
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

VITTORIO EMANUELE BONONCINI

Interpretazione geometrica dei segni delle derivate successive di una funzione $y = f(x)$

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 4
(1949), n.3, p. 267–269.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_3_267_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

**Interpretazione geometrica dei segni
delle derivate successive di una funzione $y = f(x)$.**

Nota di VITTORIO EMANUELE BONONCINI (a Bologna) (*).

Sunto. *I segni delle derivate successive in un punto x_0 indicano la maggior rapidità dello staccarsi della curva $y = f(x)$ dalla propria parabola osculatrice nel punto $P_0(x_0, f(x_0))$ a destra e a sinistra del punto P_0 .*

In una sua Nota ⁽¹⁾ il SIBIRANI ha stabilito qual'è il significato geometrico del segno della $f'''(x)$ in un punto x_0 per la curva $y = f(x)$.

⁽²⁾ Considerando ad es. la cubica C , si trova che la retta proiettante da O il suo punto di flesso ha l'equazione

$$y = -3b_{30}x,$$

che porge immediatamente il significato geometrico di b_{30} . Analogamente si perviene al significato geometrico di a_{03} , partendo dalla \bar{C} .

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Bologna.

⁽¹⁾ F. SIBIRANI, *Il segno di $f'''(x)$ caratterizza qualche proprietà geometrica per la curva $y = f(x)$* ?, « Bollettino della U. M. I. », vol. X (1931), pag. 12.

In questa Nota mi propongo di completare e di estendere il risultato ottenuto dal SIBIRANI.

Sia $y = f(x)$ una funzione reale della variabile reale x definita in un intervallo (a, b) e ivi dotata di derivate fino all'ordine che interessa considerare. Nel punto $P_0(x_0, f(x_0))$, ($a < x_0 < b$) consideriamo la parabola osculatrice di ordine n

$$y = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

Ciò premesso, dimostro la seguente proposizione:

Nel punto x_0 risulti

$$f^{(n+1)}(x_0) = f^{(n+2)}(x_0) = \dots = f^{(n+r-1)}(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad f^{(n+r)}(x_0) \neq 0;$$

inoltre, considerate le derivate successive a quella di ordine $n+r$ e di parità diversa da $n+r$, si abbia

$$f^{(n+r+1)}(x_0) = f^{(n+r+3)}(x_0) = \dots = f^{(n+r+2s-1)}(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad f^{(n+r+2s+1)}(x_0) \neq 0.$$

Allora se $f^{(n+r)}(x_0)$ e $f^{(n+r+2s+1)}(x_0)$ sono dello stesso segno la curva si stacca più rapidamente a destra che a sinistra dalla propria parabola osculatrice di ordine n in P_0 , il contrario avviene se dette derivate sono di segno opposto.

Per la dimostrazione indichiamo con y e y_n rispettivamente le ordinate corrispondenti ad una medesima ascissa della curva e della parabola osculatrice di ordine n .

Tenendo presenti le ipotesi fatte si ha manifestamente

$$y - y_n = \frac{h^{n+r}}{(n+r)!} f^{(n+r)}(x_0) + \frac{h^{n+r+2}}{(n+r+2)!} f^{(n+r+2)}(x_0) + \\ + \frac{h^{n+r+4}}{(n+r+4)!} f^{(n+r+4)}(x_0) + \dots + \frac{h^{n+r+2s+1}}{(n+r+2s+1)!} [f^{(n+r+2s+1)}(x_0) + \varepsilon(h)],$$

ossia

$$(1) \quad y - y_n = \frac{h^{n+r}}{(n+r)!} [f^{(n+r)}(x_0) + \eta(h')] + \\ + \frac{h^{n+r+2s+1}}{(n+r+2s+1)!} [f^{(n+r+2s+1)}(x_0) + \varepsilon(h)],$$

dove $\eta(h^2)$, $\varepsilon(h)$ sono infinitesimi con h .

I due termini a secondo membro di (1) sono infinitesimi con h ; il primo è un infinitesimo di ordine inferiore al secondo.

Osserviamo inoltre che se $n+r$ è pari il primo termine è funzione pari di h , mentre se $n+r$ è dispari è funzione dispari di h .

Supposto h in valore assoluto sufficientemente piccolo esaminiamo i diversi casi che si presentano:

a) $n + r$ pari, $f^{(n+r)}(x_0) > 0$, $f^{(n+r+2s+1)}(x_0) > 0$.

Se $h > 0$ i due termini a secondo membro di (1) sono entrambi > 0 , mentre se $h < 0$ il primo termine è > 0 e l'altro è < 0 . Tenendo conto che il primo termine è funzione pari di h si può concludere che la curva si stacca più rapidamente a destra che a sinistra del punto $P_0(x_0, f(x_0))$ dalla propria parabola osculatrice di ordine n .

b) $n + r$ pari, $f^{(n+r)}(x_0) < 0$, $f^{(n+r+2s+1)}(x_0) < 0$.

c) $n + r$ dispari, $f^{(n+r)}(x_0) > 0$, $f^{(n+r+2s+1)}(x_0) > 0$.

d) $n + r$ » $f^{(n+r)}(x_0) < 0$, $f^{(n+r+2s+1)}(x_0) < 0$.

In questi tre casi si ha una conclusione analoga a quella del caso a).

e) $n + r$ pari, $f^{(n+r)}(x_0) > 0$, $f^{(n+r+2s+1)}(x_0) < 0$.

Se $h > 0$ i due termini a secondo membro di (1) hanno segno contrario, mentre se $h < 0$ hanno lo stesso segno (> 0).

Si può concludere, tenendo presente che il primo termine è una funzione pari di h , che la curva si stacca più rapidamente a sinistra che a destra del punto $P_0(x_0, f(x_0))$ dalla propria parabola osculatrice di ordine n .

f) $n + r$ pari, $f^{(n+r)}(x_0) < 0$, $f^{(n+r+2s+1)}(x_0) > 0$.

g) $n + r$ dispari, $f^{(n+r)}(x_0) > 0$, $f^{(n+r+2s+1)}(x_0) < 0$.

h) $n + r$ » $f^{(n+r)}(x_0) < 0$, $f^{(n+r+2s+1)}(x_0) > 0$.

In questi tre casi valgono un ragionamento e una conclusione analoghi a quelli del caso c).

La proposizione enunciata è in tal modo completamente dimostrata.

Da segnalare i seguenti casi particolari:

a) Per $n = 1$, $r = 1$ risulta $f''(x_0) \neq 0$ e $f^{(3+2s)}(x_0) \neq 0$ e si ritrovano i risultati del SIBIRANI.

Per $n = 1$, $r = 2$ risulta $f''(x) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$, $f^{(3+2s)}(x_0) = 0$ e il punto $P_0(x_0, f(x_0))$ è un flesso. La proposizione dimostrata assicura che la curva si stacca più rapidamente a destra che a sinistra di P_0 dalla tangente di flesso se $f'''(x_0)$ e $f^{(4+2s)}(x_0)$ hanno lo stesso segno, più rapidamente a sinistra che a destra se sono di segno opposto. Risulta così completato anche nel caso del flesso il risultato del SIRIRANI.