MANUALI HOEPLI

ALGEBRA
ELEMENTARE

DI

S. PINCHERLE
Prof. di Calcolo infinitesimale nella R. Università di Bologna

Con 2 incisioni nel testo

QUATTORDICESIMA EDIZIONE RIVEDUTA

ULRICO HOEPLI
EDITORE-LIBRAIO DELLA REAL CASA
MILANO
—
1923

RIA

Milano, Via G. Mameli, 15.
ly).

AVVERTENZA

Nel presente Manuale, destinato ai giovani che frequentano quei corsi pei quali la Matematica è complemento di coltura e ginnastica intellettuale, si è cercato di riassumere con chiarezza quelle teorie che costituiscono l'Algebra veramente elementare. Quest'opera ci sembra possa bastare a quegli alunni che si dedicano ad altri studi, mentre per quelli che intendono darsi agli studi scientifici, essa può essere una preparazione alla lettura di opere più complete.

INDICE

INTRODUZIONE

1. Grandezze, unità, misura, numero; specie di numeri. Le collezioni o gruppi getti, le lunghezze, le superficie, i volumi i tempi, le temperature, ecc., si possono r vamente paragonare fra loro: si può cio noscere se un gruppo contenga altrettan oggetti di un'altro, se una lunghezza sia giore di un'altra lunghezza, un peso m di un'altro peso, ecc. Riferendoci a codes sibilità, diciamo che i gruppi di oggetti, ghezze, le superficie, ecc., sono *grandezz*

In un gruppo di oggetti, uno di essi si come *unità*, e l'operazione del *contare* rispondere alla collezione un *numero* ben determinato. Alle altre grandezze sono pure far corrispondere numeri m l'operazione del *misurare*. Per misura grandezza si fissa una grandezza della specie, supposta ben nota, come termine ragone; e si conta quante volte questa dezza nota, che viene detta *unità*, e le s aliquote, siano contenute nella grandezze surare; il risultato della misura è espre un *numero*.

INTRODUZIONE

1. GRANDEZZE, UNITÀ, MISURA, NUMERO; VARIE SPECIE DI NUMERI. Le collezioni o gruppi di oggetti, le lunghezze, le superficie, i volumi, i pesi, i tempi, le temperature, ecc., si possono rispettivamente paragonare fra loro: si può cioè riconoscere se un gruppo contenga altrettanti o più oggetti di un'altro, se una lunghezza sia maggiore di un'altra lunghezza, un peso maggiore di un'altro peso, ecc. Riferendoci a codesta possibilità, diciamo che i gruppi di oggetti, le lunghezze, le superficie, ecc., sono *grandezze*.

In un gruppo di oggetti, uno di essi si prende come *unità*, e l'operazione del *contare* fa corrispondere alla collezione un *numero (intero)* ben determinato. Alle altre grandezze si possono pure far corrispondere numeri mediante l'operazione del *misurare*. Per misurare una grandezza si fissa una grandezza della stessa specie, supposta ben nota, come termine di paragone; e si conta quante volte questa grandezza nota, che viene detta *unità*, e le sue parti aliquote, siano contenute nella grandezze da misurare; il risultato della misura è espresso da un *numero*.

Possono presentarsi i seguenti casi:

1.° Può accadere che la grandezza da misurarsi contenga un numero esatto di volte l'unità; in tal caso la misura è espressa da un *numero intero*.

2.° Può accadere che la grandezza da misurarsi non contenga esattamente un certo numero di volte l'unità, ma che, dividendo l'unità in parti eguali *(parti aliquote)*, la grandezza contenga un numero esatto di volte alcune di queste parti; in tal caso la misura è espressa da *un numero frazionario*.

3.° Può accadere infine che per piccole che si facciano le parti aliquote dell'unità, queste parti non siano mai contenute esattamente nella grandezza da misurarsi; in tal caso la grandezza dicesi *incommensurabile* coll'unità, e la misura è espressa da un *numero irrazionale*, il quale non si può valutare che per approssimazione, mediante successioni di numeri frazionari.

In ciò che segue, ammetteremo che il lettore abbia già imparate dall'Aritmetica ordinaria le regole della composizione e scomposizione dei numeri interi e frazionari, regole che costituiscono il *Calcolo aritmetico*: che sappia come il risultato delle operazioni elementari ivi studiate si possa esprimere sempre con numeri interi o frazionari, ad eccezione delle estrazioni di radice che danno generalmente origine a numeri irrazionali [1]; infine, che abbia visto come le defi-

[1] Per una teoria di questi numeri, v. *Analisi Algebrica*, Cap. II (Manuale Hoepli CXLI, Milano 1917).

nizioni e le proprietà delle operazioni elementari siano estendibili anche ai numeri irrazionali.

2. Divisione dell'algebra in due parti. L'Algebra può distinguersi in due parti. La prima, detta *Calcolo Algebrico*, od anche *Aritmetica Generale*, ha per oggetto di insegnare a comporre e scomporre i numeri: però le sue regole si applicano per lo più a numeri arbitrari e che vengono rappresentati con lettere, mentre nel conteggio pratico e nel calcolo aritmetico le regole si applicavano a numeri *esplicitamente dati*. Ad es., le regole della moltiplicazione algebrica non ci condurranno già ad eseguire compiutamente l'operazione, ma a far conoscere certe riduzioni che varranno per tutte le moltiplicazioni d'una data specie. La seconda parte, l'Algebra propriamente detta, ha per oggetto la risoluzione delle *equazioni*, cioè dà regole mediante le quali si possono trovare certi numeri *incogniti*, quando questi siano legati ad altri numeri *dati* da relazioni conosciute.

3. Primi esempi di formule algebriche. Già nell'Aritmetica si sono avuti esempi di lettere adoperate a rappresentare numeri qualsiansi.

Per esempio, si dimostra in Aritmetica il seguente teorema, che vale per numeri qualunque: « *Il quadrato di una somma di due numeri è espresso dalla somma del quadrato del primo numero, più il doppio prodotto del primo per il secondo, più il quadrato del secondo numero* ». E questo teorema si può esprimere colla scrittura

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2.$$

Tale scrittura, che si chiama *formula algebrica*, dà un esempio del linguaggio algebrico, mediante il quale si esprime senza alcuna ambiguità tutto ciò che veniva enunciato con molte parole dal teorema precedente.

Un secondo esempio ci sarà dato dal seguente problema: « Qual'è l'interesse semplice dato da un capitale di A lire, posto a frutto ad un dato saggio per un dato numero di anni?

Per rispondere a tale domanda, si indichi con i % il saggio percentuale dell'interesse, con t il numero di anni, con I l'interesse cercato: si potrà ragionare nel seguente modo:

Se L. 100 messe a frutto per 1 anno danno L. i
» 1 » » » darà la centesima parte, cioè $\frac{i}{100}$
» A » darà A volte o $\frac{i \times A}{100}$
» A » t anni darà t volte tanto ossia $\frac{i \times A \times t}{100}$

L'interesse cercato è dunque dato dalla *formula*

$$I = \frac{i \times A \times t}{100}$$

che espressa in parole, si traduce nella seguente regola:

« *Per trovare l'interesse semplice di una data* *somma messa a frutto ad un dato saggio e per un dato numero di anni, si moltiplica il capitale per il saggio e per il tempo e si divide per 100* ».

Ecco un'ultimo esempio:

« Un operaio fa un dato lavoro in a giorni, un altro in b giorni; in quanto tempo i due operai ultimeranno quel lavoro adoperandovisi insieme? »

Si ragiona come segue:

Se il primo operaio fa il lavoro in a giorni, esso farà in 1 giorno, $\frac{1}{a}$ del lavoro.

Se il secondo operaio fa il lavoro in b giorni esso farà, in un giorno, $\frac{1}{b}$ del lavoro.

Lavorando insieme, essi faranno in un giorno $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ del lavoro, cioè $\frac{a+b}{a\times b}$ e se fanno $\frac{a+b}{a\times b}$ del lavoro in un giorno, ultimeranno il lavoro in $1:\frac{a+b}{a\times b}$ ossia in $\frac{a\times b}{a+b}$ giorni. Si ha così una formula esprimente una regola che si applica a tutti i problemi della stessa natura: *generalizzando* convenientemente, si può enunciare:

« *Se due cause, il cui effetto sia proporzionale al tempo, agendo separate producono un certo effetto in due tempi* a *e* b *rispettivamente, le due cause, agendo insieme, produrranno quell'effetto in un tempo che sarà dato dal prodotto dei due tempi* a *e* b, *diviso per la loro somma* ».

4. Definizione dei segni e dei vocaboli impiegati in algebra; espressioni, termini, segni, MONOMI, POLINOMI. Come in Aritmetica, i segni usati a denotare le varie operazioni sono:

$$=\,,\ +\,,\ -\,,\ \times\,,\ :\,,\ \sqrt{\ }$$

di cui è noto il significato, inoltre

$>$ che si legge *maggior di*
$<$ » » » *minore di.*

Una combinazione di più lettere o numeri legati con segni delle operazioni è un'*espressione algebrica:* così sono espressioni algebriche:

$$\frac{a \times i \times t}{100},\ a^2 + 2 \times a \times b + b^2.$$

Il segno $\times$ si omette per lò più fra due lettere, o fra un numero ed una lettera; talchè in luogo di

$$\frac{a \times i \times t}{100},\ 2 \times a \times b$$

si scriverà

$$\frac{a\,i\,t}{100},\ 2\,a\,b.$$

La denominazione di *segno* si attribuisce in modo speciale ai segni dell'addizione (+) e della sottrazione (—). Quando un'espressione non ha alcun segno + o —, si conviene di sottintendere dinanzi ad essa il segno +.

Si chiama *termine* ogni insieme di lettere e numeri affetti da un solo segno + o —, il

segno + potend
espressioni forma

si dicono *monomi*
sioni che conteng

$a+$

Un polinomio a
vamente *binomio*,
5. ESPRESSIONI I
RAZIONALI. Una es
denominatori, o]
tenga lettere ma
dati, si dice *espr*
che contiene letter
sione *fratta*. Così:

sono espressioni i

sono espressioni f
Radice m^{sima} di
la cui m^{sima} poten
col segno *radicale*

segno $+$ potendo essere anche sottinteso. Le espressioni formate da un solo termine, come

$$\frac{a\,i\,t}{100},\ 2\,a\,b$$

si dicono *monomi;* e *polinomi* sono le espressioni che contengono vari termini, come

$$a+b,\ a^2+2\,a\,b+b^2.$$

Un polinomio a 2, 3 termini si dice rispettivamente *binomio, trinomio.*

5. Espressioni intere, fratte, razionali, irrazionali. Una espressione che non contenga denominatori, o che al denominatore non contenga lettere ma solo numeri esplicitamente dati, si dice *espressione intera.* Un'espressione che contiene lettere nel denominatore è un'espressione *fratta.* Così:

$$a\,b,\ \frac{a+b}{2}$$

sono espressioni intere,

$$\frac{a}{b},\ \frac{a^2+b^2}{a-b}\ .$$

sono espressioni fratte.

Radice m^{sima} di un numero a è un numero la cui m^{sima} potenza riproduce a; essa si indica col segno *radicale*

$$\sqrt[m]{a};$$

il numero m si dice *indice* del radicale. Ad esempio si scriverà:

$$\sqrt[5]{3125} = 5, \quad \sqrt[4]{2401} = 7,$$

perchè

$$5^5 = 3125, \quad 7^4 = 2401$$

Una espressione algebrica si dice *razionale*, quando non contiene segni radicali o contiene, sotto i radicali, soltanto numeri esplicitamente dati. Così

$$\frac{a^2 + b^2}{a - b}, \quad a\sqrt{2} + 5b$$

sono espressioni razionali. Un'espressione dicesi *irrazionale* quando contiene lettere sotto il radicale. Così

$$\sqrt{a}, \quad \frac{1 + \sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}}$$

sono espressioni irrazionali.

6. Parti di un monomio: grado, segno, coefficiente, esponente. In un monomio si distinguono:

a) il *segno*, che è $+$ o $-$; il segno $+$ può essere sottinteso;

b) il *coefficiente*: si è designato con ciò dapprima un fattore intero che indica quante volte la parte letterale del monomio va ripetuta. Però, per generalità, si dicono anche coefficienti i fattori numerici non interi (frazionari od irrazionali) di un monomio. Esempio:

$$4\,a^2\,b^2$$

ha per coefficie
$a^2 b^2$ va presa 4

hanno rispettiv

c) le letter
d) gli espo
a ciascuna lett

significa un pr
e) il *grad*
degli esponenti
non ha esponen

è un monomio

7. Grado di u
e lettere ord
Termini simili.
brica. Ciascun
polinomio ha l
gradi dà il grad

5

è del 5° grado.
Un polinomi
stesso grado, s
Quando i ter
una stessa lett

ha per coefficiente 4, che indica che l'espressione $a^2 b^2$ va presa 4 volte come addendo; i monomi

$$\sqrt{2a} \quad \frac{5}{8} a b$$

hanno rispettivamente per coefficienti $\sqrt{2}$ e $\frac{5}{8}$;

c) le lettere che compariscono nel monomio;

d) gli esponenti che possono essere attribuiti a ciascuna lettera: come è noto dall'Aritmetica,

$$a^m$$

significa un prodotto di m fattori uguali ad a;

e) il *grado* del monomio, ossia la *somma* degli esponenti delle sue lettere; se una lettera non ha esponente, va sottinteso l'esponente 1. Così

$$5 a^2 b c^2$$

è un monomio di 5° grado.

7. Grado di un polinomio. — Polinomio ordinato e lettere ordinatrici. — Polinomi omogenei. — Termini simili. — Valore di un'espressione algebrica. Ciascuno dei termini che compongono un polinomio ha il suo grado. Il *massimo* di questi gradi dà il grado del polinomio. Così il polinomio

$$5 a b + 2 a^3 b - 4 a^2 b^3$$

è del 5° grado.

Un polinomio, in cui tutti i termini sono dello stesso grado, si dice *omogeneo*.

Quando i termini di un polimonio contengono una stessa lettera e si succedono in modo che gli esponenti di questa lettera vadano gradatamente crescendo o decrescendo, il polinomio dicesi *ordinato* in ordine crescente o decrescente rispetto a quella lettera, e la lettera stessa si chiama *ordinatrice*. Così i polinomi

$$4\,a + 9\,a^2 - 15\,a^3 + 7\,a^4,$$
$$a\,x^2 + b\,x - c,$$

sono ordinati: il primo in ordine crescente rispetto alla lettera ordinatrice a, il secondo in ordine decrescente rispetto alla lettera x.

Si dicono *termini simili* quelli che contengono le stesse lettere, ciascuna cogli stessi esponenti; essi possono differire nel coefficiente e nel segno; così

$$-5\,a^2 b^3, \quad +7\,a^2 b^3$$

sono simili, e invece

$$3\,a\,b^2, \quad 3\,a\,b^3$$

non lo sono.

Allorquando si sostituiscono numeri espliciti alle lettere che entrano in un'espressione algebrica, e si eseguiscono le operazioni indicate, si ottiene un numero. Questo numero si dice *valore* numerico assunto dall'espressione per i numeri sostituiti. Così il *valore* di

$$\frac{a^2 + b^2}{a - b}$$

per $a = 10$ e $b = 3$, è $\frac{109}{7}$; invece il valore di

$$a\,b^2 - b\,a^2$$

per $a = 3$, $b = 2$ non si può esprimere per ora, poichè si giunge ad una sottrazione impossibile.