Enriques, Federigo

## Sopra le superficie algebriche di bigenere uno

Mem. Soc. It. d. Scienze (III) **XIV** (1906), pp. 327-352.

# SOPRA
# LE SUPERFICIE ALGEBRICHE
## DI BIGENERE UNO

MEMORIA

DI

**FEDERIGO ENRIQUES**

**ROMA**

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

Estratto delle *Memorie della Società italiana delle Scienze (detta dei XL)*.
Serie 3ª, Tomo XIV.

Nel 1896 mi si è presentata **la superficie del 6° ordine $F_6$ passante doppiamente per gli spigoli di un tetraedro** come primo esempio di superficie di genere $p_g = p_a = 0$, non razionale. Ho osservato che, pur mancando le superficie aggiunte d'ordine $6 - 4$, si ha una superficie *biaggiunta* d'ordine $2 \ (6 - 4)$, costituita dal tetraedro nominato, e che le analoghe superficie biaggiunte conducono in generale per $p_g = 0$ a delle curve invarianti, cui si addice il nome di « *bicanoniche* »; quindi il numero delle curve bicanoniche linearmente indipendenti costituisce un nuovo invariante delle superficie « il *bigenere* » ecc.

L'importanza del bigenere risulta subito dal teorema di CASTELNUOVO per cui « le superficie di genere $p_a = p_g = 0$ e di bigenere $P_2 = 0$ sono razionali ».

Ora, dopo il primo esempio della sestica $F_6$, altri esempî si sono presentati di superficie non razionali di genere 0; ma da questi la sestica $F_6$ si distingue per le seguenti proprietà:

1) è una superficie regolare di genere 0 e bigenere 1, cioè

$$p_g = p_a = 0 \qquad P_2 = 1 \, ;$$

(si ha invece $P_2 > 1$ in un esempio di CASTELNUOVO e in alcuni piani doppi che io ho successivamente costruiti);

2) la superficie biaggiunta non sega la superficie fuori della curva doppia, cioè la curva bicanonica ha l'ordine 0; (un esempio di superficie, per cui $p_g = p_a = 0$ $P_2 = 1$, dotata di curva bicanonica d'ordine $> 0$, viene addotto al n. 3 di questa Memoria.

Ebbene, le proprietà suddette caratterizzano la sestica $F_6$ dal punto di vista delle trasformazioni birazionali.

Questo è il resultato fondamentale ottenuto nella presente Memoria.

Possiamo determinarlo più precisamente nei seguenti enunciati:

*Perchè una superficie regolare di genere* 0 *e bigenere* 1 $(p_g = p_a = 0$ $P_2 = 1)$ *abbia la curva bicanonica d'ordine* 0, *basta che sia il trigenere* $P_3 = 0$ (*o il sestigenere* $P_6 = 1$) *anzichè* $P_3 > 0$ (e $P_6 > 1$).

*Le superficie per cui*

$$p_a = P_3 = 0 \qquad P_2 = 1$$

*si possono trasformare in superficie del 6° ordine passanti doppiamente per gli spigoli d'un tetraedro.*

*Queste superficie posseggono in generale un gruppo discontinuo di infinite trasformazioni birazionali in se stesse*, onde i loro sistemi lineari di dato genere si distribuiscono in serie discontinue ecc. (cfr. n. 20).

## I.

## I plurigeneri delle superficie F di bigenere 1.

1. Si abbia, nello spazio ordinario, una superficie F di un certo ordine $n$. Senza restringere la generalità, agli effetti dell'ordine di questioni che stiamo trattando, possiamo supporre che la F sia dotata soltanto di curva doppia $\chi$ e di un numero finito di punti tripli, tripli anche per la curva.

Ricordiamo la definizione dei caratteri invarianti fondamentali della superficie (1).

Il *genere geometrico* $p_g$ è il numero delle superficie d'ordine $n-4$, linearmente indipendenti, che passano per la curva doppia $\chi$ di F (superficie *aggiunte* a F).

Il *genere aritmetico* $p_a$ è l'espressione aritmetica del numero anzidetto calcolato in base alle *formule di postulazione* di Nöther.

Il *bigenere* $P_2$ (o semplicemente P) è il numero delle curve linearmente indipendenti sezioni di F colle superficie d'ordine $2n-8$, che passano doppiamente per la curva $\chi$ (superficie *biaggiunte* a F).

Il *trigenere* $P_3$ è il numero delle curve linearmente indipendenti sezioni di F colle superficie d'ordine $3n-12$ che passano doppiamente per la $\chi$ e toccano le due falde di F per essa (superficie *triaggiunte* a F) ecc.

Le nostre ipotesi fondamentali sono

$$p_g = p_a = 0 \qquad P_2 = 1.$$

In tali ipotesi (adoperando eventualmente una trasformazione birazionale) si può supporre che la superficie F sia ridotta a non contenere *curve eccezionali*, cioè curve immagini di punti semplici sopra una superficie trasformata (2).

Facciamo questa supposizione semplificativa.

Essendo $p_g = 0$ mancano su F curve *canoniche* (sezioni di superficie aggiunte d'ordine $n-4$), mentre, per l'ipotesi $P_2 = 1$, si ha *una* curva *bicanonica*, sezione

(1) Cfr. Enriques, *Introduzione alla Geometria sopra le superficie algebriche* (t. X, serie III di queste Memorie, 1896).

(2) Cfr. Enriques, *Introduzione* citata, n. 42; e Castelnuovo ed Enriques, Annali di Mat., serie 3ª, t. VI, 1901.

di una superficie biaggiunta d'ordine $2n-8$. Designando con $\pi$ il genere delle sezioni piane della superficie F, l'ordine della curva bicanonica sarà

$$4\pi-4-2n,$$

essendo

$$2\pi-2\geq n.$$

Valutiamo il genere della curva bicanonica di F.

A tal fine ricordiamo che dato su F un qualsiasi sistema lineare $|C|$, p. es. quello delle sezioni piane di F, resta definito un sistema lineare *aggiunto* $|C'|$, un *secondo aggiunto* $|C''|=|(C')'|$ ecc.; il sistema canonico (nel nostro caso inesistente) verrebbe dato da

$$|C'-C|,$$

il sistema bicanonico da

$$|C''-C|=|2C'-2C| \text{ ecc.}$$

Esprimiamo il genere $\pi'$ di $|C'|$, come se questo sistema fosse la somma di $|C|$, di genere $\pi$ e grado $n$, e di un sistema canonico di genere $p^{(1)}$; si avrà

$$\pi'=p^{(1)}+3(\pi-1)-n.$$

Il numero

$$p^{(1)}=\pi'-3(\pi-1)+n,$$

nonostante la mancanza di $|C'-C|$, esprime un invariante di F, indipendente dalla scelta di $|C|$; ciò risulta dalla *relazione fondamentale* fra gli aggiunti di due sistemi $|C|$ e $|K|$:

$$|C+K'|=|C'+K|.$$

L'invariante $p^{(1)}$ prende il nome di *genere lineare virtuale* della superficie [1]. Si trova poi che il grado di $|C'|$ vale

$$n'=p^{(1)}-1+4(\pi-1)-n.$$

Ora se si può valutare il genere e il grado di $|C''|$ e quindi anche i caratteri analoghi di $|C''-C|$; si trova che il genere della curva bicanonica $|C''-C|$ vale

$$3p^{(1)}-2,$$

e il suo grado

$$4p^{(1)}-4.$$

Nel caso $(n=2\pi-2)$ in cui si abbia una curva bicanonica d'ordine 0,

$$|C''|=|C|,$$

[1] Cfr. Enriques, *Introduzione* citata, n. 41.

risulta

$$p^{(1)} = 1 .$$

In ogni caso poichè $|C''|$ contiene $|C|$ si trova

$$p^{(1)} \geqq 1 .$$

Poniamo che sia

$$n < 2\pi - 2 .$$

Partendo da un sistema $|C|$ irriducibile, si ha la dimensione di $|C'|$

$$r' \geqq p_a + \pi - 1$$

e

$$r' \leqq p_g + \pi - 1 ,$$

cioè, nel nostro caso ($p_a = p_g = 0$),

$$r' = \pi - 1 ;$$

parimente la dimensione di $|C''|$ è

$$r'' = p^{(1)} - 1 + 3(\pi - 1) - n .$$

Il sistema $|C''|$ sega su una C generica una serie $g_{4\pi-4-n}$ non speciale ($n < 2\pi - 2$), quindi la dimensione del sistema bicanonico vale

$$P_2 - 1 \geqq p^{(1)} - 1 .$$

Siccome si ha per ipotesi

$$P_2 = 1 ,$$

si deduce

$$p^{(1)} \leqq 1 ,$$

quindi, ricordando la diseguaglianza $p^{(1)} \geqq 1$, si deduce

$$p^{(1)} = 1 .$$

Si conclude che *il genere lineare della superficie* F ($p_g = p_a = 0$ , $P_2 = 1$) *vale in ogni caso*

$$p^{(1)} = 1 ;$$

questo è anche il genere (virtuale) della curva bicanonica di F, supposta d'ordine $> 0$

$$(2\pi - 2 > n).$$

2. Il valore del genere lineare $p^{(1)}$ non permette di distinguere i due casi che una superficie F può presentare, cioè il caso

$$n < 2\pi - 2$$

in cui vi è una effettiva curva bicanonica d'ordine

$$4\pi - 4 - 2n > 0 ,$$

e il caso

$$n = 2\pi - 2$$

in cui codesta curva ha l'ordine 0; e, quindi per ogni sistema $|C|$ è

$$|C''| = |C|.$$

La distinzione si ottiene valutando i plurigeneri successivi della superficie. Nel caso

$$n = 2\pi - 2 \ , \ |C''| = |C|,$$

si ha anche

$$|C^{IV}| = |C''| \text{ ecc.},$$

quindi tutti i plurigeneri d'ordine pari sono uguali ad 1:

$$P_2 = P_4 = P_6 = \cdots = 1 ;$$

invece

$$|C'''| = |C'| \text{ ecc.}$$

quindi

$$p_g = P_3 = P_5 = \cdots = 0.$$

Consideriamo invece il caso

$$n < 2\pi - 2 ,$$

in cui si ha una curva bicanonica K d'ordine

$$4\pi - 4 - 2n > 0 .$$

Costruiamo il sistema aggiunto a $|K|$, valendoci di un sistema ausiliario $|C|$; si avrà

$$|K'| = |K + C' - C| ,$$

dove

$$|K| = |C'' - C|$$

e perciò

$$|K'| = |C''' - C|.$$

Calcoliamo la dimensione di $|C'''|$, e teniamo conto che esso sega su una C una serie non speciale; segue così che la dimensione di $|K'|$ è

$$P_3 - 1 > 0 .$$

Si ha dunque su F almeno una curva tricanonica K', d'ordine $3(\pi - 1) - 3n$; similmente si trovano le successive curve $i$ canoniche, per $i = 4, 5 \dots$.

Pertanto i plurigeneri della superficie valgono

$$P_i > 0 \quad \text{per} \quad i > 1 .$$

Ma è interessante di provare che, almeno per $i = 6$, risulta di più

$$P_6 > 1 ,$$

e si hanno quindi su F infinite curve sesticanoniche, ellittiche o composte di curve ellittiche.

Consideriamo le due curve

$$2K' \quad e \quad 3K;$$

esse appartengono ugualmente al sistema sesticanonico

$$|C^{VI} - C|,$$

e sono distinte, altrimenti K dovrebbe comporsi di parti contate due volte le quali entrerebbero tre volte in K′ e formerebbero perciò una curva canonica di F.

Si deduce così che le due curve sesticanoniche suddette determinano un fascio, quindi il sestigenere di F vale

$$P_6 > 1;$$

per conseguenza

$$P_8 > 1 \ , \ P_9 > 1 \ldots P_{12} > 2 \ \text{ecc.}$$

Ci riserviamo a portare fra poco un effettivo esempio di superficie per cui

$$p_g = p_a = 0 \qquad P_2 = P_3 = 1 \ , \ P_6 > 1 \, .$$

Intanto raccogliamo le conclusioni dell'analisi precedente:

*Le superficie* F *di genere* 0 *e bigenere* 1 ($p_a = p_g = 0 \, , P_2 = 1$) *possono avere una curva bicanonica d'ordine* 0, *o di ordine* $> 0$; *nel primo caso tutti i plurigeneri valgono* 0 *o* 1, *e precisamente*:

$$p_g = P_3 = P_5 = \cdots = 0 \, ,$$
$$P_2 = P_4 = P_6 = \cdots = 1 \, ;$$

*nel secondo caso si ha*:

$$P_i \geq 1 \quad per \quad i > 1 \, ,$$

*ed in particolare*

$$P_6 > 1;$$

*cioè esiste sulla superficie un fascio di curve* (ellittiche) *sesticanoniche.*

In tal modo restano distinti i due casi. Notiamo anzi che

*Le superficie regolari di genere* 0 *e bigenere* 1 *con curva bicanonica d'ordine* 0 *sono caratterizzate semplicemente dai valori*

$$p_a = P_3 = 0 \qquad P_2 = 1 \, ,$$

*donde* $p_g = 0$; *oppure dai valori*

$$p_a = p_g = 0 \ , \ P_6 = 1 \, ,$$

*da cui segue come conseguenza* $P_2 = 1$.

3. Rechiamo ora un esempio di superficie per cui

$$p_a = p_g = 0 \qquad P_2 = 1 \qquad P_6 > 1 \, .$$

Si abbia nel piano una curva irriducibile $C_3$, e designamo con $z$ il suo integrale di 1ª specie, con $2\varpi$, $2\varpi'$ i periodi di questo. Consideriamo una retta $C_1$, la quale segherà la $C_3$ in tre punti; la somma dei valori di $z$ in questi punti può supporsi nulla rispetto ai periodi:

$$z_1 + z_2 + z_3 \equiv 0 \quad (\text{mod. } 2\varpi, 2\varpi').$$

Si determinino ora su $C_3$ 6 punti $z_4, z_5, \ldots z_9$ per modo che sia p. es.

$$z_4 + z_5 + \cdots + z_9 \equiv \frac{2\varpi}{3} \quad (\text{mod. } 2\varpi, 2\varpi').$$

Sarà pure

$$\sum_{1}^{9} z_i \equiv \frac{2\varpi}{3} \quad (\text{mod. } 2\varpi, 2\varpi'),$$

e quindi i 9 punti $z_1 \ldots z_9$ costituiranno i punti base tripli per un fascio di curve (ellittiche) $C_9$ d'ordine 9 (Halphen).

Ora nella costruzione precedente non è vietato di prendere

$$z_4 = z_5 \;,\; z_6 \equiv z_7 \;,\; z_8 \equiv z_9 \quad (\text{mod. } 2\varpi, 2\varpi')$$

essendo p. es.

$$z_4 + z_6 + z_8 \equiv \frac{\varpi}{3} \quad (\text{mod. } 2\varpi, 2\varpi').$$

Si otterrà in tal modo una $C_9$ irriducibile con 9 punti tripli su $C_3$, di cui tre appartengono a $C_1$, e sei si distribuiscono in tre coppie di punti infinitamente vicini.

Ciò posto consideriamo il *piano doppio che ha come curva di diramazione* $C_1 + C_9$.

Le sue curve canoniche dovrebbero venire rappresentate da coniche passanti per i sei punti $z_1, z_2, z_3, z_4, z_6, z_8$, spezzate quindi in $C_1$ e in una retta per $z_4, z_6, z_8$; ma questi tre punti non sono allineati (non essendo $z_4 + z_6 + z_8 = 0$), quindi

$$p_g = p_a = 0.$$

Si ha invece una curva bicanonica rappresentata sul piano dalla $C_1 + C_3$, seconda aggiunta alla curva di diramazione $C_1 + C_9$; dunque il bigenere vale

$$P_2 = 1.$$

All'infuori della retta eccezionale $C_1$, la curva $C_3$ è immagine doppia di una curva bicanonica, la cui aggiunta ha per immagine semplice la $C_9$ di diramazione le curve del 9° ordine, costituenti il fascio di Halphen determinato da $C_9$, rappresentano doppiamente le curve sesticanoniche della superficie.

Si noti che l'esempio addotto non si trova fra i piani doppi di genere lineare $p^{(1)} = 1$ che ho determinati nel 1898 [1], perchè ivi ho supposto la curva di diramazione spoglia di componenti eccezionali.

[1] Rend. Acc. dei Lincei, serie 5ª, vol. VII, pp. 234, 253.

## II.

## Proprietà generali dei sistemi lineari sopra le superficie F.

Nel seguito di questa Memoria ci riferiremo alle superficie F per cui

$$p_a = P_3 = 0 \qquad P_2 = 1,$$

dotate dunque di *una* curva bicanonica d'ordine 0. E considereremo sopra F sistemi lineari *virtualmente privi di punti base*, sicchè parlando del sistema completo determinato da una curva si sottintenderà che questo non debba avere alcun punto base assegnato.

Richiamiamo qui e completiamo le proprietà generali dei sistemi lineari di curve tracciati su F.

4. Anzitutto (cfr. I):

*Ogni sistema lineare $|C|$, irriducibile o no, di genere virtuale $\pi \geq 1$, ammette un sistema aggiunto $|C'|$ di dimensione $\geq \pi - 1$ che ha lo stesso genere e lo stesso grado di $|C|$. Il sistema $|C|$ è a sua volta l'aggiunto di $|C'|$, cioè*

$$|C''| = |C|.$$

*I doppi dei due sistemi $|C|$ e $|C'|$ sono equivalenti*:

$$|2C'| = |(2C)''| = |2C|.$$

*Quindi il grado di un sistema $|C|$ di genere $\pi$ ($\geq 1$) vale*

$$n = 2\pi - 2.$$

5. *Ogni sistema lineare completo $|C|$, irriducibile o no, di genere virtuale $\pi \geq 1$, ha la dimensione*

$$\geq \pi - 1.$$

(teorema di Riemann-Roch per la superficie F).

*Ogni sistema $|C|$, irriducibile completo di genere $\pi > 1$, ha la dimensione*

$$r = \pi - 1,$$

*e non maggiore.*

La prima parte del teorema si deduce subito dal fatto che $|C|$ è aggiunto a $|C'|$.

Per dimostrare la seconda parte si consideri la serie (*caratteristica*) $g^{r-1}_{2\pi-2}$ segata su una C dalle altre C; il doppio di questa serie è la serie bicanonica $g^{3\pi-4}_{4\pi-4}$ di C, ma la serie stessa differisce dalla serie canonica, non essendo $|C| = |C'|$. Dunque la $g^{r-1}_{2\pi-2}$ è una serie non speciale, e perciò

$$r \leq \pi - 1,$$

donde (n. 5)

$$r = \pi - 1.$$

6. *Ogni sistema lineare irriducibile di genere virtuale $\pi > 1$, dotato di punti base multipli, è sempre contenuto in un sistema completo di curve dello stesso ordine privo di punti base o dotato soltanto di punti base semplici.*

Secondo il n. 5 il sistema dato è contenuto in un sistema completo $|C|$ (virtualmente privo di punti base), di dimensione $r = \pi - 1$. Ora se $|C|$ ha un punto base $i$plo, il genere effettivo delle C vale

$$\pi_1 = \pi - \frac{i(i-1)}{2},$$

e la serie caratteristica che rimane, tolte le $i^2$ intersezioni fisse di due C, è una

$$g_{2\pi-2-i^2} = g_{2\pi_1-2-\frac{i(i+1)}{2}},$$

speciale o non speciale; ma se

$$i > 1,$$

la dimensione di questa serie vale

$$r - 1 < \pi_1 - 1$$

e

$$\pi_1 < \pi,$$

quindi

$$r < \pi - 1,$$

contro il n. 5.

7. *Se un sistema lineare irriducibile $|C|$ di genere virtuale $\pi > 1$, dotato di punti base semplici, non è contenuto in un sistema più ampio di curve dello stesso ordine, il sistema si compone di curve iperellittiche e vi sono due punti base, i quali risultano doppi per la $g_2^1$ appartenente alla C generica.*

Supponghasi che $|C|$ abbia $s \geq 1$ punti base semplici $A_1 A_2 \dots A_s$. Sopra una C generica, la serie caratteristica $g_{2\pi-2}^{\pi-2}$, tolti i punti fissi, dà una $g_{2\pi-2-s}^{\pi-2}$ speciale, che si ottiene dunque come residua di un gruppo di $s$ punti $B_1 B_2 \dots B_s$ dalla serie canonica $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$; si ha così

$$g_{2\pi-2-s}^{\pi-2} = g_{2\pi-2}^{\pi-2} - \sum_1^s A \equiv g_{2\pi-2}^{\pi-1} - \sum_1^s B.$$

Per il teorema di Riemann-Roch il gruppo $\sum B$, presentando una sola condizione ai gruppi canonici che debbono contenerlo, appartiene ad una serie lineare $g_s^{s-1}$ di dimensione $s-1$; ma poichè il genere $\pi$ di C è $> 1$, si deve avere

$$s = 1 \quad \text{o} \quad s = 2.$$

Supposto $s = 1$ $(A_1 = A, B_1 = B)$ si ha

$$g_{2\pi-2}^{\pi-2} - A \equiv g_{2\pi-2}^{\pi-1} - B;$$

ma

$$2g_{2\pi-2}^{\pi-2} \equiv 2g_{2\pi-2}^{\pi-1},$$

quindi

$$2A \equiv 2B.$$

I punti A e B essendo distinti, sono punti doppi di una $g'_2$ appartenente a C; ma allora sopra la curva iperellittica C, la serie

$$g_{2\pi-2}^{\pi-1} - B$$

contiene ancora come punto fisso il punto B, il quale risulta dunque un nuovo punto base pel sistema $|C|$; ciò contraddice all'ipotesi $s = 1$.

Suppongasi $s = 2$. Si ha

$$g_{2\pi-4}^{\pi-2} = g_{2\pi-2}^{\pi-2} - A_1 - A_2 = g_{2\pi-2}^{\pi-1} - B_1 - B_2\,,$$

e la coppia $B_1 + B_2$ appartiene ad una $g'_2$ colla quale risulta composta la $g_{4\pi-4}^{\pi-2}$.

La coppia $A_1 + A_2$ non appartiene alla suddetta $g'_2$, ma

$$2(A_1 + A_2) \equiv 2(B_1 + B_2)\,,$$

quindi la quaterna $2A_1 + 2A_2$ si compone di due coppie di $g'_2$, e però $A_1$, $A_2$ sono punti doppi di questa $g'_2$.

Resta così dimostrato l'asserto: la C generica è iperellittica, i punti base sono *due* e sono doppi per la $g'_2$ appartenente a C.

Si può notare di più che le C passanti per un punto generico della superficie passano di conseguenza per un altro punto, coniugato al primo su ciascuna C.

In questa categoria di sistemi rientrano in particolare i *fasci di curve di genere due* (di cui dimostreremo poi l'esistenza), i quali hanno giusto due punti base.

8. Passiamo ora a studiare le *curve ellittiche* tracciate su F, ed i loro sistemi.

In base al n. 4 si hanno anzitutto i teoremi:

*Ogni curva* C *di genere* (*virtuale*) 1 *ha almeno una curva aggiunta* C′, *che non ha punti comuni con* C.

*Le curve* 2C *e* 2C′ *appartengono ad un medesimo fascio lineare di curve ellittiche.*

Distinguiamo pertanto due specie di curve ellittiche irriducibili C che possono appartenere ad F:

α) Curve C *isolate*, aventi *una* aggiunta C′ pure isolata.

β) Curve C di un fascio, che (per il n. 4) ha il grado 0 ossia è privo di punti base.

Consideriamo sopra F un fascio di curve ellittiche irriducibili $|C|$; vi sarà almeno una curva C′ aggiunta a questo fascio, la quale non sega in alcun punto le C.

Se C′ fosse irriducibile si dedurrebbe

$$|C| = |C'|$$

contro l'ipotesi che il genere di F sia

$$p_g = 0\,.$$

La C′ sarà dunque una curva composta; designeremo con $C_1$, $C_2$ ... le parti di C′ che appartengono a curve C diverse fra loro. Ora si ha

$$|2C'| = |2C_1 + 2C_2 + \cdots| = |2C|\,,$$

quindi la curva

$$2C_1 + 2C_2 + \cdots$$

si può riguardare anche come composta mediante due C. Affinchè ciò accada, appartenendo $C_1, C_2 \ldots$ a diverse C, deve essere

$$2C_1 = C$$
$$2C_2 = C,$$

e la $C'$ deve comporsi di due sole curve:

$$C' = C_1 + C_2.$$

Segue poi che

$$|C_2 + C_1'| = |(C_1 + C_2)'| = |C''| = |C|,$$

quindi

$$C_1' = C_2,$$

e

$$C_2' = C_1.$$

Come conclusione si ha:

*Un fascio di curve ellittiche irriducibili* C, *sopra* F, *ammette una sola curva aggiunta composta di due parti di genere* 1, *isolate*, $C_1$ *e* $C_2$, *le quali sono aggiunta l'una all'altra. Le curve* $C_1, C_2$ *contate due volte costituiscono due curve particolari del fascio* $|C|$.

9. Concludiamo l'esame delle proprietà generali dei sistemi lineari tracciati su F, determinando *tutti i sistemi lineari completi irriducibili.*

La questione viene risoluta dal seguente teorema:

*A prescindere da componenti fisse sopprimibili zenza diminuire il genere del sistema, i soli sistemi completi riducibili di genere virtuale* $> 0$ *che possano esistere su* F *sono quelli composti colle curve ellittiche* (*irriducibili*) *di un fascio e con una bisecante* (*irriducibile*) *di genere* 0.

Occorre esaminare due casi di riducibilità che un sistema $|C|$ può presentare [1], cioè il caso in cui le parti variabili delle C sieno irriducibili e quello in cui esse si compongano colle curve d'un fascio.

1° caso. — Sommiamo ad un sistema lineare irriducibile $|C_1|$ di genere $\pi_1$ ($\geq 1$) una curva $C_2$ di genere $\pi_2$ ($\geq 0$) secante le $C_1$ in $i$ ($\geq 0$) punti. Si ottiene allora un sistema di genere

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 + i - 1$$

e quindi di dimensione

$$\geq \pi - 1.$$

Ora se $\pi_1 > 1$, la dimensione di $|C_1|$ vale $\pi_1 - 1$ (n. 5), e quindi il sistema completo $|C_2 + C_1|$ risulterà più ampio del sistema riducibile $C_2 + |C_1|$ che contiene $C_2$ come parte fissa, ogniqualvolta sia $\pi > \pi_1$.

[1] Cfr. la mia citata *Introduzione*, n. 5.

In altri termini se il sistema completo $|C_2 + C_1|$ contiene $C_2$ come parte fissa, questa può essere soppressa senza diminuire il genere del sistema. (Una discussione approfondita mostrerebbe che questo caso è possibile soltanto per $\pi_2 = 0$, $i = 0, 1$).

Suppongasi ora

$$\pi_1 = 1,$$

cioè $|C_1|$ sia un fascio di curve ellittiche; esaminiamo quali curve $C_2$ possono sommarsi al fascio senza ampliarlo, in guisa da ottenere un sistema completo riducibile $C_2 + |C_1|$, che contenga $C_2$ come parte fissa.

In primo luogo $C_2$ può essere parte di una qualche $C_1$ ($i = 0$); ma allora il genere di

$$|C_1 + C_2|$$

vale

$$\pi = 1.$$

Se $C_2$ non è parte di una $C$ essa sega in due punti almeno le $C_1$, poichè incontra almeno in un punto le due componenti della $C_1'$ che raddoppiate costituiscono due particolari $C$ (n. 8).

Si ha dunque

$$i \geq 2.$$

Affinchè la dimensione di $|C_2 + C_1|$ risulti uguale a quella del fascio $|C_1|$ deve aversi

$$\pi - 1 = 1 + \pi_2 + i - 2 = 1,$$

cioè

$$i = 2 \ , \ \pi_2 = 0;$$

come nell'enunciato, la $C_2$ deve essere una curva di genere 0 bisecante le $C_1$.

È poi chiaro che se ad un sistema di genere due, composto colle curve ellittiche di un fascio e con una bisecante razionale, si somma un'altra curva per modo da aumentare il genere del sistema, si ottiene un sistema completo più ampio (di dimensione $\geq 2$).

2° caso. — Consideriamo sopra F un fascio di curve irriducibili $C_1$ di genere $\pi_1 \geq 1$, e formiamo il sistema multiplo $|rC_1|$ dove $r > 1$.

Se $\pi_1 > 1$, due $C_1$ si segano in $2\pi_1 = 2 \geq 2$ punti, e quindi il genere di $|rC_1|$ vale

$$\pi_r > r + 1$$

e la sua dimensione è

$$> r;$$

il sistema completo $|rC_1|$ è dunque un sistema irriducibile più ampio di quello composto coi gruppi di $r$ curve del fascio $|C_1|$.

Se $\pi_1 = 1$, $|rC_1|$ è il sistema $\infty^r$ composto dei gruppi di $r$ curve del fascio $|C_1|$ ed ha il genere

$$\pi_2 = 1.$$

Una curva $C_2$ la quale non sia parte di una $C_1$ sega le $C_1$ in due punti almeno (vedi 1° caso) e quindi le $rC_1$ in $2r$ punti; pertanto ove si sommi $C_2$ ad $|rC_1|$ si ottiene in tal caso un sistema di genere $> r+1$ e di dimensione $> r$, cioè un sistema irriducibile più ampio di $C_2 + |rC_1|$.

Se invece si sommi ad $|rC_1|$ una curva $C_2$ (di genere $\leq 1$) che sia parte di una $C_1$, il sistema completo $C_2 + |rC_1|$ contiene $C_2$ come parte fissa, ma il suo genere vale 1.

Confrontando i varî resultati ottenuti resta stabilito il teorema sopra enunciato.

## III.

## Rappresentazione delle superficie F sopra un piano doppio.

10. *Procedimento di riduzione.* — Sia $|C|$ un sistema lineare irriducibile di genere $\pi > 1$, e quindi di dimensione $\pi - 1$, sopra la superficie F.

Il sistema completo $|2C| = |2C'|$ ha il genere

$$4\pi - 3$$

e quindi la dimensione

$$4\pi - 4;$$

in esso sono contenute

$$\infty^{\pi-2}$$

curve spezzate in due C, ed altrettante curve spezzate in due C'.

Si troveranno dunque, entro $|2C|$, delle curve comuni ai due sistemi $\infty^{2\pi-2}$, le quali si compongono nello stesso tempo di due C e di due curve aggiunte C'.

Siccome le C, C' non appartengono ad uno stesso sistema lineare, le suddette C e C' componenti di una stessa curva

$$K = C + C = C' + C'$$

dovranno essere spezzate.

11. Il procedimento accennato ci conduce dunque a costruire entro ogni sistema lineare irriducibile $|C|$ di genere $\pi > 1$, delle curve spezzate. Più precisamente, nel caso $\pi > 2$, esso ci permette di *costruire un sistema lineare di genere* $< \pi$ *e* $> 1$, *oppure di determinare una curva* C *spezzata in due componenti ellittiche secantisi in* $\pi - 1$ *punti.*

Si possono distinguere i seguenti casi:

1° caso. Una delle due curve C, componenti K, sia composta di due parti irriducibili $C_1$ e $C_2$.

L'altra C sarà pure spezzata ed in essa si potranno distinguere due parti (irriducibili o no) $C_4$, $C_3$, le quali associate rispettivamente a $C_1$ e $C_2$ comporranno due curve C'; si avrà dunque

$$|C_1 + C_2| = |C_3 + C_4| = |C|$$
$$|C_1 + C_4| = |C_2 + C_3| = |C'|.$$

Di qui si deduce

$$|C_1 + C_4| = |(C_1 + C_2)'| = |C_1 + C'_2|$$
$$|C_4| = |C'_2|,$$

e quindi

$$|C_3| = |C'_1|.$$

Pertanto le curve $C_1$, $C_2$ avranno il genere $\geq 1$, e ci troviamo quindi nelle condizioni dell'enunciato.

2° caso. Ciascuna delle due componenti C di K consti di più che due parti.

Distinguiamo qui varie ipotesi:

$\alpha$) Togliendo da una C qualcuna delle sue parti si ottiene una curva composta di genere $\geq 2$.

Allora questa curva appartiene ad un sistema contenuto parzialmente in $|C|$ ed avente perciò una dimensione $< \pi - 1$ e un genere $< \pi$.

$\beta$) In una delle componenti C di K si trova una parte $C_1$ ellittica.

Siccome la C è connessa, si avrà in essa un'altra parte X secante $C_1$ in $i > 1$, oppure se X ha il genere $> 0$, si ricade nell'ipotesi $\alpha$) perchè la curva

$$C_1 + X$$

ha il genere $> 1$.

Se invece $i = 1$ e X ha il genere 0, la curva

$$2C_1 + X$$

ha il genere due, ed appartiene ad un fascio di curve (riducibili) dello stesso genere.

$\gamma$) Ognuna delle componenti C di K consti di $n > 2$ parti di genere 0, e quindi di grado $-2$.

Fra queste parti consideriamone una $\theta$ che seghi le C generiche nel minimo numero di punti e sia 1 questo numero; sia poi $\varrho$ il genere della curva residua $C - \theta$, la quale segherà $\theta$ in $s + 2$ punti. Avremo

$$\pi = \varrho + s + 1.$$

Ora se $\varrho \geq 2$ si ricade nell'ipotesi $\alpha$); se invece $\varrho \leq 1$ deve essere

$$s \geq \pi - 2.$$

Ma poichè

$$ns \leq 2\pi - 2 \quad , \quad n \geq 3,$$

si deduce

$$\pi \leq 4,$$

cioè (supponendosi $\pi > 2$)

$$\pi = 4$$

o

$$\pi = 3.$$

Esaminiamo separatamente questi due casi.

Sia $\pi = 4$; allora ognuna delle componenti C di K consterà di $n = 3$ parti, ed ognuna di queste parti segherà le C in $s = 2$ punti.

Avremo

$$K = (C_1 + C_2 + C_3) + (C_4 + C_5 + C_6)$$

dove

$$|C_1 + C_2 + C_3| = |C_4 + C_5 + C_6| = |C|,$$

e sarà p. es.

$$|C_1 + C_2 + C_6| = |C_4 + C_5 + C_3| = |C'|,$$

e quindi si dedurrà

$$|C_6| = |C'_3|;$$

ma ciò significa che il genere di $C_3$ risulterà $> 0$ contro il supposto.

Sia invece $\pi = 3$; allora essendo $s \geq 1$, si avrà, per ciascuna componente C di K, $n \leq 4$, cioè $n = 3$ o $n = 4$.

Ma se una C consta di tre parti ($n = 3$) si può ripetere il ragionamento precedente, da cui segue che una delle suddette parti ha il genere $> 0$ (ipotesi $\alpha$) e $\beta$)).

Giova dunque supporre ciascuna C composta di quattro parti ($n = 4$), ed in tal caso si vede che ciascuna di queste sega in *un* punto le C generiche.

Si potrà porre

$$K = (C_1 + C_2 + C_3 + C_4) + (C_5 + C_6 + C_7 + C_8)$$

dove

$$|C_1 + C_2 + C_3 + C_4| = |C_5 + C_6 + C_7 + C_8| = |C|.$$

Ora si deve ottenere una C′: o riunendo tre parti (p. es. $C_1, C_2, C_3$) della prima C ad una ($C_8$) della seconda; o riunendo due parti (p. es. $C_1, C_2$) della prima C a due ($C_7, C_8$) della seconda.

La prima ipotesi porta

$$|C_8| = |C'_4|$$

cioè $C_4$ ha il genere $> 0$ e si ricade così nelle ipotesi $\alpha$) $\beta$).

Riferiamoci alla seconda ipotesi, cioè sia p. es.

$$|C_1 + C_2 + C_7 + C_8| = |C'|.$$

Si deduce

$$|C_7 + C_8| = |(C_3 + C_4)'|$$

e

$$|C_5 + C_6| = |(C_1 + C_2)'|.$$

Ora dunque le curve composte $C_1 + C_2$ e $C_3 + C_4$ avranno il genere 1 (lasciando da parte il caso in cui questo genere sia $> 1$ v. $\alpha$)), e si segheranno in due punti.

Se $C_1 + C_2$ avesse due punti comuni con una delle $C_3, C_4$ si ricadrebbe nell'ipotesi $\alpha$); dobbiamo dunque supporre che $C_1 + C_2$ seghi in un punto $C_3$ e in un punto $C_4$; ma allora (come nell'ipotesi $\beta$)) costruiamo tosto una curva di genere due

$$C_3 + 2(C_1 + C_2)$$

la quale appartiene ad un fascio di curve (riducibili) dello stesso genere.

12. La conclusione del procedimento spiegato innanzi è la seguente:

Se sopra la superficie F è dato un sistema lineare irriducibile $|C|$ di genere $\pi > 2$, si può costruire:

1) o un fascio di curve, riducibili o irriducibili, di genere due;

2) o un sistema lineare $|C_1|$ di genere $< \pi$ e $> 2$ contenuto in $|C|$; questo sistema si può ritenere irriducibile, perchè (n. 9) la riducibilità può tenere soltanto a delle eventuali componenti fisse, tolte le quali resta sempre un sistema (di genere $> 2$) contenuto in $|C|$ e però di dimensione $< \pi - 1$ e genere $< \pi$;

3) o infine una curva C spezzata in due componenti ellittiche con $\pi - 1$ punti comuni.

Ora nel caso 2) la riduzione si può proseguire partendo da $|C_1|$ anzichè da $|C|$, e si arriverà finalmente ad un fascio di genere due (caso 1)), oppure s'incontrerà ad un certo punto il caso 3).

Ma anche in questo caso si può spingere avanti la riduzione, tutte le volte che sia $\pi > 2$. Dimostriamo infatti che: *se in un sistema lineare irriducibile* $|C|$ *di genere* $\pi > 2$, *dato su* F, *vi è una curva spezzata in due componenti ellittiche, si può costruire su* F *un sistema lineare di genere* $< \pi$ *e* $\geq 2$.

Ritorniamo all'osservazione del n. 10. Entro il sistema $|2C| = |2C'|$ le serie $\infty^{2\pi-1}$ di curve spezzate $C + C$ e $C' + C'$ hanno delle curve comuni. Il numero di queste, ove sia finito, è uguale al prodotto degli indici delle due serie $\infty^{2\pi-2}$, quindi è $> 1$ per $\pi > 2$.

Pertanto si avranno più curve K (distinte o infinitamente vicine) comuni alle serie $C + C$ e $C' + C'$. Se non si vuol ricadere in uno dei casi di riduzione considerati nel numero precedente, si deve supporre che ciascuna delle suddette curve K si componga di due C spezzate alla lor volta in *due parti* ellittiche *irriducibili*. Così avremo una prima curva

$$K = C_1 + C_2 + C_1' + C_2',$$

le cui parti $C_1$, $C_2$, $C_1'$, $C_2'$ saranno curve ellittiche *isolate*, giacchè se p. es. $C_1$ variasse in un fascio la sua aggiunta $C_1'$ sarebbe spezzata.

Parimente troveremo una seconda curva

$$K = C_3 + C_4 + C_3' + C_4'$$

composta di 4 curve ellittiche isolate.

Ora occorre esaminare due casi:

1° caso. Le 4 curve nominate $C_1 + C_2$, $C_3 + C_4$, $C_1' + C_2'$, $C_3' + C_4'$, sieno *distinte*.

Allora anche le 8 componenti $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$, $C_1'$, $C_2'$, $C_3'$, $C_4'$, saranno fra loro distinte, giacchè se fosse p. es.

$$C_3 = C$$

le $C_2$, $C_4$ apparterrebero ad un fascio di curve ellittiche, mentre per ipotesi esse sono curve ellittiche isolate.

Ciò posto consideriamo le due coppie di curve $C_1 + C_2$, $C_3 + C_4$; esse si segano in

$$(C_1 + C_2)(C_3 + C_4) = 2\pi - 2$$

punti, quindi si avrà o

$$\pi - 1 > (C_1 C_3) > 0$$

oppure

$$(C_1 C_3) = 0 \quad \text{o} \quad (C_1 C_4) = 0 .$$

Nella prima ipotesi il sistema $|C_1 + C_3|$ avrà il genere $> 1$ e $< \pi$.

La seconda ipotesi è impossibile attesochè la curva ellittica $C_1$ è isolata; dimostriamo invero che dall'ammettere la suddetta ipotesi segue che $C_1$ appartiene ad un fascio. Infatti, essendo

$$(C_1 C_3) = 0$$

e supponendosi $C_3$ distinta da $C_1$, $C_1'$ e così $C_1$ da $C_3$, si considerino le due curve ellittiche composte

$$C_1 + C_3' \ , \ C_3 + C_1' ;$$

ciascuna di queste curve è aggiunta all'aggiunta dell'altra, quindi esse appartengono ad un medesimo fascio; ma poichè le $C_1$, $C_3'$ sono sconnesse, tutte le curve del fascio saranno del pari spezzate in due parti sconnesse, e queste parti varieranno in un fascio a cui appartiene $C_1$.

2° caso. Due fra le curve nominate, p. es. $C_1 + C_2$ e $C_3 + C_4$ sieno *infinitamente vicine*; sia p. es. $C_3$ infinitamente vicina a $C_1$ (e $C_4$ a $C_2$).

Consideriamo come innanzi le curve composte

$$C_1 + C_3' \ , \ C_1' + C_3 ;$$

esse apparterranno ad un fascio di curve ellittiche spezzate, e le parti variabili di queste genereranno un fascio contenente $C_1$; la conclusione è assurda giacchè per ipotesi $C_1$ è una curva ellittica isolata.

13. Confrontando le conclusioni dei nn. 11, 12 si deduce che:

Si può costruire sopra le superficie F un fascio di curve, riducibili o irriducibili, di genere due.

Sia $|C|$ questo fascio, e supponiamo dapprima che esso sia irriducibile, e possieda quindi due punti base A, B.

Entro il sistema $|2C|$ vi è *una* curva K composta ad un tempo di due C e di due $C'$; e si possono distinguere due casi:

1° caso: le due C componenti K sono distinte (e quindi non hanno parti comuni).

Allora in ciascuna C si possono distinguere due parti (irriducibili o no) le quali associate rispettivamente alle parti dell'altra compongono due $C'$; poniamo dunque

$$K = (C_1 + C_2) + (C_3 + C_4)$$

dove

$$|C_1 + C_2| = |C_3 + C_4| = |C|,$$
$$|C_1 + C_4| = |C_2 + C_3| = |C'|.$$

Si avrà allora

$$C_4 = C_2',$$
$$C_3 = C_1',$$

donde segue che le $C_1, C_2, C_3, C_4$ hanno il genere 1.

Notiamo ora che ciascuna delle parti suddette incontra la C generica in *uno* dei due punti base A, B del fascio $|C|$, che sono punti doppi della $g_2'$ di C.

Infatti le curve $C_1 + C_2$, $C_3 + C_4$ contengono la coppia AB, mentre le $C_1 + C_4$, $C_2 + C_4$ (aggiunte a C) hanno come punto doppio uno dei punti di quella coppia.

Ciò posto consideriamo il sistema

$$|L| = |C_1 + C| = |C_1 + C_1' + C_2'|$$

esso è una rete di curve di genere 3. Queste curve L incontrano la $C_2$ in *due* punti fissi P, Q, base per la rete; infatti il sistema

$$|C_1 + C_1' + C_2' - C_2| = |2C_1|$$

è un fascio di curve ellittiche; i punti P, Q sono le intersezioni di $C_2$ rispettivamente con $C_1$ e con $C_1'$.

Le curve generiche L si segano a due a due, fuori dei punti base P e Q, in due punti variabili, quindi le L sono iperellittiche, e su ciascuna L i punti P, Q sono punti doppi della relativa $g_2'$.

2° caso: le due componenti C di K coincidono.

Allora si ha nel fascio $|C|$ una curva C il cui doppio è anche il doppio di una $C'$. Perciò la C sarà spezzata e si otterrà una $C'$ da questa C tralasciandone una qualche parte $C_2$ e duplicandone una qualche altra parte $C_1$; avremo dunque

$$C = X + C_1 + C_2$$
$$C' = X + 2C_1$$

e quindi

$$C_2 = C_1';$$

sicchè le curve $C_1, C_2$ saranno di genere 1. Affinchè $X + 2C_1$ riesca di genere due occorre che la X sia una curva di genere 0 secante $C_1$ e così $C_2$ in *un* punto.

In questo caso consideriamo ancora il sistema

$$|L| = |C_1 + C| = |X + 2C_1 + C_1'|;$$

le L sono curve di genere 3 di una rete; esse sono iperellittiche poichè incontrano in due punti le curve ellittiche del fascio $|2C_1|$; inoltre passano tutte per due punti base P, Q, uno sopra la X, che ha come residuo il fascio $|2C_1| + C_1'$, ed uno sulla $C_1'$ che ha come residuo il fascio di genere 2 $|C'| = X + |2C_1|$.

In ciò che precede abbiamo supposto il fascio $|C|$ irriducibile, ma se esso si spezza si avrà

$$|C| = X + |2C_1| = X + |2C_1'$$

dove $C_1, C_1'$ sono curve di genere 1 ed X una curva di genere 0 che le sega in un punto. Allora il fascio aggiunto

$$|C'| = |X + C_1 + C_2|$$

è irriducibile e ricadiamo nell'ipotesi precedente (2° caso).

La conclusione è che:

*Sopra la superficie* F *si può costruire una rete di curve iperellittiche* L *di genere* 3, *secantisi a due a due in due punti variabili, ed aventi due punti base che, su ciascuna* L, *sono doppi per la relativa* $g_2'$.

14. Riferiamo proiettivamente la rete $|L|$ al piano rigato: si ottiene così la rappresentazione di F sopra un piano doppio con una curva di diramazione d'ordine 8, la quale si compone

1) di due rette $p, q$ corrispondenti ai punti P, Q;

2) e di una sestica $K_6$.

Cerchiamo di determinare le singolarità di $K_6$. Riferiamoci anzitutto al primo caso trattato nel numero precedente ove la rete

$$|L| = |C_1 + C_1' + C_2'| = |2C_1 + C_2|$$

ha i suoi punti base P, Q sopra $C_2$.

Alla curva $C_2$ corrisponderà nel piano il punto $O \equiv (pq)$, e poichè il fascio

$$|2C_1| = |L - C_1|$$

è costituito di curve ellittiche, le rette per O segheranno $p + q + K_6$ in quattro punti fuori di O; dunque O sarà un punto doppio per $K_6$.

Alla curva $C_2'$, che fa parte di *una* L $(= C_2' + C_1 + C_1')$ corrisponderà nel piano una retta $o$, non passante per O, ed i punti $M = (op)$, $N = (oq)$ saranno almeno doppi per $p + q + K_6$, cioè apparterranno a $K_6$. Questi punti debbono rappresentare le curve $C_1, C_1'$; ma poichè $|L - C_1| = |C_2' + C_1'|$ è un fascio di curve di genere due secanti $C_1$ in un punto $(C_1 C_2)$, si deduce che le rette per M debbono avere (oltre alle due intersezioni assorbite nel punto M doppio per $K_6 + p + q$) una intersezione con $K_6$ infinitamente vicina ad M; quindi M è triplo per $K_6 + a + b$, e doppio per $K_6$. Analogamente anche N è doppio per $K_6$.

Ora consideriamo sul piano doppio il fascio di coniche determinato da $2o$ e da $p + q$; esso rappresenta il fascio delle curve $|2C_2| = |2C_2'|$, e poichè queste curve sono ellittiche, la $K_6 + p + q$ avrà un punto triplo su $p$ infinitamente vicino ad M, ed un punto triplo su $q$ infinitamente vicino ad N. In altre parole $K_6$ avrà due tacnodi in M, N e $p, q$ saranno le rispettive tangenti tacnodali.

In conclusione, *la superficie* F *viene rappresentata sopra un piano doppio con una curva di diramazione di* $8^o$ *ordine, composta di*

1) *una sestica* $K_6$ *con due tacnodi* M, N *e un punto doppio nel punto di incontro delle rispettive tangenti tacnodali* $p, q$.

2) *e di queste due rette* $p, q$.

Alla *medesima rappresentazione* si arriva anche *nel secondo caso* del numero precedente, salvochè si presenta la *particolarità che uno dei tacnodi di* $K_6$ *cade infinitamente vicino ad* $O = (pq)$.

La nostra deduzione si trova confermata dall'analisi che occorre per invertire il resultato ottenuto.

Si abbia un piano doppio dotato di una curva di diramazione d'ordine 8, la quale si componga di una $K_6$ con un punto doppio O e di due rette $p, q$ per O; e si cerchi quali altre singolarità sono da imporre alla curva di diramazione affinchè risulti il genere

$$p_a = p_g = 0$$

e il bigenere

$$P = 1.$$

Si trova che bisogna dotare $K_6 + p + q$ di due coppie di punti tripli allineati con O; e si vede che queste coppie possonsi supporre appartenenti a $p, q$, altrimenti da $K_6$ si staccano una o due rette di diramazione per O, e si ricade in un caso particolare del precedente.

Le $p, q$ saranno dunque due tangenti tacnodali di $K_6$; prese insieme esse costituiranno la curva di ordine $8 - 6$ seconda aggiunta alla curva di diramazione $K_6 + p + q$, e quindi la curva bicanonica del piano doppio, ridotta in questo caso a due rette eccezionali $(P = 1)$.

Una curva canonica dovrebbe essere rappresentata da una retta passante per O, M, N; una tal retta non esiste $(p_g = 0)$ e il numero virtuale di tali rette è pure $p_a = 0$.

## IV.

## Tipo delle superficie F nello spazio $S_3$.

15. Vogliamo ora illuminare il resultato generale ottenuto, mostrando come le superficie F che costituiscono i primi esempi noti di superficie con $p_a = P_3 = 0$ $P_2 = 1$, si lascino rappresentare sul nostro piano doppio tipico, in modo semplice e diretto.

In particolare invertendo poi la rappresentazione della sestica $F_6$ passante doppiamente per gli spigoli d'un tetraedro, riconosceremo come la suddetta $F_6$ possa prendersi come tipo della famiglia delle superficie per cui $p_a = P_3 = 0$ $P_2 = 1$.

Si consideri dunque la superficie F che si è presentata dapprima, cioè la sestica $F_6$ di $S_3$ che passa doppiamente per gli spigoli di un tetraedro.

Trattiamo anzitutto il caso generale in cui si abbia un tetraedro proprio. Prendiamo allora uno spigolo $a$ di questo, e due altri spigoli $b, c$ incidenti ad $a$ e sghembi fra loro; le quadriche per $a, b, c$ segano su $F_6$ una rete di curve iperellittiche d'ordine 6 e di genere 3, che ha due punti base sullo spigolo $d$ opposto ad $a$; questa rete conduce alla rappresentazione sul piano doppio, con una curva di diramazione $K_6 + p + q$, indicato al numero precedente. I punti del piano doppio corrispondono alle coppie segate su $F_6$ dalle rette incidenti a $b, c$. Le immagini delle sezioni piane di $F_6$, sopra il piano doppio, sono curve del 6° ordine di genere 4, aventi in O un punto doppio, gli stessi tacnodi M, N di $K_6$ colle stesse tangenti tacnodali, ed infine dotate di un punto doppio variabile in corrispondenza alla coppia che si trova determinata sopra la sezione piana omologa dalla retta del piano incidente a $b, c$; le nominate curve del 6° ordine toccano la $K_6$ in 8 punti semplici.

16. Fermiamoci ora a trattare alcuni casi particolari notevoli della $F_6$.

Fra questi si presenta il caso (osservato dal sig. Castelnuovo) in cui il tetraedro diventa un angoloide, avente i sei spigoli doppi per la $F_6$. In questo caso limite vale ancora la costruzione precedente: si considerino tre spigoli $a, b, c$ dell'angoloide i quali non giacciano in una medesima faccia, ed i coni quadrici per $a, b, c$; questi segano su $F_6$ una rete di curve iperellittiche di genere 3 che conduce al solito piano doppio.

Infatti la costruzione indicata equivale alla seguente:

1) si proietti la $F_6$ dal punto 4plo, vertice dell'angoloide; si ottiene allora un piano doppio che ha una curva di diramazione di ordine 10, composta di quattro rette $a_1, a_2, a_3, a_4$ (le tracce dei piani dell'angoloide) e di una sestica $L_6$ passante doppiamente per i 6 vertici del quadrilatero formato da codeste rette;

2) si operi quindi una trasformazione quadratica del piano, prendendo come punti fondamentali tre vertici non allineati del quadrilatero suddetto, p. es. i vertici

$$A_{34} = (a_3 a_4) \ , \ A_{13} = (a_1 a_3) \ , \ A_{23} = (a_2 a_3) ;$$

allora la $L_6$ si trasforma in una $K_6$ che ha un punto doppio nel punto $A'_{34}$ corrispondente alla retta $A_{13} A_{14}$, due tacnodi nei punti $A'_{14}, A'_{13}$ omologhi alle altre due rette fondamentali, ed anche un punto doppio nel punto $A'_{12}$ omologo ad $A_{12} = (a_1 a_2)$; inoltre le due rette $a_1, a_2$ si trasformano in due rette di diramazione, tangenti tacnodali di $K_6$ passanti per $A'_{12}$.

Si potrebbero considerare ora altri casi particolari notevoli della sestica $F_6$; notiamo in ispecie il caso di degenerazione del tetraedro i cui spigoli sono doppi per $F_6$, che conduce al piano doppio particolare considerato nel numero precedente, ove uno dei due tacnodi M, N cade infinitamente vicino al punto doppio O di $K_6$. Questo caso si ottiene immaginando che due spigoli opposti $b, c$ del tetraedro, e quindi le le due coppie di facce per essi, si accostino indefinitamente; allora la $F_6$ ha una retta tripla $b$, una retta doppia $c$ infinitamente vicina a $b$ e sghemba con essa, ed infine altre due rette doppie sghembe fra loro e incidenti a $b, c$. La rappresentazione sul piano doppio si ottiene ancora particolarizzando la costruzione generale.

17. Senza fermarci più a lungo sul caso suddetto, esaminiamo un secondo esempio, cioè la superficie $F_{10}$ del 10° ordine di $S_5$, che si è presentata al sig. FANO (1), come immagine della congruenza delle rette principali di un sistema lineare $\infty^3$ di quadriche senza punti base in $S_3$ (2). Il sig. FANO ha osservato che la $F_{10}$ ha il genere $p_a = p_g = 0$ e il bigenere $P = 1$, ed ha una curva bicanonica d'ordine 0; essa contiene 20 cubiche piane, ed è facile vedere che fra queste si trovano delle terne di cubiche secantisi a due a due in un punto; una di queste terne appartiene quindi ad un sistema lineare $\infty^3$ di curve di genere 4, secantisi a due a due in 6 punti. Mercè un tale sistema la $F_{10}$ si rappresenta sopra una sestica $F_6$ di $S_3$, a sezioni di genere 4, dotata dunque di una curva doppia del 6° ordine; e poichè questa curva deve esser doppia per una superficie (biaggiunta) d'ordine 4, essa si compone dei 6 spigoli di un tetraedro. Ricadiamo così nel caso della sestica $F_6$ già esaminato innanzi. Del resto si potrebbe ottenere direttamente la rappresentazione di $F_{10}$ sul nostro piano doppio considerando due cubiche piane incidenti di $F_{10}$, e la cubica aggiunta ad una di queste; si ottiene così una curva spezzata di genere 3 che appartiene ad una rete di curve iperellittiche dello stesso genere.

18. Abbiamo veduto (nn. 15, 16) come la superficie del 6° ordine, $F_6$, passante doppiamente per gli spigoli di un tetraedro si rappresenti sopra un piano doppio la cui curva di diramazione si compone

1) di una sestica $K_6$ con due tacnodi $M$, $N$ ed un punto doppio $O$ intersezione delle tangenti tacnodali $p$, $q$;

2) e di queste rette $p$, $q$.

Viceversa prendiamo ad arbitrio la curva piana $p + q + K_6$ dotata delle singolarità indicate, si domanda se il piano doppio definito da questa curva presa come curva di diramazione può rappresentarsi sopra una sestica $F_6$ di $S_3$, passante doppiamente per gli spigoli di un tetraedro.

Un conto di costanti ci guida anzitutto ad una risposta affermativa.

Vi sono nello spazio $\infty^{25}$ superficie del 6° ordine $F_6$, passanti doppiamente per gli spigoli d'un tetraedro, e poichè si hanno $\infty^{15}$ omografie, le $F_6$ posseggono 10 invarianti assoluti. Questi invarianti si possono riguardare come i *moduli* da cui dipende la famiglia delle superficie rappresentabili sulle $F_6$, attesochè queste superficie non ammettono un gruppo continuo di trasformazioni birazionali in sè stesse.

Ora altrettanti moduli si riscontrano nella famiglia dei piani doppi sopra nominati, poichè la costruzione delle anzidette curve $p + q + K_6$ dipende da 18 costanti arbitrarie, ma $\infty^8$ curve trasformate omografiche l'una dell'altra conducono a piani doppi birazionalmente identici.

Questo conto di costanti basta già ad accertarci che la trasformazione della $F_6$ generale in un piano doppio con curva di diramazione $p + q + K_6$ deve essere invertibile.

(1) Accad. di Torino, Memorie, serie II, t. L (1901).

(2) Congruenza considerata per la prima volta da REYE, *Geometrie der Lage*, 3te Auflage, III, pag. 140.

Ora indicheremo brevemente in qual modo, data una superficie F riferita al piano doppio suindicato, possa compiersi la trasformazione di F in una sestica $F_6$ o in un caso particolare di questa.

A tale scopo basterà costruire sopra F un sistema lineare ($\infty^3$) di curve di genere 4, mercè cui la F si trasformi in una superficie del 6° ordine; allora questa avrà una curva doppia del 6° ordine, doppia per una superficie del 4° ordine e non appartenente ad una quadrica, cioè una curva doppia costituita dagli spigoli di un tetraedro (eventualmente degenere).

Ora la rappresentazione di F sul nostro piano doppio, pone in evidenza sopra F almeno un fascio irriducibile di curve C di genere 2, rappresentato dal fascio delle rette per un tacnodo (p. es. M) di $K_6$, distinto da O.

Cerchiamo di costruire su F una curva ellittica D che seghi le C in due punti diversi dai punti base di $|C|$; il sistema lineare $D + |C|$ sarà contenuto in un sistema irriducibile $\infty^3$ $|D + C|$ di curve di genere 4, secantisi a due a due in 6 punti; le curve del sistema segheranno sopra D le $\infty'$ coppie di una $g'_2$, e sopra una C generica le $\infty^2$ quaterne di una $g^2_4$ non composta colle coppie della $g'_2$, pertanto il sistema $|D + C|$ non avrà punti base e le curve di esso passanti per un punto non passeranno in conseguenza per altri punti; in conclusione $|D + C|$ condurrà alla trasformazione domandata della F in una $F_6$.

Si tratta dunque di costruire su F una curva ellittica D bisecante le curve C. E la soluzione del problema si ottiene riferendosi al piano doppio rappresentativo di F nel modo seguente.

Si consideri sul piano il sistema $\infty^{12}$ delle sestiche che hanno comuni con $K_6$ il punto doppio O, i tacnodi M, N e le tangenti tacnodali; entro questo sistema lineare si trovano due sistemi non lineari:

1) quello $\infty^4$ delle sestiche di genere 5, toccanti $K_6$ in 8 punti semplici, che rappresentano le curve del sistema lineare determinato su F dall'immagine di $K_6$;

2) quello $\infty^8$ costituito da tutte le possibili coppie di cubiche $K_3$ aggiunte a $K_6$.

I due sistemi hanno comuni delle coppie di $K_3$ quadritangenti a $K_6$; ogni $K_3$ rappresenta su F una curva composta di due parti ellittiche, e ciascuna di queste parti biseca le curve C di genere 2 omologhe alle rette per M, di guisachè può prendersi come curva D che sommata a C fornisce un sistema $|C + D|$ $\infty^3$, costituito di curve di genere 4.

È opportuno osservare in qual modo il sistema $|D + C|$ venga rappresentato sul piano doppio. Bisogna sommare alla nominata $K_3$ una retta per M contata due volte, e poi la retta $q$ (tangente tacnodale di $K_6$ in N) che è immagine di un punto base del fascio $|C|$, poi anche l'intorno del punto M che rappresenta l'altro punto base di $|C|$; si ottiene così un sistema $\infty^3$ di curve del 6° ordine aventi comuni con $K_6$ il punto doppio O, i due tacnodi M, N e le rispettive tangenti tacnodali, e dotate inoltre di un punto doppio variabile e di 8 contatti semplici con $K_6$.

Questo sistema $\infty^3$ di sestiche rappresenta il sistema delle sezioni piane di una superficie $F_6$ del 6° ordine, la quale ha in generale 6 rette doppie, spigoli di un tetraedro, in corrispondenza ai due tacnodi $M, N$ di $K_6$, al punto doppio $O$, alla retta $o = MN$, alla cubica $K_3$ quadritangente $K_6$ e ad un'altra cubica analoga che sommata alle rette (doppie) per $N$ condurrebbe al medesimo sistema di sestiche tangenti in 8 punti a $K_6$.

Giova osservare che alle rette del piano doppio corrispondono le sezioni di $F_6$ colle quadriche di una rete che passano per due spigoli opposti del tetraedro e per un terzo spigolo. Si vede quindi che la costruzione data innanzi conduce ad invertire direttamente la rappresentazione di $F_6$ sul piano doppio, ottenuta al n. 15.

È ovvio che si possono ottenere i casi particolari della $F_6$, indicati al n. 16, in corrispondenza ad opportune particolarizzazioni del piano doppio.

Così si ottiene la $F_6$ che passa doppiamente per gli spigoli di un angoloide tetraedro, se la $K_6$ ha un ulteriore punto doppio $R$ (oltre $O$, e i tacnodi $M, N$); allora le $\infty^3$ sestiche di genere 4 aventi gli stessi punti doppi di $K_6$, e tangenti ad essa in 6 punti, rappresentano il sistema delle sezioni piane di $F_6$.

Se invece la $K_6$ ha un tacnodo $N$ infinitamente vicino ad $O$, si ottiene la $F_6$ dotata di una retta tripla e di tre rette doppie, due (in generale) sghembe fra loro e incidenti alla retta tripla, la terza retta infinitamente vicina alla retta tripla e incidente all'altre due. Si possono anche sovrapporre le due particolarizzazioni se $K_6$ ha il tacnodo $N$ infinitamente vicino ad $O$, e contiene (oltre $O$, $M$, $N$) un altro punto doppio $R$, ecc.

Infine possiamo concludere:

*Ogni superficie coi generi*

$$p_a = P_3 = 0 \qquad P_2 = 1$$

*si può trasformare birazionalmente in una sestica passante doppiamente per gli spigoli d'un tetraedro, o in un caso particolare di questa superficie.*

## V.

## Gruppo discontinuo delle superficie F e proprietà dei sistemi di curve che vi si collegano.

19. Non intendiamo di proseguire sistematicamente lo studio delle superficie $F$ coi generi

$$p_a = P_3 = 0 \qquad P_2 = 1,$$

ma riferendoci alla sestica $F_6$, ottenuta come tipo di esse, ci proponiamo di metterne in luce alcune proprietà generali, di notevole interesse.

Ci riferiremo alla sestica $F_6$ che passa doppiamente per gli spigoli di un *tetraedro proprio* (tipo *generale*).

Consideriamo il fascio di quadriche passanti per un quadrilatero sghembo formato con due coppie di spigoli opposti $aa'$ e $bb'$ del tetraedro; si ottiene così su $F$ un fascio di quartiche ellittiche $|C|$.

Una C generica viene segata in due punti $A_1 A_2$ da $a$, e in due punti $B_1 B_2$ da $b$.

Le due coppie di punti $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ su C, non sono equivalenti; infatti se lo fossero, le due rette doppie $a$, $b$ sarebbero curve equivalenti su $F_6$, oppure si ridurrebbero equivalenti sommate a delle componenti di C spezzate (¹); ma le sole curve spezzate nel fascio $|C|$ sono in generale le $2c$, $2c'$, ove $c$, $c'$ designano le rette doppie costituenti la terza coppia di spigoli del tetraedro, e non si ha

$$a + c = b + c'.$$

Per la medesima ragione non sono equivalenti i multipli delle suddette coppie secondo un intero $r$ qualsiasi, $r(A_1 + A_2)$ ed $r(B_1 + B_2)$.

Ciò posto si designi con $z$ l'integrale ellittico di 1ª specie appartenente ad una C generica, con $2\varpi$, $2\varpi'$ i suoi periodi, e con $\alpha$, $\beta$ le somme dei valori di $z$ nei punti delle coppie $A_1 A_2$ e $B_1 B_2$. Sopra la C verrà determinata razionalmente una trasformazione birazionale

$$z' \equiv z + \alpha - \beta \quad (\text{mod. } 2\varpi, 2\varpi'),$$

trasformazione *non periodica* perchè non esiste alcun intero $r$ per cui sia

$$r\alpha \equiv r\beta \quad (\text{mod. } 2\varpi, 2\varpi').$$

Si deduce che:

*La superficie* F *ammette una trasformazione birazionale non ciclica in sè stessa, e quindi la serie infinita delle potenze di questa trasformazione, lascianti ferme tutte le curve ellittiche del fascio* $|C|$.

La superficie $F_6$ conduce così ad un nuovo esempio di superficie dotata di una *infinità discontinua di trasformazioni birazionali* in sè stessa, non contenuta in un gruppo continuo (infatti le superficie non razionali con un gruppo continuo hanno $p_a < 0$). Due esempî analoghi sono già noti; il primo fu segnalato dal sig. HUMBERT (Comptes rendus, 30 janvier 1897), il secondo dal sig. PAINLEVÉ (ibidem, 14 février 1897) (²).

20. È ovvio che il gruppo discontinuo formato dalla totalità delle trasformazioni di $F_6$ è più ampio di quello costruito innanzi che lascia ferme le curve del fascio ellittico $|C|$, giacchè si hanno su $F_6$ altri fasci di curve ellittiche analoghi a $|C|$, ed anzi se ne hanno infiniti.

Infatti se si prende su $F_6$ una curva ellittica isolata K, non appartenente a $|C|$ (p. es. la retta doppia $a$), questa viene trasformata in una *infinità discontinua di curve ellittiche isolate*, raddoppiando le quali si ottengono su $F_6$ *infiniti fasci di curve ellittiche*.

Consideriamo ora le infinite curve ellittiche isolate appartenenti ad $F_6$. Secondo un teorema del sig. SEVERI (³) (ora da lui stesso recentemente completato) tutte

(¹) Cfr. F. SEVERI, Annali di Mat., serie III, t. 12, n. 6.

(²) Cfr. PICARD e SIMART, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, t. II, p. 462.

(³) *Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica.* Mathem. Annalen, Bd. 62, 1906.

queste curve debbonsi poter ottenere per *somma* e *sottrazione* da un numero finito di curve costituenti una *base minima* sulla superficie, ed anzi è facile vedere qui che le curve della base debbono essere fra le suddette curve ellittiche isolate. Orbene una curva ellittica isolata di $F_6$ non può certo ottenersi *per somma* da altre curve, sicchè si conclude che:

*Sopra la superficie* $F_6$ *non è possibile costruire tutti i sistemi lineari operando soltanto per somma a partire da un numero finito di sistemi.*

Per quanto sappiamo, una tale circostanza non era stata fin qui riscontrata sopra nessuna *superficie regolare*; anzi alcune ragioni di analogia facevano sospettare che essa non fosse possibile, e cioè che si potesse estendere a tutte le superficie regolari un noto teorema del sig. Hilbert sulle forme, in virtù del quale « tutti i sistemi lineari di curve *sopra una superficie razionale* si ottengono *per somma* da un numero finito di sistemi ».

Ebbene si vede così che l'estensione del teorema di Hilbert non può aversi neppure per tutte le superficie regolari; che nella costruzione dei sistemi lineari su queste a partire da una base minima, è necessario (almeno in qualche caso) operare per sottrazione oltrechè per somma, come appunto accade nella costruzione di Severi.

21. Terminiamo questa Memoria segnalando all'attenzione degli studiosi alcune belle questioni concernenti la superficie $F_6$:

1) se la totalità delle sue trasformazioni birazionali formi un gruppo *propriamente* o *impropriamente discontinuo*;

2) come si distribuiscano su $F_6$ i sistemi lineari di curve di un dato ordine, ed in ispecie le curve ellittiche isolate di dato ordine;

3) quali particolarizzazioni portino nel gruppo le degenerazioni del tetraedro i cui spigoli sono doppi per $F_6$, ed in ispecie se possa accadere che il gruppo si riduca ad un numero finito di trasformazioni cicliche.