BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

MARIO VILLA

Relazione. Gli enti iperalgebrici di Corrado Segre.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **14** (1959), n.2, p. 214–225.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1959_3_14_2_214_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

RELAZIONE

Gli enti iperalgebrici di Corrado Segre

di MARIO VILLA (*)

1. L'Unione Matematica Italiana sta pubblicando le *Opere* di CORRADO SEGRE nella collezione delle Opere dei grandi matematici italiani. È già uscito il 1° volume (1) e un 2° sarà pronto tra brevissimo tempo.

Questa pubblicazione ha fatto ora riparlare di un gruppo di lavori di C. SEGRE « *Un nuovo campo di ricerche geometriche* » (2) che ha dato luogo ad importanti sviluppi.

Ciò mi ha indotto a trattenermi qui sugli enti iperalgebrici di C. SEGRE.

Gli enti iperalgebrici sono stati introdotti sostanzialmente da C. SEGRE (3) ma particolari enti iperalgebrici erano stati considerati prima di lui da STAUDT, JUEL e dai matematici francesi POINCARÉ, PICARD, HERMITE (4).

Più tardi lo studio degli enti iperalgebrici venne ripreso da ELIE CARTAN. Nel libro di E. CARTAN « *Géométrie projective complexe* » (5) le nozioni fondamentali della geometria proiettiva complessa vengono considerate da un punto di vista che in un certo senso va al di là di questa geometria e le ricollega alla geometria riemanniana.

(*) Conferenza generale tenuta il 4 giugno 1958 al Convegno di geometria e topologia di Iaşi (Romania). Per gentile concessione del Comitato Ordinatore del Convegno di Iaşi, questa conferenza, che apparirà nel volume degli Atti di tale Convegno, viene pure qui pubblicata.

(1) C. SEGRE [7]. I numeri tra parentesi quadra si riferiscono alla bibliografia.

(2) C. SEGRE [4], [5].

(3) Nei lavori citati nella (2).

(4) Si veda: C. SEGRE [4], Nota I, Introduzione.

(5) E. CARTAN [2].

Per arrivare nel modo più rapido e più naturale alla nozione di varietà iperalgebrica conviene rifarsi alle rappresentazioni reali degli spazi lineari complessi.

Ciò mi darà modo anche di mostrare come C. SEGRE sia pervenuto a quella varietà che si è dimostrata di grande interesse e che prese poi il nome di lui.

2. Le rappresentazioni reali dello spazio lineare S_1 complesso.

Per la rappresentazione reale dei punti di uno spazio lineare complesso si può seguire questo concetto generale: ricorrere cioè agli elementi reali che sono incidenti ad essi (oppure considerare le coppie reali costituite da quegli elementi immaginari presi coi loro coniugati) (6).

Questo concetto porta anzitutto alle tre principali rappresentazioni dell'S_1 complesso.

1) Si assuma come rappresentante dell'S_1 un fascio di rette, appartenente ad un piano reale σ e avente il centro C immaginario (ad esempio in un punto ciclico di σ). Come immagine di ogni retta del fascio si prenda il suo punto reale (intersezione con la retta immaginaria coniugata del fascio avente per centro l'altro punto ciclico).

Questa rappresentazione presenta però l'inconveniente di dar luogo ad un elemento eccezionale, la retta reale del fascio C che ha per immagine tutti i suoi punti reali.

La rappresentazione in discorso coincide in sostanza con quella consueta di ARGAND e di GAUSS della variabile complessa $x + iy$ sul piano reale (x, y).

2) Se si assume come S_1 una retta immaginaria di 1ª specie (cioè complanare con la complessa coniugata) si possono rappresentare i punti di questa con le rette reali che li contengono, rette che riempiono il piano reale in cui sta quella retta immaginaria. Il punto reale della retta costituisce l'elemento eccezionale della rappresentazione.

3) Se si prende invece come S_1 una retta immaginaria di 2ª specie (cioè sghemba con la complessa coniugata) e si rappresentano i punti di questa con le rette reali che li contengono, si ottiene una rappresentazione priva di eccezioni. È questa la rappresentazione di STAUDT mediante le rette reali di una congruenza lineare reale, ellittica (cioè dotata di direttrici immaginarie).

(6) Un ente si dice *reale* quando coincide con l'ente complesso coniugato

4) Se la congruenza di rette si considera dal punto di vista della geometria della retta, nella quale le rette dello spazio (ordinario) sono punti di una quadrica dell'S_5, le rette della congruenza lineare reale ellittica vengono a costituire i punti di una quadrica reale ellittica dell'S_3 (una sfera) e si ha la rappresentazione di RIEMANN.

Dal punto di vista analitico il passaggio dalla rappresentazione di STAUDT a quella di RIEMANN si ottiene cosí: si prendano le direttrici s, s' della congruenza lineare come rette fondamentali opposte in un sistema proiettivo di riferimento dello spazio, sicchè le coordinate omogenee di due loro punti qualunque x, y sono del tipo $x(x_1, x_2, 0, 0)$, $y(0, 0, y_1, y_2)$.

Allora la retta xy della congruenza ha nulle due delle 6 coordinate plückeriane omogenee e le 4 rimanenti sono espresse dalle

$$X_{11} = x_1 y_1, \quad X_{12} = x_1 y_2, \quad X_{21} = x_2 y_1, \quad X_{22} = x_2 y_2,$$

dove le X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22} soddisfano alla relazione

$$X_{11} X_{22} - X_{12} X_{21} = 0. \tag{1}$$

Interpretando le X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22} come coordinate di punto in S_3, la (1) rappresenta appunto una quadrica.

3. Le rappresentazioni reali dell'S_2 complesso e dell'S_r complesso.

1) Si assuma come rappresentante dell'S_2 la rete costituita dai piani di S_4 passanti per una retta data r immaginaria di 2ª specie. Come immagine di ogni piano della rete si assumerà il punto reale del piano stesso. Elementi eccezionali della rappresentazione sono quei piani che appartengono all'S_3^* individuato dalla retta r e dalla sua complessa coniugata r' i quali contengono infiniti punti reali costituenti una retta appoggiata ad r, r'. All'S_3^* corrisponde una retta l del piano S_2 luogo dei punti eccezionali della rappresentazione.

Questa rappresentazione coincide sostanzialmente con quella ordinaria del piano delle due variabili complesse $x + iy$, $x' + iy'$ con l'S_4 reale (x, y, x', y'). L'S_3^* è allora lo *spazio all'infinito* di S_4 e l è la *retta all'infinito* del piano complesso.

2) Se si prende come S_2 un piano π immaginario, allora i punti complessi di questo si possono rappresentare mediante le rette reali che li contengono. Se π è immaginario di 1ª specie (cioè sta col complesso coniugato π' in uno spazio ordinario reale), si ottiene una rappresentazione del piano complesso sulle rette reali dell'S_3. Presentano però eccezione i punti della retta intersezione dei piani π, π'.

3) Se π è immaginario di 2^a specie, si ha una rappresentazione dotata di un solo elemento eccezionale: l'unico punto reale di π.

4) Se π si suppone immaginario di 3^a specie, cioè non incontrante il complesso coniugato π', sicchè π, π' hanno per spazio congiungente un S_5, allora i punti complessi di π saranno rappresentati, *senza eccezioni,* dalle rette reali che li contengono, cioè dalle rette reali appoggiate a π, π'.

5) Se questa totalità di rette, analogamente al n. 2, si considera dal punto di vista della geometria della retta, nella quale le rette (dell' S_5) sono punti della grassmanniana, le rette della nostra totalità vengono a costituire una varietà V_4 (la V_4 di SEGRE). Dal punto di vista analitico:

Si prendano i due piani π, π' come piani fondamentali opposti in un sistema proiettivo di riferimento di S_5, sicchè le coordinate omogenee di due loro punti qualunque x, y sono del tipo $x(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0)$, $y(0, 0, 0, y_1, y_2, y_3)$. Allora la retta xy di S_5 che congiunge i punti x, y ha nulle 6 delle sue 15 coordinate omogenee e le 9 rimanenti sono espresse dalle

$$X_{ik} = x_i y_k . \tag{2}$$

Interpretando le X_{ik} come coordinate di punto in S_8, le (2) rappresentano appunto (parametricamente) la V_4 di SEGRE [7].

Non mi dilungo sulle analoghe rappresentazioni reali dell'S_r complesso. Le più importanti sono la rappresentazione (difettosa) sull'S_{2r} reale e quella (perfetta) sulla V_{2r} di SEGRE dell'$S_{r(r+2)}$.

Va rilevato che fu la necessità di avere una rappresentazione dell'S_r complesso sopra una varietà reale, in cui la corrispondenza biunivoca fra punti complessi di S_r e punti reali della varietà non avesse eccezioni che portò il SEGRE a considerare una delle più belle ed importanti varietà algebriche, che prese poi il nome di lui [8].

[7] C. SEGRE [5], p. 421.

[8] In una conferenza che tenni il 28 maggio 1958 presso l'Istituto Matematico dell'Università di Timişoara mostrai come mediante la varietà di SEGRE si stabilisca un notevole collegamento fra la teoria delle trasformazioni puntuali fra spazi lineari e la teoria delle curve e varietà quasi-asintotiche. In altra conferenza che tenni il successivo 29 maggio, pure presso l'Università di Timişoara, mostrai come la varietà di SEGRE goda di notevolissime proprietà nella teoria delle curve e varietà quasi-asintotiche.

4. Le varietà iperalgebriche.

Consideriamo le rappresentazioni dell'S_1 complesso sul piano reale, dell'S_2 complesso sull'S_4 reale, più in generale dell'S_r complesso sull'S_{2r} reale, le quali pur essendo difettose sono le più semplici e bastano per quanto ora ci proponiamo.

Una varietà V_d dell'S_r complesso si dice, con C. SEGRE, *iperalgebrica* quando la sua varietà immagine V_d sull'S_{2r} reale è algebrica (d dimensione reale della varietà, cioè numero dei parametri reali da cui dipende il punto generico sulla varietà, $0 \leq d \leq 2r - 1$) (9).

Le V_1 si dicono anche *fili*, mentre le V_2 si chiamano anche *tele*. Una curva algebrica dell'S_r complesso (cioè una varietà di dimensione complessa 1) è una tela, ma una tela di tipo particolare.

Sulla retta complessa, in particolare, accanto ai gruppi di punti si hanno i fili iperalgebrici, che hanno per immagini sul piano reale le curve algebriche. I fili più semplici sono le *catene* (di STAUDT) che hanno per immagini sul piano reale una retta o una circonferenza.

Nel piano complesso, si hanno i gruppi di punti V_0, i fili V_1 iperalgebrici, le tele V_2 iperalgebriche e le V_3 iperalgebriche, che io ho chiamato *ipersuperficie iperalgebriche* (10), rappresentati rispettivamente nell'S_4 reale da gruppi di punti, curve, superficie, ipersuperficie algebriche. Una particolare ipersuperficie iperalgebrica è l'*ipersfera* di POINCARE di equazione $x\bar{x} + y\bar{y} = 1$ (essendo $\bar{x}$, $\bar{y}$ i complessi coniugati rispettivamente di x, y) cioè in coordinate omogenee $x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 - x_3\bar{x}_3 = 0$ (dove il primo membro è una forma d'HERMITE).

Per definire le varietà iperalgebriche, ci siamo riferiti alla rappresentazione dell'S_r complesso sull'S_{2r} reale ma ci si può riferire anche alle altre rappresentazioni. La definizione è indipendente dalla rappresentazione che si sceglie poichè tutte le varietà reali con cui viene rappresentata una stessa V_d dell'S_r complesso sono tra loro in corrispondenza algebrica.

Si osservi che la geometria delle varietà iperalgebriche dell'S_r complesso coincide con quella delle varietà algebriche (reali) della V_{2r} reale di SEGRE piuttosto che con quella delle varietà algebriche dell'S_{2r} reale che è un modello imperfetto dell'S_r complesso.

(9) C. SEGRE [5], p. 438.

(10) VILLA [12], p. 483.

5. Le ipersuperficie iperalgebriche.

Fra le varietà iperalgebriche di un S_r (complesso) le più importanti sono quelle di dimensione (reale) massima $2r-1$, cioè le V_{2r-1}, che ho chiamato *ipersuperficie iperalgebriche* (11).

Come intersezioni delle ipersuperficie iperalgebriche si ottengono tutte le altre varietà iperalgebriche, in particolare le varietà algebriche.

Una ipersuperficie iperalgebrica è rappresentata in S_r da un'equazione del tipo

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_r; \bar{x}_0, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_r) = 0$$

dove f è un polinomio omogeneo di grado n nelle x_i e un polinomio omogeneo di grado n nelle complesse coniugate $\bar{x}_i$, tale che

$$f \equiv \bar{f},$$

$\bar{f}$ essendo la forma complessa coniugata della f (ottenuta cioè dalla f sostituendo ad ogni coefficiente e ad ogni variabile il numero complesso coniugato).

La f è cioè una *forma iperalgebrica reale.*

Ora, per le forme iperalgebriche reali, come ho dimostrato (12), vale la seguente *legge d'inerzia*:

Una forma iperalgebrica reale f, *d'ordine* n, *può ridursi in infiniti modi alla forma canonica*

$$\sum_i a_i u_i \bar{u}_i \quad (\equiv f) \quad (i = 0, 1, \ldots, \delta) \tag{3}$$

(le u_i *essendo forme algebriche di grado* n *linearmente indipendenti, le* $\bar{u}_i$ *le complesse coniugate e le* a_i *costanti reali), ma sempre in questa espressione il numero dei termini* $\delta+1$ *è fisso, e dei coefficienti* a_i *ve n'è un numero fisso di positivi (e di negativi).*

Vale dunque una legge d'inerzia per ogni forma iperalgebrica reale (e non soltanto per quelle del 1° ordine). Per le forme iperalgebriche reali del 1° ordine, dette anche forme d'HERMITE, cioè del tipo

$$\sum_{il} a_{il} x_i \bar{x}_l \equiv \sum_{il} \bar{a}_{il} \bar{x}_i x_l,$$

C. SEGRE ha osservato che vale appunto la legge d'inerzia (13) e il

(11) VILLA [12], p. 483.
(12) VILLA [13], p. 174.
(13) C. SEGRE [4], Nota III, p. 605.

risultato è riportato anche da E. CARTAN nel suo libro (14). Ma, come si è detto, tale legge vale per ogni forma iperalgebrica reale.

Una ipersuperficie iperalgebrica V_{2r-1} individua un sistema lineare Σ di ipersuperficie algebriche, quello individuato delle ipersuperficie

$$u_i = 0,$$

che si chiama *sistema associato* alla V_{2r-1} (15).

La V_{2r-1} individua inoltre in Σ un'antipolarità Ω di equazione

$$\sum_i a_i \lambda_i \bar{\lambda}_i = 0,$$

essendo

$$\sum_i \lambda_i u_i = 0$$

l'equazione di Σ. La Ω chiamasi *antipolarità subordinata* da V_{2r-1} (16).

La V_{2r-1} *è il luogo dei punti comuni alle ipersuperficie del suo sistema associato* Σ *e alle varietà basi dei sistemi lineari corrispondenti nell'antipolarità da essa subordinata* (17).

E questa proposizione, in un certo senso, s'inverte (18). Sicchè l'assegnare una V_{2r-1} equivale, in un certo senso, ad assegnare un'antipolarità in un sistema lineare d'ipersuperficie algebriche.

L'ente iperalgebrico essenziale che interviene è dunque l'antipolarità.

Un'*antipolarità* in uno spazio lineare S_r è la corrispondenza (involutoria) fra i punti e gli iperpiani di S_r rappresentata dall'equazione

$$\sum_{i,\,k} a_{ik} x_i \bar{y}_k = 0, \qquad \text{dove } a_{ik} = \bar{a}_{ki},$$

le x_i (e le y_i) essendo coordinate di punto in S_r ($i, k = 0, 1, \ldots, r$) (19).

Ritornando alla V_{2r-1}, la dimensione di Σ chiamasi *genere* di V_{2r-1} (mentre l'ordine n di Σ chiamasi *ordine* di V_{2r-1}) (20).

Se nella (3) il numero dei coefficienti a_i (i quali, in valore assoluto, possono anche supporsi $= 1$) di un segno è $\rho + 1$ (e quello dei coefficienti a_i di segno opposto è $\delta - \rho$), con $\rho + 1 \leq \delta - \rho$, il

(14) E. CARTAN [2], p. 143.
(15) VILLA [13], p. 170.
(16) VILLA [13], p. 170.
(17) VILLA [13], p. 171.
(18) VILLA [13], p 178
(19) Le antipolarità sono state studiate da C. SEGRE in [4], Nota III e da E. CARTAN in [2], p. 137.
(20) VILLA [13], p. 170.

numero ρ chiamasi *specie* della V_{2r-1} e collegasi ad un carattere dell'antipolarità Ω: la specie appunto di questa $\left(-1 \leq \rho < \frac{\delta}{2}\right.$ per δ pari, $\left.-1 \leq \rho < \frac{\delta+1}{2}\right.$ per δ dispari) (21).

Il genere e la specie di una V_{2r-1} sono invarianti di essa rispetto alle trasformazioni razionali (e antirazionali, cioè per le trasformazioni che sono il prodotto di trasformazioni razionali e del *coniugio* $x_i = \bar{x}_i$), in particolare quindi per le trasformazioni cremoniane e anticremoniane (22).

Ma gli enti Σ e Ω permettono anche di costruire un modello proiettivo semplicissimo delle V_{2r-1} (23). E da quest'immagine delle V_{2r-1} apparirà appieno la natura delle V_{2r-1} stesse, e quindi di tutte le varietà iperalgebriche.

Ci riferiremo, per brevità, alle V_3 del piano, e si supporrà anche Σ irriducibile e semplice, ma apparirà subito il carattere generale di quanto segue.

È ben noto che, dato in un piano π un sistema lineare Σ (irriducibile e semplice) di curve algebriche, di dimensione (complessa) δ, se si stabilisce una proiettività fra Σ e il sistema degli iperpiani di un S_δ, ogni punto P di π individua un punto Q di S_δ, centro della stella $\infty^{\delta-1}$ d'iperpiani di S_δ corrispondente nella proiettività al sistema staccato da Σ dal punto P. Quando P descrive π, Q descrive una superficie razionale (irriducibile) F di S_δ. Ad ogni punto Q di F corrisponde, essendo Σ semplice, un sol punto P di π.

Ciò posto consideriamo la V_3 di cui Σ è il sistema associato. Orbene: *L'immagine* Φ_3 *di* V_3 *su* F *è l'intersezione completa di* F *con un'iperquadrica* (24).

Dunque ogni ipersuperficie iperalgebrica è birazionalmente equivalente ad una varietà ottenuta segando una varietà algebrica (unirazionale) con un'iperquadrica.

Questo risultato mette in chiaro l'intima essenza delle varietà iperalgebriche e, in un certo senso, conclude la loro teoria. Le varietà iperalgebriche essenziali sono insomma le iperquadriche (in particolare: le *iperconiche*), in quanto da esse e dalle varietà algebriche si ottengono tutte le altre varietà iperalgebriche.

Le *iperquadriche* sono le V_{2r-1} del 1° ordine, cioè le V_{2r-1} per le quali il sistema associato è un sistema lineare d'iperpiani (25).

(21) VILLA [13], pp. 164, 170.
(22) VILLA [13], p. 170.
(23) VILLA [14].
(24) VILLA [14], p. 10.
(25) VILLA [13], p. 179.

Le iperquadriche sono il luogo dei punti in S_r che appartengono agli iperpiani corrispondenti in un'antipolarità (e inversamente: un'iperquadrica determina in S_r un'antipolarità).

Le iperquadriche (per $r=2$ iperconiche, per $r=1$ *catene rettilinee*) sono state diffusamente studiate da C. SEGRE (26). Per $r=1$, 2 prima ancora erano state incontrate da PICARD e da POINCARÉ nelle loro ricerche sulle funzioni Fuchsiane, Kleiniane e iperfuchsiane. Per $r=3$, le iperquadriche furono studiate da E. CARTAN (27). Le iperconiche sono state da me poste in relazione con varietà iperalgebriche più semplici mediante le trasformazioni pseudocremoniane (28).

6. Le trasformazioni pseudocremoniane.

Cosa sono le trasformazioni pseudocremoniane?

Rappresentando gli S_r complessi sopra S_{2r} reali (ad esempio), una *trasformazione* fra due S_r chiamasi *iperalgebrica* quando ha per immagine una trasformazione algebrica (reale) fra gli spazi S_{2r} reali rappresentativi. Se la trasformazione iperalgebrica è biunivoca si chiama *ipercremoniana* (29).

Fra le trasformazioni ipercremoniane si hanno quelle cremoniane e quelle anticremoniane (cioè prodotti di una trasformazione cremoniana e del coniugio) (30), ma si ha inoltre tutta una classe assai vasta di trasformazioni dette pseudocremoniane.

Si dicono insomma *pseudocremoniane* le trasformazioni biunivoche fra due spazi S_r che mutano varietà algebriche in varietà iperalgebriche (30). Si avverta che le trasformazioni cremoniane (o anticremoniane) mutano invece varietà algebriche in varietà algebriche.

Una particolare trasformazione pseudocremoniana fra due piani complessi (x, y), (x', y') è la seguente

$$x' = x$$
$$y' = \bar{y}$$

($\bar{y}$ essendo il numero complesso coniugato di y). In questa trasformazione (chiamata *pseudoconiugio*) alle rette di un piano corrispondono catene dell'altro (31).

(26) C. SEGRE [4], Nota II, p. 441, e Nota III.
(27) E. CARTAN [2], p. 137.
(28) VILLA [10], p. 107 e [13], p. 188.
(29) VILLA [10].
(30) VILLA [10].
(31) VILLA [10], n. 7.

Una notevole classe di trasformazioni pseudocremoniane è costituita da quelle trasformazioni (le *pseudoproiettività*) che sono rappresentate nell' S_2, reale immagine da proiettività (a coefficienti reali) (32). Una pseudoproiettività fra due S_r complessi è rappresentata cioè da equazioni del tipo

$$y_l = \frac{\sum\limits_i a_{il} x_i + \sum\limits_i b_{il} \bar{x}_i + c_l}{\sum\limits_i k_i x_i + \sum\limits_i \bar{k}_i \bar{x}_i + h} \qquad (i,\ l = 1,\ 2, \ldots ,\ r)$$

dove le x_i e le y_l sono coordinate non omogenee nei due spazi; le a_{il}, b_{il}, c_l, k_i sono costanti complesse e h costante reale.

Le pseudoproiettività formano manifestamente un gruppo. Non mi trattengo qui su ulteriori ricerche sulle varietà e trasformazioni iperalgebriche (33).

7. Altre ricerche.

Altre ricerche si sono avute in relazione all'introduzione degli elementi bicomplessi a cui C. Segre è stato naturalmente portato da quella delle varietà iperalgebriche (34). Ricordo a tal riguardo i lavori dello Spampinato (35).

Ma passando dalle varietà iperalgebriche alle varietà più generali della geometria complessa (36) c'è tutto un campo di ricerche, nell'indirizzo della geometria proiettiva complessa differenziale, che non è stato ancora investigato (37). E anche in relazione ad altri studi recenti, la geometria iperalgebrica potrà dar luogo ad ulteriori sviluppi.

(32) Villa [24].

(33) Si allude alle ricerche svolte nei lavori indicati nell'indice bibliografico.

(34) C. Segre [5], p. 448.

(35) N. Spampinato [8]. Le proprietà esposte nel n. 5 si estendono allo spazio bicomplesso (Villa [23]). Lo studio degli enti iperalgebrici nello spazio bicomplesso offre il vantaggio di eliminare le questioni di realità, ma lo studio degli enti iperalgebrici nello spazio complesso ha un interesse speciale.

(36) Cioè alle varietà dello spazio complesso che hanno per immagini varietà dello spazio reale rappresentativo (nel senso ordinario). L'utilità dei concetti introdotti è apparsa anche nelle ricerche sulle funzioni analitiche di due o più variabili complesse, nella geometria pseudoconforme (Severi, E. Cartan, B. Segre ed altri). Si veda ad es. E. Cartan [3].

(37) A quest'ordine d'idee appartiene la Nota: W. Blaschke [1].

BIBLIOGRAFIA

[1] W. Blaschke, *Contributi alla geometria proiettiva complessa*, «Boll. dell'Unione Matematica Italiana», ser. III, Vol. II, p. 309 (1940).

[2] E. Cartan, *Géométrie projective complexe*, Gauthier-Villars, Paris (1931).

[3] E. Cartan, *Sur la géométrie pseudoconforme des hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes*, «Annali di Matematica», ser. IV, vol. XI, p. 17 (1932-33).

[4] C. Segre, *Un nuovo campo di ricerche geometriche*, «Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino», vol. XXV, Nota I, p. 180; Nota II, p. 290; Nota III, p. 376; Nota IV, p. 35 (1889-90).

[5] C. Segre, *Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici*, «Mathematische Annalen», Band XL, p. 413 (1892).

[6] C. Segre, *Le geometrie proiettive nei campi di numeri duali*, «Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino», vol. XLVII, Nota I. p. 308; Nota II, p. 384 (1911-12).

[7] C. Segre, *Opere*, a cura dell'Unione Matematica Italiana, vol. I, Edizioni Cremonese, Roma (1957).

[8] N. Spampinato, *Lezioni di Geometria Superiore*, Edizioni Pironti, Napoli (1949).

[9] M. Vilia, *Sulle reti omaloidiche di pseudoconiche*, «Boll. dell'Unione Matematica Italiana», vol. XII, p. 219 (1933).

[10]. M. Villa, *Sulle trasformazioni pseudocremoniane*, «Rend. del Seminario Matematico dell'Università di Padova», vol. IV, p. 93 (1933).

[11] M. Villa, *Intorno ai fili rettilinei*, «Boll. dell'Unione Matematica Italiana», vol. XII, p. 317 (1933).

[12] M. Villa, *Sulle ipersuperficie iperalgebriche*, «Rend. dell'Accademia dei Lincei», ser. VI, vol. XIX, p. 483 (1934).

[13] M. Villa, *Connessi algebrici, iperalgebrici e varietà iperalgebriche di dimensione massima*. «Memorie dell'Accademia d'Italia», vol. VI, p. 151 (1934).

[14] M. Villa, *Sulla teoria delle ipersuperficie iperalgebriche*, «Rend. dell'Accademia dei Lincei», ser. VI, vol. XX, p. 9 (1934).

[15] M. Villa, *Sulle curve algebriche piane reali*, «Rend. dell'Istituto Lombardo», vol. LXVII, p. 577 (1934).

[16] M. Villa, *Sulle curve razionali di un'iperquadrica*, «Boll. dell'Unione Matematica Italiana», vol. XIV, p. 157 (1935).

[17] M. Villa, *Sulle varietà iperalgebriche semplicemente infinite*, «Boll. dell'Unione Matematica Italiana», vol. XIV, p. 160 (1935).

[18] M. Villa, *Sulle singolarità delle ipersuperficie iperalgebriche*, «Rend. dell'Istituto Lombardo», vol. LXVIII, p. 492 (1935).

[19] M. Villa, *Sulle corrispondenze a valenza positiva o nulla*, Scritti Matematici offerti a Luigi Berzolari, Pavia, p. 479 (1936).

[20] M. Villa, *Alcune asservazioni sugli enti iperalgebrici. Le varietà antinvolutive*, «Boll. dell'Unione Matematica Italiana», vol. XVI, p. 61 (1937).

[21] M. VILLA, *Sulle varietà iperalgebriche situate sopra una varietà algebrica*, « Rend. dell'istituto Lombardo », vol, LXX, p. 62 (1937).

[22] M. VILLA, *Sulle curve piane algebriche*, « Rend. dell'Istituto Lombardo », vol. LXX, p. 117 (1937).

[23] M. VILLA, *Sulle varietà iperalgebriche dello spazio bicomplesso*, « Atti del I° Congresso dell'Unione Matematica Italiana », Pavia, p. 300 (1937).

[24] M. VILLA, *Il gruppo delle trasformazioni pseudoproiettive*, « Atti della Accademia delle Scienze di Torino », vol. LXXVII, p. 242 (1941-42).

[25] M. VILLA, *Sulle ipersuperficie* $\frac{y-\bar{y}}{i}=f\left(\frac{x-\bar{x}}{i}\right)$ *localmente equivalenti all'ipersfera*, « Rend. dell'Istituto Lombardo », vol. LXVI, p. 359 (1933).