Enriques, Federigo

Sui fondamenti della geometria proiettiva

Rendiconti R. Ist. Lombardo Sci. e Lett. (II) **XXVII** (1894), pp. 550-567.

SUI

FONDAMENTI DELLA GEOMETRIA PROJETTIVA.

Nota

di FEDERIGO ENRIQUES

(Letta nell'adunanza del 12 luglio 1894)

A fondamento della geometria projettiva stanno due ordini di concetti, cui si collegano due gruppi di postulati. Appartengono al primo gruppo i postulati relativi alla retta ed al piano necessari per poter parlare di projezioni e sezioni, ecc., cioè i postulati della geometria di posizione (intesa in senso ristretto). Essi sono stati ampiamente discussi, sia in quanto occorre alla geometria di posizione dello spazio ordinario (Pasch, Peano, Lindemann (*)) sia (generalizzando) anche in quanto si riferisce a quella degli spazi S_n ad n dimensione (Veronese, Amodeo, Fano (**)); dimodochè le questioni che si riferiscono al nominato gruppo di postulati possono ritenersi esaurite.

Ma i postulati cui ho alluso non bastano a fondare tutta la geometria projettiva, bensì soltanto a stabilire dei teoremi relativi alle configurazioni, come quello dei triangoli omologici (supposto $n \geqq 3$), a parlare di gruppi armonici, ecc.

Quel complesso di postulati che permette di passare dai teoremi precedentemente accennati al teorema fondamentale della projettività o, ciò che è lo stesso, alla rappresentabilità dei punti dello spazio mediante coordinate projettive, si riferisce ad un ordine di concetti essenzialmente distinto dal primo, ordine di concetti che (a mio avviso) deve considerarsi come il fondamento di una *teoria* della *con-*

(*) PASCH, *Vorlesungen über neuere Geometrie.* Leipzig, 1882. — PEANO, *Principi di geometria logicamente esposti.* Torino, Bocca, 1889. — CLEBSCH-LINDEMANN, *Vorlesungen über Geometrie.* Leipzig, 1891.

(**) VERONESE, *Fondamenti di geometria a più dimensioni*, ecc. Padova, 1891. — AMODEO, Accad. di Torino. 1891. — FANO, *Giornale di Battaglini*, 1891.

nessione intesa in un senso più generale. Non vi è qui differenza di procedimento pel caso in cui si vogliano estendere le considerazioni a spazi aventi più di tre dimensioni, giacchè è essenzialmente della retta e della distribuzione dei punti su di essa che qui si tratta.

Di questo secondo gruppo di postulati e degli svolgimenti cui essi conducono si occupano anzitutto i lavori dei sigg. Klein, Darboux, De Paolis, Pasch (*), i quali danno dei fondamenti della geometria projettiva una trattazione pienamente rigorosa; in tali lavori però si fa uso del concetto (metrico) di grandezza di segmento, ciò che in un indirizzo puro sembrerebbe desiderabile evitare; d'altra parte (come si vedrà) si può ottenere con tale esclusione uno svolgimento più semplice e naturale del soggetto.

I sigg. Amodeo e Fano (**) occupandosi dei fondamenti della geometria projettiva negli iperspazi si sono proposti appunto l'esclusione di ogni concetto non projettivo; però l'indirizzo da essi seguito è alquanto diverso da quello a cui intendiamo di attenerci, specialmente per ciò che, mentre i due egregi autori si propongono di stabilire un qualunque sistema di ipotesi capace di definire uno spazio lineare al quale siano applicabili i resultati dell'ordinaria geometria, noi cerchiamo qui di stabilire i postulati desunti dall'intuizione sperimentale dello spazio che si presentano più semplici per definire l'oggetto della geometria projettiva (***).

In questo ordine di idee è chiaro che non sarebbe conveniente introdurre come postulato " l'esistenza sulla retta d'una serie armonica non rientrante in sè stessa „ seguendo la via indicata dal signor Fano, mentre possiamo accogliere i concetti relativi ai possi-

---

(*) Klein, *Math. Ann.*, Bd. VI, VII. — Darboux, *Math. Ann.* Bd. XVII. — De Paolis, *Memorie Accademia dei Lincei*, 1880-81. — Pasch., l. c.

(**) Cfr. i lavori citati. Della trattazione del sig. Veronese non è il luogo di parlare a questo proposito perchè in essa si consegue il fine più generale di stabilire i fondamenti di tutta la geometria e non soltanto della geometria projettiva.

(***) Non intendiamo per altro di introdurre di quei concetti intuitivi niente più che le loro relazioni logiche, sicchè la geometria così fondata può ancora ricevere una infinità di interpretazioni ove all'elemento " punto „ di essa si attribuisca un arbitrario significato. Ci sembra soltanto che l'origine sperimentale della geometria non debba essere dimenticata nella ricerca delle ipotesi su cui essa è fondata.

bili ordinamenti naturali dei punti della retta (o degli elementi d'una forma di 1.ª specie) che si sono presentati al signor Amodeo e (incidentalmente) anche al signor Fano. Non mi pare però che di tali ordinamenti si sieno enunciate *tutte* le proprietà occorrenti, cioè non è stato osservato come sieno legati l'uno coll'altro i vari ordini naturali dei punti d' una retta (mediante permutazioni circolari: cfr. §§ 3, 7).

In questo lavoro, riassunte rapidamente le nozioni preliminari della geometria di posizione e dopo avere sviluppato i concetti relativi ai nominati ordini naturali e alla disposizione circolare naturale che essi formano (§§ 3, 4, 5, 6), ammetto che ad esse competa il carattere projettivo (e basta introdurre un postulato più limitato: cfr § 7) e deduco che " in una forma di 1.ª specie il quarto armonico D dopo 3 elementi $A\ B\ C$ è distinto da essi e insieme a C separa $A\ B$ „. La prima parte di tale proposizione (che si suppone generalmente nella dimostrazione della seconda) non segue dal gruppo dei postulati della geometria di posizione (*).

Successivamente introduco il postulato della continuità (equivalente a quello di Dedekind) e ne traggo la dimostrazione d'un teorema relativo agli elementi uniti d'una corrispondenza biunivoca ordinata in una forma di 1.ª specie. Su questo teorema si fonda la dimostrazione del teorema fondamentale della projettività fatta secondo il concetto di Staudt (**). Un corollario del detto teorema permette anche di stabilire le note proprietà delle projettività ed involuzioni concordi e discordi, ecc.

Infine espongo alcune considerazioni (che credo nuove) relative alla dimostrazione a priori della legge di dualità nelle forme di 2ª specie.

(*) Spetta al sig. Fano l. c. l'acuta osservazione di tale lacuna nelle ordinarie trattazioni dei fondamenti della geometria projettiva, tantochè l'autore propone di introdurre come postulato " l'esistenza di un gruppo armonico composto di 4 punti distinti „: questo diventa per noi un teorema dopo avere introdotto i postulati relativi agli ordini naturali dei punti d'una retta.

(**) Cfr. in particolare le note aggiuntive del sig. Pieri alla traduzione italiana della *Geometrie der Lage*.

Prime proposizioni della geometria projettiva.

§ 1. I postulati relativi al piano e alla retta conducono alle seguenti proposizioni fondamentali che enunciamo, raggruppate, facendo uso delle denominazioni ordinarie di forme di 1.ª, 2.ª e 3.ª specie.

I. In una forma di 3.ª specie due elementi determinano *una* forma di 1ª specie cui appartengono.

II. In una forma di 3.ª specie un elemento ed una forma di 1.ª specie che non si appartengono determinano *una* forma di 3.ª specie a cui appartengono.

III. A questa forma di 2.ª specie appartiene sempre la forma di 1.ª specie determinata da due elementi di essa.

IV. In una certa forma di 1.ª specie vi sono infiniti elementi.

Segue che: In ogni forma di 1.ª specie vi sono infiniti elementi, in ogni forma di 2.ª specie infinite forme di 1.ª specie, ecc.

La proposizione IV non è subito necessaria perchè (come ha avvertito il signor Fano) lo sviluppo dalla prima parte della geometria di posizione è indipendente da tale ipotesi; ma occorrendo essa in seguito l'abbiano posta subito per semplicità.

Dalle proposizioni enunciate segue la possibilità di parlare di projezioni e sezioni, il teorema dei triangoli omologici, ecc., dal quale si deduce la definizione di gruppo armonico in una forma di 1.ª specie (col quadrangolo o quadrilatero, ecc.) in modo che sussistono i:

Teoremi. Tre elementi $A\ B\ C$ di una forma di 1.ª specie determinano *un* quarto elemento D (che può forse coincidere con uno dei tre) il quale compone con essi un gruppo armonico $(A\ B\ C\ D)$.

Ogni projezione o sezione di un gruppo armonico è un gruppo armonico.

La questione " se in un gruppo armonico il quarto armonico sia distinto dai primi tre " equivale all'altra " se i tre punti diagonali di un quadrangolo completo appartengano ad una retta o no ". La questione resta per ora insoluta sebbene la cosa rimanga decisa appena si sappia quello che avviene in un caso particolare (cfr. Fano l. c). La soluzione verrà data nel § 8.

§ 2. Due forme si diranno *riferite* fra loro se gli elementi dell'una si pensano associati a quelli dell'altra in una corrispondenza biunivoca. Se due forme di 1.ª specie vengono riferite fra loro *mediante un numero finito di projezioni e sezioni* esse si diranno *projettive.*

Si ha pel 2.° teorema del precedente paragrafo:

Se due forme di 1.ª specie sono projettive, ad ogni gruppo armonico dell'una corrisponde un gruppo armonico dell'altra.

Inversamente sorge la questione:

Se due forme di 1.ª specie sono riferite fra loro in modo che ad ogni gruppo armonico dell'una corrisponda un gruppo armonico dell'altra, saranno esse projettive?

Adottiamo provvisoriamente il nome di corrispondenza biunivoca *armonica* per quella (tra due forme di 1.ª specie) che conserva i gruppi armonici. Allora la soluzione affermativa della questione dipende, come è noto, dal teorema fondamentale "Una corrispondenza biunivoca armonica tra due forme di 1.ª specie sovrapposte, avente tre elementi *uniti* (coincidenti cogli analoghi) è *identica* „. Infatti di qui segue che " esiste al più una corrispondenza armonica tra due forme di 1.ª specie in cui a tre elementi dell'una corrispondono tre elementi dell'altra „ e poichè si costruisce facilmente una projettività soddisfacente a tali condizioni, segue che " tale projettività è unica, ossia è *la* corrispondenza armonica individuata dalle tre coppie di elementi omologhi „. ecc.

Dovremo dunque occuparci di stabilire il teorema fondamentale sotto la forma sopra enunciata. Ma per questo occorre invocare nuovi concetti ed i relativi postulati.

La disposizione circolare degli elementi
d'una forma di 1.ª specie. — Ordini, segmenti, ecc.

§ 3. *Postulato* V. In una (certa) forma di 1.ª specie a si può stabilire un *ordine* degli elementi in modo che:

1.°) dati due elementi B, C l'uno dei due p. es. B *precede* l'altro C (ed allora C *segue* B);

2.°) se B, C, D sono tre elementi della forma tali che nel dato ordine B precede C e C precede D, sempre B precede D;

3.°) esiste un *primo* elemento A che precede ogni altro;

4.°) tra due elementi B C che si susseguono nel dato ordine esiste sempre un elemento *intermedio* cioè precedente a C e conseguente a B (esistono quindi infiniti elementi intermedi fra B, C);

5.°) non esiste alcun *ultimo* elemento che consegua ad ogni altro nel dato ordine (*).

(*) Tale postulato si può desumere dal concetto intuitivo dell'ordine in cui si succedono i punti d'una retta ove si consideri come generata

Il post. V comprende il IV.

Indichiamo con (A) l'ordine degli elementi che si suppone stabilito in una data forma di 1.ª specie a.

Possiamo dedurre l'esistenza di un altro ordine (A') in a soddisfacente alle medesime condizioni enunciate ed avente ancora A come primo elemento: tale ordine si ottiene da (A) ove si convenga di dire:

1.°) che un elemento B diverso da A segue C in (A') se lo precede in (A) [e quindi C precede B in (A')];

2.°) che A precede in (A') [come in (A)] ogni elemento della forma.

L'ordine (A') così costruito si dirà *inverso* di (A): parimente (A) è inverso di (A').

In un altro modo possiamo dedurre da (A) (e analogamente da (A')) infiniti altri ordini della forma a soddisfacenti alle condizioni poste, ed in ciascuno assumere ad arbitrio un elemento B diverso da A come primo elemento. Basta infatti considerare l'ordine (B) di a che nasce colla convenzione seguente:

1.°) si chiami B primo elemento di (B);

2.°) se C, D sono due elementi ambedue seguenti B in (A) si dica che C precede D in (B) (o viceversa) se così avviene in (A);

3.°) se C, D sono due elementi ambedue precedenti a B in (A) si dica che C precede D in (B) (o viceversa) se così avviene in (A);

4.°) se C, D sono due elementi di cui l'uno precede B in (A) e l'altro lo segue, si dica che C segue D in (B) se lo precede in (A) (e viceversa).

L'ordine (B) che nasce da (A) nel modo indicato si dirà *dedotto da (A) mediante la permutazione circolare che porta A in B*. Analogamente da (B) si deduce (A) colla permutazione circolare che porta B in A.

Allora si può dimostrare:

1° *Lemma.* Se B, C sono due elementi di a diversi da A, operando su (A) la permutazione circolare che porta A in B, e sul nuovo ordine (B) la permutazione circolare che porta B in C, si ottiene in a l'ordine (C) che nasce da (A) colla permutazione circolare che porta A in C.

---

in uno dei due sensi da un punto mobile che la descrive partendo dal punto all'infinito; questo punto si considererà quindi come il *primo* nel detto ordine.

2.° *Lemma.* Se B è un elemento di a diverso da A, mediante la permutazione circolare che porta A in B applicata all'ordine $(A)'$ inverso di (A), si deduce da questo l'ordine $(B)'$ inverso di B.

Si considerino *tutti* gli ordini che nascono da (A) colle permutazioni circolari che portano A in un qualunque elemento di a, diremo che essi formano un *senso di disposizione circolare* della forma a, *generato* dall'ordine (A); diremo ancora che ognuno degli ordini così ottenuti *appartiene* al detto senso (oppure ha il detto senso, è *contenuto* in esso).

In forza del 1.° lemma il senso di disposizione circolare è generato egualmente partendo da ognuno degli ordini che gli appartiene.

In forza del 2.° lemma tutti gli ordini *inversi* a quelli del detto senso formano il senso di disposizione circolare generato dall'ordine $(A)'$ inverso di (A); tale senso si dirà *inverso* dell'altro.

L'insieme di tutti gli ordini componenti i due sensi della forma a si denominerà *disposizione circolare* di a. Così si può enunciare il

Teorema. Nella forma di 1.ª specie a esiste una disposizione circolare degli elementi che *ha due sensi*, l'uno *inverso* dell'altro, in modo che:

1.° dato un qualunque elemento B di a esiste *un* ordine appartenente ad uno dei due sensi ed avente B come primo elemento, il quale ordine soddisfa alle condizioni enunciate nel postulato V;

2.° due ordini degli elementi della forma aventi lo stesso senso si deducono l'uno dall'altro con la permutazione circolare che porta il primo elemento dell'uno al posto del primo elemento dell'altro.

3.° i due ordini aventi senso inverso e lo stesso primo elemento sono l'uno inverso dell'altro.

§ 4.° Per brevità designeremo col nome di "ordine della forma a" uno qualunque degli ordini appartenti ad una *fissata* disposizione circolare che gode le proprietà enunciate nel teorema del precedente paragrafo, la quale è possibile stabilire in forza del postulato V: inoltre con (A) designeremo uno degli ordini avente A come primo elemento.

Sieno $A\ B\ C\ D\dots$ tanti elementi della forma a. In un ordine (P) di questo, essi si susseguono secondo una certa permutazione $A\ B\ C\ D\dots$ Eseguendo una permutazione circolare su (P), gli elementi $A\ B\ C\ D\dots$ o si susseguono ancora nello stesso modo, o si permutano circolarmente (come segue dalla definizione): invertendo l'ordine (P) s'inverte soltanto la permutazione degli elementi $A\ B\ C\ D\dots$ o si inverte e si eseguisce su di essa una permutazione circolare (essendo P uno degli elementi del gruppo).

Diremo che più elementi $A\,B\,C\,D...$ *si susseguono* nell'ordine scritto (o costituiscono un gruppo di elementi *susseguentesi*) se esiste un ordine di a nel quale essi si susseguono nel modo indicato. Allora segue:

Tre elementi $A\,B\,C$ della forma di 1.ª specie a in un ordine arbitrario si susseguono sempre.

Dicendo *senso* della terna $A\,B\,C$ quello appartenente ad un ordine in cui $A\,B\,C$ si susseguono si ha pure:

Le terne $A\,B\,C$, $B\,C\,A$, $C\,B\,A$ hanno lo stesso senso e senso inverso alle terne $A\,C\,B$, $C\,B\,A$, $B\,A\,C$.

Un senso della forma di 1.ª specie a può individuarsi mediante il senso di una terna di elementi: parimente con $(A\,B\,C)$ può designarsi l'ordine di a in cui A è il primo elemento ed avente il senso della terna $A\,B\,C$, ossia quello dei due ordini (A) in cui B precede C.

Se $A_1\,A_2 ... A_n$ nell'ordine scritto costituiscono un gruppo di elementi susseguentesi, si susseguono anche negli ordini $A_2 ... A_n\,A_1, ... A_n\,A_1\,A_2$, $A_n ... A_2\,A_1, ... A_1\,A_n ... A_2$.

Se $A\,B\,C\,D$ sono 4 elementi susseguentesi si dirà che $A\,C$ *separano* $B\,D$: in forza del lemma precedente anche $B\,D$ separano allora $C\,A$, ecc., cioè la relazione del separarsi è una relazione reciproca fra le *coppie* $A\,C$, $B\,D$ (o $C\,A$, $D\,B$ o $C\,A$, $B\,D$, ecc.) E si ha il

Teorema. Un gruppo di 4 elementi $A\,B\,C\,D$ della forma di 1ª specie a può distribursi in *un* modo in due coppie che si separano.

§ 5. Sia fissato il senso (di disposizione circolare) della forma di 1ª specie a, e sieno fissati due elementi A, B, di essa; vi è un ordine (A) di a avente il detto senso; gli elementi che in esso non seguono B costituiscono una successione ordinata che si designerà col nome di *segmento ordinato* $\overline{A\,B}$ *avente il detto senso*: $A\,B$ si diranno gli *estremi* (*primo* e *secondo*) del segmento ordinato. Un elemento del segmento diverso dagli estremi si dirà *interno* ad esso.

Due elementi qualunque $A\,B$ della forma di 1.ª specie a sono gli estremi di due segmenti ordinati $\overline{A\,B}$ aventi senso inverso, ciascuno dei quali contiene infiniti elementi interni (post. V).

Un elemento C di uno dei due segmenti diverso da A, B (ossia interno al segmento) appartiene ad *uno* dei due segmenti: pertanto il segmento) $\overline{A\,B}$ che contiene C potrà designarsi con $\overline{A\,C\,B}$; esso è quello avente il senso della terna $A\,C\,B$ (§ 4).

Accanto ai due segmenti ordinati $\overline{A\,B}$ si possono considerare i due segmenti ordinati $\overline{B\,A}$: si ha allora:

I segmenti $\overline{ACB}$, $\overline{BCA}$ di cui l'uno ha come primo estremo il secondo estremo dell'altro e viceversa, contengono gli stessi elementi disposti in ordine inverso.

Dunque prescindendo dall'ordine si ha:

Due elementi AB della forma di 1.ª specie a sono gli estremi di *due* segmenti AB (*complementari*). Un elemento diverso da AB in a appartiene ad uno dei due segmenti.

Inoltre segue dalla definizione:

Due elementi H, K di a diversi da AB, appartengono o no ad uno stesso segmento AB, secondochè non separano o separano la coppia AB.

§ 6. Un elemento non appartenente ad un segmento AB dicesi *esterno* ad esso. Si ha il

Teorema. Se C è un elemento esterno ad un segmento AB in a, gli elementi interni del segmento sono quelli intermedi fra AB, nell'ordine (CAB) o (CBA).

Infatti gli elementi intermedi ad AB nell'ordine (CAB) sono gli stessi intermedi ad AB nell'ordine (ABC) nascente da (CAB) colla permutazione circolare che porta C in A.

Seguono i corollari:

1.° *Corollario.* Due elementi CD appartenenti ad un dato segmento AB, sono gli estremi di *un* segmento contenuto in AB.

2.° *Corollario.* Se AB, CD sono due segmenti senza estremi comuni:

a) o le coppie AB, CD si separano ed allora i due segmenti hanno comuni infiniti elementi interni;

b) o le coppie AB, CD non si separano ed allora i due segmenti non hanno elementi comuni, oppure tutti gli elementi dell'uno sono interni all'altro: nel primo caso ciascun segmento è contenuto nel complementare dell'altro.

3.° *Corollario.* Se AB, AC sono due segmenti con un estremo comune A, essi non hanno elementi interni comuni, oppure l'uno dei due segmenti è contenuto nell'altro.

Carattere projettivo della disposizione circolare naturale di una forma di prima specie. — Applicazione ai gruppi armonici.

§ 7. Se tra due forme di 1.ª specie a, b è stabilita una corrispondenza *biunivoca* ossia se le due forme sono *riferite* fra loro, ad ogni ordine degli elementi supposto stabilito in a *corrisponde* un analogo ordine in b. Ogni forma di 1ª specie b può essere riferita projettivamente alla particolare forma di 1ª specie a per cui abbiamo ammesso il postulato V: segue che (come in a) anche in ogni altra forma di 1.ª specie b si può considerare (come corrispondente di un ordine (A) di a) un ordine soddisfacente alle condizioni del postulato V, e generatore di una disposizione circolare (corrispondente di quella generata da (A)). Però può darsi (o almeno si può pensare) che mutando la projettività posta tra a, b, nascano in b due diverse disposizioni circolari corrispondenti ad una stessa di a: in tale ipotesi ponendo tra b a una projettività, si otterranno su a *due* disposizioni circolari una delle quali può coincidere con quella Ω da cui siamo partiti, ciascuna delle quali corrisponde alla Ω in una projettività su a.

Ora introduciamo il seguente:

Postulato VI. Fra le disposizioni circolari soddisfacenti alla condizioni del § 3, che si possono porre nella forma di 1ª specie a, ne esiste una che diremo *naturale* la quale viene trasformata in sè stessa da ogni projettività su a.

In altre parole: In a si può scegliere un ordine (naturale) soddisfacente al postulato V, il quale per una projettività posta in a subisca una permutazione circolare, o una permutazione circolare congiunta ad una inversione (*).

Non è strettamente necessario che la disposizione circolare naturale Ω in a debba essere unica, ma una volta fissata deve rimanere tale, ed in essa si considereranno gli ordini (naturali), i segmenti, ecc.

Allora per le precedenti considerazioni si ha il

Teorema. Sopra ogni forma di 1.ª specie b esiste *una* disposizione circolare *naturale* soddisfacente alle stesse condizioni ammesse per quella supposta in a, e corrispondente a questa in ogni projettività che interceda tra a, b.

Osservazione. Ove sembri più semplice (e forse presenta un vantaggio didattico) si può ammettere il postulato per *ogni* forma di 1ª specie ed ammettere, sempre per ogni forma, l'esistenza di *una* disposizione naturale avente carattere invariativo rispetto ad ogni projezione o sezione.

(*) Appunto a tale condizione soddisfa l'ordine dei punti della retta di cui si è parlato nella nota relativa al post. V, secondo si desume dall'intuizione.

Si osserverà come il postulato VI colleghi il V col gruppo dei postulati I II III, attribuendo ad una (certa) disposizione circolare in a il carattere projettivo.

§ 8. *Teorema.* Se $A\,B\,C$ sono *tre* elementi di una forma di 1.ª specie, il quarto armonico D dopo di essi è distinto da C e insieme a C separa $A\,B$ (*).

Suppongasi che a sia una retta, e quindi $A\,B\,C$ tre punti di essa; in modo analogo (correlativo) si darà la dimostrazione per gli altri casi, la quale potrà anche desumersi da questa mediante projezione.

In un piano per u si conducano per A, B rispettivamente due rette a, b, diverse da u e sia E il loro punto comune. Per C si conduca una retta diversa da u, $C\,E$, la quale seghi in F, F', rispettivamente a, b: sia M il punto comune alle rette AF', BF': i punti fin qui designati sono tutti distinti fra loro.

Ora su a si prenda un punto H che insieme ad F separi la coppia $A\,E$; sia H' la projezione di H su b da C, allora $H'\,F'$ separano $B\,E$: sia N il punto comune alle rette $F\,H', H\,F'$. I tre punti M, E, N, appartengono ad una retta, giacchè i triangoli $A\,H\,F'$, $B\,H'\,F$ (senza elementi comuni) sono omologici concorrendo in C le rette $A\,B$, HH', $F\,F'$. Segue che il punto D di u, quarto armonico dopo A, B, C, è l'intersezione di u colla retta $N\,E$: si deve provare che tale punto D insieme a C separa $A\,B$.

Anzitutto se N appartiene ad u è $N \equiv D$; allora projettando la u da H' sulla retta a, si ha

$$A\,B\,C\,D \,\overline{\wedge}\, A\,E\,H\,F,$$

onde C, D sono (in questo caso) distinti e separano $A\,B$.

Escluso il caso precedente si projetti dal punto N il gruppo $A\,E\,H\,F$ su u, e sieno $X\,X'$ le projezioni di $H\,F$ rispettivamente; si ha

$$A\,E\,H\,F \,\overline{\wedge}\, A\,D\,X\,X';$$

parimenti projettando da N su u il gruppo $B\,E\,H'\,F'$ si ha

$$B\,E\,H'\,F' \,\overline{\wedge}\, B\,D\,X'\,X:$$

segue che la coppia $X\,X'$ separa le coppie $A\,D, B\,D$, onde $A\,X\,D\,X'\,B$ o $B\,X\,D\,X'\,A$ sono punti susseguentisi.

(*) Che D sia distinto da A, B segue subito dalla definizione.

Ora dal punto F si projetti su u il gruppo $B\,E\,H'\,F'$; si avrà

$$B\,E\,H'\,F' \,\overline{\wedge}\, B\,A\,X'\,C,$$

onde $X'\,C$ separano $A\,B$: segue che $C\,E$ separano $A\,B$ (e sono distinti) $c\,d\,d$.

Corollario. Si noti che la dimostrazione nel caso particolare in cui si faccia cadere N in D (che sappiamo ora distinto da C) prova che se $A\,B\,C\,D$ è un gruppo armonico, è armonico anche $C\,D\,A\,B$ (Cfr Staudt).

Il postulato delle continuità.
Teorema sulle corrispondenze ordinate.

§ 9. Si abbia in una forma di 1.ª specie un segmento ordinato $\overline{A\,B}$; un elemento C interno ad esso determina due segmenti $\overline{A\,C}$, $\overline{C\,B}$ contenenti in $\overline{A\,B}$; attribuendo C ad uno solo di questi, nasce una *divisione* del segmento $\overline{A\,B}$ *in due parti* la quale gode delle seguenti proprietà:

1.ª Ogni elemento del segmento $\overline{A\,B}$ appartiene ad *una* delle due parti.

2.ª L'elemento A appartiene ad una parte (che può dirsi *prima*) B all'altra (*seconda*).

3.ª Ogni elemento della prima parte precede ogni elemento della seconda (nell'ordine $\overline{A\,B}$).

Per generalità si può considerare anche la divisione in parti godente le proprietà enunciate, cui dà luogo l'estremo A (o B) del segmento ove si consideri A (o B) come appartenente ad una parte e tutti gli altri elementi del segmento all'altra parte.

Alla divisione in parti del segmento $\overline{A\,B}$ operata mediante un suo elemento C (interno od estremo) nel modo indicato, spetta la proprietà peculiare seguente:

Esiste un elemento (che può appartenere all'una o all'altra parte) tale che ogni elemento precedente C appartiene alla prima parte, ogni elemento conseguente a C appartiene alla seconda.

Introduciamo ora il seguente:

Postulato VII (*della continuità*). Se un segmento ordinato $\overline{A\,B}$ di una forma di 1.ª specie è diviso in due parti in guisa che

1.º) ogni elemento del segmento $\overline{A\,B}$ appartenga ad *una* delle due parti;

2.°) l'estremo A appartenga alla *prima* parte, B alla *seconda*;

3.°) ogni elemento della prima parte preceda (in $\overline{AB}$) ad ogni elemento della seconda,

esiste *un* elemento C del segmento $\overline{AB}$ (che può appartenere all'una o all'altra parte) tale che ogni elemento di $\overline{AB}$ precedente a C (ove esista) appartiene alla prima parte, ed ogni elemento di $\overline{AB}$ conseguente a C (ove esista) appartiene alla seconda.

Osservazione. Ammessa l'esistenza di un siffatto elemento C segue che esso è unico.

Basta ammettere il postulato per la retta e si deduce (mediante projezione) per le altre forme di 1.ª specie.

§ 10. Una corrispondenza biunivoca tra due forme di 1.ª specie (distinte o sovrapposte) si dirà *ordinata* quando alla disposizione circolare naturale dell'una fa corrispondere la disposizione circolare naturale dell'altra, e quindi ad ogni segmento un segmento, ecc.

La projettività è una corrispondenza biunivoca ordinata.

Una corrispondenza biunivoca ordinata in una forma di 1.ª specie dicesi *concorde* o *discorde* secondochè fa corrispondere a sè stesso ognuno dei due sensi della forma o li scambia tra loro. Nel primo caso essa fa subire una permutazione circolare ad ogni ordine naturale (o lo lascia immutato); nel secondo gli fa subire una permutazione circolare congiunta ad una inversione o soltanto una inversione.

In una corrispondenza biunivoca in una forma di 1.ª specie dicesi *unito* un elemento che coincide col corrispondente. Un elemento unito per una corrispondenza è unito anche per l'inversa.

Teorema. Se in una forma di 1.ª specie è data una corrispondenza biunivoca ordinata in cui ad un segmento AB corrisponda un segmento $A'B'$ contenuto nel primo, esiste in questo segmento $A'B'$ (e quindi in AB) un elemento unito M siffatto che ad esso non preceda alcun elemento unito nel segmento ordinato $\overline{AB}$.

Trattandosi qui costantemente di segmenti contenuti nel dato segmento AB li designeremo denotandone solo gli estremi.

Escludiamo che l'elemento A coincida con A' (sia unito): in tale ipotesi l'enunciato sarebbe senz'altro verificato ponendo $M \equiv A$.

Distinguiamo due casi.

1.° *caso.* La data corrispondenza biunivoca sia concorde, ossia A' preceda B' in $\overline{AB}$.

Consideriamo la seguente partizione del segmento ordinato $\overline{AB}$.

a) Poniamo nella prima parte un elemento (H) se esso ed ogni altro elemento che lo precede in $\overline{AB}$, precede al corrispondente. Almeno A appartiene alla prima parte.

b) Poniamo nella 2.ª parte ogni altro elemento (K), cioè ogni elemento estremo d'un segmento $\overline{AK}$ al quale appartenga qualche elemento (diverso o no da K) non precedente l'omologo (ossia unito o conseguente ad esso). Almeno B appartiene a tale seconda parte.

L'indicata partizione soddisfa alle tre ipotesi richieste per l'applicabilità del postulato VII: esiste dunque in $\overline{AB}$ un elemento M a cui ogni H precede ed ogni K consegue. Ad M non precedono elementi uniti; dico che esso è unito, ciò che (pel 1.º caso) dimostra il teorema.

Sia M' l'omologo di M e suppongasi dapprima che esso preceda M (in $\overline{AB}$). Poichè la corrispondenza considerata è concorde, ogni elemento H interno al segmento HM consegue al corrispondente H' ciò che contrasta all'ipotesi *a*).

All'opposto M' consegua ad M.

Ogni elemento interno al segmento MM', come l'estremo M, precede l'omologo (poichè questo segue ad M'); poichè altrettanto avviene per gli elementi precedenti ad M, ogni elemento interno al segmento MM' è un elemento H contro l'ipotesi.

2.º *caso*. La data corrispondenza sia discorde, ossia A' segua B' in $\overline{AB}$.

Consideriamo la seguente partizione del segmento ordinato $\overline{AB}$:

a) Poniamo nella 1.ª parte un elemento (H) se precede l'omologo H' (in $\overline{AB}$). Almeno A è un elemento H.

b) Poniamo nella 2.ª parte un elemento (K) se non precede l'omologo K', e quindi è unito o segue K' (in $\overline{AB}$). Almeno B è un elemento K.

Allora (poichè la data corrispondenza è discorde) la partizione del segmento $\overline{AB}$ soddisfa alle condizioni richieste per l'applicabilità del postulato VII.

Esiste un elemento M in $\overline{AB}$ tale che ogni elemento precedente M è un H, ogni elemento conseguente ad M è un K. Ad M non precedono elementi uniti. Dico che M è unito, donde segue il teorema.

Anzitutto si osservi che ogni elemento M (di $\overline{AB}$) precedente ad M ha l'omologo H' nel segmento $\overline{MB}$: infatti se H_1 è un elemento intermedio ad HM (in $\overline{AB}$), ed H'_1 è l'omologo di H_1, deve H' seguire H'_1 e quindi H_1, onde H' consegue a tutti gli elementi che precedono M. Analogamente si prova che ogni elemento K seguente ad M (in $\overline{AB}$) ha l'omologo K' nel segmento $\overline{AM}$.

Ora sia M' l'omologo di M e suppongasi precedente ad M. Allora M è distinto da A e quindi A' da M': il segmento $A' M'$ avendo l'estremo M' interno ad AM ha con esso infiniti elementi interni comuni (§ 6), uno di questi H' (precedente ad M) è l'omologo di un elemento H di AM ciò che è assurdo.

Parimente si prova l'assurdità che M' segua M. Risulta così dimostrato il teorema.

§ 11. Riferendoci alla dimostrazione del 2.° caso del teorema contenuto nel § precedente (corrispondenza discorde) l'elemento unito M costruito nel segmento $\overline{AB}$, appartiene pure al segmento $A' B'$ ed è interno ad esso, poichè A', B' non sono elementi uniti: inoltre non vi sono in $\overline{AB}$ altri elementi uniti per la corrispondenza, giacchè un elemento che precede M in $\overline{AB}$ ha l'omologo dopo M e viceversa.

Il teorema si può anche applicare al segmento ordinato $\overline{A' A B B'}$ complementare di quello $\overline{A' B'}$ contenuto nel dato $\overline{AB}$; si prova così l'esistenza di *un* elemento unito interno a tale segmento, ed interno al segmento $\overline{AB}$ contenuto in esso.

La data corrispondenza discorde ha dunque *due* elementi uniti se esiste in essa un segmento (che può considerarsi ordinato) cui corrisponda un segmento interno. Ma questo fatto è sempre possibile di realizzare per ogni corrispondenza ordinata discorde in una forma di 1.ª specie. Invero si noti anzitutto che una tale corrispondenza non è *identica* e quindi si può considerare un elemento A distinto dal suo omologo A'. Ad A' corrisponderà un elemento A'' che può coincidere con A, ma non con A': in ogni caso esiste un segmento $\overline{AA'}$ contenente A'' che contiene il segmento corrispondente $\overline{A' A''}$, giacchè i due segmenti debbono avere senso inverso.

Si deduce il

Teorema. — In una corrispondenza biunivoca discorde in una forma di 1ª specie, esistono *due* elementi uniti.

Osservazione. — Se $M N$ sono i due elementi uniti, a ciascun segmento MN corrisponde il complementare. Accadrebbe l'opposto se M, N fossero due elementi uniti di una corrispondenza concorde.

Il teorema fondamentale della projettività.

§ 12. In una forma di 1ª specie si consideri la corrispondenza biunivoca che intercede fra i conjugati armonici rispetto a due elementi fissi, uniti, MN. Tale corrispondenza è projettiva come si prova eseguendo opportunamente la costruzione dell'omologo di un elemento mediante il quadrangolo o quadrilatero, ecc. Poichè due elementi conjugati armonici rispetto ad MN separano MN (§ 8), nella projettività nominata ad un segmento MN corrisponde il complementare onde la projettività stessa è discorde (§ 11 *Osservazione*).

Se quindi AA', BB' sono due coppie di elementi conjugati armonici rispetto ad MN, esse non si separano. Segue il:

Teorema. — Date in una forma di 1.ª specie due coppie di elementi che si separano non esiste alcuna coppia che le separi armonicamente entrambe.

§ 13. In una forma di 1.ª specie u si abbiano due coppie di elementi AB, CD che non si separino: esiste allora un segmento $ACB \equiv ADB$ che contiene C, D. Nella forma u si consideri la corrispondenza biunivoca che intercede fra i conjugati armonici YY' di uno stesso elemento X rispetto alle coppie AB, CD: tale corrispondenza è il prodotto di due projettività e quindi è una projettività, onde è ordinata. In essa al segmento ACB corrisponde un segmento interno, giacchè mentre Y varia nel segmento ACB il conjugato X rispetto ad AB è fuori di esso, e quindi Y' conjugato di X rispetto a CD appartiene al segmento CD contenuto in ACB. Si può dunque applicare il teorema del § 10 e si deduce l'esistenza d'un elemento Y interno al segmento ACB (ed a CD) che coincide coll'omologo Y', ossia che ha lo stesso conjugato armonico rispetto alle coppie AB, CD.

Si può dunque enunciare il

Teorema. — Date in una forma di 1.ª specie due coppie di elementi che non si separano esiste una coppia (almeno) che le separa armonicamente entrambe.

Seguirà poi che tale coppia è unica.

§ 14. Possiamo ora stabilire il seguente *teorema fondamentale* (cfr. il § 2).

In una forma di 1.ª specie una corrispondenza biunivoca armonica dotata di tre elementi uniti è identica.

La dimostrazione si farà per assurdo. Supponga si dunque che in una forma di 1.ª specie u esista una corrispondenza biunivoca armonica dotata di tre elementi uniti A, B, C, nella quale ad un certo elemento P corrisponda un diverso elemento P'.

Anzitutto si può stabilire che la corrispondenza armonica è ordinata, cioè che se due elementi H, K di u si susseguono nell'ordine naturale $(A\,B\,C)$ lo stesso avviene per gli elementi omologhi $H'\,K'$. Infatti nell'ipotesi opposta si troveranno due coppie di elementi che non si separano (come p. es. $A\,H$, $B\,K$) cui corrispondono due coppie (p. es. $A\,H'$, $B\,K'$) che si separano; ma allora (§ 13) vi sarebbe una coppia di elementi che separa armonicamente entrambe le prime due coppie mentre non avverrebbe lo stesso per le coppie corrispondenti: ciò contrasta all'ipotesi che la data corrispondenza sia armonica.

Stabilito questo punto, si ha che ad ogni segmento di u corrisponde un segmento, così se p. es. P cade nel segmento $\overline{A\,B}$ che non contiene C, allo stesso segmento appartiene anche P'. Suppongasi che P' segua P nell'ordine $\overline{A\,B}$ del segmento. (Queste ipotesi non limitano la generalità della dimostrazione.) Al segmento $\overline{P\,B}$ (nel dato $\overline{A\,B}$) corrisponde il segmento $\overline{P\ B}$ interno ad esso, quindi (§ 10) vi è in esso un elemento unito M (che può anche coincidere con B) tale che in $\overline{P\,M}$ non vi sono elementi uniti interni.

Analogamente considerando la corrispondenza inversa si prova l'esistenza entro $P\,A$ d'un elemento unito N (che può essere anche A) tale che in $P'\,A$ non cadono elementi uniti.

Segue l'esistenza d'un segmento $M\,N$ non contenente C i cui estremi sono uniti, al quale non appartengono elementi uniti interni. Invece dovrebbe essere unito il conjugato armonico di C rispetto ad $M\,N$. Così si ottiene l'assurdo, come si era enunciato.

Considerazioni sulla legge di dualità.

§ 15. Le proposizioni fondamentali I, II, III, IV, V, VI, VII bastano a fondare tutta l'ordinaria geometria projettiva; esse sono state enunciate sotto tal forma da fare apparire immediatamente la *legge di dualità nello spazio*. Essa segue dall'osservare che in quelle proposizioni si parla soltanto di elementi e di forme, e di questi elementi si può fissare indifferentemente che sieno punti o piani.

Non così immediatamente si può dedurre la dimostrazione della *legge di dualità nel piano* (o nelle forme di 2.ª specie).

Questa legge si suole in generale stabilire enunciando esplicitamente le proposizioni fondamentali della geometria piana (le quali seguono dalle nominate) ed osservando che in queste è possibile lo scambio dell'elemento " punto „ coll'elemento " retta „: tra queste proposizioni occorre allora porre il teorema dei triangoli e dei trilateri omologici (poichè esso si dimostra ricorrendo ad una costruzione nello spazio).

Ma, così facendo, la geometria projettiva del piano dovrebbe svolgersi nel seguito senza più far uso di costruzioni dello spazio, le quali (quando pure non necessarie) riescono, come è noto, utilissime. Perciò è conveniente di stabilire la legge di dualità nel piano seguendo un'altra via. Bastano per ciò le considerazioni seguenti:

Tutte le proprietà di figure geometriche piane, dedotte dai postulati I, II, III, IV, V, VI, VII (postulati della geometria projettiva), hanno *carattere projettivo* cioè si traducono in proprietà delle figure projezioni di esse in una stella (prospettiva al piano). Infatti un siffatto carattere compete ai detti postulati e quindi anche ad ogni teorema dedotto da essi, equivalente ad una trasformazione logica dei postulati stessi.

Allora mediante una projezione ogni teorema concernente una figura piana si traduce in un teorema della geometria nella stella; all'elemento punto del piano viene a corrispondere l'elemento " retta „ della stella. D'altra parte dalla geometria della stella di raggi si può passare, per dualità nello spazio, alla geometria nel piano rigato: si ottiene così il passaggio dalla geometria del piano punteggiato a quella del piano rigato.

Si può dunque enunciare la legge di dualità seguente:

Insieme ad ogni teorema della geometria piana fondato sui postulati I, II, III, IV, V, VI, VII, sussiste un teorema *correlativo nel piano* che si deduce dal primo collo scambio delle parole " punto „ e " retta „ e cogli scambi di parole che ne derivano di conseguenza.

Estratto dai *Rendiconti* del R. Istituto Lombardo,
Serie II, Vol. XXVII, Fasc. XV-XVI.

Milano, 1894. — Tip. Bernardoni, C. Rebeschini e C.