UNA PRESENTAZIONE DEI QUATERNIONI

Franco Eugeni[1]

Sia $\mathbb{R}$ il campo ordinato dei numeri reali e $\mathbb{V}$ uno spazio vettoriale 3−dimensionale reale.

Denotiamo con

$$\mathbb{q} := \mathbb{R} + \mathbb{V} = \mathbb{R} \times \mathbb{V}$$

l'insieme delle "somme finali" di un numero reale con un vettore, ovvero un'espressione formale del tipo

$$a + \vec{u} \qquad \text{con } a \in \mathbb{R},\ \vec{u} \in \mathbb{V}$$

ovvero una "coppia ordinata" $(a,\ \vec{u})$ del prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{V}$.

Se, per ogni coppia ordinata $a + \vec{u}$, $b + \vec{v} \in \mathbb{q}$, definiamo un'operazione (+) in $\mathbb{q}$ ponendo:

$$(a + \vec{u}) + (b + \vec{v}) := (a + b) + (\vec{u} + \vec{v})$$

la struttura algebrica ($\mathbb{q}$, +) risulta essere un <u>gruppo abeliano</u>.

Una seconda operazione ($*$) può essere definita $\forall\, a + \vec{u}$, $b + \vec{v} \in \mathbb{q}$ ponendo:

$$(a + \vec{u}) * (b + \vec{v}) := ab + b\vec{u} + a\vec{v} + (\vec{u} \wedge \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{v})$$

Si prova con facilità che la struttura ($\mathbb{q}$, +, $*$) è un <u>corpo</u>, non valendo la proprietà commutativa della seconda operazione.

Gli elementi di $\mathbb{q}$, nella sopraindicata struttura algebrica, si dicono <u>quaternioni</u> ed il corpo costruito si dice <u>corpo dei quaternioni</u>. Se introduciamo ancora l'operazione "esterna" definita ponendo:

$$k \cdot (a + \vec{u}) := k \cdot a + k \cdot \vec{u} = ka + k\vec{u} \qquad \forall\, k \in \mathbb{R},\ \forall\ a + \vec{u} \in \mathbb{q}$$

la struttura algebrica ($\mathbb{q}$, +, $*$, $\cdot$) prende il nome di <u>algebra dei quaternioni</u>.

[1] Dipartimento di Scienze della Comunicazione - Università degli Studi di Teramo

È importante introdurre ora la nozione di norma.

Quale che sia $a+\vec{u} \in$ q, si chiama <u>norma</u> l'applicazione

$$\| \quad \| : \text{q} \to \mathbb{R}$$

definita ponendo:

$$\|a+\vec{u}\|^2 = a^2 + u^2$$

essendo u la norma di $\vec{u}$ in $\mathbb{V}$.

Si chiama inoltre <u>quaternione coniugato</u> di $a+\vec{u}$ il quaternione

$$\overline{a+\vec{u}} := a-\vec{u}$$

È immediato provare che:

$$(1) \qquad (a+\vec{u})*(a-\vec{u}) = (a-\vec{u})*(a+\vec{u}) = \|a^2+u^2\|$$

$$(2) \qquad (a+\vec{u})^{-1} = \frac{1}{a^2+u^2}(a-\vec{u})$$

Spesso è utile scrivere

$$a+\vec{u} = a+b\vec{r}$$

essendo $\vec{r}$ un versore parallelo ad $\vec{u}$, ed anche:

$$a+\vec{u} = a+u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}$$

essendo $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ una base di versori di $\mathbb{V}$.

Si prova facilmente che:

$$(3) \qquad i^2 = j^2 = k^2 = r^2 = -1$$

$$(4) \qquad ij = -ji = k\,;\; jk = -kj = i\,;\; ki = -ik = j$$

Si prova inoltre il seguente ovvio

TEOREMA 1. Sia $\vec{r} \in \mathbb{V}$ un fissato versore. Allora risulta $\left(\{a+b\vec{r}\},\ +,\ *\right) \cong \mathbb{C}$.

TEOREMA 2. Sia $q = a+b\vec{r} = \rho\left(cos\vartheta + \vec{r}\ sen\vartheta\right)$ un quaternione. La trasformazione

$$\vec{y} = q*\vec{x}*q^{-1}$$

è una rotazione di asse $\vec{r}$ ed ampiezza 2ϑ.

Dimostrazione.

Si ha

$$\vec{y} = q*\vec{x}*q^{-1} = cos2\vartheta\,\vec{x} - sen2\vartheta(\vec{x}\wedge\vec{r}) + 2sen^2\vartheta(\vec{x}\cdot\vec{r})\vec{r}$$

La trasformazione è lineare; infatti

$$q*(\lambda\vec{x}_1+\mu\vec{x}_2)*q^{-1} = \lambda\left(q*\vec{x}_1*q^{-1}\right)+\mu\left(q*\vec{x}_2*q^{-1}\right)$$

ed è tale che

$$\|\vec{y}\| = \|q * \vec{x} * q^{-1}\| = \|q\|\|\vec{x}\|\|q\|^{-1} = \|\vec{x}\|$$

Per $\vec{x} = \vec{r}$ risulta $\vec{y} = \vec{r}$ cioè $\vec{r}$ è un vettore unitario.
Sia $a + b\vec{r} = cos\vartheta + \vec{r}sin\vartheta$ un quaternione unitario.
Consideriamo:

$(a + b\vec{r}) * \vec{x} * (a - b\vec{r}) = \left[a\vec{x} + b(\vec{r} \wedge \vec{x} - \vec{r} \cdot \vec{x})\right] * (a - b\vec{r}) =$

$= \left\{-b(\vec{r} \cdot \vec{x}) + \left[a\vec{x} + b(\vec{r} \wedge \vec{x})\right]\right\} * (a - b\vec{r}) =$

$= -ab(\vec{x} \cdot \vec{r}) + b^2(\vec{x} \cdot \vec{r})\vec{r} + a^2\vec{x} + ab(\vec{r} \wedge \vec{x}) + \left[a\vec{x} + b(\vec{r} \wedge \vec{x})\right] \wedge (-b\vec{r}) - \left[a\vec{x} + b(\vec{r} \wedge \vec{x})\right] \cdot (-b\vec{r}) =$

$= -ab(\vec{x} \cdot \vec{r}) + b^2(\vec{x} \cdot \vec{r})\vec{r} + a^2\vec{x} + ab(\vec{r} \wedge \vec{x}) - ab(\vec{x} \wedge \vec{r}) - b^2(\vec{r} \wedge \vec{x}) \wedge \vec{r} + ab(\vec{x} \cdot \vec{r}) + b^2(\vec{r} \wedge \vec{x} \cdot \vec{r}) =$

$= b^2(\vec{x} \cdot \vec{r})\vec{r} + a^2\vec{x} - 2ab(\vec{x} \wedge \vec{r}) - b^2\left[\vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{r})\vec{r}\right] =$

$= (a^2 - b^2)\vec{x} - 2ab(\vec{x} \wedge \vec{r}) + 2b^2(\vec{x} \cdot \vec{r})\vec{r} = \vec{y}$

essendo, in generale:

$(a \wedge b) \wedge c = (ac)b - (bc)a$

Supponiamo ora che $\vec{x}_1$ sia ortogonale ad $\vec{r}$, cioè che sia:

$$\vec{x}_1 \cdot \vec{r} = 0 .$$

Risulta allora:

$$\vec{y}_1 = cos2\vartheta\vec{x}_1 + sin2\vartheta(\vec{x}_1 \wedge \vec{r})$$

e quindi:

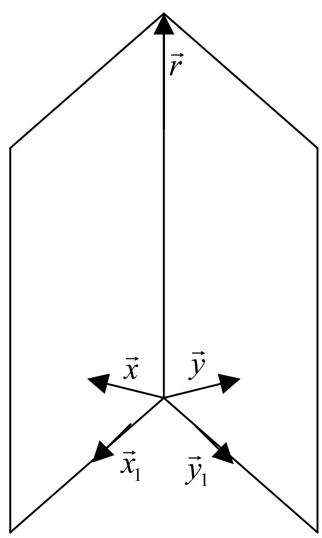
$$\vec{y}_1 \cdot \vec{r} = cos2\vartheta(\vec{x}_1 \cdot \vec{r}) = 0$$

Segue allora che l'angolo dei due piani $(\vec{x}, \vec{r})$ ed $(\vec{y}, \vec{r})$ è dato dall'angolo dei due vettori $\vec{x}_1$ ed $\vec{y}_1$.
Si ha:

$$\vec{y}_1\vec{x}_1 = cos2\vartheta\|\vec{x}_1\|^2$$

e quindi

$$\widehat{\vec{x}_1\vec{y}_1} = 2\vartheta$$



Poiché la trasformazione $\vec{y} = q * \vec{x} * q^{-1}$ è lineare, deve esistere una matrice $A = A(q)$ tale che:

$$\vec{y} = q * \vec{x} * q^{-1} = A\vec{x}$$

Essendo, inoltre:

$$\vec{y} = q * \vec{x} * q^{-1} = cos2\vartheta\, \vec{x} - sen2\vartheta\left(\vec{x} \wedge \vec{r}\right) + 2sen^2\vartheta\left(\vec{x} \cdot \vec{r}\right)\vec{r}$$

passando alle componenti, risulta:

$$y_1\vec{i} + y_2\vec{j} + y_3\vec{k} =$$

$$= cos2\theta\left(x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}\right) - sin2\vartheta\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix} + 2sin^2\theta\left(x_1r_1 + x_2r_2 + x_3r_3\right)\cdot\left(r_1\vec{i} + r_2\vec{j} + r_3\vec{k}\right)$$

da cui:

$$y_1 = cos2\theta x_1 - sin2\theta\left(x_2r_3 - r_2x_3\right) + 2sin^2\theta r_1\left(x_1r_1 + x_2r_2 + x_3r_3\right)$$
$$y_2 = cos2\theta x_2 + sin2\theta\left(x_1r_3 - r_1x_3\right) + 2sin^2\theta r_2\left(x_1r_1 + x_2r_2 + x_3r_3\right)$$
$$y_3 = cos2\theta x_3 - sin2\theta\left(x_1r_2 - r_1x_2\right) + 2sin^2\theta r_3\left(x_1r_1 + x_2r_2 + x_3r_3\right)$$

ed ordinando:

$$y_1 = \left(cos2\theta + 2r_1^2sin^2\theta\right)x_1 + \left(-r_3sin2\theta + 2r_1r_2sin^2\theta\right)x_2 + \left(r_2sin2\theta + 2r_1r_3sin^2\theta\right)x_3$$
$$y_2 = \left(r_3sin2\theta + 2r_1r_2sin^2\theta\right)x_1 + \left(cos2\theta + 2r_2^2sin^2\theta\right)x_2 + \left(-r_1sin2\theta + 2r_2r_3sin^2\theta\right)x_3$$
$$y_3 = \left(-r_2sin2\theta + 2r_1r_3sin^2\theta\right)x_1 + \left(r_1sin2\theta + 2r_2r_3sin^2\theta\right)x_2 + \left(cos2\theta + 2r_3^2sin^2\theta\right)x_3$$

Se ora poniamo:

$a = cos\vartheta$

$b = sin\vartheta$

in maniera analoga otteniamo:

$$y_1\vec{i} + y_2\vec{j} + y_3\vec{k} = \left(a^2 - b^2\right)\left(x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}\right) - 2ab\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix} + 2b^2\left(x_1r_1 + x_2r_2 + x_3r_3\right)\cdot\left(r_1\vec{i} + r_2\vec{j} + r_3\vec{k}\right)$$

da cui, passando alle componenti:

$$y_1 = \left(a^2 - b^2\right)x_1 - 2ab\left(x_2r_3 - r_2x_3\right) + 2b^2r_1\left(x_1r_1 + x_2r_2 + x_3r_3\right)$$
$$y_2 = \left(a^2 - b^2\right)x_2 + 2ab\left(x_1r_3 - r_1x_3\right) + 2b^2r_2\left(x_1r_1 + x_2r_2 + x_3r_3\right)$$
$$y_3 = \left(a^2 - b^2\right)x_3 - 2ab\left(x_1r_2 - r_1x_2\right) + 2b^2r_3\left(x_1r_1 + x_2r_2 + x_3r_3\right)$$

ovvero:

$$y_1 = \left(a^2 - b^2 + 2b^2r_1^2\right)x_1 + \left(-2abr_3 + 2b^2r_1r_2\right)x_2 + \left(2abr_2 + 2b^2r_1r_3\right)x_3$$
$$y_2 = \left(2abr_3 + 2b^2r_2r_1\right)x_1 + \left(a^2 - b^2 + 2b^2r_2^2\right)x_2 + \left(-2abr_1 + 2b^2r_2r_3\right)x_3$$
$$y_3 = \left(-2abr_2 + 2b^2r_1r_3\right)x_1 + \left(2abr_1 + 2b^2r_2r_3\right)x_2 + \left(a^2 - b^2 + 2b^2r_3^2\right)x_3$$

Se ora poniamo:

$$A = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 + 2b^2r_1^2 & -2abr_3 + 2b^2r_1r_2 & 2abr_2 + 2b^2r_1r_3 \\ 2abr_3 + 2b^2r_1r_2 & a^2 - b^2 + 2b^2r_2^2 & -2abr_1 + 2b^2r_2r_3 \\ -2abr_2 + 2b^2r_1r_3 & 2abr_1 + 2b^2r_2r_3 & a^2 - b^2 + 2b^2r_3^2 \end{pmatrix}$$

risulta proprio $\vec{y} = A\vec{x}$.

Dobbiamo provare che questa matrice è ortogonale. Si osservi che è <u>funzione</u> di 2ϑ (angolo di rotazione) e di $\vec{r}$.

$$\left(a^2-b^2+2b^2r_1^2\right)\left(2abr_3+2b^2r_1r_2\right)+\left(-2abr_3+2b^2r_1r_2\right)\left(a^2-b^2+2b^2r_2^2\right)+$$
$$+\left(2abr_2+2b^2r_1r_3\right)\left(-2abr_1+2b^2r_2r_3\right)=\left(a^2-b^2\right)\left(2abr_3+2b^2r_1r_2-2abr_3+2b^2r_1r_2\right)=$$
$$=\left(a^2-b^2\right)4b^2r_1r_2+2b^2r_1^2\left(2abr_3+2b^2r_1r_2\right)+2b^2r_2^2\left(-2abr_3+2b^2r_1r_2\right)=$$
$$=\left(a^2-b^2\right)4b^2r_1r_2+2b^2\left(r_1^2\,2abr_3+r_1^2\,2b^2r_1r_2-r_2^2\,2abr_3+r_2^2\,2b^2r_1r_2\right)$$

$$A=\left(a^2-b^2\right)I_3+2ab\underbrace{\begin{pmatrix}0 & -r_3 & r_2\\ r_3 & 0 & -r_1\\ -r_2 & r_1 & 0\end{pmatrix}}_{\det=0}+2b^2r_1r_2r_3\underbrace{\begin{pmatrix}r_1 & r_2 & r_3\\ r_1 & r_2 & r_3\\ r_1 & r_2 & r_3\end{pmatrix}}_{\det=0}$$