UNA NOTA STORICA SUGLI SPAZI A PIU' DIMENSIONI

Nota di Franco Eugeni

Il primo accenno ad una possibile una quarta dimensione, sia pur temporale, appare nell'opera del torinese **Joseph-Louis Lagrange** (1736-1813) in *Mécanique analytique* (1788) dove alle tre dimensioni spaziali ne aggiunge una temporale. Una prima idea, di uno spazio a 4 dimensioni, diciamo geometrico, fu introdotta nel 1827 dall' astronomo e matematico tedesco **ugust Ferdinand Möbius** (1790-1868), che aveva acquisito fama per il primo esempio, di superficie ad una sola faccia, che aveva concretizzato in quel famoso nastro, che porta il suo nome. Non nuovo alle più ardite innovazioni, esplicitò che così come avveniva nel piano, nel quale ogni figura si può trasformare nella sua speculare, con una rotazione spaziale attorno ad un opportuno asse, così utilizzando una rotazione in uno spazio a 4 dimensioni, doveva essere ruotare un qualsiasi corpo tridimensionale nella sua immagine speculare, rispetto ad un opportuno piano. Una parentesi è costituita dal matematico svizzero **Ludwig Schläfli** (1814-1895) che ebbe l'idea di generalizzare i concetti di poligono e poliedro alle dimensioni superiori definendo i politopi. I poligoni si possono quindi anche chiamare 2-politopi e i poliedri si chiamano 3-politopi. Il termine politopo è stato coniato dalla matematica irlandese **Alicia Boole Stott (1860-1940)**, terza figlia di George Boole (1815-1864).

La nozione di *politopo regolare*, supponendo di aver già introdotto gli spazi n-dimensionali, si generalizza per induzione a *n* dimensioni. Un n-politopo regolare è un politopo inscrivibile in una ipersfera di $\mathbf{R}^n$, le cui facce sono politopi regolari di uno spazio $\mathbf{R}^{n-1}$, tra loro congruenti. Interessante osservare che come ci sono esattamente **cinque** politopi regolari (3-politopi o poliedri) in $\mathbf{R}^3$ (i solidi platonici), così ci sono **sei** 4-politopi regolari in $\mathbf{R}^4$ (proprietà scoperta da Alicia Boole) e **tre** n-politopi regolari in $\mathbf{R}^n$ per ogni $n \geq 5$.

Tuttavia, a parte queste anticipazioni, occorre ricordare che sulla metà del 1800, gli **spazi euclidei**, nel senso moderno del termine, non erano ancora nel bagaglio conoscitivo dei matematici e nemmeno era stata sviluppata una teoria dei vettori.

Tuttavia la strada che emerse prese direzioni differenti da quelle che potevano essere delle ricerche di tipo geometrico. D'altro canto, dal 1500, erano lentamente emersi i cosiddetti numeri complessi, o numeri a due unità, così che presero corpo alcune ricerche su nuovi tipi di numeri. Tralasciando i dettagli ricordiamo solo che l'esistenza **dei numeri complessi** non è stata accettata completamente, fino a che non è stata scoperta, nel 1799, la loro interpretazione geometrica, dal danese Caspar Wessel (1745-1818), e poi riscoperta e resa famosa, parecchi anni dopo, da Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

Nel 1840 l'irlandese William Rowen Hamilton (1805-1865), precoce genio inglese, che a cinque anni leggeva greco, latino ed ebraico e a dieci conosceva gran parte delle lingue orientali, partendo dai numeri complessi (a 2 unità) si pose il problema di ampliarne l'algebra da 2 a 3 dimensioni. Il tentativo non diede alcun frutto, per via del fatto che non si riusciva a definire una moltiplicazione.

Ma la genialità di Hamilton lo condusse a passare alle quattro unità (1, i, j, k), e costruire su di queste una nuova algebra. Si si narra che l'idea finale, per la costruzione di una moltiplicazione, Hamilton, la ebbe, nel 1843, mentre con la moglie passeggiava sul Brougham Bridge. Fu lì, che su una pietra, incise le relazioni: $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, che come ben sanno i cultori dei quaternioni furono l'idea risolutiva. Così si realizzò la costruzione **del corpo dei quaternioni, cioè delle espressioni del tipo:** $a + bi + cj+d k$ e del prodotto:

$(a + bi + cj+d k)(a' + b'i + c'j+d' k)$ = che calcolato come un ordinario prodotto di polinomi e tenendo in conto le relazioni: $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, dalle quali si ricava $ij = k$, $jk = i$, $ik = -j$ e quidi $ji = jjk =-k$, $kj =ijj = -i$, $ki = - kkj = j$.

In un sol colpo si ottennero più risultati:

a.- Una struttura algebrica, nella quale ferme restando tutte le varie proprietà formali si ha una moltiplicazione non commutativa (esempio di corpo sghembo).

b.-Una struttura 4-dimensionale.

c.- Una struttura atta a formalizzare la fisica, cosa che avverrà fino all'avvento di una teoria dei vettori, che successivamente sarà riscritta in chiave vettoriale.

d.- Una teoria dei vettori sottesa, in quanto i quaternioni, con parte reale nulla, sono già i vettori, preludendi alla moderna definizione che vede i quaternioni come somma formale di un numero con un vettore 3-dimensionale. L'uso di quaternioni per la fisica furono in seguito semplificati, anche grazie alle ricerche di Hermann Grassmann (1809-1877) da Jossiah W. Gibbs (1839-1903) e Oliver Heaviside (1850-1925), i quali, attorno al1880, adattarono quanto noto alle necessita della fisica matematica; sviluppando in tal modo il calcolo vettoriale moderno.

Un successivo ampliamente si ebbe con l'intuizione di John Thomas Graves (1806-1870), e la formalizzazione dovuta all'inglese Arthur Cayley (1821-1825), da cui nacque **l'algebra degli ottetti di Cayley**, numeri a dimensione otto, nei quali si perdeanche la proprietà associativa.

Fu infine Bernhard Riemann (1826-1866) che nella sua opera, scritta nel 1854 *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* (*Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria*) ma pubblicata postuma nel 1867, che consacra la possibilità di una geometria in un numero qualsiasi di dimensioni . Solo nel 1899 David Hilbert (1862-1943) scrisse il *Grundlagen der Geometrie*, in cui dava una sistemazione assiomatica alla geometria euclidea, punto di partenza di quella che doveva essere, in tutto il 1900 una revisione totale della geometria con le geometrie non euclidee e della la fisica con la relatività di Einsten.

Uno dei maggiori esponenti della quarta dimensione fu il matematico inglese Charles Howard Hinton (1853-1907) , scrittore di science fiction e edperto di teosofia , che, come prima opera su tale argomento, pubblicò nel 1880 il saggio *What is the Fourth Dimension?* sul giornale del Trinity College di Dublino.

Nel 1908 Hermann Minkowski (1864-1909) presentò un saggio nel quale consolidò il ruolo del tempo come la quarta dimensione dello spazio-tempo, come geometria essenzialmente non-euclidea, base delle teorie della relatività di Einstein. Scrive Minkowski : *"Le concezioni di spazio e di tempo che desidero esporvi sono sorte dal terreno della fisica sperimentale, e in ciò sta la loro forza. Esse sono fondamentali. D'ora in poi lo spazio di per sé stesso o il tempo di per sé stesso sono condannati a svanire in pure ombre, e solo una specie di unione tra i due concetti conserverà una realtà indipendente."*

Fino all'epoca *pre-einsteiniana* lo spazio tridimensionale era tenuto ben distinto dal tempo ed entrambi erano considerati assoluti. I lavori di Jules-Henri Poincaré, Lorentz e, soprattutto, la relatività ristretta (1905) di Albert Einstein mostrarono invece un legame indissolubile fra spazio e tempo, ed entrambi i concetti persero il loro carattere assoluto.

Nello spazio-tempo galileiano, la distanza fra due oggetti nello spazio e fra due eventi nel tempo è una quantità assoluta, che non dipende dal sistema di riferimento inerziale in cui è posto l'osservatore. Nella relatività ristretta, ambedue queste quantità diventano invece relative. I cambiamenti di coordinate fra sistemi di riferimento sono infatti più complicati, descritti dalle trasformazioni di Lorentz.