione del 1929 sono variate quelle del 1934 e 1935.

268. Quanto vale, in centesimi, la metà dei $\frac{2}{3}$ dei $\frac{3}{4}$ dei $\frac{4}{5}$ di un soldo ?

269. Un numero si eleva al quadrato e si divide il risultato per due ; lo stesso numero si divide per due e si fa il quadrato del risultato. I due numeri ottenuti sono uguali ?

270. Un numero si raddoppia ; il risultato si raddoppia ancora e infine il nuovo risultato si triplica. Che cosa si ottiene togliendo dal numero ottenuto il doppio del numero dato ?

---

(1) **Gli esercizi che seguono servono a ricapitolare e ad applicare le nozioni apprese in tutto il corso.**

271. La confezione di una camicetta di divisa di Giovane Italiana richiede ***m*** 2,25 di picchè da ***L*** 4,20 al metro. Quante camicette si confezionano con una pezza di ***m*** 27 ? Quanto si incassa se per la confezione di una camicetta si richiedono ***L*** 4,50 e si guadagna il 10 % sul costo della stoffa ?

272. Una ricamatrice vuole ingrandire un disegno, in modo che la superficie divenga doppia. Quale dev'essere il rapporto di ingrandimento per le lunghezze ?

273. L' imbiancatura di una cucina larga ***m*** 3,60, lunga ***m*** 4,20 e alta ***m*** 3,50 è costata ***L*** 38,80. Le porte e le finestre occupano $\frac{1}{6}$ della superficie delle pareti. Qual' è il costo medio per metro quadrato della imbiancatura ?

274. Una palla di ***m*** 2 di raggio serve di decorazione al padiglione di una esposizione ed è verniciata in rosso e verde ; la parte verde è $\frac{3}{5}$ di quella rossa. La verniciatura costa ***L*** 3 al m^2 pel rosso e ***L*** 3,25 al m^2 pel verde; quanto costa in tutto ?

275. Una partita di legname di m^3 37,321 è stata acquistata complessivamente per ***L*** 2049,90. A quanto si deve vendere al quintale, se il peso specifico medio di quel legname è 0,80, volendo guadagnare il 14 % ?

276. Il tetto di una casa si vuol trasformare in terrazza. La ringhiera per cintare la terrazza costa ***L*** 25 al ***m***, messa in opera ; il materiale e l'esecuzione della pavimentazione ***L*** 22 al m^2 ; le dimensioni sono ***m*** 11 e ***m*** 6. Dire quanto costa la trasformazione, se per demolire il tetto occorrono 4 giornate di 4 operai a ***L*** 16 ciascuna, e dal materiale di demolizione si ricavano ***L*** 400.

277. Un tetto si ricopre con lastre di lavagna rettangolari, larghe ***cm*** 0,70 e lunghe ***cm*** 0,80. Nel disporle in parte sovrapposte si perdono i $\frac{3}{7}$ della superficie. Quante lastre occorrono per ricoprire quel tetto che è a due spioventi di forma rettangolare di ***m*** 12 per ***m*** 5 ciascuno ?

278. Se in 200 parti in peso di acqua si pongono 7 parti di zucchero, il volume aumenta di $\frac{1}{10}$. Quanto viene a costare ***l*** 1 della soluzione, se lo zucchero costa ***L*** 6,10 al ***kg*** ?

279. Nella mappa di un podere alla scala da 1 a 1500 la figura che rappresenta un appezzamento occupa la superficie di cm^2 125,32. Trovare la superficie dell'appezzamento e determinarne il valore sapendo che ogni ettaro vale ***L*** 10500.

280. Nella planimetria di un giardino la circonferenza di una vasca è lunga ***cm*** 4,7. Se la scala è da 1 a 200, quale sarà la lunghezza della circonferenza della vasca in un altro disegno, alla scala di 1 a 150?

281. Un ortolano coglie pere e mele ; in tutto 320 frutta. Se mettesse in un canestro tutte le mele e 20 pere e nell'altro le rimanenti pere, avrebbe un ugual numero di frutta dalle due parti. Quante pere e quante mele ha ?

282. Con una trattrice si ara un campo in 7 ore ; con quella e un'altra trattrice insieme, s' impiegano 4 ore per arare un campo eguale. Quanto tempo occorre per arare un campo di superficie $\frac{9}{4}$ dei precedenti, con la seconda trattrice ?

283. Un contadino vende $\frac{3}{4}$ del raccolto del grano a ***L*** 75 il quintale e incassa ***L*** 1650 di più di quel che avrebbe incassato vendendo allo stesso prezzo $\frac{2}{3}$ del raccolto. A quanti quintali ammonta il raccolto ?

284. Un rettangolo di dimensioni ***cm*** 15 e ***cm*** 20 ruota intorno al lato minore. Qual' è il rapporto fra la superficie totale del cilindro così ottenuto e la superficie della sfera circoscritta a questo cilindro ?

285. Un esagono regolare ruota intorno alla congiungente di due vertici opposti, o alla congiungente dei punti di mezzo di due lati opposti. Qual' è il rapporto fra le superficie o fra i volumi dei solidi ottenuti ?

286. Due piramidi hanno ugual base e il volume della prima è due volte quello della seconda. Qual' è il rapporto delle altezze ?

287. Il rapporto fra il raggio di un cerchio e un arco è $\frac{7}{10}$. Quanto misura l'angolo al centro corrispondente all'arco ?

288. Un settore circolare è $\frac{3}{7}$ del cerchio. Quant' è l'angolo al centro corrispondente ? Quanto l'arco, se il raggio è lungo ***cm*** 12 ?

289. Un triangolo rettangolo ha l' ipotenusa di ***cm*** 26 ed i cateti stanno fra loro come 5 e 12. Calcolare i cateti e l'area del triangolo. (Se i cateti stanno fra loro come 5 a 12, i loro quadrati stanno fra loro come....).

290. Un campo a forma di rettangolo di ***m*** 150 per ***m*** 45 viene acquistato a ***L*** 203,50 all'ara. Sul prezzo di vendita si accorda una diminuzione globale di ***L*** 736,25. A quanto per cento ammonta la diminuzione accordata ?

291. In una pianta un quadrato ha la superficie 400 volte più piccola del vero. Qual' è il rapporto di riduzione, ossia qual' è il rapporto fra un segmento della pianta e quello da esso rappresentato ?

292. La parte intera del numero che misura in chilometri la velocità di un treno all'ora si potrebbe trovare contando dal treno stesso i segnali divisori dei chilometri (escluso quello iniziale) durante un'ora. Tale numero non cambia contando nello stesso modo i segnali divisori dei mezzi chilometri durante mezz'ora. Trovare per quanti secondi si dovrebbero contare le rotaie lunghe 18 metri, perchè il numero delle rotaie stesse indicasse la parte intera del numero di chilometri della velocità del treno all'ora (il passaggio da una rotaia all'altra si avverte stando sul treno dal rumore che producono le ruote passando sul giunto).

Tavola dei quadrati, dei cubi, delle radici quadrate e cubiche dei numeri interi da 1 a 300.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
1	1	1	1	1	51	2601	132651	7,141	3,708
2	4	8	1,414	1,259	52	2704	140608	7,211	3,732
3	9	27	1,732	1,442	53	2809	148877	7,280	3,756
4	16	64	2	1,587	54	2916	157464	7,348	3,779
5	25	125	2,236	1,709	55	3025	166375	7,416	3,802
6	36	216	2,449	1,817	56	3136	175616	7,483	3,825
7	49	343	2,645	1,912	57	3249	185193	7,549	3,848
8	64	512	2,828	2	58	3364	195112	7,615	3,870
9	81	729	3	2,080	59	3481	205379	7,681	3,892
10	100	1000	3,162	2,154	60	3600	216000	7,745	3,914
11	121	1331	3,316	2,223	61	3721	226981	7,810	3,936
12	144	1728	3,464	2,289	62	3844	238328	7,874	3,957
13	169	2197	3,605	2,351	63	3969	250047	7,937	3,979
14	196	2744	3,741	2,410	64	4096	262144	8	4
15	225	3375	3,872	2,466	65	4225	274625	8,062	4,020
16	256	4096	4	2,519	66	4356	287496	8,124	4,041
17	289	4913	4,123	2,571	67	4489	300763	8,185	4,061
18	324	5832	4,242	2,620	68	4624	314432	8,246	4,081
19	361	6859	4,358	2,668	69	4761	328509	8,306	4,101
20	400	8000	4,472	2,714	70	4900	343000	8,366	4,121
21	441	9261	4,582	2,758	71	5041	357911	8,426	4,140
22	484	10648	4,690	2,802	72	5184	373248	8,485	4,160
23	529	12167	4,795	2,843	73	5329	389017	8,544	4,179
24	576	13824	4,898	2,884	74	5476	405224	8,602	4,198
25	625	15625	5	2,924	75	5625	421875	8,660	4,217
26	676	17576	5,099	2,962	76	5776	438976	8,717	4,235
27	729	19683	5,196	3	77	5929	456533	8,774	4,254
28	784	21952	5,291	3,036	78	6084	474552	8,831	4,272
29	841	24389	5,385	3,072	79	6241	493039	8,888	4,290
30	900	27000	5,477	3,107	80	6400	512000	8,944	4,308
31	961	29791	5,567	3,141	81	6561	531441	9	4,326
32	1024	32768	5,656	3,174	82	6724	551368	9,055	4,344
33	1089	35937	5,744	3,207	83	6889	571787	9,110	4,362
34	1156	39304	5,830	3,239	84	7056	592704	9,165	4,379
35	1225	42875	5,916	3,271	85	7225	614125	9,219	4,396
36	1296	46656	6	3,301	86	7396	636056	9,273	4,414
37	1369	50653	6,082	3,332	87	7569	658503	9,327	4,431
38	1444	54872	6,164	3,361	88	7744	681472	9,380	4,447
39	1521	59319	6,244	3,391	89	7921	704969	9,433	4,464
40	1600	64000	6,324	3,419	90	8100	729000	9,486	4,481
41	1681	68921	6,403	3,448	91	8281	753571	9,539	4,497
42	1764	74088	6,480	3,476	92	8464	778688	9,591	4,514
43	1849	79507	6,557	3,503	93	8649	804357	9,643	4,53[illegible]
44	1936	85184	6,633	3,530	94	8836	830584	9,695	5,546
45	2025	91125	6,708	3,556	95	9025	857375	9,746	4,562
46	2116	97336	6,782	3,583	96	9216	884736	9,797	4,578
47	2209	103823	6,855	3,608	97	9409	912673	9,848	4,594
48	2304	110592	6,928	3,634	98	9604	941192	9,899	4,610
49	2401	117649	7	3,659	99	9801	970299	9.949	4,626
50	2500	125000	7,071	3,684	100	10000	1000000	10	4,641

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
101	10201	1030301	10,049	4,657	151	22801	3442951	12,288	5,325
102	10404	1061208	10,099	4,672	152	23104	3511808	12,328	5,336
103	10609	1092727	10,148	4,687	153	23409	3581577	12,369	5,348
104	10816	1124864	10,198	4,702	154	23716	3652264	12,409	5,360
105	11025	1157625	10,246	4,717	155	24025	3723875	12,449	5,371
106	11236	1191016	10,295	4,732	156	24336	3796416	12,489	5,383
107	11449	1225043	10,344	4,747	157	24649	3869893	12,529	5,394
108	11664	1259712	10,392	4,762	158	24964	3944312	12,569	5,406
109	11881	1295029	10,440	4,776	159	25281	4019679	12,609	5,417
110	12100	1331000	10,488	4,791	160	25600	4096000	12,649	5,428
111	12321	1367631	10,535	4,805	161	25921	4173281	12,688	5,440
112	12544	1404928	10,583	4,820	162	26244	4251528	12,727	5,451
113	12769	1442897	10,630	4,834	163	26569	4330747	12,767	5,462
114	12996	1481544	10,677	4,848	164	26896	4410944	12,806	5,473
115	13225	1520875	10,723	4,862	165	27225	4492125	12,845	5,484
116	13456	1560896	10,770	4,876	166	27556	4574296	12,884	5,495
117	13689	1601613	10,816	4,890	167	27889	4657463	12,922	5,506
118	13924	1643032	10,862	4,904	168	28224	4741632	12,961	5,517
119	14161	1685159	10,908	4,918	169	28561	4826809	13	5,528
120	14400	1728000	10,954	4,932	170	28900	4913000	13,038	5,539
121	14641	1771561	11	4,946	171	29241	5000211	13,076	5,550
122	14884	1815848	11,045	4,959	172	29584	5088448	13,114	5,561
123	15129	1860867	11,090	4,973	173	29929	5177717	13,152	5,572
124	15376	1906624	11,135	4,986	174	30276	5268024	13,190	5,582
125	15625	1953125	11,180	5	175	30625	5359375	13,228	5,593
126	15876	2000376	11,224	5,013	176	30976	5451776	13,266	5,604
127	16129	2048383	11,269	5,026	177	31329	5545233	13,304	5,614
128	16384	2097152	11,313	5,039	178	31684	5639752	13,341	5,625
129	16641	2146689	11,357	5,052	179	32041	5735339	13,379	5,635
130	16900	2197000	11,401	5,065	180	32400	5832000	13,416	5,646
131	17161	2248091	11,445	5,078	181	32761	5929741	13,453	5,656
132	17424	2299968	11,489	5,091	182	33124	6028568	13,490	5,667
133	17689	2352637	11,532	5,104	183	33489	6128487	13,527	5,677
134	17956	2406104	11,575	5,117	184	33856	6229504	13,564	5,687
135	18225	2460375	11,618	5,129	185	34225	6331625	13,601	5,698
136	18496	2515456	11,661	5,142	186	34596	6434856	13,638	5,708
137	18769	2571353	11,704	5,155	187	34969	6539203	13,674	5,718
138	19044	2628072	11,747	5,167	188	35344	6644672	13,711	5,728
139	19321	2685619	11,789	5,180	189	35721	6751269	13,747	5,738
140	19600	2744000	11,832	5,192	190	36100	6859000	13,784	5,748
141	19881	2803221	11,874	5,204	191	36481	6967871	13,820	5,758
142	20164	2863288	11,916	5,217	192	36864	7077888	13,856	5,768
143	20449	2924207	11,958	5,229	193	37249	7189057	13,892	5,778
144	20736	2985984	12	5,241	194	37636	7301384	13,928	5,788
145	21025	3048625	12,041	5,253	195	38025	7414875	13,964	5,798
146	21316	3112136	12,083	5,265	196	38416	7529536	14	5,808
147	21609	3176523	12,124	5,277	197	38809	7645373	14,035	5,818
148	21904	3241792	12,165	5,289	198	39204	7762392	14,071	5,828
149	22201	3307949	12,206	5,301	199	39601	7880599	14,106	5,838
150	22500	3375000	12,247	5,313	200	40000	8000000	14,142	5,848

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
201	40401	8120601	14,177	5,857	251	63001	15813251	15,842	6,307
202	40804	8242408	14,212	5,867	252	63504	16003008	15,874	6,316
203	41209	8365427	14,247	5,877	253	64009	16194277	15,905	6,324
204	41616	8489664	14,282	5,886	254	64516	16387064	15,937	6,333
205	42025	8615125	14,317	5,896	255	65025	16581375	15,968	6,341
206	42436	8741816	14,352	5,905	256	65536	16777216	16	6,349
207	42849	8869743	14,387	5,915	257	66049	16974593	16,031	6,357
208	43264	8998912	14,422	5,924	258	66564	17173512	16,062	6,366
209	43681	9129329	14,456	5,934	259	67081	17373979	16,093	6,374
210	44100	9261000	14,491	5,943	260	67600	17576000	16,124	6,382
211	44521	9393931	14,525	5,953	261	68121	17779581	16,155	6,390
212	44944	9528128	14,560	5,962	262	68644	17984728	16,186	6,398
213	45369	9663597	14,594	5,972	263	69169	18191447	16,217	6,406
214	45796	9800344	14,628	5,981	264	69696	18399744	16,248	6,415
215	46225	9938375	14,662	5,990	265	70225	18609625	16,279	6,423
216	46656	10077696	14,696	6	266	70756	18821096	16,309	6,431
217	47089	10218313	14,730	6,009	267	71289	19034163	16,340	6,439
218	47524	10360232	14,764	6,018	268	71824	19248832	16,370	6,447
219	47961	10503459	14,798	6,027	269	72361	19465109	16,401	6,455
220	48400	10648000	14,832	6,036	270	72900	19683000	16,431	6,463
221	48841	10793861	14,866	6,045	271	73441	19902511	16,462	6,471
222	49284	10941048	14,899	6,055	272	73984	20123648	16,492	6,479
223	49729	11089567	14,933	6,064	273	74529	20346417	16,523	6,487
224	50176	11239424	14,966	6,073	274	75076	20570824	16,553	6,495
225	50625	11390625	15	6,082	275	75625	20796875	16,583	6,502
226	51076	11543176	15,033	6,091	276	76176	21024576	16,613	6,510
227	51529	11697083	15,066	6,100	277	76729	21253933	16,643	6,518
228	51984	11852352	15,099	6,109	278	77284	21484952	16,673	6,526
229	52441	12008989	15,132	6,118	279	77841	21717639	16,703	6,534
230	52900	12167000	15,165	6,126	280	78400	21952000	16,733	6,542
231	53361	12326391	15,198	6,135	281	78961	22188041	16,763	6,549
232	53824	12487168	15,231	6,144	282	79524	22425768	16,793	6,557
233	54289	12649337	15,264	6,153	283	80089	22665187	16,823	6,565
234	54756	12812904	15,297	6,162	284	80656	22906304	16,852	6,573
235	55225	12977875	15,329	6,171	285	81225	23149125	16,881	6,580
236	55696	13144256	15,362	6,179	286	81796	23393656	16,911	6,588
237	56169	13312053	15,394	6,188	287	82369	23639903	16,941	6,596
238	56644	13481272	15,427	6,197	288	82944	23887872	16,970	6,603
239	57121	13651919	15,459	6,205	289	83521	24137569	17	6,611
240	57600	13824000	15,491	6,214	290	84100	24389000	17,029	6,619
241	58081	13997521	15,524	6,223	291	84681	24642171	17,058	6,626
242	58564	14172488	15,556	6,231	292	85264	24897088	17,088	6,634
243	59049	14348907	15,588	6,240	293	85849	25153757	17,117	6,641
244	59536	14526784	15,620	6,248	294	86436	25412184	17,146	6,649
245	60025	14706125	15,652	6,257	295	87025	25672375	17,175	6,656
246	60516	14886936	15,684	6,265	296	87616	25934336	17,204	6,664
247	61009	15069223	15,716	6,274	297	88209	26198073	17,233	6,671
248	61504	15252992	15,748	6,282	298	88804	26463592	17,262	6,679
249	62001	15438249	15,779	6,291	299	89401	26730899	17,291	6,686
250	62500	15625000	15,811	6,299	300	90000	27000000	17,320	6,694

Pagina di un prontuario pel calcolo degli interessi semplici.

GIORNI 53

Capitali	Saggio d'interesse							Capitali
	2	2½	3	3½	4	4½	5	
10000	29,44	36,81	44,17	51,53	58,89	66,25	73.61	10000
9000	26,50	33,12	39,75	46,37	53,00	59,62	66,25	9000
8000	23,55	29,44	35,33	41,22	47,11	53,00	58,89	8000
7000	20,61	25,76	30,92	36,07	41,22	46,37	51,53	7000
6000	17,67	22,08	26,50	30,92	35,33	39,75	44,17	6000
5000	14,72	18,40	22,08	25,76	29,44	33,12	36,81	5000
4000	11,78	14,72	17,67	20,61	23,55	26,50	29,44	4000
3000	8,83	11,04	13,25	15,46	17,67	19,87	22,08	3000
2000	5,89	7,36	8,83	10,31	11,78	13,25	14,72	2000
1000	2,94	3,68	4,42	5,15	5,89	6,62	7,36	1000
900	2,65	3,31	3,97	4,64	5,30	5,96	6,62	900
800	2,35	2,94	3,53	4,12	4,71	5,30	5,89	800
700	2,06	2,58	3,09	3,61	4,12	4,64	5,15	700
600	1,77	2,21	2,65	3,09	3,53	3,97	4,42	600
500	1,47	1,84	2,21	2,58	2,94	3,31	3,68	500
400	1,18	1,47	1,77	2,06	2,35	2,65	2,94	400
300	0,88	1,10	1,32	1,55	1,77	1,99	2,21	300
200	0,59	0,74	0,88	1,03	1,18	1,32	1,47	200
100	0,29	0,37	0,44	0,51	0,59	0,66	0,74	100
90	0,26	0,33	0,40	0,46	0,53	0,60	0,66	90
80	0,23	0,29	0,35	0,41	0,47	0,53	0,59	80
70	0,21	0,26	0,31	0,36	0,41	0,46	0,51	70
60	0,18	0,22	0,26	0,31	0,35	0,40	0,44	60
50	0,15	0,18	0,22	0,26	0,29	0,33	0,37	50
40	0,12	0,15	0,18	0,21	0,23	0,26	0,29	40
30	0,09	0,11	0,13	0,15	0,18	0,20	0,22	30
20	0,06	0,07	0,09	0,10	0,12	0,13	0,15	20
10	0,03	0,04	0,04	0,05	0,06	0,07	0,07	10
9	0,03	0,03	0,04	0,05	0,05	0,06	0,07	9
8	0,02	0,03	0,03	0,04	0,05	0,05	0,06	8
7	0,02	0,03	0,03	0,04	0,04	0,05	0,05	7
6	0,02	0,02	0,03	0,03	0,03	0,04	0,04	6
5	0,01	0,02	0,02	0,03	0,03	0,03	0,04	5
4	0,01	0,01	0,02	0,02	0,02	0,03	0,03	4
3	0,01	0,01	0,01	0,01	0,02	0,02	0,02	3
2	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	2
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,01	0,01	1
Capitali	2	2½	3	3½	4	4½	5	Capitali
	Saggio d'interesse							

INDICE